



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 847

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: De Francesco

MATERIA: Scienza delle Costruzioni II + Eserc.

Prof. Chiaia_Ferro

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

1^{re} PARTE DEL CORSO

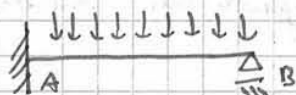
1. STUDIO MONODIMENSIONALE DI

IPERSTATICHE - METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Il metodo degli spostamenti è duale al metodo delle forze:

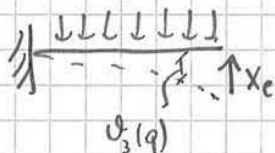
METODO DELLE FORZE

è utile nel caso di strutture a volte iperstatiche:



si elimina il vincolo e si inserisce

l'incognita iperstatica che è una forza:



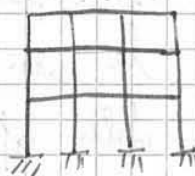
si risolve con le eq. di congruenza che risponde alle cinematiche.

$$U(q, X) = 0$$

ricordiamo sempre che per strutture iperstatiche vale la sovrapposizione degli effetti

METODO DEGLI SPOSTAMENTI

se abbiamo dei telai assai le forze

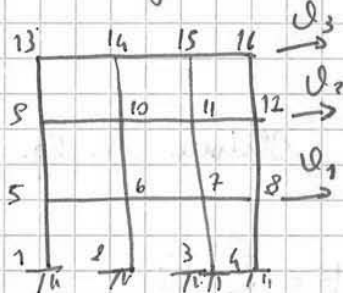


come incognite è molto più difficile perché una maglia chiusa è 3 volte iperstatica internamente.

Obliamo 3x3 incognite per le maglie chiuse più 3x3 vincoli:

$$6 \times 3 + 3 \times 3 = 27 \text{ gradi di iperstaticità !!}$$

con il metodo degli spostamenti invece le incognite sono degli spostamenti!



nei nodi 1, 2, 3, 4

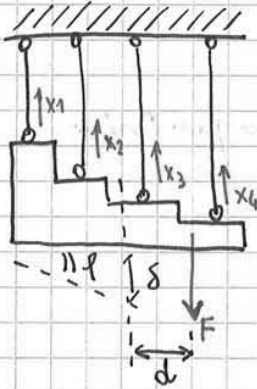
non ci sono

incognite perché $U = 0$

per le maglie interne invece basta mettere sulle cerniere nei nodi 6, 7, 10, 11 ed ed ogni maglia si associa una rotazione nel piano.

le strutture che lavorano in parallelo sommano le loro rigidità nei confronti delle forze esterne. Le strutture in PARALLELO allora sono più SICURE

● ESEMPIO 2 - sistema non simmetrico



in questo caso lo spostamento prevede anche una rotazione e allora servono 2 incognite di spostamento: δ e φ incognite.

eq. risolvente: $F = \sum_{i=1}^4 X_i$ per far apparire δ e φ va scritto un'equilibrio alla rotazione:

(7.1) $F \cdot d = \sum_{i=1}^n X_i \cdot x_i$ equil. \uparrow

(7.2) $F = \sum_{i=1}^n X_i$

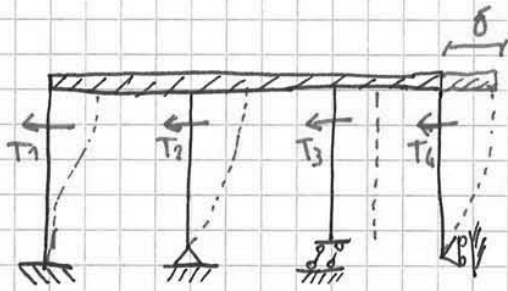
e allora $\frac{x_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = \delta + \varphi \cdot x_i \Rightarrow$

(dovrebbe essere $\varphi \cdot l_i$ ma approssimiamo e φ perche ipotizziamo la struttura rigida)

$\Rightarrow X_i = \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} (\delta + \varphi \cdot x_i)$ e sostituendo:

$$\begin{cases} F = \delta \left(\sum \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \right) + \varphi \left(\sum \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \cdot x_i \right) \\ F \cdot d = \delta \left(\sum \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \cdot x_i \right) + \varphi \left(\sum \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \cdot x_i^2 \right) \end{cases}$$

l'insieme ordinato dei 4 coefficienti rappresenta la MATRICE DI RIGIDITÀ del sistema (simmetrica per Betti)



questa volta in gioco abbiamo dei tagli.
 Con il metodo degli spostamenti l'incognita è solo δ (invece di T_i)

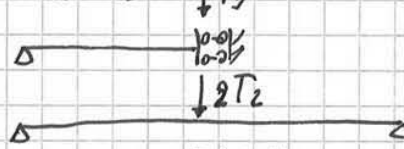
anche questa volta abbiamo una rigidezza flessionale $\frac{e_i \cdot E_i \cdot I_i}{l_i^3}$ ma per trovare e_i si deve fare uno schema diverso

- e_1



$$\delta_1 = 2 \cdot \frac{2T_1 l_1^3}{48 E_1 I_1} = \frac{T_1 l_1^3}{12 E_1 I_1}$$

- $e_2 = e_3$



$$\delta_2 = \frac{2T_2 (l_2^3)}{48 E_2 I_2} = \frac{3T_2 l_2^3}{3 E_2 I_2}$$

- $e_3 = 0$ ovvio

Una volta noto δ si può calcolare T_i

infatti dall'eq. di compattezza $T = \frac{e E I}{l^3} \delta$ - sostituendo quest'ultima nell'eq. di equilibrio si ha $F = \sum \frac{e_i \cdot E_i \cdot I_i}{l_i^3} \delta_i$ da cui ricorriamo le incognite cinematiche

$$\delta = \frac{F}{\sum_i \frac{e_i \cdot E_i \cdot I_i}{l_i^3}} = \frac{F}{K}$$

$$\Rightarrow T_i = F \frac{\frac{e_i \cdot E_i \cdot I_i}{l_i^3}}{\sum_i \frac{e_i \cdot E_i \cdot I_i}{l_i^3}} = F \left(\frac{K_i}{K} \right)$$

Coefficiente di ripartizione e taglio.

$$\begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & 0 \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & 0 & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{Il} & 0 & 0 & -\frac{A}{Il} \\ \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & 0 & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & 0 \\ \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{Il} & 0 & 0 & \frac{A}{Il} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ v_i \\ w_i \\ l_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_i^o \\ T_i^o \\ N_i^o \\ M_j^o \\ T_j^o \\ N_j^o \end{bmatrix}$$

vettore delle reazioni vincolari matrice di rigidesse simmetrica [6x6] vettore degli spostamenti

Ogni colonna della matrice si ottiene imponendo il relativo spostamento o rotazione e calcolando le reazioni iperstatiche agli estremi. Nel caso di forze esterne comporre il vettore delle forze equivalenti al carico esterno.

Una volta applicato uno spostamento ricorriamo una delle reazioni di modo, assunto i versi positivi convenzionali equivalenti ad entrambi gli estremi.

Ovviamente visto che la matrice di rigidesse ci dice il comportamento delle trave in relazione agli spostamenti. Gli 0 ci fanno capire poi che per alcuni casi non ci sono tutte le reazioni vincolari (es: N_i derive v_i e w_j)

la relazione superiore si può scrivere anche come

$$\begin{bmatrix} Q_i^* \\ Q_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i^* \\ \delta_j^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i^* \\ F_j^* \end{bmatrix}$$

* nel caso un sistema di riferimento locale

e ste per elemento

$$[K_e] \{d_e\} = \{Q_e^*\} + \{F_e^*\}$$

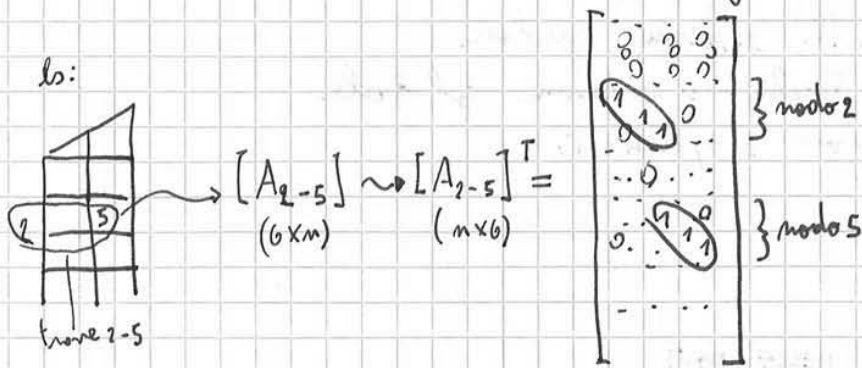
(6×6) (6×1) (6×1) (6×1)

UNICHE
INCORNITE

SEMPRE INCORNITE
MA DOPO SI SEMPRE FICHERANNO



le matrici A^T sarà come la seguente.



con le sostituzioni seguenti inseriamo la (2) nella (1):

$$([N]^T [K_e] [N]) [A_e] \{\delta^e\} = [A_e] (\{Q^e\} + \{F^e\})$$

moltiplichiamo ora per $[A_e]^T$ e otteniamo:

$$([A_e]^T [N]^T [K_e] [N] [A_e]) \{\delta^e\} = \{Q^e\} + \{F^e\} \quad (3)$$

$[K^e]$ - matrice di rigidezza locale rotata nel sistema di riferimento globale ed espansa alle dimensioni n

con quest'espansione si ha per esempio:

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ p_5 \\ w_5 \\ w_5 \end{bmatrix} \rightarrow \{\delta^e\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_2 \\ w_2 \\ w_2 \\ 0 \\ 0 \\ p_5 \\ v_5 \\ w_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

le steno cose si fa per $\{Q^e\}$ e per le $\{F^e\}$

3) ASSEMBLAGGIO

la (3) rimane valida e sostituiamo $\{\delta^e\}$ il vettore globale degli spostamenti nodali $\{\delta\}$:

$$[K^e] \cdot \{\delta\} = \{Q^e\} + \{F^e\} \quad (4)$$

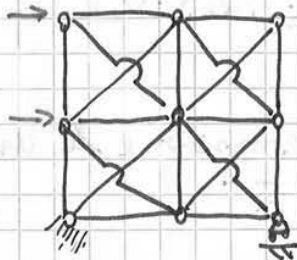
$(n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1)$

le (4) è sommabile e quelle relative alle altre travi:

$$\left(\sum_e [K^e] \right) \{\delta\} = \sum_e (\{Q^e\} + \{F^e\}) \quad (5)$$

• TRAVATURE RETICOLARI PIANE

sono solo soggette a N (con dovute approssimazioni)



4 volte iperstatica

In questo caso $[K]$ si semplifica di molto rimanendo solo i termini relativi a N :

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}$$

ma perché nella pratica si usano 2 diagonali? Una ~~tra~~ basterebbe. Si fa questo per avere effetto di controvento. Teoricamente per un controvento basterebbe e questo lavorare in trazione o compressione e ricorda dei corsi, ma per problemi costruttivi al posto di travi si usano spesso fili di acciaio che possono lavorare solo in trazione. Essi lavoreranno allora alternativamente.

Allora prima notiamo e poi espandiamo alle fine:

$$\begin{bmatrix} K^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^e \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [K^e] = [A_e]^T [N]^T [K_e] [N] [A_e]$$

$(n \times n)$ $(n \times 1)$ $(n \times 1)$

Sommando tutto al vertice di e si ha:

$$[K] \{ \delta \} = \{ F \}$$

Una volta noti tutti gli e :

$$\begin{bmatrix} \delta_e^* \end{bmatrix} = [N] [A_e] \{ \delta \}$$

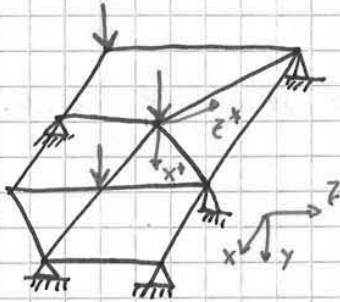
(2×1) (2×4) $(4 \times n)$ $(n \times 1)$

• GRIGLIATI PIANI

sono strutture redissate per creare orisontamenti.

In questo caso sono strutture caricate \perp alle travi, quindi non vanno più nel piano e si crea anche un momento torcente.

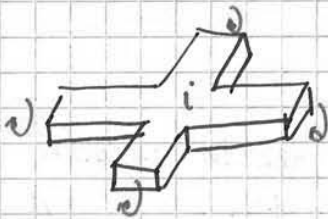
Le aste possono essere vincolate reciprocamente con nodi-incastro ed esternamente con incastri o appoggi \perp al piano.



3 parametri cinematici:

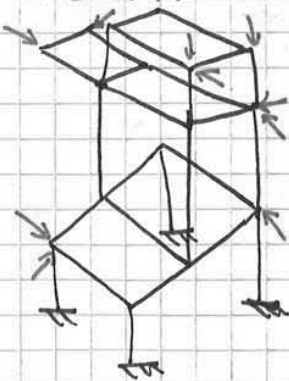
- 2 rotazioni con assi \perp contenuti nel piano
- spostamento \perp al piano

per questo tipo di costruzioni c'è un accoppiamento di sollecitazioni tra travi in direzioni diverse. Per capire meglio guardiamo un nodo qualsiasi:



il momento torcente lungo una direzione diventa ^{lungo x} momento lungo l'altra direzione.

• TELAI SPAZIALI



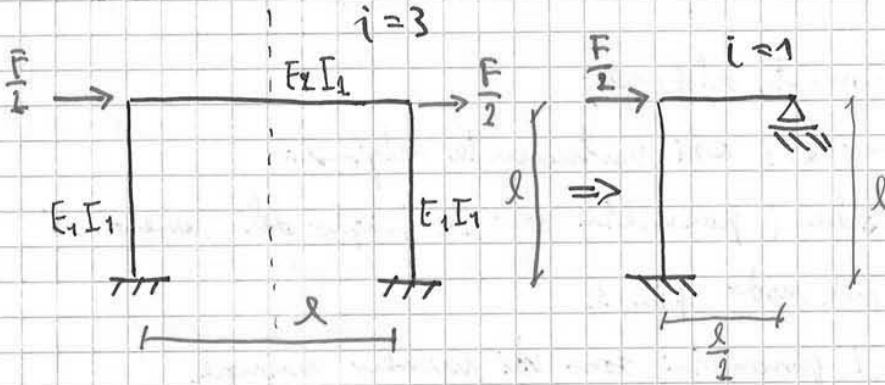
è il caso più generale che contiene come casi particolari telai piani e girevoli piani. Siamo in 3D e le aste sono vincolate tra loro non cerniere cilindriche o sferiche.

Il studio però si deve tener conto di effetti che si trascurano in 2D in modo da

dimensionare gli elementi in modo ottimale.

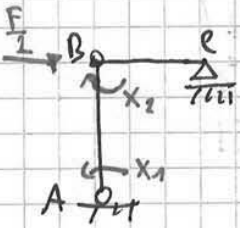
ⓐ In ogni nodo we abbiamo 6 p. d. l.

ESEMPIO:



la struttura diventa quella a lato perché è simmetrica caricata antisimmetricamente.

Il problema si può risolvere con il metodo delle forze
 Introduciamo i 2 momenti:



la reticolare snobbata risulta labile. Il telaio è a nodi spostabili. Allora per trovare le incognite x_1, x_2 e φ si scrivono 2 eq. di congruenza e una di equilibrio:

$$\begin{cases} \varphi_{AB} = 0 \\ \varphi_{BA} = \varphi_{BE} \\ P.L.V. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1 l}{3E_1 I_1} + \frac{x_2 l}{6E_2 I_2} - \varphi = 0 \\ -\frac{x_2 l}{3E_1 I_1} - \frac{x_1 l}{6E_2 I_2} - \varphi = \frac{x_2 l}{6E_2 I_2} \\ -x_1 l + x_2 l + \frac{F}{2} l \varphi = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \text{eq. di} \\ \leftarrow \text{Congruenza} \\ \leftarrow \text{il PLV sancisce l'equilibrio.} \end{matrix}$$

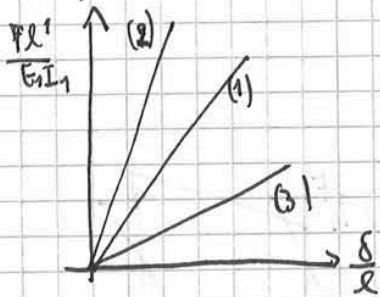
risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = \left(1 - \frac{3E_2 I_2 / E_1 I_1}{1 + 6E_2 I_2 / E_1 I_1} \right) \frac{Fl}{2} \\ x_2 = - \frac{3E_2 I_2 / E_1 I_1}{(1 + 6E_2 I_2 / E_1 I_1)} \frac{Fl}{2} \\ \varphi = \left(1 - \frac{9EI / EI}{2(1 + 6EI / EI)} \right) \frac{Fl}{6EI} \end{cases}$$

Otteniamo 3 situazioni limite:

- 1) $\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} = 1$
- 2) $\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \rightarrow \infty$ - travaso infinitamente rigido
- 3) $\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \rightarrow 0$ - colonne infinitamente rigide

Il punto di forza applicato è evidente come un telaio SHEAR TYPE (2)
 compatti uno spostamento minore del trave (33% rispetto a (1)), mentre
 lo spostamento massimo si ottiene con la condizione $E_1 I_1 / E_2 I_2 \rightarrow 0$ (3)



dal sistema otteniamo:

$$X_2 = \frac{8}{9} Fl - \frac{EI}{3l} f$$

$$X_2 = \frac{2}{9} Fl + \frac{6EI}{5l} f$$

$$X_1 = 2X_2 - 2Fl$$

uguagliando i 2 secondi membri allora:

$$f = \frac{22}{63} \frac{Fl^2}{EI} ; X_2 = \frac{18}{23} Fl ; X_1 = -\frac{10}{23} Fl$$

vediamo cosa succede nei nodi:

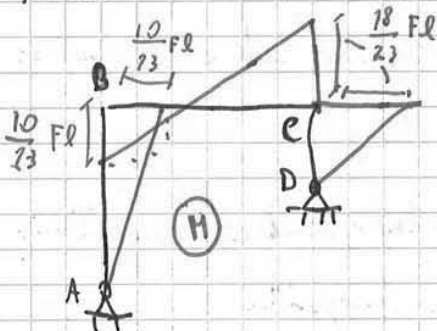


in B la tensione è
opposita internamente:
fibre tese interne

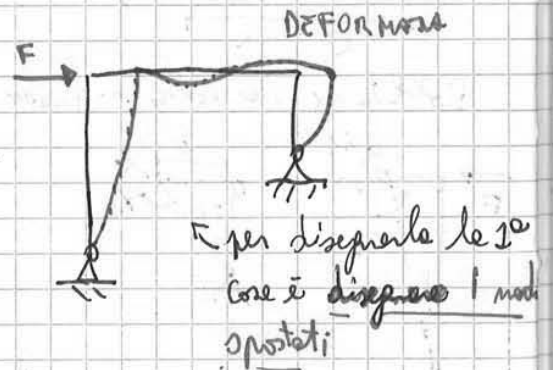


in C la tensione è opposta
all'esterno: fibre tese
nella parte esterna.

Noti i M ai due nodi è facile tracciare il diagramma di M tenendo conto che
nella cerniera M sarà nullo:

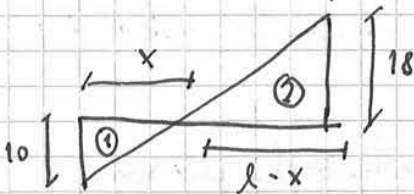


notiamo come costantemente
e quanto detto prima CD è
più rigido, quindi "soffre"
di più.

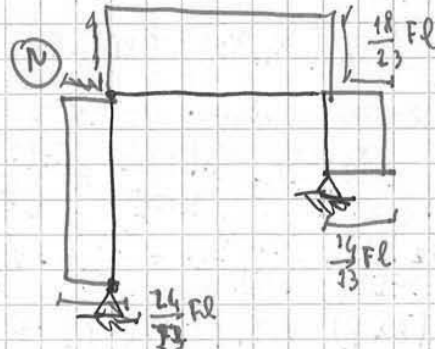
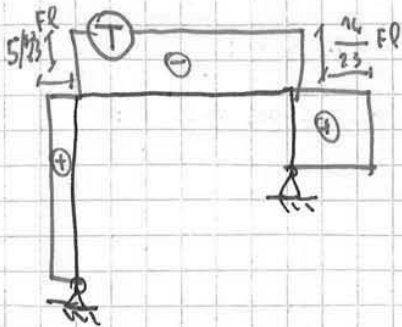


se ci interessa trovare δ : $\delta = f \cdot 2l = \frac{44}{63} \frac{Fl^3}{EI}$

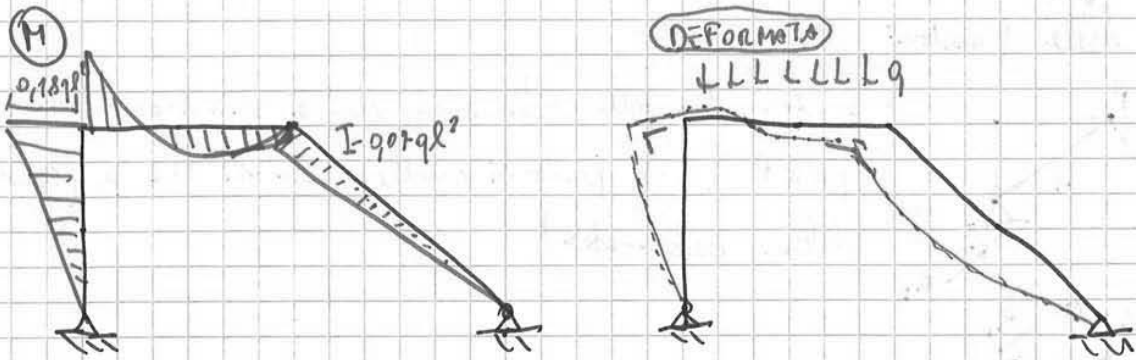
Per calcolare la posizione del flessor si fa una similitudine:



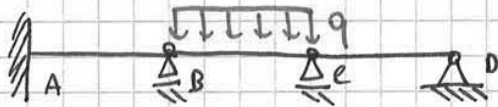
(1) e (2) sono simili. Allora:
 $10 : 18 = x : (l-x)$



Visto che i nodi sono 4
è facile trovare de T
e N.

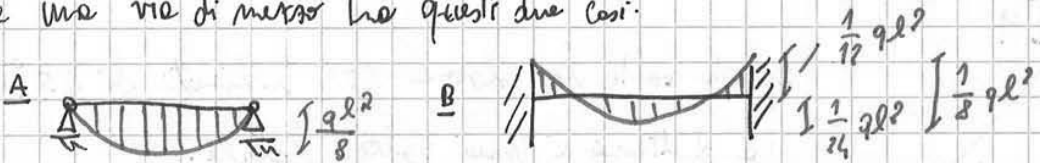


ESERCIZI

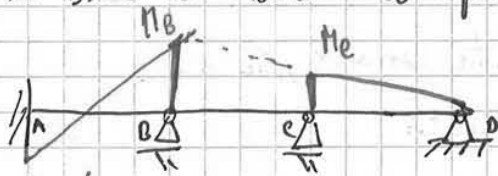


Concentrarsi su BC:

è una via di mezzo tra questi due casi:



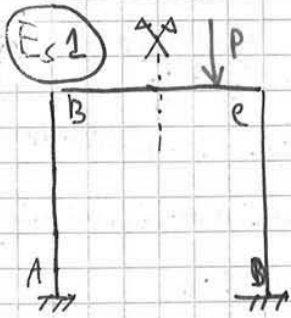
l'asta più rigida tra le 3 è sicuramente AB. Ci aspettiamo un momento negativo in BC che sarà come la somma tra $\frac{q l^2}{8}$ e $\frac{1}{24} q l^2$. Allora:



$\frac{l}{3}$
 visto che in A
 c'è un incastro
 $M = 0 \text{ a } \frac{l}{3}$

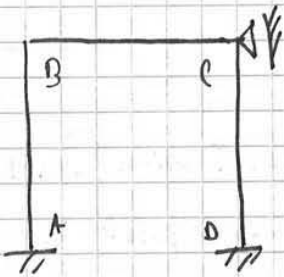
supponiamo che è una parabola e redigiamo la costruzione grafica.

ESERCIZI DI PORTALI

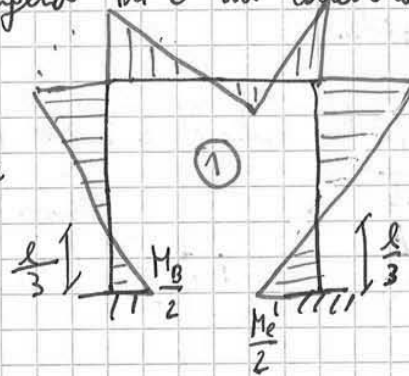


↓ P non è simmetrica. Il telaio è e non è spostabile perché se facciamo la reticolare associata risulta labile.

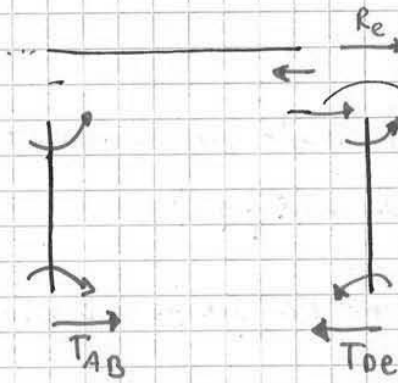
trasformandolo a nodi fissi aggiungendo un corollino ausiliario:



studiamo qualitativamente le strutture:

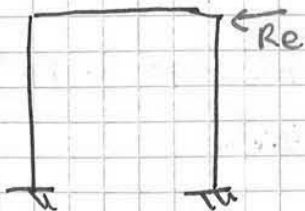


per studiare il taglio:



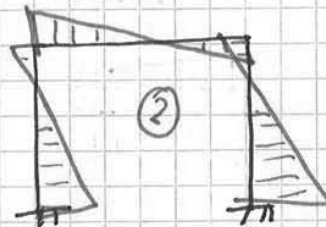
più grande perché è proporzionale al momento che è più grande.

aggiungiamo ora l'azione del corollino:



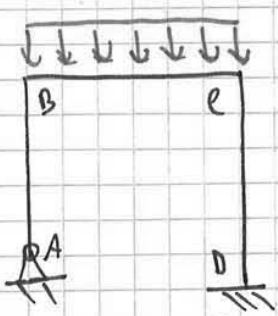
il punto di nullo del momento sulle colonne zero > l/2

momento dovuto all'azione del corollino.



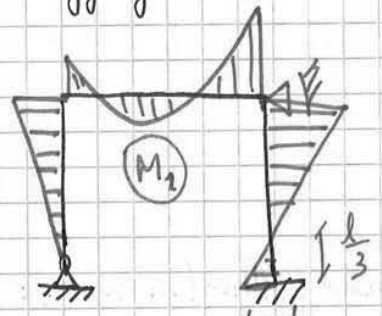
per avere il diagramma completo delle strutture basta sommare (1) + (2):

(Es 3)

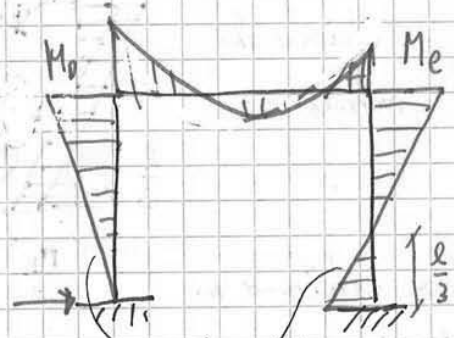
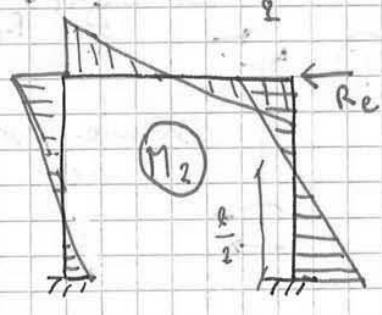
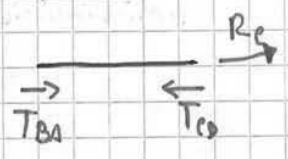


sta volta non c'è simmetria di vincolo. Intuitivamente che lo spostamento sarà verso sinistra perché è molto meno rigido.

aggiungiamo il vincolo ausiliario e disegniamo il diagramma e modi fissi:



ovviamente il taglio è più forte a destra:



la pendenza è opposta infatti i tagli sono uguali.

notiamo che il momento più forte è in B nonostante la trave più rigida è a destra.

(26)

ora visto che abbiamo fatto l'ipotesi di piccoli spostamenti sappiamo che:

$$\begin{cases} \cos \frac{\delta s}{2} = 1 \\ \sin \frac{\delta s}{2} = \frac{\delta s}{2} = \operatorname{tg} \frac{\delta s}{2} \end{cases} \text{ e allora sostituendo:}$$

$$\textcircled{1} \quad -N + T \frac{\delta s}{2} + p \cdot n \delta s + N + \delta N + (T + \delta T) \frac{\delta s}{2} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad N \frac{\delta s}{2} + T - q n \delta s - (T + \delta T) + (N + \delta N) \frac{\delta s}{2} = 0$$

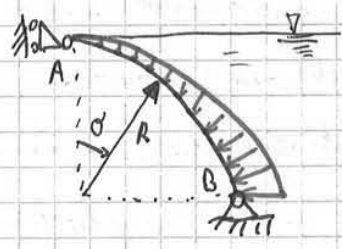
$$\textcircled{3} \quad -T \frac{\delta s}{2} \cdot n + m \delta s \cdot n - (T + \delta T) \frac{\delta s}{2} \cdot n + \delta M = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\delta N}{\delta s} + \frac{T}{n} + p = 0 \\ \frac{\delta T}{\delta s} - \frac{N}{n} + q = 0 \\ \frac{\delta M}{\delta s} - T + m = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\delta N}{\delta s} + T + pR = 0 \\ \frac{\delta T}{\delta s} - N + qR = 0 \\ \frac{\delta M}{\delta s} - TR + mR = 0 \end{cases}$$

EQ. INDEFINITE
D'EQUILIBRIO
PER LA TRAVE

PER ARCHI E (se il tubo è chiuso otteniamo le
formule di Mercator usate in idraulica)

Un esempio di un problema dove applicare le equazioni precedenti è il seguente:



Scrivendo l'equazione di 3° grado che rappresenta il sistema in alto, risolvendola e applicando le giuste condizioni al contorno si ottiene:

condizioni al contorno:

$$\begin{matrix} M_A = 0 & p(\delta) = m(\delta) = 0 \\ T_A = 0 & q(\delta) = -\gamma R(1 - \cos \delta) \\ M_B = 0 \end{matrix}$$

Se $n \rightarrow \infty$ siamo nel caso di travi rettilinee e le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \frac{\delta N}{\delta s} = -p(z) \\ \frac{\delta T}{\delta s} = -q(z) \\ \frac{\delta M}{\delta s} = T \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{EQ. INDEFINITE DI} \\ \text{EQUILIBRIO PER} \\ \text{TRAVI AD} \\ \text{ASSE RETTILINEO} \end{matrix}$$

28

Scriviamo inoltre le eq. indefinite d'equilibrio e le equazioni costitutive:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{d}{ds} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{ds} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ p \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \epsilon_x \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_x}{GA} & \frac{t_{xy}}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{xy}}{GA} & \frac{t_y}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

eq. STATICHE
 $[D]^* [Q] + \{F\} = \{0\}$

eq. COSTITUTIVE (inverse delle seguenti):
 $\{q\} = [H]^{-1} \{Q\}$

risorse:

eq. cinematiche: $\{q\} = [S] \{\eta\}$

eq. statiche: $[D]^* [Q] + \{F\} = \{0\} \Rightarrow$

$$\underbrace{([D]^* [H] [D])}_{[L]} \{\eta\} = -\{F\}$$

eq. costitutive: $\{q\} = [H] \{Q\}$

- ASSE RETTILINEO

in caso di asse rettilineo si ha:

$$\begin{bmatrix} \delta_y \\ \epsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta_x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \delta_y \\ \epsilon_x \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_y}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix}$$

eq. CINEMATICHE

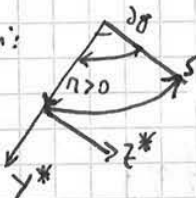
eq. STATICHE

eq. COSTITUTIVE

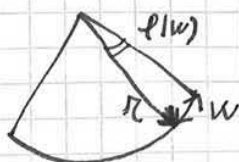
- ASSE CURVO

Prendiamo una trave ad asse curvilineo. Si ha $ds = r d\theta$. Adottiamo le seguenti

conclusioni:



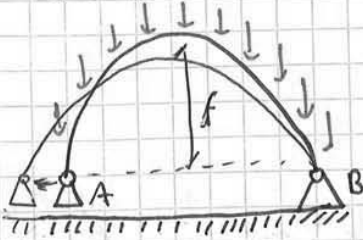
Lo spostamento assiale w produce come nello schema seguente uno $\phi(w)$:



$\phi(w) = \frac{w}{r} \quad (1)$

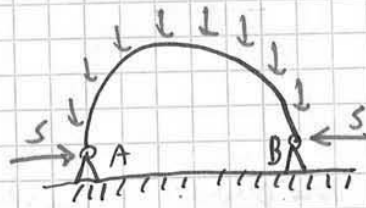
Leonardo Da Vinci diceva che "l'arco nasce dalla contrapposizione di 2 forze"

ARCO ISOSTATICO:



non lavora come un arco:
lavora a flessione e non sfrutta
tutto il comportamento ad arco

ARCO IPERSTATICO



le 2 reazioni orizzontali S
chiamate SPINTE sono fondamentali.

Una struttura ad arco sopporta per il 80%-90% il peso proprio e per il resto altri carichi. Il comportamento ottimale si ha per base frecce fino a una certa curvatura (dopo come di arco la sua funzione d'arco e diviene una trave normale).

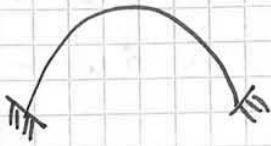
Fondamentale è che A e B rimangano fermi.

NOMENCLATURA

- luce: distanza dei piedritti dell'arco (imposta)
- intradosso: parte inferiore dell'arco (concavo)
- estradosso: parte superiore dell'arco (convesso)
- pioni d'imposte: le superfici da cui parte l'arco (A e B)
- conci: unità costruttive dell'arco.
- chiave: il punto più alto dell'arco (l'ultimo che viene montato)
- frecce: (o monte o scelta) distanza tra punto di chiave e corda
- veni: pioni inclinati di 30° rispetto al P.O. (punti-critici)

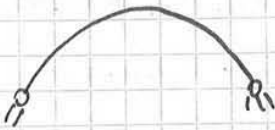
distinzione in base ai vincoli:

→ INCASTRATO



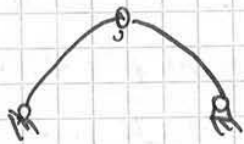
usati per strutture a ponte o in generale quando ci sono forti carichi concentrati. Soffrono per le variazioni termiche e cedimenti.

→ e 2 CERNIERE



un po' meno sensibili a variazioni termiche e cedimenti.

→ e 3 cerniere - isotatica per eccellenza

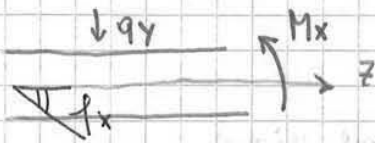


è la migliore soluzione se abbiamo dubbi su cedimenti o variazioni termiche.

Le spinte si trovano calcolando il momento rispetto alla cerniera di chiusura.

C'è una differenza di rotazione tra lastre e travi:

1) TRAVI



2) LASTRE

L'ordine delle striscie è x e non z e la rotazione sarà f_x (e non f_y come sarebbe stato altrimenti).

In seguito al carico $q(z)$ abbiamo 2 effetti:

- abbassamento del piano medio $w(x,y)$
- rotazione dovuta all'inflessione f_x della faccia di normale x . P.e. cause delle rotazioni ruote verso sinistra.

Definiamo gli spostamenti di P:

$$\begin{cases} u = f_x \cdot z = - \frac{\partial w}{\partial x} z \\ v = f_y \cdot z = - \frac{\partial w}{\partial y} z \\ w = w(x,y) \end{cases}$$

Ogni spostamento è il prodotto tra l'angolo e la quota del piano medio z .

Il segno - è dovuto alle convenzioni assunte.

Notiamo come siano rispettate le ipotesi di

Kirchhoff ($w(x,y)$)

Dati dati gli spostamenti, cerchiamo le deformazioni per semplice derivazione del campo di spostamenti:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial x} \right) z = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

ora dobbiamo arrivare alle σ e per far questo usiamo le eq. costitutive: invertite:

$$[\sigma] = [H] \cdot [\epsilon] \rightarrow [\epsilon] = [H]^{-1} [\sigma]$$

allora:

$$\epsilon_x = \chi_x z = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \cancel{\sigma_x})]$$

$$\epsilon_y = \chi_y z = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_y})]$$

$$\gamma_{xy} = \chi_{xy} z = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

dalle precedenti ricaviamo le σ_x , σ_y e τ_{xy} :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{cases} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

↓

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_x z + \nu \chi_y z)$$

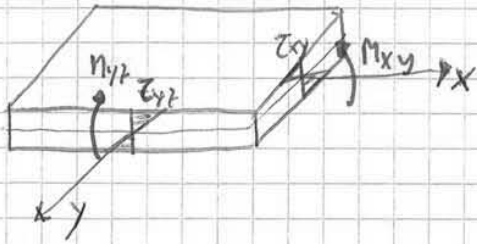
← tutte lineari con z.

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_y z + \nu \chi_x z)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\chi_{xy} z)$$

notiamo che siamo di nuovo nel caso di uno stato piano! (non ci sono più ϵ_z). Uno stato piano può non più essere deformativo piano e tensionale piano allo stesso tempo.

Altra differenza tra trave e lastre: le caratteristiche elastiche vengono amplificate dal fatto che le "strisce" non sono "zile" ma sono tutte collegate in parallelo tra loro e quindi non possono deformarsi indipendentemente ma si deve tener conto delle loro interazione. (B)

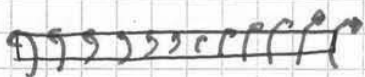
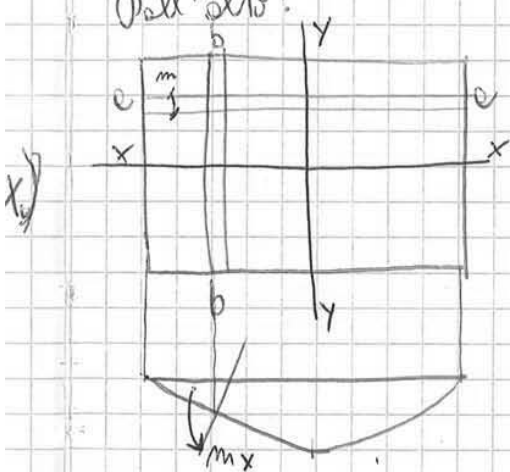


RUOLO DEL MOMENTO TORRENTE

Per avere il "comportamento a piastra" il rapporto tra le dimensioni per una piastra rettangolare dovrebbe essere $\leq 1,5$.

Se invece la piastra è allungata il comportamento a piastra si realizza vicino ai bordi (M_{xy} importante) mentre in messerie lavorano solo le strisce più forti (più corte).

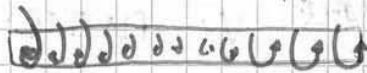
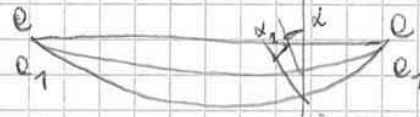
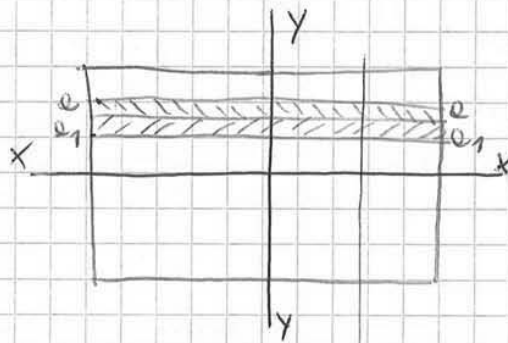
Dall'alto:



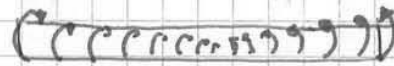
M_{xy} è max sul bordo

e nullo in messerie.

Le strisce cc , per seguire la flessione di bb subiscono torsione.



Effetto della striscia cc sulle strisce cc

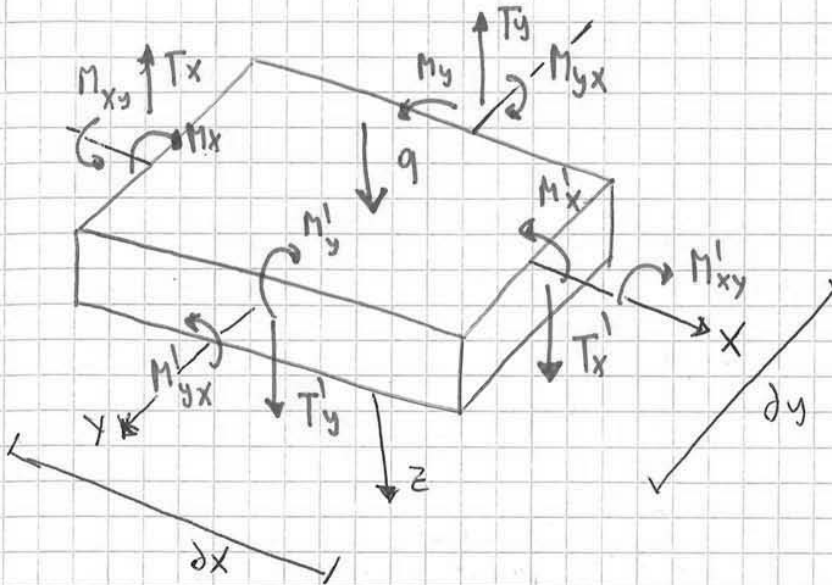


Effetto della striscia cc sulle strisce cc

strisce adiacenti: per la congruenza le strisce che si allungano diversamente, devono ruotare attorno a x .

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Prendiamo un elemento infinitesimo di piastra e imponiamo i 3 equilibri:



dove:

$$\begin{aligned} M_x' &= M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \\ M_y' &= M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \\ M_{xy}' &= M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \\ M_{yx}' &= M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \\ T_x' &= T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \\ T_y' &= T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \end{aligned}$$

equilibrio lungo z:

$$\begin{aligned} +\downarrow - T_x dy + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \right) dx - T_y dx + q dx dy &= 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy dx + q dx dy &= 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned}$$

equilibrio intorno all'asse x:

$$\begin{aligned} +\curvearrowright M_{xy} dy - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \\ + T_y dx \frac{dy}{2} + \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot \frac{dy}{2} &= 0 \\ \text{infinitesimo di ordine superiore.} \\ - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + T_y \frac{dx dy}{2} + T_y \frac{dx dy}{2} &= 0 \\ - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y &= 0 \end{aligned}$$

allo stesso modo scrivendo l'equilibrio intorno all'asse y si ottiene:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x = 0 \quad M_{xy} = M_{yx}$$

Deduciamo allora che l'equilibrio di una lastra è un problema di 3 equazioni in 5 incognite:

LA LASTRA È INTRINSICAMENTE 2 VOLTE IPERSTATICA
(le trave invece è intrinsecamente isostatica)

- EQ. COSTITUTIVE

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{6} b h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{6} b h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D}{2} (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad \{Q\} = [H] \{q\}$$

allora in forma compatta:

$$\begin{cases} \{q\} = [D] \{\eta\} & \text{EQ. CINEMATICHE} \\ [D]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\} & \text{EQ. STATICHE} \\ \{Q\} = [H] \{q\} & \text{EQ. COSTITUTIVE} \end{cases}$$

combinandole:

$$\begin{aligned} [D]^* [H] \{q\} + \{F\} &= \{0\} \\ [D]^* [H] [D] \{\eta\} + \{F\} &= \{0\} \\ [L] &= \text{operatore di Lami} \end{aligned}$$

il problema elastico della lastra inflessa sarà allora:

$$\begin{aligned} [D] \{\eta\} &= -[F] \quad \forall p \in S \\ ([N]^T [H] [D]) \{\eta\} &= -\{P\} \quad \forall p \in C_p \\ \{\eta\} &= \{\eta_0\} \quad \forall p \in C_\eta \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [D] \{\eta\} &= -[F] \\ ([N]^T [H] [D]) \{\eta\} &= -\{P\} \\ \{\eta\} &= \{\eta_0\} \end{aligned}} \right\} \text{Condizioni al contorno.}$$

C_m è la posizione in cui sono presenti i vincoli

C_p è la posizione in cui sono assegnate le condizioni statiche

$$[N]^T = \begin{bmatrix} M_x & M_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_x & 0 & M_y \\ 0 & 0 & 0 & M_y & M_x \end{bmatrix}$$

dalle equazioni costitutive poi:

$$M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y) = D\left(\frac{\epsilon_x}{2} + \nu \frac{\epsilon_y}{2}\right) = D\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \chi_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \frac{\gamma_{xy}}{2} = D \frac{1-\nu}{2} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

sostituendo nella (4) si ha:

$$-D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right) - 2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + q = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

e alla fine si ottiene:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q}{D}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\nabla^4 w = \frac{q}{D}}}$$

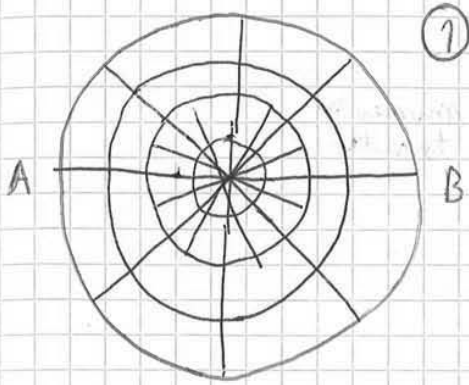
$$\text{dove } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Downarrow$$

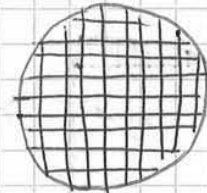
$$\nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{q}{D}$$

notiamo che nel caso assial simmetrico la legge di m_r è parabolica e M_r è 0 sugli appoggi - Questo vuol dire che l'anello esterno è sollecitato circonferenzialmente -

Il modo in cui conviene armare la piastra allora è il seguente:



mentre è sbagliato armare nel seguente modo:

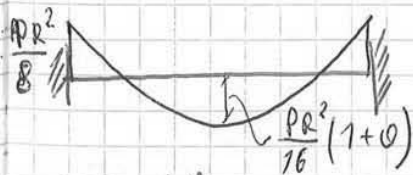


in questo caso ^{caso} bisogna armare di più perché non ottimizziamo l'armatura

inoltre i bordi non vengono armati e si rischiano fessurazioni!

per semplicità nei calcoli si usa comunque lo più lo schema (2), perché il montaggio delle armature risulta molto più rapido e semplice.

Se la lastra è incastata invece si ha:



(M_1) della trazione centrale

in questo caso la lastra presenta un enorme rigidismo

DIREZIONI PRINCIPALI DEI MOMENTI

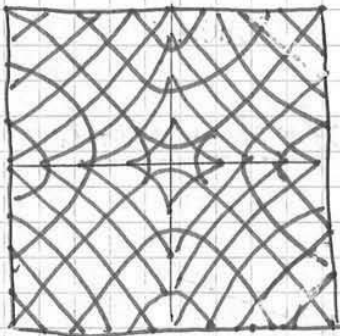
relativamente ad un punto della latta, si dicono direzioni principali dei momenti le due direzioni ortogonali dove si annulla il momento torcente M_{xy} e quindi le tensioni tangenziali τ_{xy} . Tali direzioni (isotetiche dei momenti) coincidono con quelle principali di tensioni.

Le direzioni principali di curvatura sono le 2 ortogonali secondo cui si annulla l'angolo di torsione $\chi_{xy}/2$.

Se il materiale è isotropo, l'equazione costitutiva mostra come le direzioni principali dei momenti e quelle delle curvature coincidono.

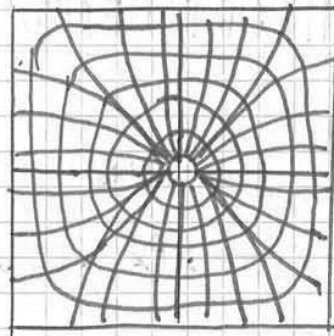
DIREZ. PRINCIPALI DEI MOMENTI

piastre quadrate con p uniforme e bordo appoggiato



DIREZ. PRINCIPALI DEI MOMENTI

piastre quadrate con p uniforme e bordo incastato



PIASTRA NERVATA

Nervi realizzati piastre nervate secondo le isotetiche dei momenti.

Con il PLV si ottengono le seguenti equazioni cinematiche:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

notiamo che la lastre curvate nel piano è 1 volta iperstatica

lo stato di tensione è piano infatti:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\begin{aligned} N_x &\xrightarrow{\text{genera}} \epsilon_x \\ N_y &\xrightarrow{\text{genera}} \epsilon_y \\ N_{xy} &\xrightarrow{\text{genera}} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

Una membrana curvata in compressione nel piano dà problemi di instabilità (carico critico porta a spaccamento)

integrando poi si ottengono le equazioni costitutive:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = \sigma_x h = \frac{12D}{h^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz = \sigma_y h = \frac{12D}{h^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz = \frac{6(1-\nu)D}{h^2} \gamma_{xy}$$

le travi, i serbatoi, i tubi, le strutture in generale hanno comportamenti membranali

dove $\frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)}$

$$D = \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)}$$

"stato normale misto" ma è più simile ad un taglio

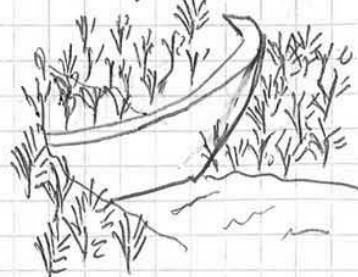
ritorniamo ora alle lastre a doppia curvatura.

Abbiamo un regime membranale (riassunto sopra), che si oppone ad un

REGIME FLESSIONALE

- taglio T_1 e T_2
- momenti flettenti M_1 e M_2
- momento torcente M_{12}
- slonimenti χ_1 e χ_2
- curvatura flessionali χ_1 e χ_2

• dopo dell'angolamento di torsione χ_{12}



in pianta:



in sezione



indichiamo ora con $[N]$ la matrice ortogonale di rotazione che permette di passare dal sistema locale 123 al sistema globale xyz.

allora

$$\{F^*\} = [N] \{F\}$$

$$\{\eta^*\} = [N] \{\eta\}$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\eta^*\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

allora possiamo definire il

PROBLEMA ELASTICO

è definito in questo modo:

$$[L] \{\eta\} = -\{F\} \quad \forall P \in S$$

$$\left. \begin{aligned} ([N]^T [L]^T [H] [L] [N]) \{\eta\} &= \{p\} \quad \forall P \in C_p \\ \{\eta\} &= \{\eta_0\} \quad \forall P \in G_\eta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{condizioni} \\ \text{el} \\ \text{contorno} \end{array}$$

$[N]^T$ è una matrice che trasforma le caratteristiche statiche nelle sollecitazioni.

$$[N]^T \{Q\} = [N] \{p\}$$

se n è polarsimmetrico, α_2 , le norme al meridiano, insieme irrilevante.
 $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ sulle sfere è costante

inoltre

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = -\frac{1}{R_1} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial s_1} = \frac{R_2}{\cos \alpha} - \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial \ln \alpha}{\partial s_1} = \tan \alpha \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right)$$

il termine $\frac{1}{R_2}$ che è ricorrente nelle matrici cinematiche e statiche vale:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{R_1}{R_2(R_1 - R_2)} \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_1} = \frac{\tan \alpha}{R_2} = \frac{\partial \ln \alpha}{\partial s_1}$$

equazioni statiche e cinematiche rispettano perfettamente le dualità statico - cinematiche (Capitolo vol. 2 - pag 36 e 37)

Quelle che ci interessano sono le deformazioni membranali, per questo si costruiscono strutture a doppia curvatura per farlo lavorare in maniera membranale, NON flessionale.

Nelle dighe, in prossimità delle spalle o contatto della roccia nascono sempre flessioni:

χ_{s_1}, χ_{s_2} - distorsioni del "Tensky"

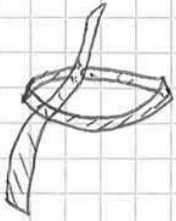
χ_{s_1}, χ_{s_2} - curvatura flessionale dovuta a coppie flettenti

χ_{s_1}, χ_{s_2} - quasi sempre trascurabile, dovuta a "tranti" del Kirchhoff

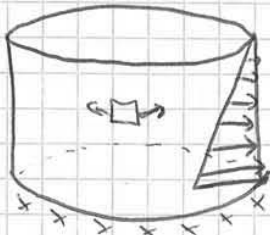
ρ_s, ρ_θ sono rotazioni sulle facce normali s e θ !
 (non attorno gli assi s e θ)

Il problema elastico delle lastre di rivoluzione è 3 volte iperstatico

possiamo studiare il comportamento di "spicchi" meridionali e "spicchi" paralleli.



Prendiamo un esempio di strutture sottili (es. depositi di idrocarburi)

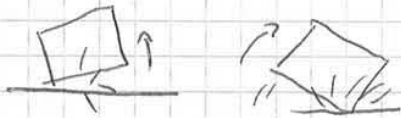


Si calcola la tensione dell'elementino, che è più elevata negli elementini inferiori.

La progettazione per strisce rettili è ammissibile in regime statico.

In caso sismico le cose cambiano:

- 1) $m \cdot \ddot{e}$ del liquido, sollecita il contenitore nelle oscillazioni
- 2) sollevamento del serbatoio:

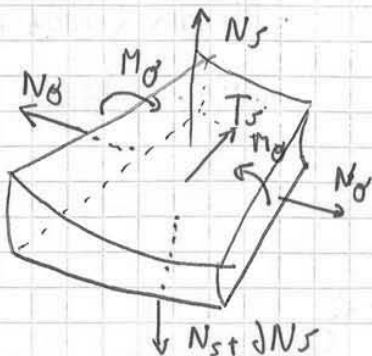


il serbatoio va in instabilità.

Obtengo 3 eq. di equilibrio:

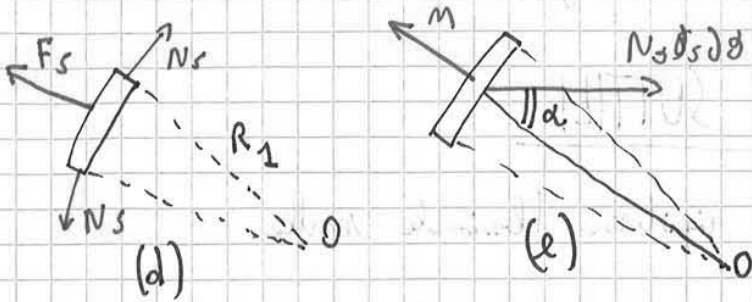
- trazione lungo i meridionali
- trazione lungo le normali ai meridionali
- rotazione intorno ai paralleli.

e 5 incognite statiche: $N_s, N_\theta, T_s, M_s, M_\theta$



• eq. trasl. lungo \vec{n}

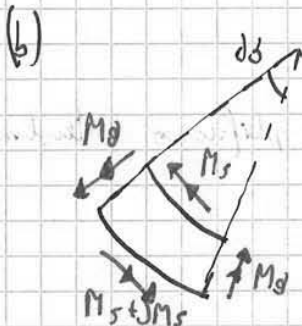
scheme (c) + (d) + (e)



$$(2) \quad -N_s \frac{\partial r}{\partial R_1} r d\theta - N_\theta \partial s \partial \theta \cos \alpha + \partial T_s r \partial \theta + T_s dr \partial \theta + F_m r \partial s \partial \theta = 0$$

• equilibrio alle rotazioni intorno ai paralleli:

(b) + (e)



$$(3) \quad -T_s r \partial \theta \partial r + \partial M_s r \partial \theta + M_s \partial r \partial \theta - M_\theta \sin \alpha \partial s \partial \theta = 0$$

dalle (2), (2) e (3) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right) & -\frac{\partial \ln r}{\partial r} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right) & -\frac{\partial \ln r}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ T_s \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_s \\ F_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EQVAZ. STATICHE

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sin \alpha}{r} & -\frac{\sin \alpha}{r} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_s \\ F_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

notiamo che la risultante non è perfetta perché abbiamo alcuni termini

notiamo che se ci sono fenomeni sismici, nasce un'instabilità dovuta al fatto che N_s diventa di compressione.

Proviamo fare un' ANALOGIA TRA MEMBRANE E PUNTI (2D) (1D)

1) Il problema elastico per trave curva è internamente isostatico perché abbiamo 3 incognite T, N ed M :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente il problema elastico per membrana e volte sottili è internamente isostatico:

te:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sin \alpha}{r} & -\frac{\sin \alpha}{r} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_s \\ F_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quando possiamo dar trovare rigide alle fibre, compariamo T ed M :

2) Per una fibre le eq. diventano:

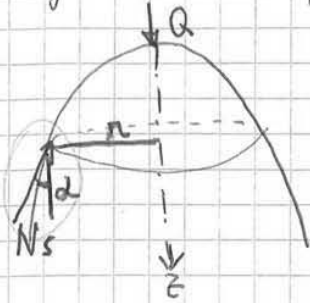
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui ricaviamo: $\begin{cases} \frac{N}{r} = q \\ \frac{\partial N}{\partial s} = -p \end{cases}$

le fibre è costante e seguire la sua curva delle pressioni.

Anche per le membrane abbiamo 2 eq. in 2 incognite: è sempre possibile trovare una soluz. di equilibrio indipendentemente dalla forma della membrana.

Un'alternativa a risolvere l'eq. differenziale precedente, possiamo considerare l'equilibrio della troncatura lungo z di una porzione della volta sferica al di sopra di un generatore parallelo dove Q è l'integrale dei carichi verticali che agiscono su tale porzione: $-N_s \cdot 2\pi r \cdot \cos\alpha + Q = 0$



$$Q = N_s \cos\alpha (2\pi r)$$

si ricava $N_s = \frac{Q}{2\pi r \cos\alpha}$

l'equazione si trasforma come segue:

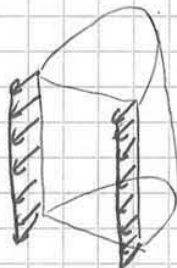
$$\frac{N_r}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2} = F_n \rightarrow \boxed{\frac{\sigma_r}{R_1} + \frac{\sigma_\theta}{R_2} = \frac{p}{h}}$$

dove h è lo spessore e p è la pressione agente normalmente alla superficie.

MEMBRANA CILINDRICA

Se la membrana è cilindrica sottoposta alla pressione interna p si ha

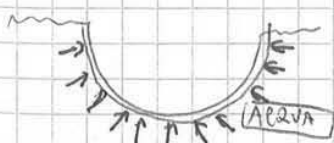
$R_1 \rightarrow \infty$; $R_2 = r$ e allora $\sigma_r = 0$ e $\frac{\sigma_\theta}{r} = \frac{p}{h}$



$\sigma_\theta = \frac{pr}{h}$ FORMULA DI MARLOTTE
(usata in idraulica)

MEMBRANA SFERICA

Medesimo caso una diga dall'alto (struttura simile al parabolo)

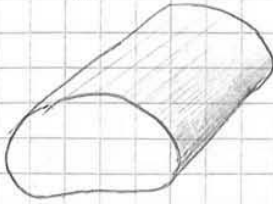


VISTA DALL'ALTO

se la diga è a semplice curvatura lavorano solo le tensioni circonferenziali. La doppia curvatura le si deve allora per avere un secondo ordine di ordini che resisterà allo sforzo dell'inverso.

Questo funzionamento è ammesso per una membrana sferica

Possiamo avere poi SERBATOI A GOCCIA



Si può dimostrare che quella forma è quella che il liquido assumerebbe se poggiato su un piano.
 È la forma migliore per avere tensioni tutte uguali (e il liquido è a pressione atmosferica)

men

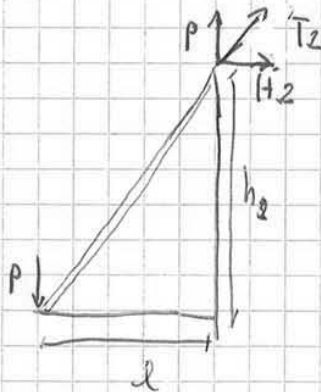
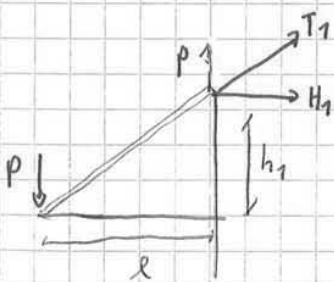
(si usa un
 conion)

TENSOSTRUTTURE

Non solo teoricamente le membrane si vede come 2 ordini di struce, perché in pratica esse si costruisce proprio così.
 Le tensostutture sono le sensative di essere tutte tese, ma in realtà ci saranno sempre degli elementi compressi.

FUNI E MEMBRANE

Entrambe queste strutture raggiungono l'equilibrio modificando la loro conformazione. Nella pratica è molto importante il rapporto $\frac{h}{l}$; consideriamo infatti questi 2 casi:



$$T_2 < T_1$$

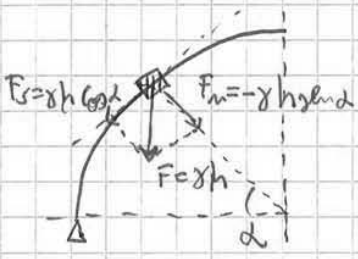
La natura applica lo stesso principio per il dimensionamento delle vertebre cervicali dei quadrupedi, le quali hanno la funzione di piloni ed oltre il punto d'attacco del "ligamentum nuchae", che rappresenta il tirante che sorregge la testa dell'animale.

25/11/2013

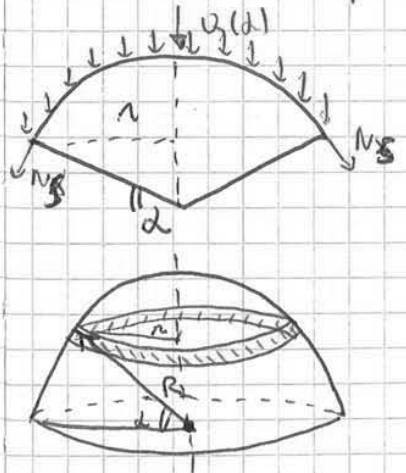
CUPOLA SOTTILE EMISFERICA SOGGETTA A PESO PROPRIO

Nelle strutture in muratura i carichi permanenti (peso proprio) prevalgono nettamente sui carichi variabili e questo deriva sia dal materiale in se (funzione di compressione e tiene una certa massa) e sia dal progettista che deve far ricadere le curve delle pressioni nelle strutture stesse.

Prendiamo una cupola sferica ad esempio e consideriamo l'effetto del peso proprio γh di spinta $\gamma \approx 1800 \div 2700 \frac{kg}{m^3}$ (tipicamente per il cls $\gamma \approx 2400 \frac{kg}{m^3}$) le murature più leggere sono i calcei, tuffi presenti al Sud. Le malte ha $\gamma \approx 1900 \div 2000 \frac{kg}{m^3}$



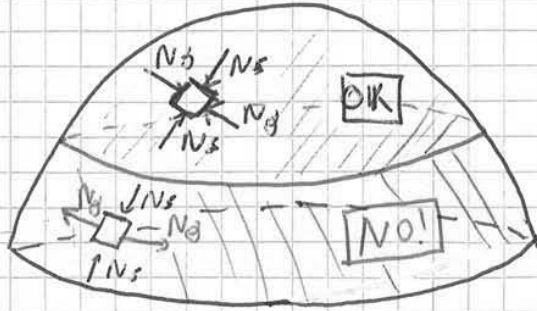
Prendiamo le equazioni per le membrane sottili, e per questo scomponiamo γh in 2 direzioni. Possiamo usare quelle equazioni per fare i conti in modo più semplice:



L'elemento JA è quello in rosso a lato.
 Quando $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ è il caso della cupola completa.
 Per $\alpha = 90^\circ$, il carico si annulla nel punto in sommità.
 Conoscendo $Q(\alpha)$ possiamo allora fare l'equilibrio:

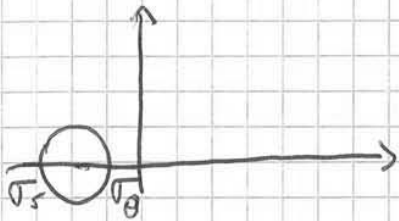
$$\begin{cases} N_s \cos \alpha (2\pi R) + Q(\alpha) = 0 \Rightarrow N_s = - \frac{Q(\alpha)}{2\pi R \cos \alpha} = - \frac{\gamma h R}{1 + 2h \sin \alpha} \\ \frac{N_s}{R} + \frac{N_d}{R} = F_m \Rightarrow N_d = \frac{1 - \sin \alpha - 2h \sin^2 \alpha}{1 + 2h \sin \alpha} \gamma h R \end{cases} \quad (65)$$

ci sarà un parallelo che divide il funzionamento statico in 2 modi:

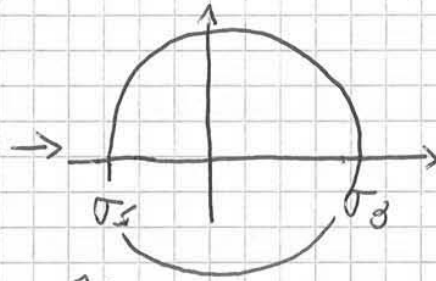


L'andamento in rosso non è buono!

Ricordando infatti l'andamento dei cerchi di Mohr e i criteri di Tresca e Von Mises, si pone dalle seguenti situazioni:



tutto compreso (come il parallelo rosso)



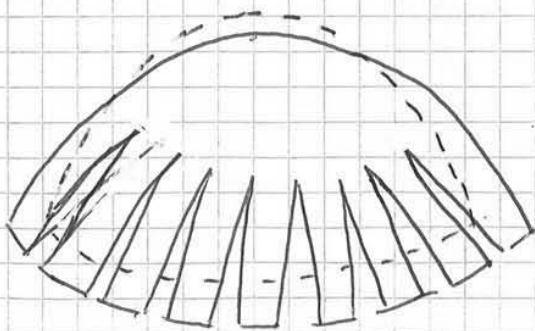
(dallo il parallelo rosso) non è tutto compreso

(nel punto di sommità il cerchio di Mohr diventa un punto - SITUAZ. IDEALE)

Se facciamo una modellazione ad elementi finiti, ad esempio con Lusas, ricaviamo per interpolazione gli sforzi di compressione e trazione:

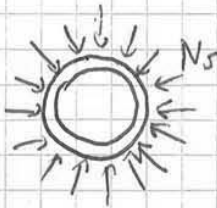
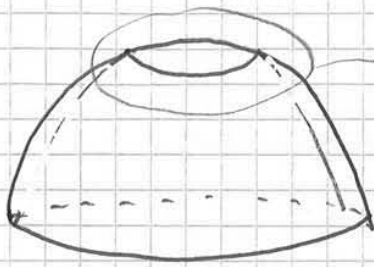
Per questo di critica è $L \approx 38,29$

I problemi che possono insorgere sono di flessione in questo modo:



Nel caso del Pantheon a Roma c'è un buco in sommità, e questo vuol dire che c'è un anello che lavora IN SOMMITÀ

A COMPRESSIONE:



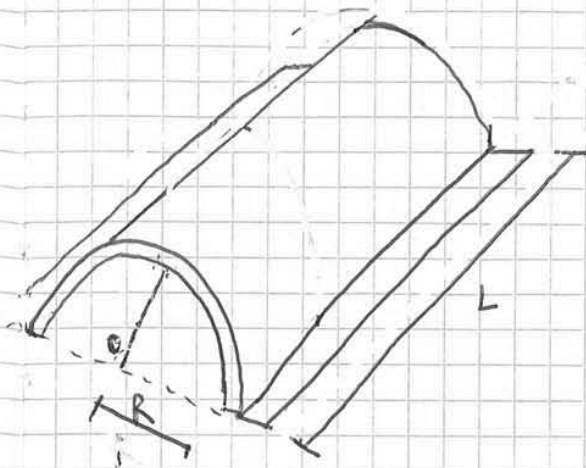
- la compressione si riceve dalle formule di Menotti invertite.

Le prime volte furono costruite dai Greci. Un esempio è il tempio di ATREO - Tomba di Sponemann dove si conoscono le forme dei tulli ("occhi lobbi" perché si mantengono anche se ne crolla metà).

La cloaca maxime a Roma è un altro esempio antico di volte (e tutte queste volte).

Dopo i Romani anche in Greg ci furono grandi volte, che però sono più rovinate in quanto sono fatte di fango, paglia e tene essiccate.

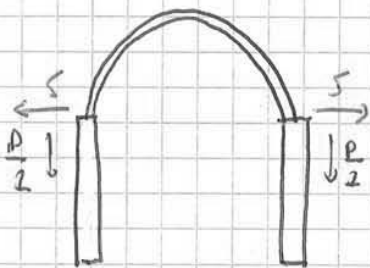
1) VOLTE A BOTTE



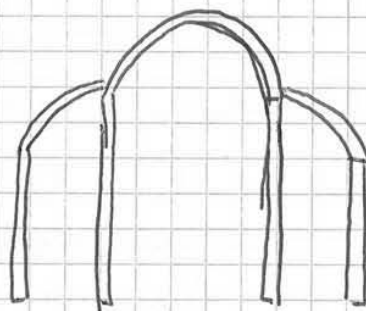
è un arco "esteso" nella sua direzione longitudinale.

Sono volte usate quando vanno coperti ambienti lunghi e non molto ampi in quanto il comportamento statico è quello di un insieme di archi.

Lo schema statico è quello di un arco che scivola con continuità lungo le pareti:

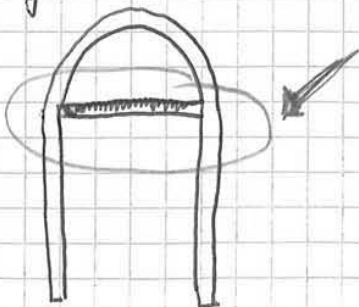


Quando S è basso, per contrastarlo si usano archi composti:

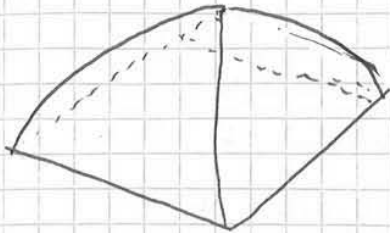


questo è un esempio di come nelle storiche la statica ha governato ed imposto l'architettura (es. chiese e 3 navate)

Un'altra alternativa a contrastare le spinte S può essere incatenare con portine di acciaio le volte (è stato fatto per i portici di Bologna o a Torino e Palazzo Medici)

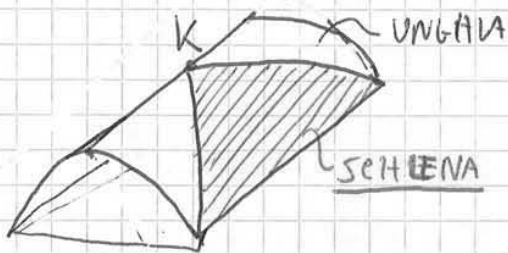


3) VOLTE A PADIGLIONE (volte composte)



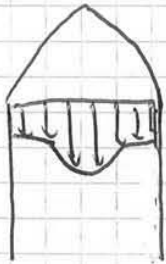
usate in ambienti quadrati dove il rapporto $\frac{a}{b}$ è ≈ 1

prendiamo una volta e botte e archi diagonali:



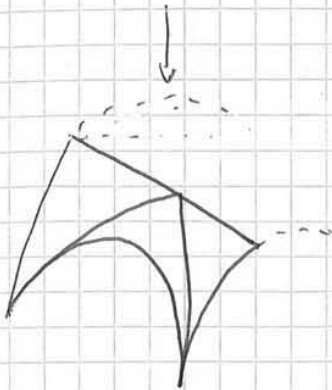
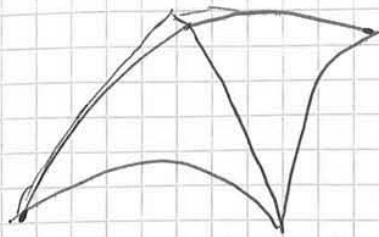
le volte a padiglione si costruiscono a coppia e 2 e 2,4 schiene

Lo scarico avviene nelle 4 pareti (si potrebbe pensare ad uno scarico di tipo diagonale ma lo scarico è più forte al centro dello spigolo.



è per questo motivo che se serve fare aperture nelle volte a padiglione è sempre meglio evitare di fare al centro.

5) VOLTE A CROCIERA



sono volte che scendono in 4 punti come fanno le volte a padiglione.

Si costruiscono come 4 volte a botte convergenti nelle direzioni delle 4 nglie.

Il suo funzionamento dipende dalle tecniche costruttive. Comandano comunque sempre i 2 archi diagonali.

Sono volte molto usate nell'architettura monumentale perché consente di avere

finestre (al contrario delle volte a padiglione).

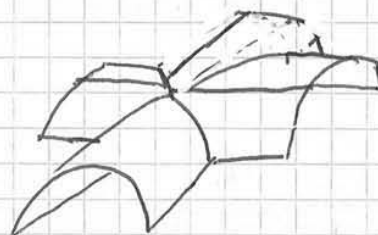
Il consolidamento migliore è con catene diagonali (danno però problemi estetici).

6) ALTRE VOLTE COMPOSTE

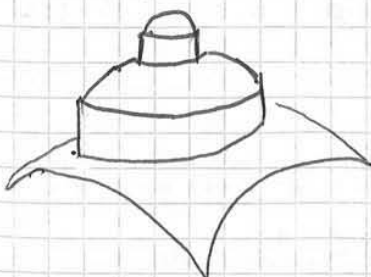
VOLTE A BOTTE CON TESTA DI PADIGLIONE



VOLTE A BOTTE LUNETTATE



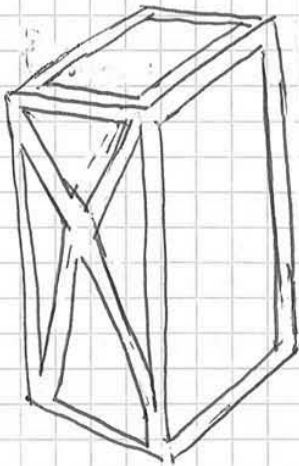
ENFOLE COMPOSTE



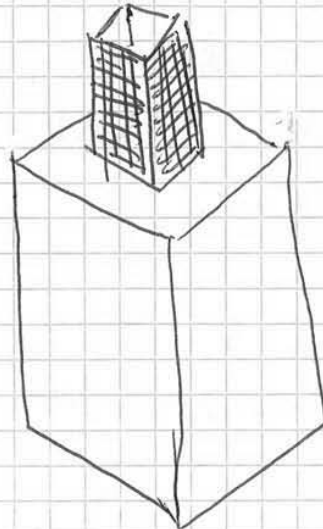
Schema a ESOSCHELETRI o ENDOSCHELETRI

Alcuni metodi di costruzione di edifici usano l'idea degli ESOSCHELETRI (es. granchio) o ENDOSCHELETRI (uomo).

In queste strutture i problemi più grandi sono dovuti all'impatto o alle dinamiche.



↑ schema ad "esoscheletro" di un edificio di Chicago controventato nelle facciate frontali



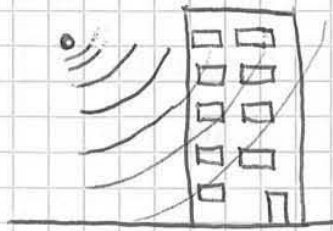
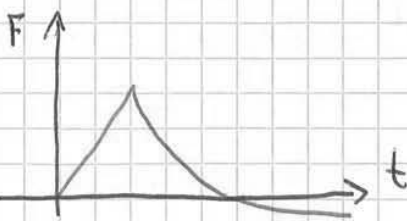
↑ edificio in costruzione ad "endoscheletro"

I vantaggi dell'esoscheletro si riducono notevolmente sotto carico dinamico (impatti).

Lo stesso ha sviluppato strategie contro la fragilità di esoscheletro come la compartimentazione, in questo modo un danno eventuale rimane circoscritto in un'area particolare e non si estende a tutta la struttura (esempio: il crano umano che è formato da ossa piccole unite da articolazioni)

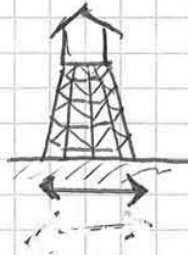
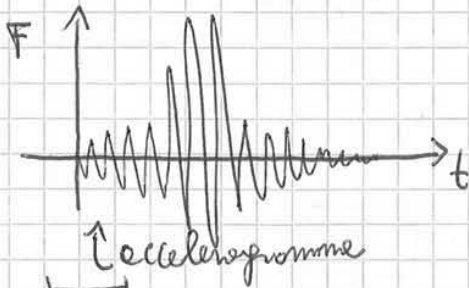
- CARICHI IMPULSIVI

ad esempio esplosioni:



- l'origine del carico è dovuta alle variazioni di pressione dell'aria.

o carichi sismici generici agenti ad esempio su un serbatoio:



Se una struttura è soggetta ad un carico statico, le sue deformazioni (e le sue sollecitazioni interne), dipendono solo del carico esterno tramite considerazioni di equilibrio interno.

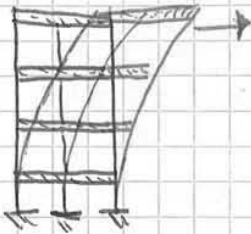
Se il carico è dinamico, la risposta strutturale dipende anche dalle forze d'inerzia che si oppongono alle accelerazioni, oltre che alle forze elastiche che si oppongono agli spostamenti. Nell'azione dinamica non c'è una vera e propria forza applicata, ma c'è l'eccitazione delle masse della struttura.

Se la struttura è soggetta anche a forze di smorzamento viscoso, la risposta dipenderà da tali forze, che nel caso più semplice si oppongono alla velocità. Lo smorzamento è la capacità dissipativa dei materiali (è proporzionale alla velocità).

Se il moto risulta così lento da poter trascurare le forze viscoso che forze d'inerzia l'analisi può essere fatta per istante di tipo statico, sebbene carico e risposte strutturali risultino essere variabili nel tempo.

OSCELLAZIONI LIBERE

Questo paragrafo è fondamentale perché ci fornisce le caratteristiche dinamiche vibrazionali delle strutture:

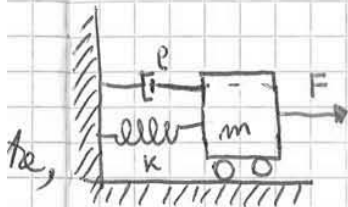


quello che facciamo è vedere le caratteristiche "autonome" delle strutture: è come se le "tiriamo" e poi le lasciamo vibrare finché non si smettono.

L'equazione del moto di una massa elementare soggetta ad una forza d'inerzia, una elastica ed a una forza di attrito viscoso si scrive:

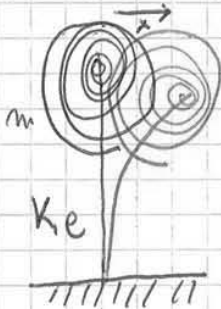
$$(*) \quad m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{EQ. DI EQUILIBRIO} \\ \text{DINAMICO} \end{array} \right)$$

INERZIA FORZE DI
SMORZAMENTO

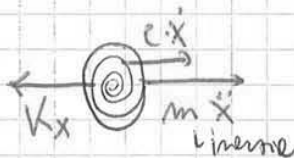


x è l'elongazione della molla elastica lineare che dipende dal tempo, K è la rigidità della molla, e c è la costante di smorzamento viscoso.

Un'altro schema tipico è il seguente:



e dipende dalla velocità.
 l'equazione sopra è un'equazione di equilibrio perché:



nella massima elongazione $\ddot{x} = 0$

Entrambe le forze attive

$$-Kx \quad \text{e} \quad -c\dot{x}$$

sono negative nel caso di elongazioni e, rispettivamente, di velocità positive.

Un'interpretazione si può vedere dal PRINCIPIO DI D'ALAMBERT. Ricorda che una massa è in equilibrio nel proprio sistema una volta soggetta a tutte le forze attive e passive.
 Le forze passive sono quelle d'inerzia.

Le due condizioni iniziali delle oscillazioni libere sono $x(t=0)$ e $\dot{x}(t=0)$.

Alternativamente $x(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$ e si detta FASE

notiamo che t è argomento della funzione trigonometrica.

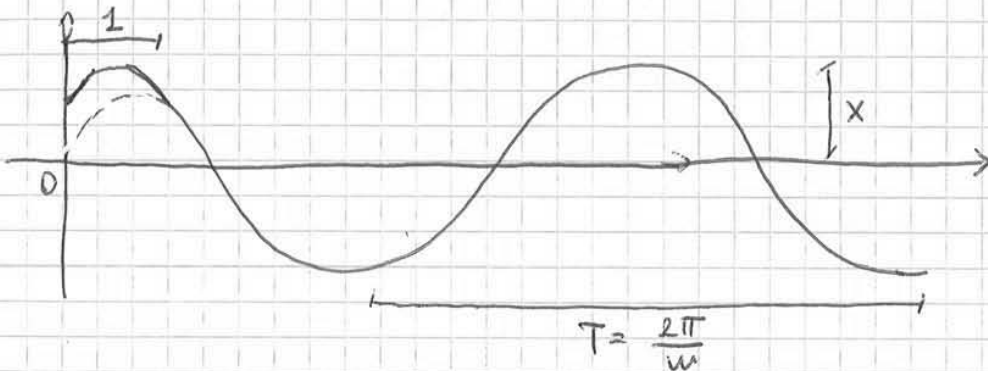
Poiché infatti:

$$x(0) = B$$

$$\dot{x}(0) = A\omega$$

l'equazione diventa:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t$$



La funzione disegnata rappresenta l'elongazione del sistema che oscilla.

X_{max} è l'AMPIEZZA DEL MOTO (ordinate max delle funzione periodica)

non è caratteristica del sistema perché dipende dalle condizioni iniziali.

La distanza tra 2 max o in generale tra 2 punti alle stesse condizioni è detta PERIODO DEL MOTO ed è pari a $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [sec]

Sostituendo si ha anche

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

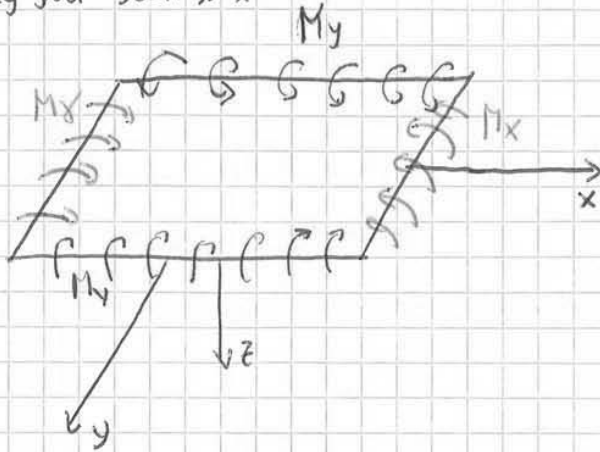
La FREQUENZA NATURALE f si misura in Hertz ed è:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \frac{1}{\text{sec}}$$

02/12/2013

DEFORMAZIONI TERMICHE PER LASTRE PIANE

Supponiamo di avere una lastra piana soggetta a M_x sul fronte // y e a M_y sui lati // x :

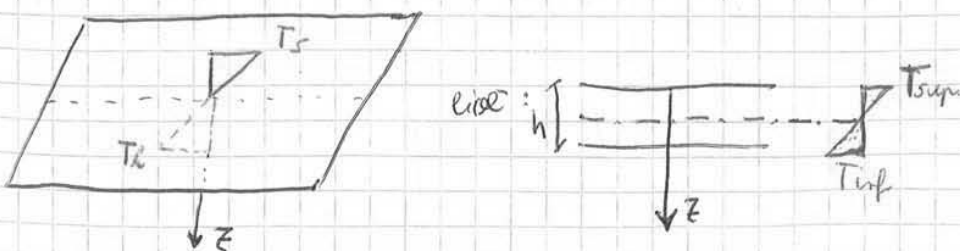


Supponiamo che $M_x = M_y = M$ (flessione pura) allora in questo caso
 $\chi_x = \chi_y = \chi = \frac{M}{D(1+\nu)}$ che si deduce dalle equazioni
 $\chi_{xy} = 0$ costitutive delle lastre piane

In questo caso la lastra si inflette su una superficie sferica di curvatura χ :

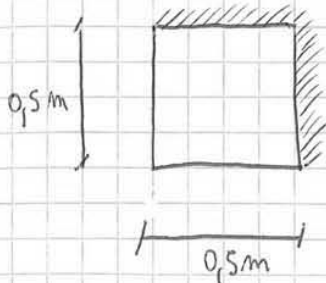


Supponiamo ora che la lastra sia soggetta ad una variazione di temperatura lineare lungo lo spessore e che la temperatura non vari su piani paralleli alle superficie della lastra:

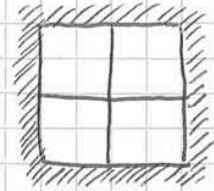


Porti termici maggiori si verificheranno su lastre più spesse e praticamente anche τ dipende dalla spessore.

ESERCIZIO LUSAS:



che corrisponde alle lastre seguenti (simmetriche e se ne può studiare solo un quarto): →



su due lati liberi non sono imposte le condizioni di simmetria. Per

$h = 5 \text{ m}$

ACCIAIO

$\Delta T = 40^\circ \text{C}$

$E = 210 \cdot 10^3 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$

verifichiamo che le 2 espressioni appena ottenute analiticamente sono corrette, cioè:

$|M| = 300 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{m}}$

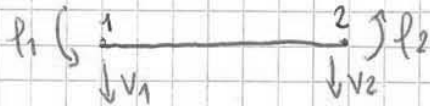
$|\sigma_{\text{max}}| = 72 \text{ MPa}$

L_1 e L_2 sono le 2 funzioni di forme o interpolanti: permettono di calcolare lo spostamento $w(z)$ ($\forall z$ con $0 < z < l$) attraverso un' interpolazione degli spostamenti nodali w_1 e w_2 .

ON

Funzioni di forme - problema flessionale

Obliviamo



siamo interessati a I , agli spostamenti assiali b_1 e b_2 e alle rotazioni ϕ_1 e ϕ_2 . Procediamo in parallelo al caso precedente. L'equazione differenziale da cui partiamo ora però è la seguente:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \quad \text{con } 0 < z < l$$

integrando 4 volte si ha:

$$v(z) = \frac{1}{6} e_1 \cdot z^3 + \frac{1}{2} e_2 \cdot z^2 + e_3 \cdot z + e_4$$

imponendo le condizioni

$$\left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=0} = \phi_1 \quad v(0) = v_1 \quad - \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=l} = \phi_2 \quad v(l) = v_2$$

si ottiene:

$$e_1 = \frac{6}{l^3} (-2v_1 + l\phi_1 + 2v_2 + l\phi_2)$$

$$e_2 = \frac{2}{l^2} (-3v_1 + 2l\phi_1 + 3v_2 + l\phi_2)$$

$$e_3 = \phi_1$$

$$e_4 = v_1$$

la funzione $v(z)$ può essere espressa nella forma:

$$v(z) = -l \left[\frac{z}{l} - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \phi_1 + \left[1 - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] v_1 + -l \left[- \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \phi_2 + \left[3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] v_2$$

(93)

• Calcolo matrici [K] e [M]

Introduciamo ora la variabile temporale T. Supponiamo cioè $w = w(x, t)$ e $v = v(z, t)$. Andiamo allora a vedere come si costruiscono le matrici.

- Problema statico

$$w(z, t) = L_1(z) w_1(t) + L_2(z) w_2(t) = \{L(z)\}^T \cdot \{w(t)\}$$

↓
PRODOTTO SCALARE

L'energia potenziale si scrive:

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_0^l A \cdot E \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot A \{w\}^T \{L'(z)\} \{L'(z)\}^T \{w\} dz =$$

$$= \frac{1}{2} \{w(t)\}^T \cdot [K] \{w(t)\} \quad \text{dove}$$

$$[K] = \int_0^l E \cdot A \cdot \{L'(z)\} \cdot \{L'(z)\}^T dz$$

(il passaggio che abbiamo fatto nell'equazione precedente è:)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^T = \{w(t)\}^T \{L'(z)\}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^T \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

[K] appare definita e la matrice di rigidezza.

Ma

$$\{L'(z)\} = \frac{\partial}{\partial z} \{L(z)\} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{z}{l} \\ z \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

questo ci permette di scrivere:

$$[K] = \frac{EA}{l^2} \int_0^l \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T dz = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente l'energia cinetica sarà espressa come:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^l m \{ \dot{w}(t) \}^T \cdot \{L(z)\} \cdot \{L(z)\}^T \{ \dot{w}(t) \} dz =$$

↑
velocità al
quadrato

$$= \frac{1}{2} \dot{w}(t) \cdot m \cdot \dot{w}(t) \quad \text{dove } [M] = \int_0^l m \{L(z)\} \cdot \{L(z)\}^T dz =$$

$$K_{24} = K_{42} = \frac{4EI}{l^2} \int_0^l \left(-\frac{3}{l} + 6\frac{z}{l^2}\right) \left(\frac{3}{l} - \frac{6}{l^2}z\right) dz = -\frac{12EI}{l^3}$$

∴ in definitive

$$[K] = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} \\ \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} \end{bmatrix}$$

l'ultimo passo è calcolare la matrice delle masse nel caso flemmonale:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m \left[\frac{\partial v}{\partial t}(z, t) \right]^2 dz = \frac{1}{2} \{ \dot{v}(t) \}^T [m] \{ \dot{v}(t) \}$$

questa volta

$$[m] = \int_0^l m \{L(z)\} \{L(z)\}^T dz \text{ e allora}$$

$$\int_0^l dz = m \int_0^l \begin{Bmatrix} L_1(z) \\ L_2(z) \\ L_3(z) \\ L_4(z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1(z) \\ L_2(z) \\ L_3(z) \\ L_4(z) \end{Bmatrix}^T dz$$

esempi:

$$m_{21} = m \int_0^l [L_1(z)]^2 dz = m \int_0^l \left[-l \left(\frac{z}{l} - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right) \right]^2 dz = \frac{1}{105} ml^3$$

$$m_{12} = m \int_0^l [L_1(z)][L_2(z)] dz = m \int_0^l -l \left[\frac{z}{l} - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \left[1 - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] dz = -\frac{11}{210} ml^2$$

$$m_{24} = m_{42} = m \int_0^l \left[1 - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \left[3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] dz = \frac{9}{70} ml$$

in definitive: