NUMERO: 848

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Corallini

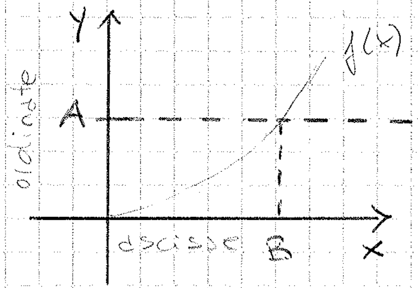
MATERIA: Analisi Matematica I + Eserc.

Prof. Pandolfi

MATEMATICA

Lezione 8

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$



L'idea è quella che fissato un punto B, in ogni x che appartiene ~~alla~~ alla semiretta $x > B$, si avranno dei punti della funzione $f(x)$ maggiori di A

Fissato un valore $\forall A$ $\exists B$ $x > B \Rightarrow f(x) > A$

Questa relazione deve mantenersi vera per ogni valore di A

Scriviamo la definizione completa:

il valore di B definirà la semiretta

$$\forall A > 0 \; \exists B \geq 0 \mid \forall x \in \text{dom} f, \; x > B \Rightarrow f(x) > A$$

o B

non serve utilizzare valori di A negativi in quanto devo dimostrare che la relazione si mantiene esatta per valori sempre più arbitrariamente grandi.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

la funzione tende verso il basso

semiretta (x) destra

$$\forall A > 0, \; \exists B \geq 0 \mid \forall x \in \text{dom} f, \; x > B \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

la funzione tende verso l'alto

semiretta (x) sinistra

$$\forall A > 0, \; \exists B \geq 0 \mid \forall x \in \text{dom} f, \; x < -B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall A > 0, \; \exists B \geq 0 \mid \forall x \in \text{dom} f, \; x < -B \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

Devo verificare se $\forall A > 0 \; \exists B \geq 0 \mid \forall x \in \operatorname{dom} f, x > B \Rightarrow 2^x > A$

Risolvo $2^x > A$:

$x > \log_2 A$

se $x > \log_2 A \Rightarrow 2^x > A$ mi suggerisce di prendere

$B > \log_2 A$

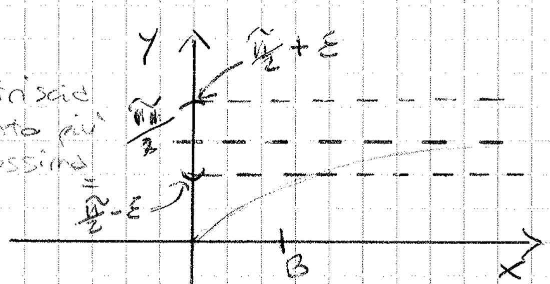
LIMITE FINITO ALL'INFINITO

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ → numero reale

facciamo un esempio:

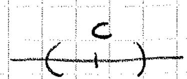
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Più la striscia è stretta tanto più si ha un'approssimazione di $\frac{\pi}{2}$



Per x che diventa arbitrariamente grande $f(x)$ si avvicina a $\frac{\pi}{2}$.

Entra in gioco il concetto di intorno

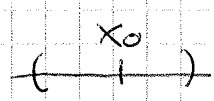


Partendo dall'asse y e fissando un intorno di $\pi/2$ deve avvenire che i valori di $f(x)$ devono appartenere all'intorno di centro $\pi/2$ ed un certo raggio.

~~Abbiamo un'ampiezza dell'intorno~~

Dobbiamo stabilire l'ampiezza dell'intorno e quindi impostare un valore ε in modo tale che $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < f(x) < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Possiamo quindi scrivere $-\varepsilon < f(x) - \frac{\pi}{2} < \varepsilon$. Ciò vuol dire che $\left| f(x) - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$



$|x - x_0| < \delta$

Per dire che considero l'intorno tranne il punto x_0 devo aggiungere $|x - x_0| < \delta$ un maggiore stretto di zero

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

int. puntato

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

Limite infinito per $x \to x_0$

$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in dom\, f,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$

misura dell'intorno sull'asse x

l'intorno è per forza positivo

esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in dom\, f,\ 0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > A$

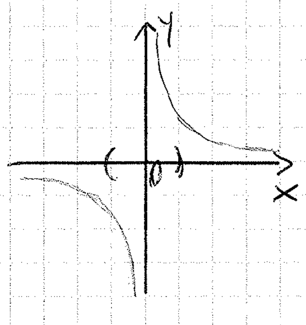
devo trovare il δ quando viene assegnato A

$\frac{1}{x^2} > A$ prendo il reciproco di ambo i membri:

$x^2 < \frac{1}{A}$ ciò implica che il $|x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$

tengo in considerazione $x > 0$ e $x < 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$



Non è vero che per $x \to 0$ la funzione tende a infinito. Bisogna studiare prima il limite destro ed il limite sinistro

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

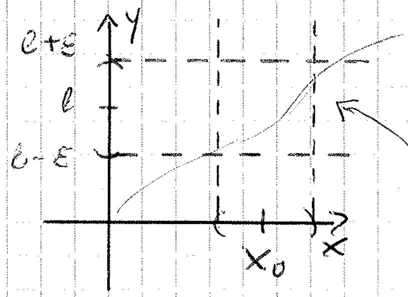
è sparito il valore assoluto

$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in dom\, f,\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > A$

$x_0 < x < x_0 + \delta$ ovvero consideriamo gli $x \in$ all'intorno destro della funzione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 268

Definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$



Per dare la definizione dobbiamo considerare ℓ come un valore assegnato.

Il grafico deve appartenere al rettangolo

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \mid x \in \text{dom} f, \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

ε → determina l'intorno di ℓ

δ → intorno di x_0

Verifichiamo se nell' $\boxed{1}$ il $\lim_{x \to 0} 1 + x^3 = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cancel{1} + x^3 \cancel{-1}| < \varepsilon$

→ $|x^3|$

Fissato ε esiste un $\delta > 0$ in modo che $0 < |x| < \delta$, $|x^3| < \varepsilon$?

$|x| < \sqrt[3]{\varepsilon} \Rightarrow |x|^3 < \varepsilon$ quindi $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ oppure un qualunque valore minore

Verifichiamo se ~~a~~ nell' $\boxed{2}$ è verificato il $\lim_{x \to 0} \text{sgn}(x^2) = 1$

ma dall'intorno certo del punto 0 ma del suo intorno

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x, x \text{ dom} f : 0 < |x| < \delta \Rightarrow |\text{sgn}(x^2) - 1| < \varepsilon$

→ abbiamo 1-1 cioè 0

$0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < \varepsilon$

→ sempre vera perché $\varepsilon > 0$

Ogni δ è accettabile

Il lim per $x \to 0$ vale 1

*

Nell'esempio $\boxed{2}$ ~~succede una cosa diversa, perché~~ ho preso la funzione $\text{sgn}(x^2)$, ne ho calcolato il limite ed esso prescinde dal comportamento nel punto. Guardando la funzione solo nell'intorno, escluso il punto ~~0~~ il limite vale 1, ma nella funzione vale 0

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

che risulta continuo in x_0 infatti

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \tilde{f}(x_0)$$

Tornando all'esempio $\boxed{3}$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lambda & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Limiti unilateri e limite

Il limite destro ed il limite sinistro vengono anche chiamati unilateri.

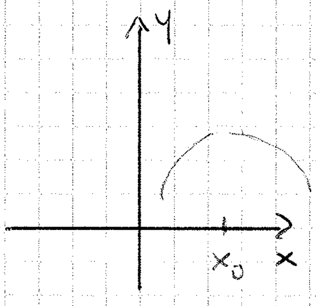
Il teorema che ~~unisce~~ lega il limite destro ed il limite sinistro con il limite e':

Condizione necessaria sufficiente affinche' sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

con ($\lambda \in \mathbb{R}$ oppure $\lambda = +\infty$ oppure $\lambda = -\infty$) e' che sia:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda$$

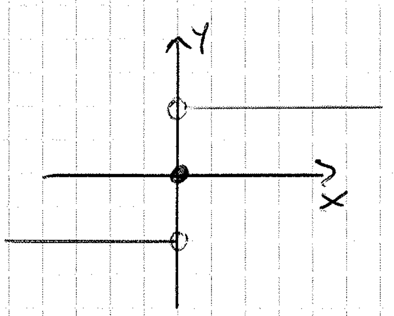


Se io ho x_0 e vado a calcolare il limite per ~~x_0~~ $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$ ~~se~~ e questi due valori coincidono allora posso parlare del limite per $x \to x_0$

Supponiamo che il $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ mi chiedo se e' vero che esiste $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

Il fatto che il $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ implica che $\forall x > 0\ \exists \delta \mid \forall x$, $x \in \operatorname{dom} f$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ovvero la condizione è valida in tutto l'intorno tranne che nel punto x_0

funzione sgn x



$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

$\operatorname{sgn}(0) = 0$

sgn x non è continua in $x=0$ né a destra né a sinistra. Il salto in $x=0$ è uguale a 2

Punti di discontinuità di seconda specie

Un punto di discontinuità che non sia eliminabile o di prima specie.

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ soddisfa

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di 2ª specie.

La funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$

quindi $x_0 = 0$ è un punto di disc. di 2ª specie.

---

f da mettere nello schema

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$
- f definita in x_0 — $f(x_0) = \ell$ — def. di funzione continua
- f " in x_0 — $f(x_0) \neq \ell$ — def. di discontinuità eliminabile
- f non è definita in x_0 — prolungabile per continuità.

$\underbrace{\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ però esiste } \lim_{x \to x_0^+} f \neq \lim_{x \to x_0^-} f}$

discontinuità di prima specie o salto.

Tutti gli altri casi li chiamiamo discontinuità di seconda specie.

questo non è possibile.
Quindi abbiamo dimostrato per assurdo che se il limite esiste è unico.

Teorema di permanenza del segno

Supponiamo che f ammetta limite λ per $x \to \gamma$
Se $\lambda = \ell > 0$ oppure $\lambda = +\infty$ esiste un intorno $I(\gamma)$ di γ tale che f è strettamente positiva in $I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$
perché il lim prescinde sempre dalla funzione nel punto
Analogamente se $\lambda = \ell < 0$ oppure $\lambda = -\infty$, esiste un intorno $I(\gamma)$ di γ tale che f è strettamente negativa in $I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$

Esempio

$\boxed{\ell > 0}$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$

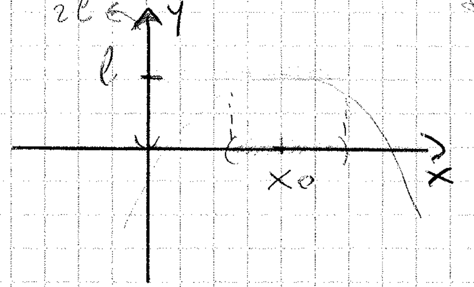
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x,\ x \in \text{dom} f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Una scelta possibile per $\varepsilon > 0$ è $\varepsilon = \ell$ dato che ℓ per ipotesi è > 0. Quindi:

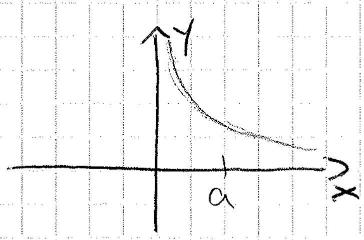
$\exists \delta > 0 \ \forall x \in \text{dom} f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \ell$

$-\ell < f(x) - \ell < \ell$ ovvero $0 < f(x) < 2\ell$

mi da la misura dell'intorno
Se io fisso $\varepsilon = \ell$ esiste sempre un delta ~~nell'intorno~~ con cui l'intorno che esso determina si avrà che la funzione è strettamente positiva
per una maggiore precisione si può anche usare $\frac{\ell}{2}$ o $\frac{\ell}{100}$



$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \gamma = +\infty$



$\frac{1}{x} > 0 \quad I_a(+\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Algebra dei limiti

Supponiamo di avere due funzioni:

$\boxed{f(x),\ g(x) \qquad I(\gamma) \setminus \{\gamma\}}$

1. $f(x) + g(x)$
2. $f(x) \cdot g(x)$
3. $f(x) / g(x)$

① $f(x) + g(x)$

numero finito

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$
l	m	$l+m$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forma indeterminata

Analizziamo l'ultimo caso

$f(x) = x^2$ $+\infty$
$g(x) = -x$ $-\infty$

$f(x) + g(x) = x^2 - x$ [darebbe $+\infty$]

$f(x) = x$ $+\infty$
$g(x) = -x^2$ $-\infty$

$f(x) + g(x) = x - x^2$ [darebbe $-\infty$]

Per il teorema della p. segno

$\exists I_1(\gamma) \mid \forall x \in dom f, x \in I_1(\gamma) \setminus \{\gamma\} \Rightarrow f(x) > \ell/2$

Quindi posso dire

$\exists I_2(\gamma) \mid \forall x \in dom g, x \in I_2(\gamma) \setminus \{\gamma\} \Rightarrow g(x) > \frac{2}{\ell} K$

$I_1 \cap I_2 \setminus \{\gamma\} \Rightarrow f(x) g(x) > \frac{\ell}{2} \frac{2}{\ell} K = K$

③ Prima di altre definizioni discutiamo sul reciproco di una funzione

$g(x)$

$\frac{1}{g(x)}$

$g(x)$	$1/g(x)$
$\ell \neq 0$	$1/\ell$
∞	0
0, $g(x) > 0$	$+\infty$
0, $g(x) < 0$	$-\infty$

Lezione 13

$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ se $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$

$\frac{1}{\infty}$

$0/0$ = forma ind.

Se $g(x) \to 0$ $\quad \frac{1}{g(x)} \to \infty$

e $f(x) \to \infty$ $\quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \to$ forma ind.

Se studiamo le funzioni continue, ovvero supponiamo di avere due funzioni f e g definite in un $I(x_0)$ e continue in x_0

sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$

il teorema precedente diventa:

$\lim_{x \to x_0} [f(x) \mp g(x)] = f(x_0) \mp g(x_0)$

se ho 2 funzioni continue in un punto la loro somma è continua in quel punto

$\lim_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = f(x_0) \cdot g(x_0)$

Se ho la funzione polinomiale

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5 \qquad C^0(\mathbb{R})$

il $\lim_{x \to 1} x^3 + 3x^2 - 5 = 1 + 3 - 5 = -1$

generalmente

$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$

Invece non è immediato per il $\lim_{x \to \infty}$ o $\lim_{x \to -\infty}$

$\lim_{x \to +\infty} x^3 + 3x^2 - 5 = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^3}_{\to \infty}\left(1 + \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{5}{x^3}}_{\to 0}\right) = +\infty$

Se ho una funzione razionale o razionale fratta

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ → continua in R, → continua in R

- dom $f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q_m(x) = 0\}$
- $C^0(\text{dom } f)$

Bisogna chiedersi il comportamento della funzione per il

$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

esempio:

$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 4}$ la funzione è definita dappertutto e quindi è continua in tutto $\mathbb{R}$

Mentre invece

$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 4}$ abbiamo i punti $x = 2$ ed $x = -2$ che non appartengono al dominio di f quindi $C^0(\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\})$

In questo caso bisogna anche studiare il limite

$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ dove x_0 è il punto in cui si annulla la funzione

Funzioni composte

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$ continua in x_0

Se compongo due funzioni continue ottengo una funzione continua?

Esempio

$h(x) = 2^{\cos x}$ $\quad x \to \cos x \quad C^0(\mathbb{R})$

$\qquad\qquad\qquad x \to 2^x \quad C^0(\mathbb{R})$

l'immagine è $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ $\to \cos x \to$ in $[1,-1]$

$2^{\cos x} \to 2^1 = 2$

$\qquad \hookrightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Componendo due funzioni continue ottengo una funzione continua

Lezione 14

Limite della funzione composta $(g(f(x)))$

Supponiamo che

1) esista finito $\lim_{x \to \gamma} f(x) = \ell$;

2) g sia definita in un intorno $I(\ell)$ e continua in ℓ

allora esiste il limite per x tendente a γ della funzione composta $g(f(x))$ e si ha

il limite è finito e vale $f(x_0) = g(f(x_0))$

$$\lim_{x \to \gamma} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to \gamma} f(x)\right) = g(\ell)$$

Se g è continua nel valore del limite allora posso fare tale passaggio, ovvero porto il limite nella funzione g

Se invece supponiamo che

1) esista $\lim_{x \to \gamma} f(x)$ e sia $+\infty$ oppure $-\infty$;

2) esista il $\lim_{y \to +\infty} g(y)$ oppure $\lim_{y \to -\infty} g(y)$

Allora esiste il limite per $x \to \gamma$ della funzione composta $g(f(x))$

$\lim_{x \to \gamma} g(f(x)) = \lim_{y \to \pm\infty} g(y)$

Sia f continua in x_0 e sia $y_0 = f(x_0)$. Sia g una funzione definita in un intorno di y_0 e continua in y_0. Allora la funzione composta $g(f(x))$ è continua in x_0

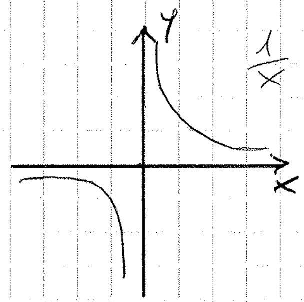
ora devo calcolare il

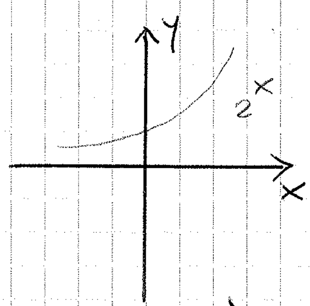
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \tan x}{\tan x} \overset{y=\tan x}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}}$$

$$x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} \xrightarrow{g} 2^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



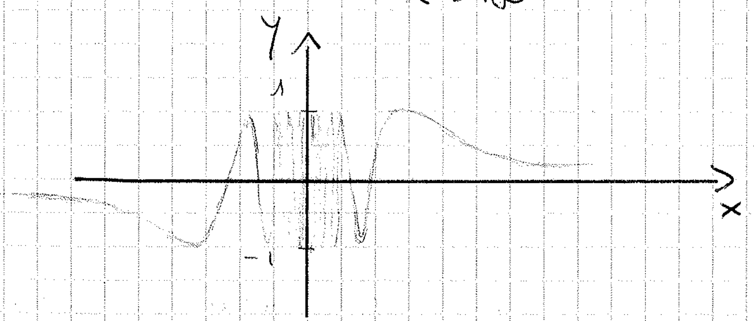


Dobbiamo vedere quanto vale e soprattutto se e' possibile (il limite) $2^{\frac{1}{x}}$ quando $\frac{1}{x} = +\infty$.
Guardando i grafici vediamo che la funzione esponenziale di base 2, quando la variabile va a $+\infty$ tende a $+\infty$
Ponendo $y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} 2^{y} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log \sin \frac{1}{x}$$

Prima analizzo $\lim_{x\to +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$



Gli zeri di questa funzione sono $k\pi$ in quanto ~~to~~ il seno e' 0 quando il suo argomento e' multiplo di π

$x = \frac{1}{k\pi}$, quindi si hanno infiniti zeri che si accumulano verso 0. La funzione e' continua in 0

$$\lim_{x\to +\infty} \sin \frac{1}{x} \overset{y=1/x}{=} \lim_{y\to 0} y = 0$$

$\lim_{x \to \gamma} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \gamma} |f(x)| = 0$

↳ funzione composta da f e valore assoluto

se ~~f~~ $|x|$ è continua

$\lim_{x \to 0} |f(x)| = \left| \lim_{x \to \gamma} f(x) \right| = 0$

Lezione 16

Corollario: condizione necessaria e sufficiente affinché sia $\lim_{x \to \gamma} f(x) = 0$ è che $\lim_{x \to \gamma} |f(x)| = 0$

Corollario: se valgono le seguenti ipotesi:

- la funzione $f(x)$ è limitata in un intorno di γ, cioè $\exists I(\gamma),\ \exists c > 0 \mid |f(x)| \leq c,\ \forall x \in I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$.
- la funzione $g(x)$ è infinitesima per $x \to \gamma$, vale a dire $\lim_{x \to \gamma} g(x) = 0$

sappiamo solo che è limitata ma non il suo valore

sappiamo che è 0

allora si ha che $\lim_{x \to \gamma} f(x) g(x) = 0$ → si ha un infinitesimo

Dimostrazione

$\lim_{x \to \gamma} f(x) \cdot g(x) = 0$ per verificare questa ipotesi esaminiamo se $\lim_{x \to \gamma} |f(x) \cdot g(x)| = 0$

per via del valore assoluto

$$0 \leq |f(x)\, g(x)| \leq c\, |g(x)|$$

$\downarrow$ 0 $\quad \downarrow$ 0 $\quad \downarrow_{x \to \gamma}$ 0

teorema del doppio confronto

Secondo teorema del confronto - caso infinito

Siano date due funzioni f e g ed esista un intorno $I(\gamma)$ di γ tale che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$$

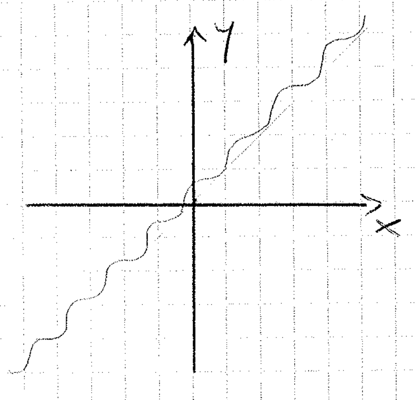
Allora

$$\lim_{x \to \gamma} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to \gamma} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \gamma} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to \gamma} f(x) = -\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} x + \cos x$$



Limiti trigonometrici

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

Limite di una successione

- Si dice che la successione $a: n \to a_n$ tende al limite $\ell \in \mathbb{R}$ (oppure converge a ℓ), e si scrive

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$$

se

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ tale che $\forall n \geq n_0, n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

- Si dice che la successione $a: n \to a_n$ tende a $+\infty$ (oppure diverge a $+\infty$), e si scrive

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

se

$\forall A > 0, \exists n_A$ tale che $\forall n \geq n_0, n > n_\varepsilon \Rightarrow a_n > A$

- Si dice che la successione $a: n \to a_n$ tende a $-\infty$ (oppure diverge a $-\infty$) e si scrive

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

se

$\forall A > 0\ \exists n_A$ tale che $\forall n \geq n_0, n > n_\varepsilon \Rightarrow a_n < -A$

Una successione che non rientra nei casi precedenti (vale a dire che non è convergente neppure divergente) è detta indeterminata

Successioni monotone

Una successione $\{a_n\}$ è monotona crescente se
$\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq a_{n+1}$

Una successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente se
$\forall n \geq n_0, \quad a_n \geq a_{n+1}$

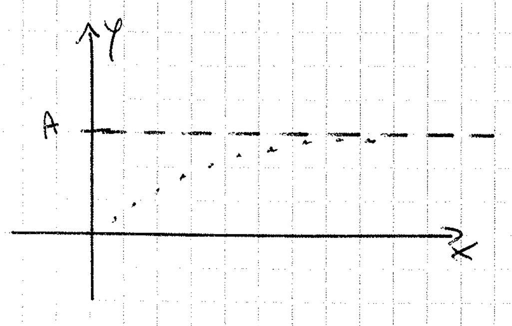
Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione crescente
Allora $\{a_n\}$ ammette sempre limite (finito oppure $+\infty$) che è l'estremo superiore dell'insieme dei valori assunti dalla successione.

Precisamente:

1) se la ~~funzione~~ successione è superiormente limitata allora converge al limite finito $l = \sup\{a_n : n \geq n_0\}$
2) Se la ~~funzione~~ successione non è superiormente limitata, allora diverge a $+\infty = \sup\{a_n \geq n_0\}$

Analogamente una successione decrescente è convergente oppure divergente a $-\infty$

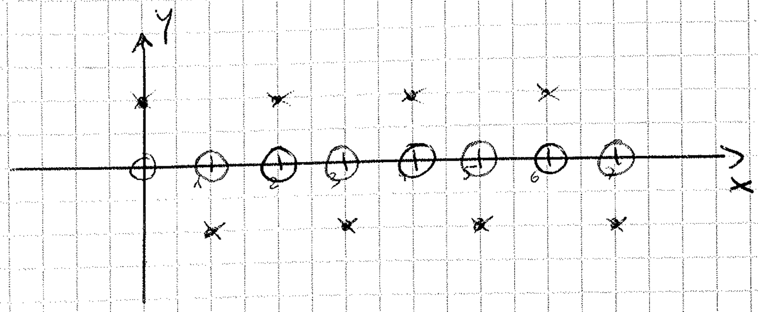


Se è limitata ammette limite

Non limitata con valori che tendono a $+\infty$

Ci sono solo queste due possibilità

$a_n = (-1)^n$



$$\boxed{a_{2k} = (-1)^{2k} = 1}$$

$$\boxed{a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1}$$

Conoscendo il limite di una funzione, possiamo ricavare il limite della successione di cui è la restrizione, grazie al teorema enunciato in precedenza.

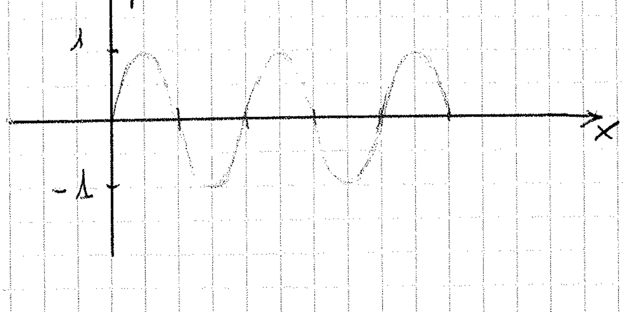
Sia $f(x)$ una funzione definita in $[n_0, +\infty)$ e supponiamo che la successione $a_n = f(n)$ sia ~~ancora~~ la restrizione di questa funzione all'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \implies \lim_{n \to \infty} a_n = \ell$$

Non è vero invece che, in generale, il limite di di una successione sia uguale al limite della funzione di cui è restrizione

Esempio

$f(x) = \sin(\pi x)$

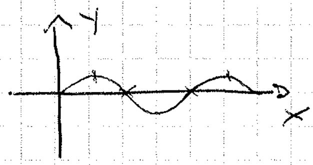


la funzione non ammette limite all'infinito perchè in ogni intorno di $+\infty$ la funzione assume tutti i valori tra 1 e -1

Dimostriamo che non esiste il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x$$

Devo trovare due successioni che tendono entrambi a $+\infty$ e tali che la funzione seno valutata su s mi dia due limiti diversi



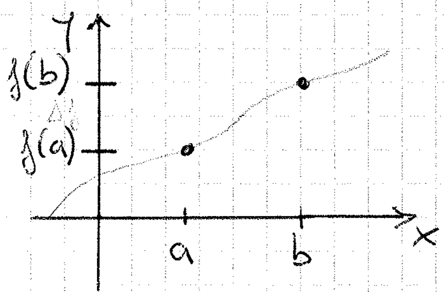
$$a_n = \pi n \xrightarrow{\text{per } n \to +\infty} +\infty \qquad \sin(\pi n) = 0$$

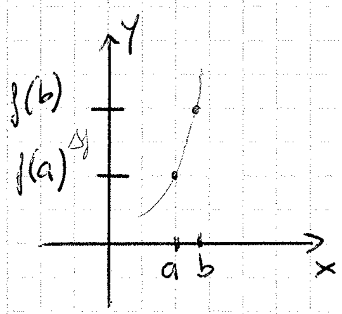
$$b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{per } n \to \infty} +\infty \qquad \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Abbiamo due limiti diversi quindi il $\lim_{x \to \infty}$ ~~della~~ funzione $\sin x$ non esiste

Derivata in un punto

~~Non riguarda il valore della funzione tra a~~





$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{velocità di variazione}$$

$$\Delta f = f(b) - f(a) \qquad \text{incremento}$$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ = rapporto incrementale ovvero il coeff. angolare della retta secante $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) = x^2 \qquad x_0 = 2$

$f(2) = 4 \qquad \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$ valore della derivata sotto il punto di vista algebrico

Lezione 20

$f(x) \qquad I(x_0)$

f è derivabile in x_0 se e solo se esiste finito il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Teorema f definita in $I(x_0)$

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

Dimostrazione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

Dobbiamo dimostrare che sia vera la condizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

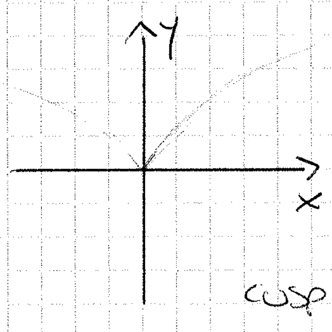
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Esempio 3

$f(x) = \sqrt{|x|}$

perchè siamo con valori positivi (0^+)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$



cuspide

- f non continua in x_0 f non è derivabile
- f continua in x_0 ed esiste finito il limite del R.I $\Rightarrow f$ derivabile in x_0
- Non esiste il lim del R.I. ma esiste il limite destro ed il limite sinistro. Se entrambi i limiti sono finiti abbiamo il punto angoloso, se entrambi i limiti sono infiniti abbiamo il punto cuspidale
- Esiste infinito il limite R.I. $\Rightarrow$ f punto a tangente verticale

Derivate delle funzioni elementari

$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

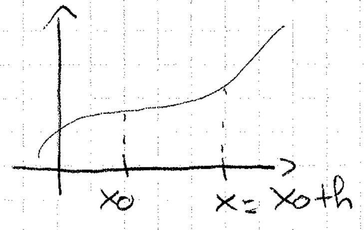
costante

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

$f(x) = \sin x \Rightarrow \cos x$

$x_0 = 0 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x_0 \neq 0$



$h = x - x_0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = (\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0)\frac{1}{h}$$

$$\sin x_0 \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow\ 0} + \cos x_0 \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow\ \cos x_0} = \cos x_0$$

$$D \tan x = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$$

Mi chiedo se sia possibile determinare a e b ($\in \mathbb{R}$) in modo che la funzione sia continua in 0 e derivabile in 0

1) f continua in 0
2) f derivabile in 0

Perchè (la funzione) sia continua la retta $ax + b$ deve valere nella origine 1.

$f(0) = \cos 0 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$

$\lim_{x \to 0^-} ax + b = b$

Affinchè ci sia continuità limite destro ed il limite sinistro devono essere uguali, quindi $b = 1$. Ciò implica che possono esistere infinite rette purchè b sia uguale a 1

Ora dobbiamo stabilire il coefficiente angolare in modo tale che la funzione sia derivabile

Calcolo la derivata destra della funzione

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ $\qquad \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} \to e^{2/3}$

$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a$

$\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1+1+1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n \nearrow e^2$

$m = n+1$
$n = m-1$

$\left(1+\frac{2}{m}\right)^{m-1} = \frac{\left(1+\frac{2}{m}\right)^m}{1+\frac{2}{m}} = e^2$

$1+\frac{2}{m} \to 1$

non ammette limite ed è limitato

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0$ $\qquad$ limitato · infinitesimo $= 0$

$\frac{n}{n^2+1} \to 0$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} =$

$\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$

pari

$\boxed{2K}$ $(-1)^{2K} \frac{4K^2}{4K^2+1} \to 1$

dispari

$\boxed{2K+1}$ $(-1)^{2K+1} \frac{(2K+1)^2}{(2K+1)^2+1} \to -1$

il limite globale non esiste

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\infty}{\infty}$

$\frac{\log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\log n} = \frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}$

$= 1 + 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 1$

$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \infty \cdot 0$ $\quad \sin 0 \to 0$

$n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$

$\frac{1}{x} = t$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin t}{t}$

Lezione 22

Derivazione della funzione composta

- $f(x)$ definita nell'intorno $I(x_0)$ e derivabile in x_0 con $y = f(x_0)$
- g definita nell'intorno $I(y_0)$ e derivabile in y_0

$$(g(f(x)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\left.\begin{aligned} x &\xrightarrow{f} m_1 x + q_1 \\ y &\xrightarrow{g} m_2 y + q_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &g(f(x)) \\ &m_2(m_1 x + q_1) + q_2 \end{aligned}$$

$$g(f(x)) = m_1 \cdot m_2 x + m_2 q_1 + q_2$$

La funzione composta è una funzione lineare quindi moltiplicando ad esempio 2 rette ottengo un'altra retta

$$h(x) = e^{\sin x} \qquad x \xrightarrow{f} \underbrace{\sin x}_{y} \qquad y \xrightarrow{g} e^{y}$$

$$h'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$h(x) = \sin(e^x) \qquad x \xrightarrow{f} \underbrace{e^x}_{y} \qquad y \xrightarrow{g} \sin y$$

$$h'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x$$

$$h(x) = \sin\left(2^{\cos x^2}\right) \qquad x \xrightarrow{f} \underbrace{x^2}_{A} \qquad A \xrightarrow{g} \underbrace{\cos A}_{B} \qquad B \xrightarrow{h} \underbrace{2^B}_{C} \qquad C \xrightarrow{i} \sin C$$

$$h'(x) = \cos\left(2^{\cos x^2}\right) \cdot \left(2^{\cos x^2}\right) \cdot \ln 2 \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x$$

$x \to a^x$ $\quad a > 0$, $a \neq 1$

$x = \log_a y$

$$D \log_a y_0 = \frac{1}{D a^{x_0}} = \frac{1}{a^{x_0} \ln a} = \frac{1}{y_0 \ln a}$$

$$D \log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$D \ln x = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

---

f pari $\Rightarrow$ f' dispari

f dispari $\Rightarrow$ f' pari

funzione composta $\quad x \to -x$, $\quad y \to f(y)$

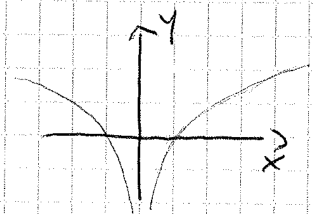
Una funzione è pari quando $f(-x) = f(x)$

$$f'(-x) \cdot (-1) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$$

dispari

$D \ln |x| \qquad |x| > 0$

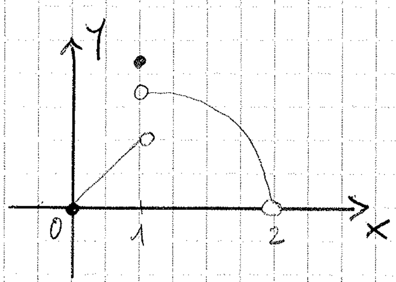
- il dominio $\ln|x| = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Pari
-



$x > 0 \quad D \ln x = \frac{1}{x}$

$x < 0 \quad D \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

$D \ln |x| = \frac{1}{x} \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Il punto 0 è un punto di minimo relativo
Il punto 2 non è un punto di minimo relativo perchè nell'intorno 2 la funzione non è definita
Il punto 1 è un punto di massimo relativo e anche assoluto

Se f è derivabile in un punto x_0 e $f'(x_0) = 0$ si dice che ~~f~~ x_0 è un punto stazionario o un punto critico per $f(x)$

LEZIONE 23

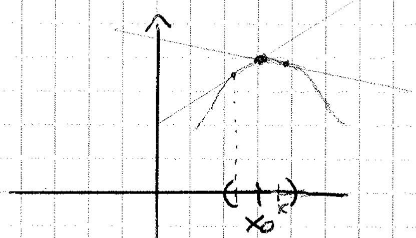
Teorema di Fermat

- f definita in $I(x_0)$
- f derivabile in x_0
- x_0 estremo di massimo o minimo relativo

Se valgono queste ipotesi il teorema enuncia che $f'(x_0)=0$

Dimostrazione

Ipotizziamo che x_0 sia un max relativo
Esiste un ~~punto~~ intervallo x_0 in cui $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I(x_0)$



Fisso un punto $x > x_0$ e vado a considerare il rapporto incrementale relativo al punto x appartenente all'intorno destro

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad f'_+(x_0) \leq 0$$

Ripeto la stessa cosa utilizzando un valore di x nell'intorno sinistro di x_0

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 268

Conclusione

Se ho una f continua ~~e~~ in un intervallo I dove vado a cercare gli eventuali punti di estremo verrano ricercati tra:

1) Punti in cui f è derivabile e $f'=0$
2) Punti di non derivabilità di f
3) Eventuali estremi di I se lavoriamo in un intervallo chiuso

Funzioni continue in un intervallo → int. limitato / int. non limitato / $\mathbb{R}$

- Teorema dell'esistenza degli zeri
- Teorema di Weierstrass

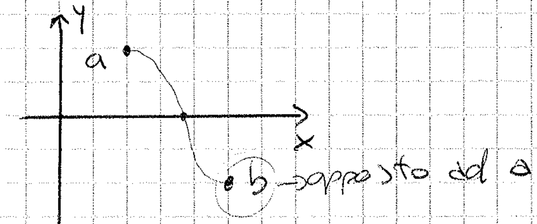
Se $f(x_0)=0$ si dice che x_0 è uno zero per la funzione f

Bisogna risolvere l'equazione $f(x)=0$

Teorema dell'esistenza degli zeri

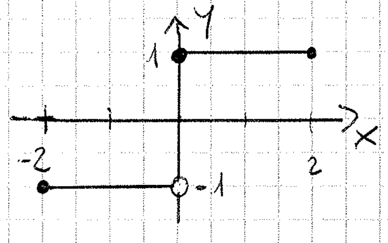
- f continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato
- $f(a)\,f(b)<0$

Deve esistere un punto x_0 appartenente all'intervallo a,b tale che la funzione si annulla ovvero $f(x_0)=0$

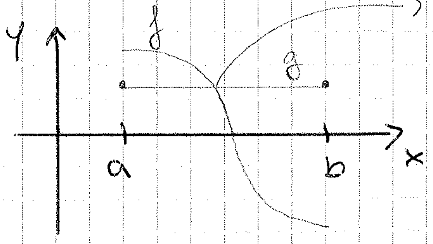


Se f è strettamente monotona in $[a,b]$ lo zero è unico

La tesi non è vera se $f(a)f(b)<0$ ~~ma~~ e non continua



è vero che $f(-2)\cdot f(2)<0$ ma la funzione non si annulla in nessun punto



→ esiste un punto in comune tra i due grafici

Dimostrazione

$h(x) = f(x) - g(x)$

h è continua perchè è la differenza di 2 funzioni continue

$h(a) = f(a) - g(a) > 0$

$h(b) = f(b) - g(b) < 0$

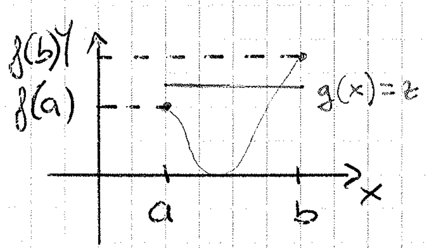
In conclusione, per il teorema, dato che h è continua e assume valori opposti

$\exists x_0 \; h(x_0) = 0$ quindi $f(x_0) - g(x_0) = 0$

$f(x_0) = g(x_0)$

Teorema dei valori intermedi

f è una funzione continua in $[a, b]$ ⟹ f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$



Se $f(a) = f(b)$ l'enunciato del teorema è ovvio.

Se $f(a) \neq f(b)$ come nel grafico allora scegliamo $f(a) < f(b)$

Scelgo un valore $z \in$ all'intervallo $(f(a), f(b))$ aperto.

Definisco una funzione $g(x)$ uguale al valore di z fissato.

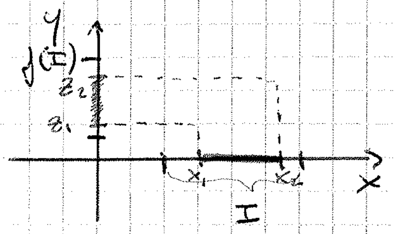
$f(a) < g(a)$ f è continua per ipotesi mentre invece

$f(b) < g(b)$ g è una costante e quindi continua.

Per il teorema precedente esiste un punto x_0 in cui le due funzioni assumono lo stesso valore

$f(x_0) = g(x_0)$

Dimostrazione



La funzione f mi trasforma I in un altro insieme $f(I)$. Devo dimostrare che tale insieme sia un intervallo. Non si conosce il valore di $f(I)$ e per dimostrare che sia un intervallo imposto due punti z_1 e z_2 che appartengono al $f(I)$ devo dimostrare che tutti i punti intermedi appartengono al I.

$z_1 \in f(I)$, $z_2 \in f(I)$ ovvero sono immagini di f

$\exists x_1 \in I \mid f(x_1) = z_1$

$\exists x_2 \in I \mid f(x_2) = z_2$

z_1 è immagine di un certo x_1

z_2 è immagine di un certo x_2

Considero la funzione f ristretta all'intervallo di estremi x_1 e x_2 $[x_1, x_2]$

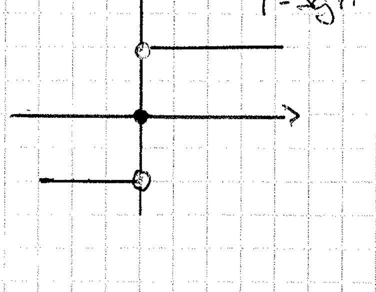
Tutti i valori tra f del primo estremo ad f del secondo estremo sono aggiunti, quindi $f(I)$ è un intervallo

Lezione 25

Teorema (teorema precedente)

Se ho una funzione f continua in un intervallo (I) la sua immagine $f(I)$ è un intervallo

Osservazione



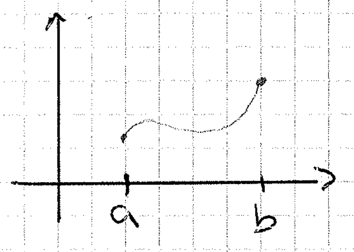
$f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$ non è un intervallo

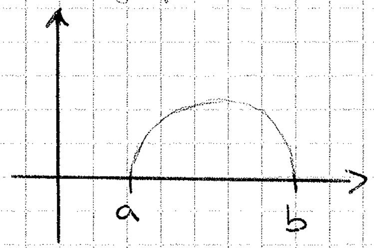
f strettamente monotona $\Rightarrow$ f iniettiva
vale la relazione inversa, ovvero
f iniettiva $\Rightarrow$ f strettamente monotona se e solo se
la funzione è continua nell'intervallo I

Se f è invertibile in I e $(f(I) = J)$ si ha
che la funzione inversa f^{-1} è continua in J

- f continua in $[a,b]$
- f derivabile in (a,b)

entrambi i grafici vanno bene





è una funzione continua, derivabile agli estremi in quanto derivate sinistra e destra sono infiniti

Richiami

Se f è derivabile in x_0 ed $f'(x_0) = 0$ si dice che x_0 è un punto stazionario critico.

Per il teorema di Fermat:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ derivabile in } x_0 \\ \bullet\ x_0 \text{ è un estremo relativo} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

(non vale il viceversa)

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ derivabile in } x_0 \\ x_0 \text{ estremo relativo} \end{array}\right. \Rightarrow x_0 \text{ è un punto critico}$$

Il teorema che da le condizioni sufficienti per l'esistenza dei punti critici è il teorema di Rolle

Basta considerare 2 casi:

1) $\{x_m, x_M\} = \{a, b\}$ il punto di minimo e massimo coincidono con gli estremi

$\left.\begin{array}{l} f(a) = m \\ f(b) = M \end{array}\right\}$ o viceversa $\Rightarrow m = M \Rightarrow f(x) =$ costante che coincide con il minimo che è uguale al massimo

$f'(x) = 0$

2) $\{x_m, x_M\} \neq \{a, b\}$ Almeno uno dei due (punti x_m, x_M) non è un estremo

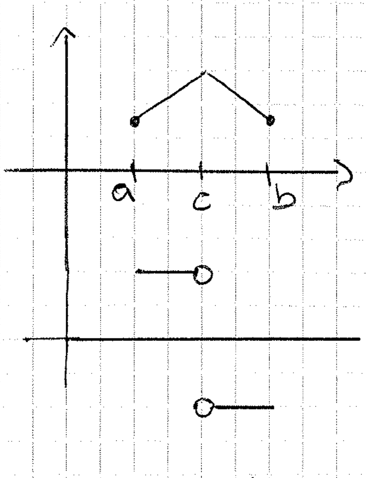
$\left.\begin{array}{l} x_m \in (a, b) \\ f \text{ è derivabile in } x_m \\ x_m \text{ punto di estremo} \end{array}\right] \xRightarrow{\text{Fermat}} f'(x_m) = 0$ (teorema dimostrato)

applichiamo Fermat perchè abbiamo un punto di estremo in cui la funzione è derivabile

È importante che ci siano sempre tutte e 3 le condizioni iniziali:

- f continua in $[a, b]$
- f derivabile in (a, b)
- $f(a) = f(b)$

Se ad esempio escludiamo il secondo punto come nell'esempio, in cui prendiamo una funzione continua in a, b con estremi dello stesso valore non derivabile nell'interno



Non è derivabile perchè ha un punto angoloso

Nel tratto a-c è un segmento con coeff. angolare positivo quindi la derivata sarà una ~~segm~~ costante positiva, tra c-b sarà una costante negativa e nel punto c la derivata non esiste perchè è un punto di non derivabilità

La derivata è 0 in tutti i punti compreso il punto t, quindi
$f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$
~~Quindi~~ la funzione è necessariamente costante
È necessario considerare un intervallo. Ad esempio:
$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ha come dom $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non è un intervallo

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 0$$

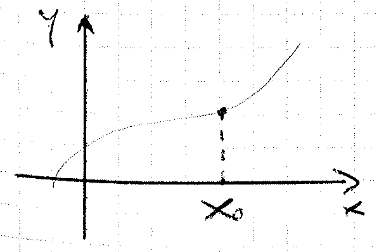
Lezione 27

Monotonia e segno di f'

Tale teorema collega il fatto che una funzione sia crescente o decrescente col fatto che la derivata sia positiva o negativa

- La funzione f deve essere derivabile in un intervallo I
- f è crescente in $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ strettamente crescente in I

Se f è strettamente crescente in un intervallo I non implica che la ~~f~~ derivata $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$
Ad esempio $f(x) = x^3$ nell'intero asse reale $\mathbb{R}$
~~la funzione~~ è strettamente crescente, ma se calcoliamo la derivata $f'(x) = 3x^2$ non è strettamente positiva in $\mathbb{R}$ perché nell'origine vale 0.
Se f è crescente in $I \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$



la funzione è derivabile per ipotesi e devo far vedere che tale derivata sia ≥ 0. Per fare ciò considero il rapporto incrementale

Derivata di ordine superiore

Supponiamo di avere f derivabile in un ~~punto~~ intervallo I, quindi in tutto I è definita la funzione f'.
Fissato un punto $x_0 \in I$ e considero il rapporto incrementale della funzione f'.
Se esiste finito il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \ell = f''(x_0)$

f è derivabile due volte in x_0
$x \to f''(x)$ f. derivata seconda

Per dire che f è continua e derivabile, f' continua $\Big\}$ $f \in C^1(I)$

se f è continua e derivabile, f' continua e derivabile, f'' continua $\Big\}$ $f \in C^2(I)$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & \\ f'(x) = \cos x & \Rightarrow C^1(\mathbb{R}) \\ f''(x) = -\sin x & C^2(\mathbb{R}) \\ f'''(x) = -\cos x & C^3(\mathbb{R}) \\ f^{iv}(x) = \sin x & C^4(\mathbb{R}) \end{array}\right\}$$ la funzione $\sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$

Teorema di De l'Hôpital

- f e g devono essere definite in $I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$ (γ: ℓ, $+\infty$, $-\infty$)
- f e g derivabili in $I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$
- $g'(x) \neq 0$ in $I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$
- $\lim_{x \to \gamma} f(x) = \lim_{x \to \gamma} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$
- Se $\exists \lim_{x \to \gamma} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \Rightarrow \exists \lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$

Vale anche per limiti destri e sinistri.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x}\left(1+\frac{\cos x}{3x}\right)\to 0}{2\cancel{x}\left(1-\frac{\sin}{2x}\right)\to 0} = \frac{3}{2}$$

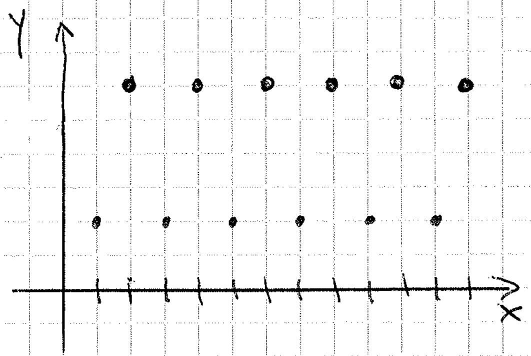
Se derivo:

$$\left.\lim_{x\to+\infty} \frac{3-\sin x}{2-\cos x}\right] h$$

$x = 2k\pi$

$h(2k\pi) = \frac{3}{2-1} = 3$

$h((2k+1)\pi) = \frac{3}{2-(-1)} = 1$



Il limite non esiste

[La regola di de l'Hopital è solo una condizione sufficiente]

- Se ho una funzione f continua in $I(x_0)$
- f derivabile in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$
- $\exists \lim_{x\to x_0} f'(x)$

la tesi è che f è derivabile anche in x_0 e

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$

Dimostrazione

Per dimostrare che una funzione è derivabile in un punto devo far vedere che esiste finito il limite del rapporto incrementale.

$f(x)$ essendo continua tende a $f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{\to \text{ tende a } 0}}$$ si ha una forma $\frac{0}{0}$

$g(x) = x - x_0 \qquad g'(x) = 1$

Posso applicare l'Hopital

Se facevo

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$\lim_{x \to 0} \underbrace{2x}_{\to 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\to l} - \cos \frac{1}{x}$ si comporta come il $\sin \frac{1}{x}$ con infinite oscillazioni che si addensano sull'origine

Mi sarei dovuto aspettare che tale limite ~~ass~~ facesse 0 mentre invece non esiste.

Lezione 28

Confrontiamo le funzioni
- $f(x)$ e $g(x)$ definite in $I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$
- $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ in $I(\gamma) \setminus \{\gamma\}$

e consideriamo il $\lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)}$

e supponiamo che tale limite sia uguale ad $l \in \mathbb{R}$

$f = O(g) \quad x \to \gamma$
↳ o grande

$\lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \qquad f \asymp g \quad x \to \gamma$ — f è dello stesso ordine di g per $x \to \gamma$

$\lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad f \sim g \quad x \to \gamma$ — f è equivalente a g per $x \to \gamma$

$\lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad f = o(g) \quad x \to \gamma$ — f è o piccolo di g oppure f è trascurabile rispetto a g

Quindi ~~ri~~ riassumendo: **Simboli di Landau**

$\lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)}$	$l \in \mathbb{R}$	$f = O(g)$
	$l \neq 0$	$f \asymp g$
	1	$f \sim g$
	0	$f = o(g)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \qquad \forall \alpha > 0$$

$$\frac{\frac{x^\alpha}{\alpha^\alpha}\,\alpha^\alpha}{e^{\frac{\alpha x}{\alpha}}} = \alpha^\alpha \left(\frac{\frac{x}{\alpha}}{e^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^\alpha \qquad \frac{x}{\alpha} = t$$

$$\underbrace{\alpha^\alpha}_{\text{costante positiva}} \Big(\underbrace{\frac{t}{e^t}}_{\text{tende a } 0}\Big)^\alpha \xrightarrow{t\to+\infty} 0$$

$$x^\alpha = o(e^x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\log x = o(x) \quad x\to+\infty$$

$$f \asymp g \qquad \lim_{x\to\gamma} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 1$$

$$\lim_{x\to\gamma} \frac{f(x)}{\ell g(x)} = \frac{1}{\ell}\cdot \ell = 1$$

$$f \sim \ell g$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\text{limite fondamentale}} = \frac{1}{2} \qquad 1-\cos x \asymp x^2 \quad x\to 0$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad x\to 0$$

$$\lim_{x\to\gamma} \frac{f(x)}{1} = 0 \qquad f = o(1)$$

$$\lim_{x\to\gamma} f(x) = 0$$

f infinitesima per $x\to\gamma \Rightarrow f = o(1)$

$f \sim g \quad x \to \gamma$

Relazione tra f e g nell'intervallo

$\lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to \gamma} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$

$\lim_{x \to \gamma} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$

$f - g = o(g) \Rightarrow \boxed{f = g + o(g)}$

Esempio

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x$

$\Downarrow$

$\sin x = x + o(x)$

Lezione 30

Classificazione degli infiniti

$\lim_{x \to \gamma} f(x) = \infty$

1) $f \asymp g$ — f e g sono infiniti dello stesso ordine
2) $f\, o(g)$ — f è un infinito di ordine inferiore rispetto a g
3) $g\, o(f)$ — f è un infinito di ordine superiore " " "
4) f e g — Non confrontabili tra di loro

$\cancel{x \to +\infty}$

Infiniti per $x \to 0$

$\alpha > 0 \quad n \in N$

Consideriamo le funzioni $\frac{1}{|x|^\alpha}$

$\boxed{x \to 0^+}$

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{f}{g} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} = x^2 \to 0 \qquad \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$g(x) = \frac{1}{x^3}$

Infinitesimi:

$\lim_{x \to \gamma} f(x) = 0 \qquad f(x) = o(1)$

1) $f \asymp g \qquad \frac{f}{g} \to l \neq 0 \qquad f, g$ infinitesimi dello stesso ordine

2) $f = o(g) \qquad \frac{f}{g} \to 0 \qquad f$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g

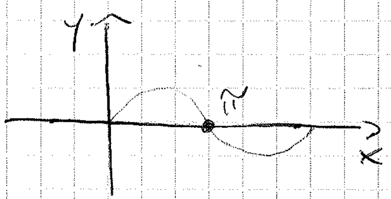
3) $g = o(f) \qquad f$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g

4) Se non si hanno i casi precedenti si dice che f e g non sono confrontabili

$x^3 = o(x) \qquad x \to 0$

$x = o(x^3) \qquad x \to \infty$

Esercizio



$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \qquad \lim_{x \to \pi} \frac{\cos}{1} = -1$

$\sin x \sim -(x - \pi)$

$\sin x \sim -x + \pi \qquad x \to \pi$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 268

LEZIONE 32

Algebra degli "o" piccoli

$\boxed{x \to 0}$ $\boxed{x \to x_0}$

Per arrivare al caso generale basta sostituire $x - x_0$ al posto di x nel seguito

a) $o(x^n) \mp o(x^n) = o(x)^n$

b) $o(x^n) \mp o(x^m) = o(x^p)$ p = minimo tra n ed m

c) $o(\lambda x^n) = o(x^n)$

d) $\varphi(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$ $\varphi(x)$ = funzione limitata per $x \to 0$

e) $x^n \, o(x^m) = o(x^{n+m})$

f) $o(x^n) \, o(x^m) = o(x^{n+m})$

g) $[o(x^n)]^k = o(x^{nk})$

Non sono uguaglianze algebriche, ovvero ad esempio nel caso a non possiamo attuare semplificazioni.

Esempio

$o(x^n) \, o(x^m) = o(x^{n+m})$

$$\left.\begin{array}{ll} f = o(x^n) & x \to 0 \\ g = o(x^m) & x \to 0 \end{array}\right\} f \cdot g = o(x^{n+m})$$

La prima proprietà vuol dire che se io so

$\frac{f}{a^n} \to 0$ e $\frac{g}{x^m} \to 0$ devo dimostrare che $\frac{fg}{x^{n+m}} \to 0$

L'insieme A ammette estremo superiore. L'estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti quindi 3. Il punto 3 non è un massimo perchè non appartiene all'insieme.
L'estremo inferiore è -1 perchè è il più grande dei minoranti, ma non è minimo perchè non appartiene ad A.

L'insieme B ha come estremo superiore 5 che è anche il massimo, mentre l'estremo inferiore è -1 che corrisponde anche al minimo

---

$\bigcup_{k=0}^{3} [k, k+1]$

Se $k=0 \rightarrow [0,1]$
Se $k=1 \rightarrow [1,2]$
Se $k=2 \rightarrow [2,3]$
Se $k=3 \rightarrow [3,4]$

$[0,1] \cup [1,2] \cup [2,3] \cup [3,4]$

$[0,4]$

Disegnare nel piano cartesiano i seguenti insiemi

$[0,1] \times [0,2]$ $\quad (x,y) : x \in [0,1]$
$y \in [0,2]$

LEZIONE 10

Traslazione verso destra $y = f(x-a)$ esempio $x^2 \to (x-3)^2$

Traslazione verso sinistra $y = f(x+a)$ esempio $x^2 \to (x+3)^2$

Traslazione verso l'alto $y = f(x)+a$ esempio $x^2 \to x^2+a$

Traslazione verso il basso $y = f(x)-a$ esempio $x^2 \to x^2-a$

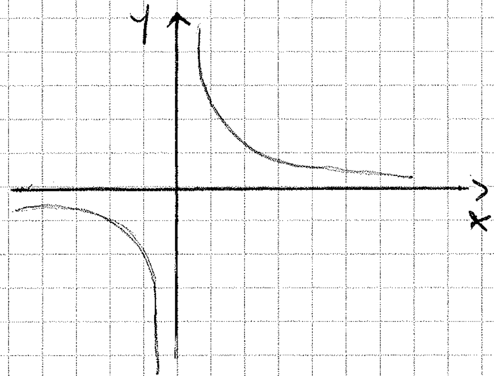
Simmetria verso l'asse y $\begin{cases} x = -x \\ y = y \end{cases}$ esempio $x^3 \to (-x)^3$

Simmetria rispetto l'asse x $\begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases}$ esempio $x^3 \to -(x)^3$

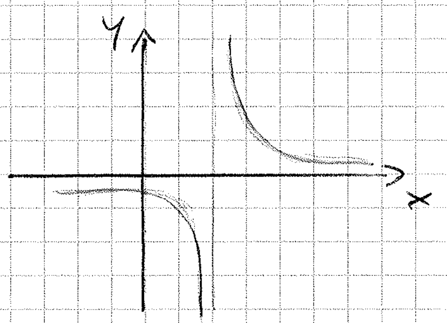
Esercizio

$y = 1 + \frac{1}{-x+2}$ $\qquad y = x^n$

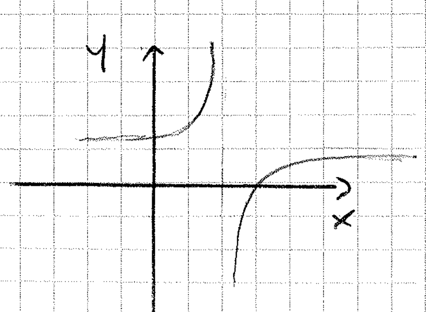
$y = x^{-1}$



$y = (x-2)^{-1}$



$y = (-x+2)^{-1}+1$

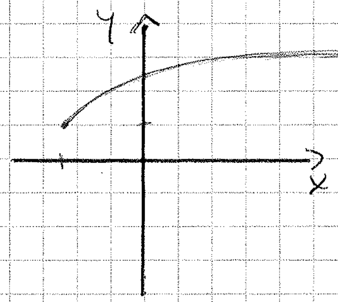


$$y + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$x - \frac{1}{2} = \sqrt{y + \frac{5}{4}} \longrightarrow x = \sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$f_1^{-1} : \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right) \longrightarrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$x \longrightarrow \sqrt{x + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$$



$$f_2 : \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

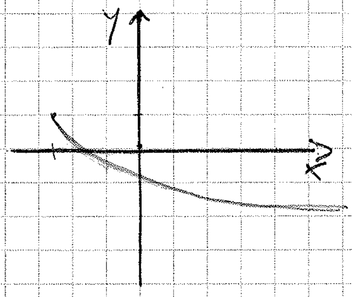
$$f_2^{-1} : \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right) \longrightarrow \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{y + \frac{5}{4}}$$

$$x = -\sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$f_2^{-1} = -\sqrt{x + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$$



$f(x) = \frac{7x}{x+1}$ $\qquad g(x) = \sqrt{2-x}$

calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$ e trovare il dominio $(f \circ g)$ ed il dominio di $(g \circ f)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \frac{7 \cdot \sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}+1}$$

$\boxed{dom}$

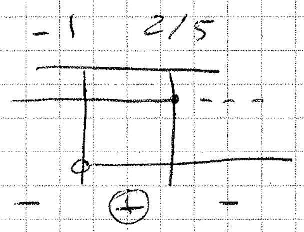
$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \sqrt{2-x}+1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad x \leq 2 \rightarrow (-\infty, 2]$$

$$(g \circ f)x = g(f(x)) = g\left(\frac{7x}{x+1}\right) = \cancel{=} \sqrt{2-\left(\frac{7x}{x+1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2x-7x+2}{x+1}} = \sqrt{\frac{2-5x}{x+1}}$$

$\boxed{dom}$

$$\begin{cases} \frac{2-5x}{x+1} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} N \geq 0 & 2-5x \geq 0 & x \leq \frac{2}{5} \\ D > 0 & x+1 > 0 & x > -1 \end{matrix}$$



$-1 < x \leq 2/5$

$\left(-1, \frac{2}{5}\right)$

$f(x) = |x| - 2$ $\qquad g(x) = \ln x$

$f \circ g$ $\qquad g \circ f$

$x > 2$

$x \geq 0$ $\quad x < 0$

$\ln(x-2)$ $\quad \ln(-x-2)$

$-x > 2$

$x < -2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = |\ln x| - 2$$

$\boxed{dom} = (0, +\infty)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|-2) = \ln(|x|-2)$$

$\boxed{dom}$ $\quad |x|-2 > 0 \quad |x| > 2 \quad x < -2 \lor x > 2$

$(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Esercizio

$f(x) = \sin(x) - 2 \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x}) - 2$

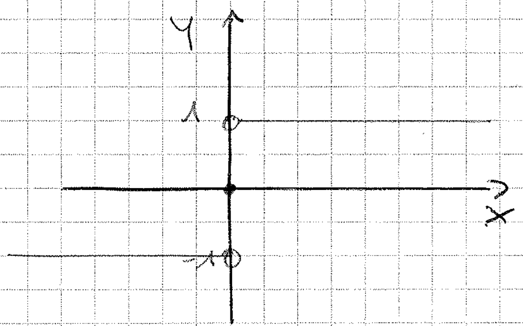
$\boxed{\text{Dom}}$ $x \geq 0 \qquad [0, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin(x)-2) = \sqrt{\sin(x)-2}$

$\boxed{\text{Dom}}$ $\sin(x) - 2 \geq 0 \qquad \sin(x) \geq 2$ dato che $\forall x$ il seno è compreso tra 1 e -1 non può essere ≥ 2. Quindi insieme vuoto.

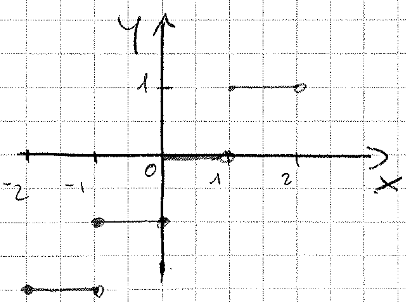
Funzione segno

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



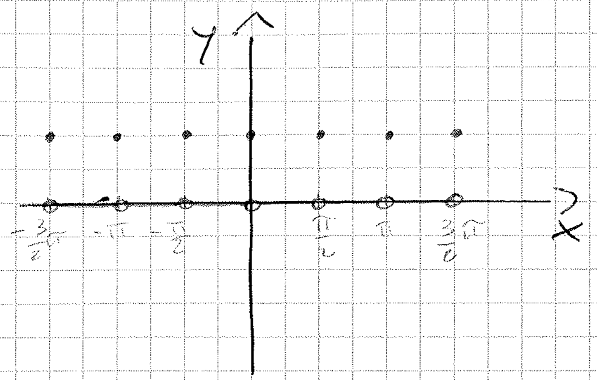
Funzione parte intera

$x \longmapsto [x]$ il più grande intero $\leq x$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 268

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\} \\ 1 & \text{se } x = 0 + k\pi \end{cases}$$



$Im = \{0, 1\}$ $\quad$ $Dom\, f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 - \log x}$$

$\boxed{dom}$

$$\begin{cases} 1 - \log \geq 0 \\ \cancel{\log}\, x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \log x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \log x \leq \log e \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq e \\ x > 0 \end{cases}$$

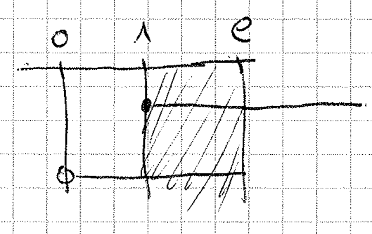
$0 < x \leq e$ $\qquad$ $Dom\, f : (0, e]$

$$f^{-1}([-1, 1]) = \{ x \in Dom\, f : -1 \leq \sqrt{1 - \log x} \leq 1 \}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1 - \log x} \leq 1 \\ \sqrt{1 - \log x} \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - \log x \leq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} \log x \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$[1, +\infty)$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x \leq e \end{cases}$$



$$f^{-1}([-1, 1]) = [1, e]$$

$$f^{-1}([-1, 1]) = f^{-1}([0, 1])$$

LEZIONE 18

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^3-2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}\right)}{x^{3}\left(1-\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{5}{x^3}}_{\to 0}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x-7}{5x^2-2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(2+\underbrace{5/x}_{\to 0}-\underbrace{7/x^2}_{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(5-\underbrace{2/x}_{\to 0}+\underbrace{3/x^2}_{\to 0}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^7+x^4-\sqrt{2}\,x}{8x^6-x^5+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7\left(-3+\frac{1}{x^3}-\frac{\sqrt{2}}{x^6}\right)}{x^6\left(8-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^6}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{8}x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^e-3x+1}{x^\pi+x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^e\left(1-\underbrace{3x^{1-e}}_{\to 0}+\underbrace{x^{-e}}_{\to 0}\right)}{x^\pi\left(1+\underbrace{x^{2-\pi}}_{\to 0}-\underbrace{2x^{1-\pi}}_{\to 0}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{e-\pi} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3-8x^2-18x-9} = \frac{0}{0}$$

N:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
-1 & & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & //
\end{array}$$

$(x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x-2)(x+1)$

$= (x+1)^2(x-2)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 268

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt[3]{10-x} - 2\right)\left(\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{10-x} + 4\right)}{(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{10-x} + 4\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{10 - x - 8}{(x-2)\cdot 12} = \lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{12(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-\cancel{(x-2)}}{12\cancel{(x-2)}}$$

$$= -\frac{1}{12}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}^{\to 1}}{\underbrace{(1 + \cos x)}_{\to 2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)\, x}{x \cdot x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot x = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$$

$y = x - \frac{\pi}{2}$

$x = y + \frac{\pi}{2}$

se $x \to \frac{\pi}{2}$

$y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{(-y)^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{-(1 - \cos y)}{y^2} = -\frac{1}{2}$$

$2 \leq \sqrt{5 + \cos x} \leq \sqrt{6}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2 + 1}$$

$$\frac{2}{x^2+1} \leq \frac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2+1} \leq \frac{\sqrt{6}}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{6}}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(2x)}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x(1-\cos x) + \operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{1-\cos x}} + \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} \qquad \frac{2\cancel{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0} 2 = 3$$

LEZIONE 19

Limiti notevoli di exp e log.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$y = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{y} \quad$ se $x \to 0^+ \quad y \to +\infty$

se $x \to 0^- \quad y \to -\infty$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \quad \forall a>0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{1/x}$$

$$= \log\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \log_a e = \frac{\log e}{\log_e a} = \frac{1}{\log a}$$