NUMERO: 846

DATA: 12/03/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Caccialupi

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof.

Logica

Cos'è una PROPOSIZIONE? È l'oggetto di studio della logica. È una frase di "senso compiuto", cioè che dà delle informazioni.
Esempio: . "CHI SEI?" NON è una proposizione
. "OGGI PIOVE" È una proposizione
Possiamo dire se una proposizione è VERA o FALSA ovvero darle un VALORE di VERITÀ. (V)(F).
Per lavorare con le proposizioni usiamo i CONNETTIVI LOGICI:

- NEGAZIONE, "NON", $\neg$

Esempio: P: "oggi piove" => $\neg$P: "oggi non piove"

P VERA $\rightarrow$ $\neg$P FALSA

La doppia negazione "cancella" la negazione, nel senso che se P è vera di $\neg\neg$P è vera.

P VERA	$\neg\neg$P VERA
P FALSA	$\neg\neg$P FALSA

- CONGIUNZIONE, "E", $\wedge$

Esempio: P: "oggi piove" Q "oggi c'è il sole"

$P \wedge Q$: "oggi piove e c'è il sole"

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$P\wedge Q$ =>	V	F	F	F

- DISGIUNZIONE, "O", $\vee$

Esempio:

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$P\vee Q$ =>	V	V	V	F

"o piove o c'è il sole" è VERA anche se "oggi piove con il sole" poiché il linguaggio comune può avere un significato diverso.

- IMPLICAZIONE, =>

Esempio: P => Q si legge: "se P allora Q"
"P condizione sufficiente per Q"
"Q condizione necessaria per P"

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P => Q	V	F	V	V

non si deve dedurre il FALSO dal VERO.

P	V	V	F	F
$\neg$P	F	F	V	V
Q	V	F	V	F
$(\neg P)\vee Q$	V	F	V	V

P => Q è la stessa cosa di $(\neg P) \vee Q$

Combinando insieme i quantificatori:

Esempio: $\forall x \; \exists y : Q(x;y)$: "in ogni luogo ad una certa ora piove"

$\exists x \; \forall y : Q(x;y)$: "c'è un luogo in cui piove sempre"

$\forall x \; Q(x;3)$: "in ogni luogo piove alle 3"

$\forall y \; Q(\text{TORINO}; y)$: "A Torino piove sempre"

N.B. $\neg(\forall x \; P(x)) \iff \exists x / \neg P(x)$

non "piove in ogni luogo" → esiste un luogo in cui non piove

$\neg(\exists x / P(x)) \iff \forall x \; \neg P(x)$

non "esiste un luogo in cui piove" → per ogni luogo non piove

INSIEMI

Non si può dare una definizione di insieme. Infatti esso viene considerato come un concetto PRIMITIVO. Gruppo collezione e famiglia sono esempi di insieme. Il termine "ELEMENTO di UN INSIEME" è anch'esso un concetto primitivo.

Esempio: $A = \{$Alberto; Alessandro; Aldo; ...$\}$

Questo è un esempio di rappresentazione "ESTENSIVA" di A o per elencazione

$A = \{a / a$ è un nome maschile che inizia con la lettera A$\}$

Questo è un esempio di rappresentazione "INTENSIVA" di A.

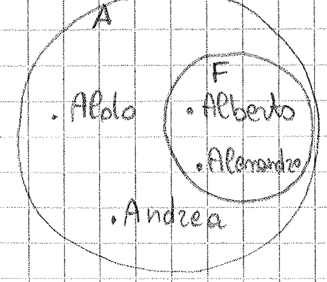
Alberto $\in$ A Bernardo $\notin$ A $\in$ è simbolo di "appartiene"

Esempio: $F = \{$Alberto; Alessandro$\}$ questo insieme è detto finito cioè ha un n° finito di elementi.

$A = \{$Alberto; Aldo; ...$\}$ questo insieme è detto infinito cioè non è finito.

Si dice F "SOTTOINSIEME" di A se ogni elemento di F è anche un elemento di A.

$$F \subseteq A \iff \forall a \in F, \; a \in A$$
$$(a \in F \Rightarrow a \in A)$$



Ogni insieme possiede almeno 2 sottinsiemi:

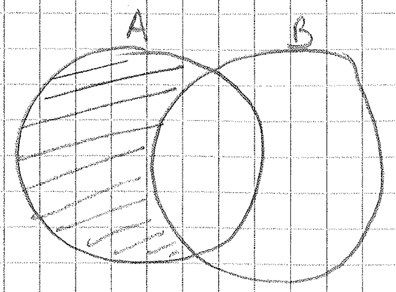
$A \subseteq A$ insieme stesso

$\emptyset = \{\}$ insieme vuoto

• DIFFERENZA

X insieme $\quad A, B \subseteq X$

$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$

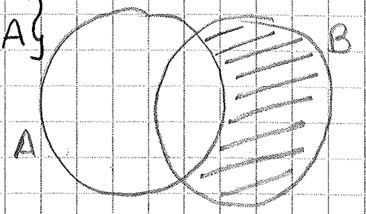


Esempio: Alberto $\in A \setminus B$

Abelardo $\notin A \setminus B$

N.B. $\boxed{A \setminus B \neq B \setminus A}$

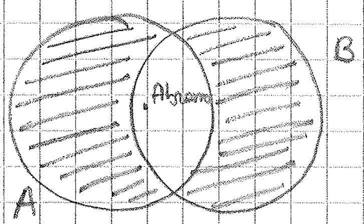
$B \setminus A = \{x \in X : x \in B \wedge x \notin A\}$



Esempio: Ubaldo $\in B \setminus A$

• DIFFERENZA SIMMETRICA

$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Esempio: Alberto $\in A \Delta B$
Ubaldo $\in A \Delta B$
Abramo $\notin A \Delta B$

• PRODOTTO CARTESIANO

A, B insiemi

$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ ovvero l'insieme delle coppie ordinate, cioè $(a, b) \neq (b, a)$.

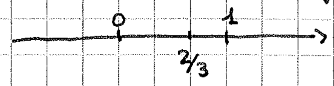
$A^2 = A \times A$ (a due) cartesiano $\quad A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ volte}} \quad A^n : \{(a_1, a_2 \ldots a_n) : a_1, \ldots, a_n \in A\}$

• NUMERI RAZIONALI, $\mathbb{Q}$, $\left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\right\}$

Se $m = 1$, $\frac{n}{m}$ sono identificabili con i numeri interi.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ Non è restrittivo considerare $\frac{n}{m}$ con $\frac{n}{m}$ ridotti ai minimi termini cioè con n, m senza fattori comuni.

Esempio: $\frac{4}{6}$ $\frac{2}{3}$



I numeri razionali ammettono una rappresentazione decimale di due tipi: o LIMITATA o PERIODICA

OPERAZIONI e PROPRIETA':

SOMMA → commutativa
→ associativa

PRODOTTO → commutativo
→ associativo
→ distributive

$\exists$ opposto e 0

$q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$ $\exists$ reciproco q^{-1} / $q \cdot q^{-1} = 1$

1 si dice elemento neutro del prodotto.

• NUMERI REALI, $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}$, e, π (decimali ILLIMITATI NON PERIODICI)

Osservazione: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Per assurdo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = \sqrt{2}$

$\Rightarrow a > 0$ e $a^2 = 2$. $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ con m, n interi senza fattori comuni

$\Rightarrow 2 = \frac{n^2}{m^2}$ $2m^2 = n^2$ $\Rightarrow$ m pari cioè $n = 2k$

$2m^2 = (2k)^2$ $2m^2 = 4k^2$ $m^2 = 2k^2 \Rightarrow m$ pari $\Rightarrow m = 2k$

$\Rightarrow$ n e m contengono entrambi il fattore 2 dunque <u>non</u> sono primi fra loro. ASSURDO

OPERAZIONI e PROPRIETA':

SOMMA → commutativa
→ associativa

PRODOTTO → commutativo
→ associativo
→ distributiva del prodotto rispetto la somma

$\exists$ opposto

0 è elemento neutro della somma

$\exists$ reciproco $\forall\, n \neq 0$

Esempio: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

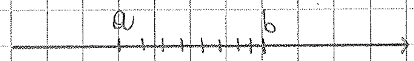
$a \in A \quad b \in B \quad a \leq b$

Per assurdo $\rightarrow$ $a \in A \,/\, a > b \Rightarrow a^2 > b^2 > 2$ cioè $a \notin A$

$\exists\, c \,/\, a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow c = \sqrt{2}$

Intervalli di $\mathbb{R}$

$I \subseteq \mathbb{R} \quad I \neq \emptyset$ è un intervallo se $\forall\, a, b$ (con $a < b$) $\in I$ con $\forall\, c \,/\, a \leq c \leq b \quad c \in I$.



Esempio: $H = \{1; 1,5\}$ NON è un intervallo perché: $1 \leq 1,2 \leq 1,5$, $1,2 \notin H$

Gli INTERVALLI LIMITATI:

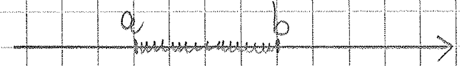
Presi $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a; b]$

$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = (a; b)$

$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} = (a; b]$

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a; b)$



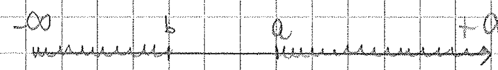
Gli INTERVALLI ILLIMITATI:

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a; +\infty)$

$\{x \in \mathbb{R} : x > a\} = (a; +\infty)$

$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} = (-\infty; b]$

$\{x \in \mathbb{R} : x < b\} = (-\infty; b)$



$A \subseteq \mathbb{R}$ si dice denso in $\mathbb{R}$ se ogni intervallo di $\mathbb{R}$ contiene almeno un elemento di A.

Esempio: $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ diciamo che m è l' ESTREMO SUPERIORE di A se m è il minimo dei maggioranti di A. ($\sup A$)

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ diciamo che m' è l' ESTREMO INFERIORE di A se m' è il massimo dei minoranti di A. ($\inf A$)

Esempio: $(3;4)$ 3 = estremo inferiore di A ($\inf A$)
4 = estremo superiore di A ($\sup A$)

$(3;4]$ 4 = $\sup A$ e $\max A$

$\mathbb{N}$ non ha estremo superiore perchè non è limitato superiormente.

• N.B.: se A è illimitato superiormente si scrive $\sup A = +\infty$. Analogamente se A è illimitato inferiormente si scrive $\inf A = -\infty$

Caratterizzazione di $\sup A$ e $\inf A$

• $m = \sup A \iff \begin{cases} 1)\ \forall a \in A,\ a \leq m \\ 2)\ \forall m' < m\ \exists\, a \in A \,/\, m' < a \end{cases}$

$\begin{cases} 1)\ \forall a \in A,\ a \leq m \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A \,/\, m - \varepsilon < a \end{cases}$

• $m = \inf A \iff \begin{cases} 1)\ \forall a \in A,\ a \geq m \\ 2)\ \forall m' > m\ \exists\, a \in A \,/\, m' > a \end{cases}$

$\begin{cases} 1)\ \forall a \in A,\ a \geq m \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A \,/\, m + \varepsilon > a \end{cases}$

• Proposizione: Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore.
Questa proposizione è equivalente al principio di Dedekind.

Esempio: $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \leq 2\}$ è superiormente limitato

$\exists\, m \in \mathbb{R} \,/\, x \leq m\ \forall x \in A$

se $m = 3$ $x \leq 3\ \forall x \in A$?

Per assurdo se $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 > 2 \Rightarrow x \notin A$ ASSURDO

$\exists\ p = \sup A$ p è un numero reale

$p^2 = 2 \Rightarrow p = \sqrt{2}$

I NUMERI COMPLESSI

$\mathbb{C}$

$x^2 = 2 \quad x^2 - 2 = 0 \rightsquigarrow \mathbb{R}$

$x^2 + 1 = 0$ non ammette soluzioni REALI

$x^2 = -1 \rightarrow \sqrt{-1} = i =$ unità immaginaria

$i^2 = -1 \rightarrow$ proprietà caratteristica

Un numero complesso è un'espressione della forma:

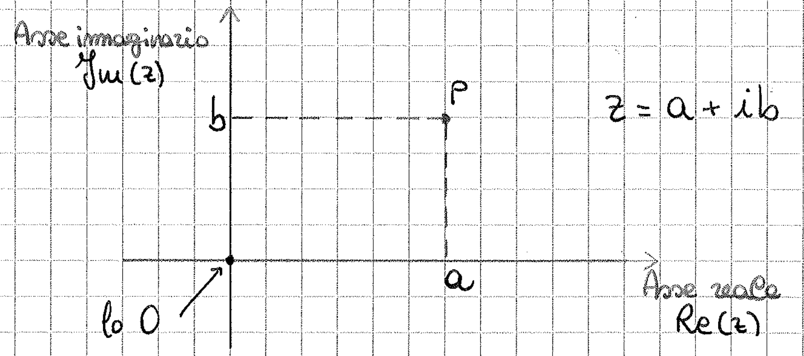
$$a + ib$$

dove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria.

Esempio: $2 + 3i$, $\pi - 4i$, $\frac{1}{100} - 18i$

a si dice PARTE REALE, b si dice PARTE IMMAGINARIA

se $z = a + ib \Rightarrow a = Re(z) \quad b = Im(z)$



OPERAZIONI

- Somma

$z = a + ib \quad z' = a' + ib'$

$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$

Esempio: $z = 5 + i \quad z' = -2 - 3i$

$z + z' = 5 + i - 2 - 3i = 3 - 2i$

Valgono le PROPRIETÀ:
- COMMUTATIVA e ASSOCIATIVA
- $\exists$ opposto
- lo 0 è elemento neutro della somma
- $0 = 0 + 0i$

se $z = a + ib$ il suo opposto è $-z = -a - ib$

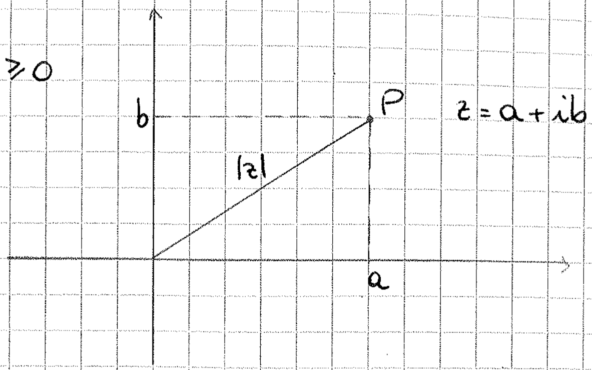
• Modulo:

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad |z| \in \mathbb{R} \qquad |z| \geq 0$

$z = a + 0i \qquad z = \sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{(-3)^2} = 3$

fa la distanza dall'origine



• Proposizioni importanti: $z, z' \in \mathbb{C}$

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ disuguaglianza triangolare
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z| \geq |\mathrm{Re}\, z|$, $|z| \geq |\mathrm{Im}\, z|$
- $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
-
- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$
- $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\, z$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Alcune dimostrazioni di queste proposizioni:

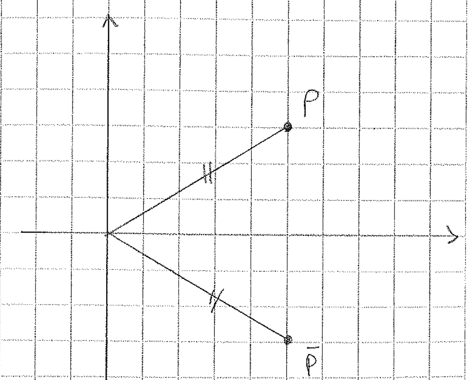
• $|z| = |\bar{z}|$

$z = a + ib \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{z} = a - ib \implies \bar{z} = a + i\underbrace{(-b)}_{\mathrm{Im}(\bar{z})}$

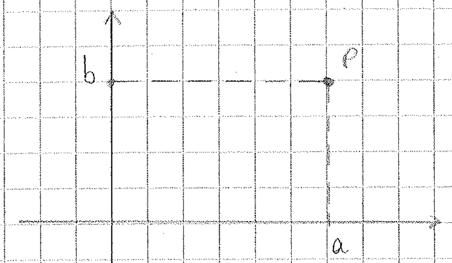
$|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

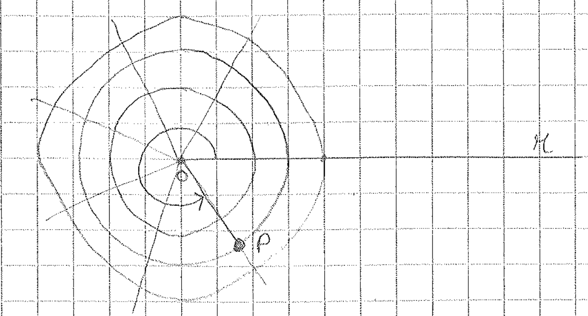
$|z| = |\bar{z}|$ c.v.d.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 86

Le COORDINATE POLARI



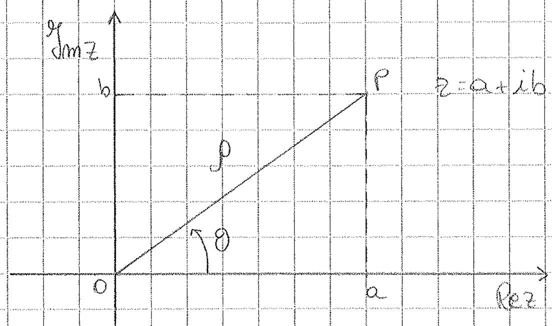


Piano di Argand-Gauss

P può essere assegnato dalla sua distanza da O e l'angolo θ formato dalla semiretta fissata x e dalla semiretta OP ($\overline{OP} = \rho$).
Quando interpreto il punto del piano come numero complesso chiamo ρ MODULO e θ ARGOMENTO. ρ e θ si chiamano COORDINATE POLARI.

$$P(\rho;\theta)$$

Per trasformare da coordinate polari a coordinate cartesiane:



$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$
$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

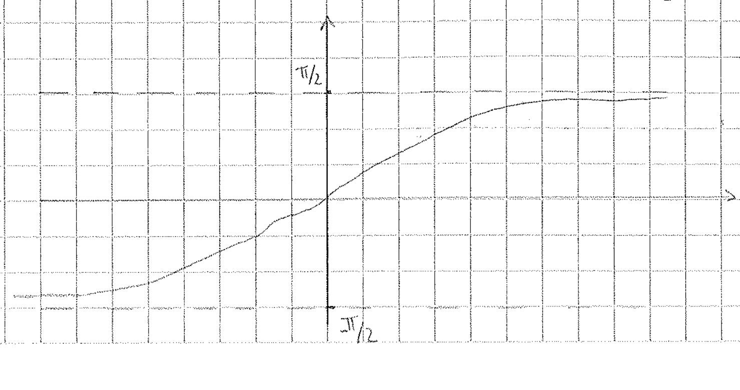
$$\begin{cases} a^2 = \rho^2\cos^2\theta \\ b^2 = \rho^2\sin^2\theta \end{cases}$$ sommando e usando: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = \rho^2$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \rho^2 \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases}$$ dividendo la I eq. con la II eq. $\Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{\cancel{\rho}\sin\theta}{\cancel{\rho}\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$

$\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ $\qquad \rho \geq 0 \qquad \rho = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$\theta \in [0; 2\pi)$ oppure $[-\pi; \pi]$ oppure $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$



POTENZA di UN NUMERO COMPLESSO

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

RAPPORTO di NUMERI COMPLESSI

$z = a + ib \quad z' = a' + ib' \quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

con $z' \neq 0 \quad \frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')]$

Esempi:

- $(1+i)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{12}\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{12}\right) =$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

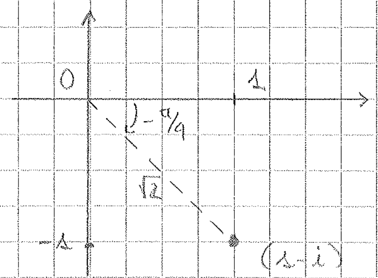
$= \cancel{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

- $(1-i)^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{20} =$

$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{20}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 20\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 20\right)\right] =$

$= 2^{10}[\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)] =$

$= 2^{10}(-1 + i\cdot 0) = -2^{10}$



NOTAZIONE: FORMULA di EULERO

$x \in \mathbb{R} \quad e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$

sommo le due eguaglianze $\quad e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

divido per 2 $\quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

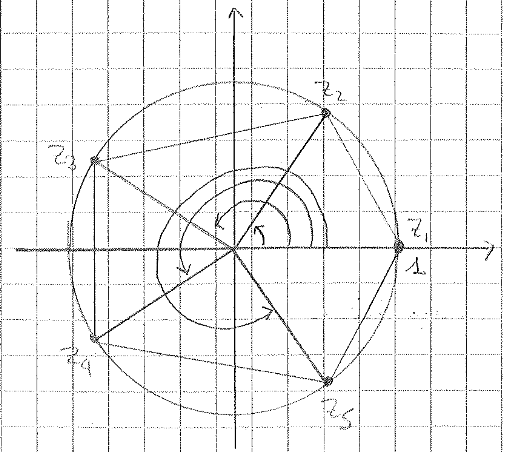
sottraggo le due eguaglianze $\quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$

divido per 2 $\quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2}$

Esempio: $z^5 = 1 = \underbrace{1}_{R}(\cos \underbrace{0}_{\psi} + i \sin \underbrace{0}_{\psi})$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[5]{1} = 1 \\ \theta = \frac{0}{5} + \frac{2\pi}{5} \cdot k \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$z_1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ $\quad k = 0$
$z_2 = 1(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5})$ $\quad k = 1$
$z_3 = 1(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5})$ $\quad k = 2$
$z_4 = 1(\cos 6\pi/5 + i \sin 6\pi/5)$ $\quad k = 3$
$z_5 = 1(\cos 8\pi/5 + i \sin 8\pi/5)$ $\quad k = 4$



Esempio: $\sqrt[3]{-4-4i}$

$w = -4 + 4i \qquad |w| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

argomento di w è $\frac{3}{4}\pi$

$w = 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) \qquad \sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3}{4}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i \sin\left(\frac{\frac{3}{4}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right) \quad k=0,1,2$

$$= \begin{cases} \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) & k = 0 \\ \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11}{2}\pi + i \sin\frac{11}{2}\pi\right) & k = 1 \\ \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i \sin\frac{19}{12}\right) & k = 2 \end{cases}$$

Se $z^n = w \Rightarrow z^n - w = 0$

$P_n(z) = 0 \quad \leftarrow$ polinomio di grado n

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad , a_0, a_1, a_{n-1} \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

Esempio: $P_3(z) = (2+i)z^3 - z^2 + iz - 5 - \pi i$

$n = 1 \quad a_1 z + a_0 = 0 \quad z = -\frac{a_0}{a_1}$

$n = 2 \quad a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$

$n = 3, 4$ ci sono formule risolutive

$n \geq 5$ non ci sono formule risolutive

Teorema FONDAMENTALE dell'ALGEBRA

L'equazione $P_n(z) = 0$ con $P_n(z)$ polinomio di grado ≥ 1 ha almeno una soluzione.

Nel caso il polinomio fosse complesso a coefficienti in $\mathbb{C}$:

$$P_n(z) = a_n(z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_n)$$

dove z_0 e z_1 e z_n sono radici di $P_n(z)$. Se $w_0,\dots,w_k$ sono le radici distinte $P_n(z) = a_n(z-w_0)^{m_0}(z-w_1)^{m_1}\dots(z-w_k)^{m_k}$, dove m_0 è la molteplicità di w_0, dove m_k è la molteplicità di w_k.
Se $P_n(x)$ polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$, w_0 radice di $P_n(x)$ ma anche $\overline{w_0}$ radice di $P_n(x)$.

$$(z-w_0)(z-\overline{w_0}) = z^2+bz+c \qquad \Delta<0$$

Se $x_0,\dots,x_r$ sono le radici reali di $P_n(x)$:

$$P_n(x) = a_n(x-x_0)^{m_0}\dots(x-x_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{r_1}\dots(x^2+b_nx+c_n)^{r_n}$$

con $m_0+\dots m_k+2r_1+\dots+2r_k = n$

- Esempio: $P(x) = x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ fattorizzato in $\mathbb{R}$

$P(x)=0$ applico Ruffini

$P(1) = 1-2+2-2+1 = 0 \Rightarrow (x-1)$ divide $P(x)$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -2 & +2 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & // \end{array}$$

$P(x) = (x^3-x^2+x-1)(x-1)$

$(x-1)$ divide (x^3-x^2+x-1)

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2+x-1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+1 \\ \hline / \quad / & \end{array}$$

$P(x) = (x-1)^2(x^2+1)$

Se fosse complesso:

$P(z) = z^4-2z^3+2z^2-2z+1$
$P(z) = (z-1)^2(z-i)(z+i)$

- Esempio: $x^2-2x+10=0$ $\quad \frac{\Delta}{4} = 1-10 = -9<0 \Rightarrow \nexists\, x\in\mathbb{R}$

$$x_{1,2} = 1\pm\sqrt{-9} = 1\pm 3i$$

- Esempio: $z^2-iz-\frac{\sqrt{3}}{4}i=0$ $\qquad az^2+bz+c=0 \quad a\neq 0;\ a,b,c\in\mathbb{C}$

$a=1,\ b=-i,\ c=-\frac{\sqrt{3}}{4}i$ $\qquad z_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$z_{1,2} = \dfrac{i\pm\sqrt{(-i)^2-4\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}i}}{2\cdot 1} = \dfrac{i\pm\sqrt{-1+\sqrt{3}i}}{2}$ ← calcoliamo a parte le radici quadrate di $-1+\sqrt{3}i$

$-1+\sqrt{3}i = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

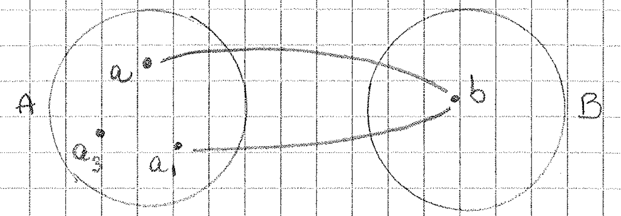
$\sqrt{-1+\sqrt{3}i} = 2^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{2}k\right)\right]$

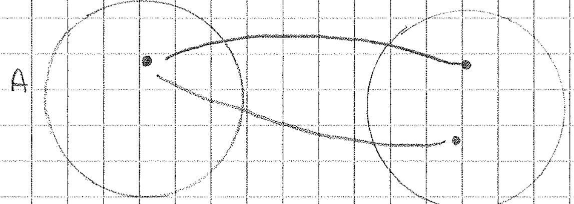
$k=0,1$ $\quad \begin{cases}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) & k=0\\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) & k=1\end{cases} \Rightarrow \sqrt{-1+\sqrt{3}i} = \begin{cases}\sqrt{2}/2+i\sqrt{6}/2\\ -\sqrt{2}/2-i\sqrt{6}/2\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{i\pm\sqrt{-1+i\sqrt{3}}}{2} = \begin{cases}\dfrac{i+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}+i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)\\[2ex] \dfrac{i-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}+i\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)\end{cases}$

Le FUNZIONI

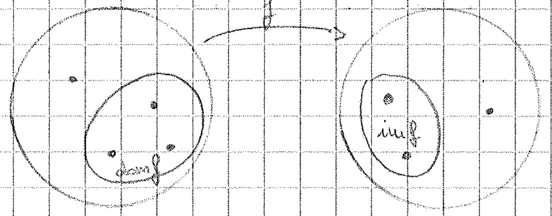
Dati A, B due insiemi non vuoti, una FUNZIONE da A in B è una legge che associa a elementi di A elementi di B, in modo tale che ad ogni elemento $a \in A$ corrisponda AL PIÙ un elemento $b \in B$





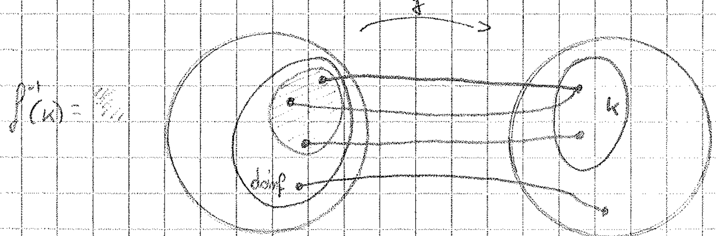
NON È UNA FUNZIONE !!!

Chiamiamo DOMINIO della funzione $f: A \to B$ il sottoinsieme di elementi di A per i quali la legge (applicazione) è definita, cioè per i quali è dato un corrispondente in B mediante f.
Chiamiamo IMMAGINE (o CODOMINIO) della funzione il sottoinsieme di B per cui si ha $B = \{f(a),\ a \in \text{dom} f\}$



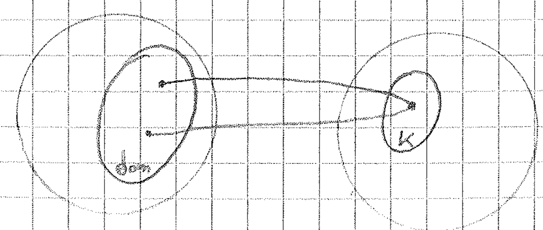
se $a \in \text{dom} f$, $f(a)$ si dice immagine di a mediante f.

$K \subseteq B$, la CONTROIMMAGINE di K $f^{-1}(K) = \{a \in \text{dom} f \,/\, f(a) \in K\}$



con $f: \text{dom} f \to \text{im} f$

f associa ad ogni elemento di A, $a \in \text{dom} f$ un unico elemento in $\text{im} f$.



$K = \{b\}$

$f^{-1}(\{b\})$

$f^{-1}(K)$

grafico di $f: A \to B$ $\quad G(f) = \{(a\,;\,f(a)),\ a \in \text{dom} f\} \subseteq A \times B$

• Esempio: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f: z \longmapsto z^2$

È suriettiva? NO

$f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ $\quad z = -1$ $\quad f(z') = z$ $\quad (z')^2 = -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{Z}$

È iniettiva? NO

$-3 \neq 3$ $\quad f(-3) = f(3) = 9$ non è vero che $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

$f(z) = 9$ $\quad z^2 = 9$ NON HA UN'UNICA SOLUZIONE $\to z_1 = 3, z_2 = -3$

Se fosse stata da $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\quad n \to n^2$ quindi iniettiva.

* $f, g: A \to B$ $\quad \mathrm{dom} f \subseteq \mathrm{dom} g$

$\forall a \in \mathrm{dom} f$ $\quad f(a) = g(a)$

f si dice RESTRIZIONE di g al dominio di f.
g si dice ESTENSIONE di f al dominio di g

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ • f reale significa che $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}$

$x \to y$ $\quad$ • f di variabile reale significa che $\mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}$, cioè $x \in \mathbb{R}$

$y = f(x)$

Esempio: $f(x) = x^3 - x^2$ $\quad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

È suriettiva? SI

$\forall y \in \mathbb{R}$ $\quad \exists ?\, x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = y$ cioè posso sempre risolvere $y = x^3 - x^2$?

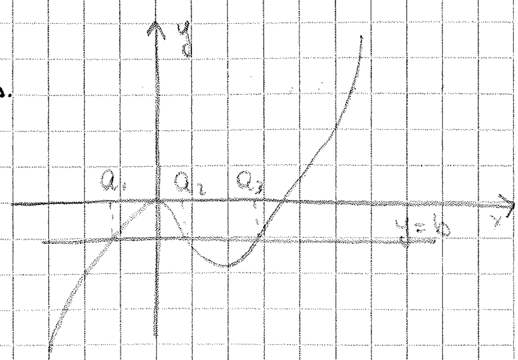
L'eq. $x^3 - x^2 - y = 0$ ha sempre una radice reale e dunque la funzione è SURIETTIVA. I polinomi di grado dispari hanno sempre una soluzione Reale!

È iniettiva? NO

$f(0) = 0$ $\quad f(1) = 0$ $\quad 1 \neq 0 \xrightarrow{\text{ma}} f(0) = f(1) \Rightarrow f$ non è iniettiva

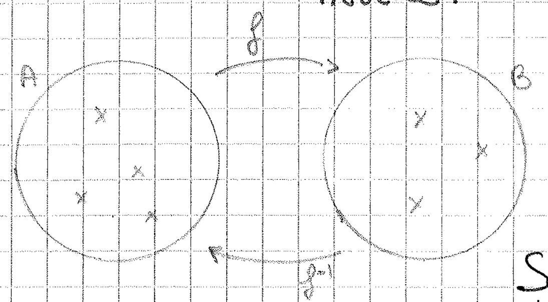
$y = (f) = \{(x; f(x)), x \in \mathrm{dom} f\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = b \end{cases}$ $\quad f(x) = b$ $\quad$ si può vedere come l'inters. tra la f.ne e una retta di quota b!



Se facendo variare b troviamo sempre un'inters. tra il grafico della funzione e la retta $y = b$ allora f è suriettiva. $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = b$
Cioè se per qualche valore di b il grafico di f interseca la retta orizzontale $y = b$ in più di un punto allora la funzione non è INIETTIVA.

La funzione inversa



$f: A \to B$ INIETTIVA

$f^{-1}: \mathrm{Im} f \subseteq B \to \mathrm{dom} f \subseteq A$

$b \in \mathrm{Im} f \quad f^{-1}(b) = \{a \in \mathrm{dom} f : f(a) = b\}$

Se f non è iniettiva non si riesce a definire f^{-1}.

Consideriamo $f^{-1} \circ f$: $\quad f^{-1} \circ f : \mathrm{dom} f \to \mathrm{dom} f \quad f^{-1}(f(a)) = a$

Consideriamo $f \circ f^{-1}$: $\quad \mathrm{Im} f \to \mathrm{Im} f \quad f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = b$

$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ in $B \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ in A

- Esempio: $f(x) = x^3$ è iniettiva dunque ha senso cercare/calcolare f^{-1}.

$y = x^3 \quad x = \sqrt[3]{y} \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \quad f^{-1}(z) = \sqrt[3]{z} \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

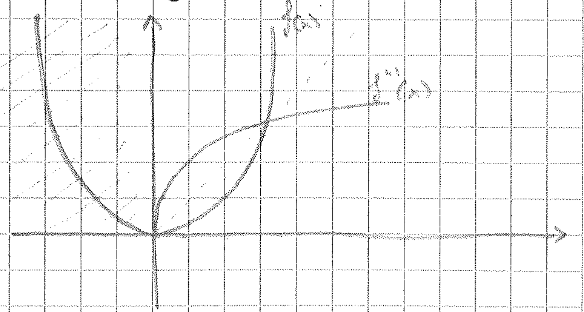
$f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x \qquad f^{-1} \circ f(x) = \sqrt[3]{(x^3)} = x$

- Esempio: $f(x) = x^2$ non è iniettiva quindi non è invertibile a meno che non si restringa il dominio.

$f|_A, \ A = \mathbb{R}^+ \quad f|_{\mathbb{R}^+}(x) = x^2$

ora è iniettiva e invertibile.

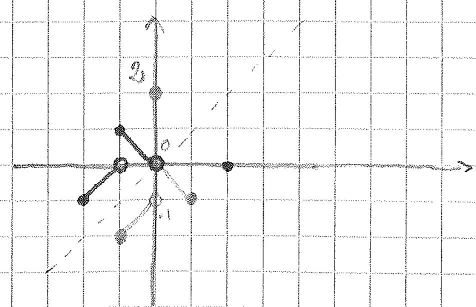
$(f|_{\mathbb{R}^+})^{-1}(x) = \sqrt{x}$



$G(f) = \{x ; f(x)\} \qquad G(f^{-1}) = \{f(x) ; x\}$

ovvero la simmetria con la bisettrice del 1°/3° quadrante.

- Esempio: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in [-1; 0) \\ 2 & x = 0 \\ -x & x \in [0; 1] \end{cases}$



$\mathrm{dom} f = [-1; 1] \quad \mathrm{Im} f = [-2; 0) \cup \{2\}$

è INIETTIVA quindi esiste l'inversa:

$f^{-1}: [-2; 0) \cup \{2\} \to [-1; 1]$

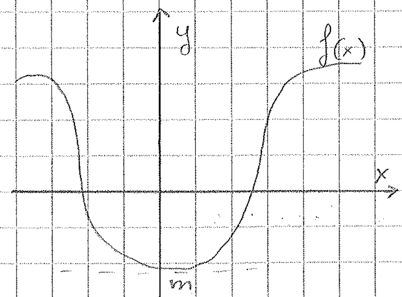
$f^{-1}(y) = \begin{cases} 0 & y = 2 \\ -y & y \in [-1; 0) \\ y + 1 & y \in [-2; -1] \end{cases}$

La LIMITATEZZA

f si dice limitata inferiormente se l'immagine di f è un insieme inferiormente limitato.

$\exists\, m,\ m \in \mathbb{R} \,/\, \mathrm{Im} f \subseteq (m, +\infty)$

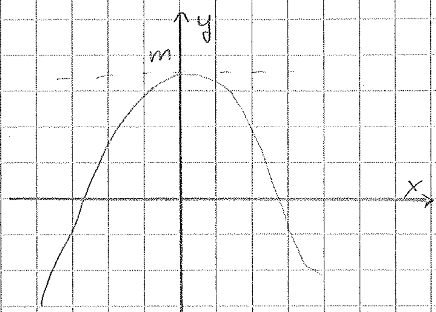
cioè $\exists\, m \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \geq m \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$



f si dice superiormente limitata se l'immagine di f è un insieme superiormente limitato cioè

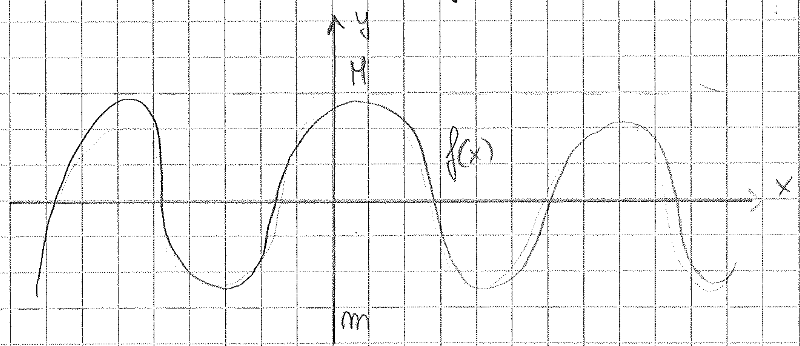
$\exists\, m,\ m \in \mathbb{R} \,/\, \mathrm{Im} f \subseteq (m, -\infty)$

cioè $\exists\, m,\ m \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \leq m \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$



f si dice limitata se $\mathrm{Im} f$ è un insieme limitato sia inferiormente sia superiormente cioè

$\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ m < M \,/\, m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$



La MONOTONIA

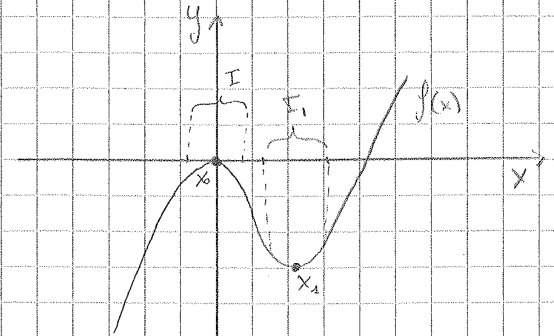
f si monotona crescente se presi $x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$ $\quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- Es. $f(x) = x^3 \quad x_1 \leq x_2 \quad x_1^3 \leq x_2^3 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Es. $f(x) = 4 \quad x_1 \leq x_2 \quad 4 \leq 4$, $f(x_1) \leq f(x_2)$

è crescente ma non STRETTAMENTE CRESCENTE!

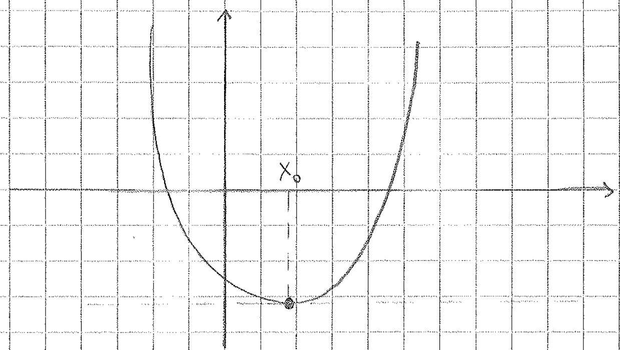
$x_0 \in \text{dom} f$ si dice PUNTO di MAX RELATIVO di f se $\exists$ un intorno I di x_0 / x_0 è massimo di $f|_I$

$f(x) = x^3 - x^2$



$x_1 \in \text{dom} f$ si dice PUNTO di MIN RELATIVO di f se $\exists$ un intorno I_1 di x_1 / x_1 è minimo di $f|_{I_1}$

$x_0 \in \text{dom} f$ si dice PUNTO di MIN ASSOLUTO di f se $\forall x \in \text{dom} f$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$

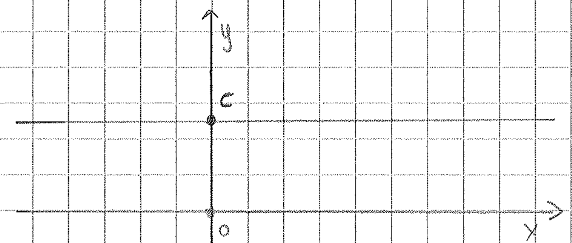


Le FUNZIONI COSTANTI

16/10

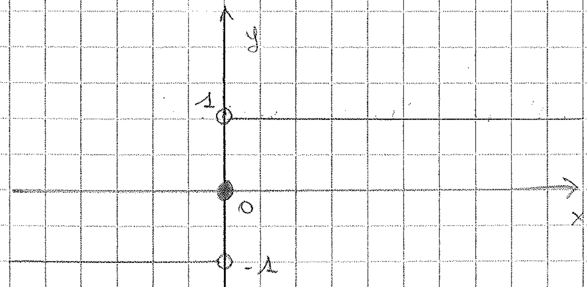
- COSTANTE:

$f(x) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$



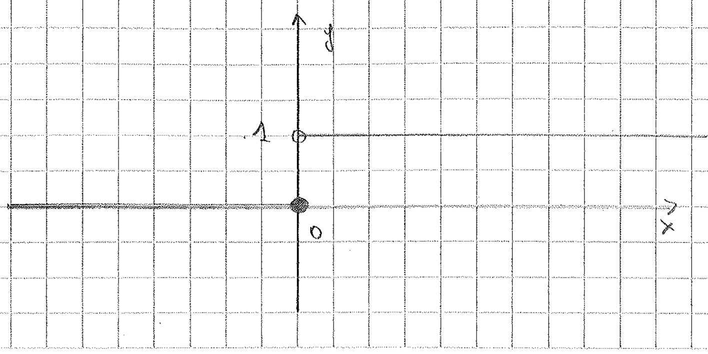
- SEGNO:

$$f(x) = \text{sign}\, x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



- F.ne di HEAVISIDE:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

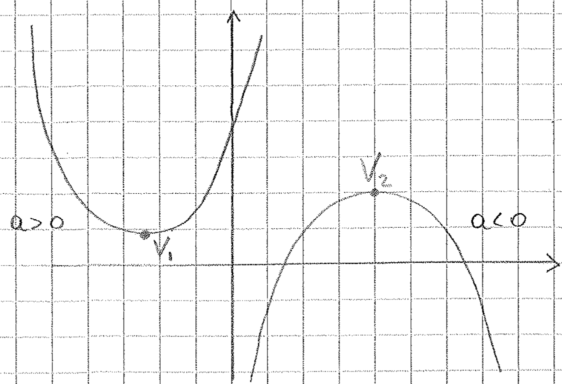


PARABOLA

$f(x) = ax^2 + bx + c$

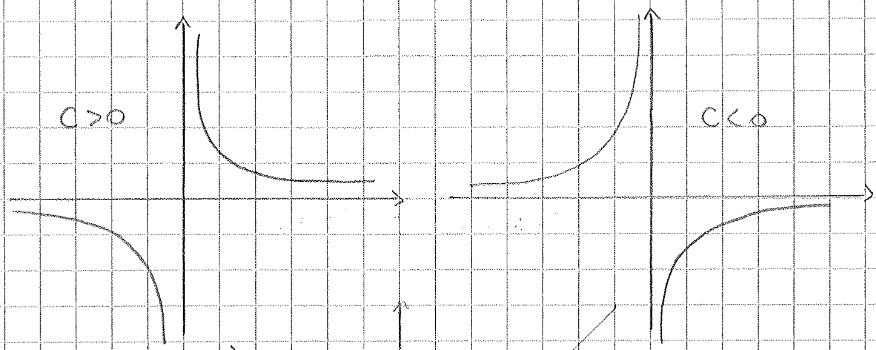
$V = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a} \right)$

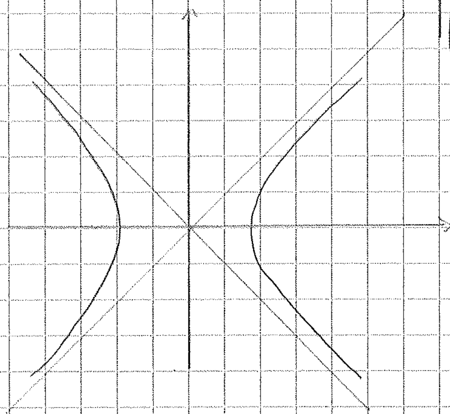
$\Delta = b^2 - 4ac$



IPERBOLE

$f(x) = \frac{c}{x}$

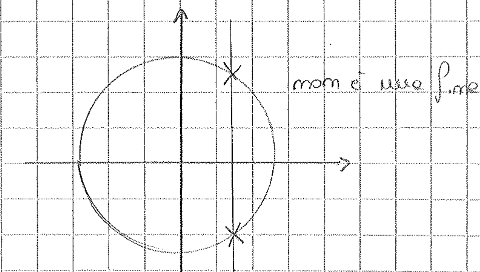




N.B.: questa non è una funzione!!!

CIRCONFERENZA

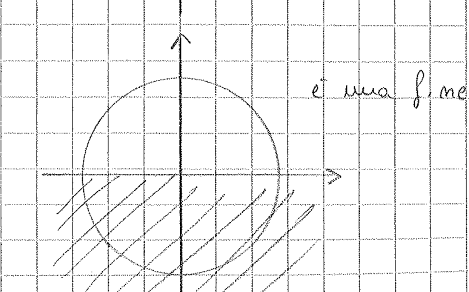
Non è una funzione! A meno che non sia ridotto il suo codominio!



$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1 - x^2$

$x^2 + y^2 = 1$ dom $= [-1 ; 1]$



POTENZE CON ESPONENTE REALE

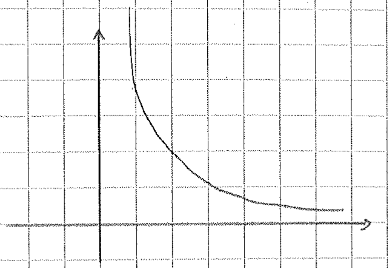
$f(x) = x^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$x > 0,\ \alpha > 1 \quad x^{\alpha} = \sup\{x^{n/m},\ n/m \leq \alpha\}$

$x > 0,\ 0 < \alpha < 1 \quad x^{\alpha} = \inf\{x^{n/m},\ n/m \leq \alpha\}$

$f(x) = x^{\alpha} \quad \alpha < 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

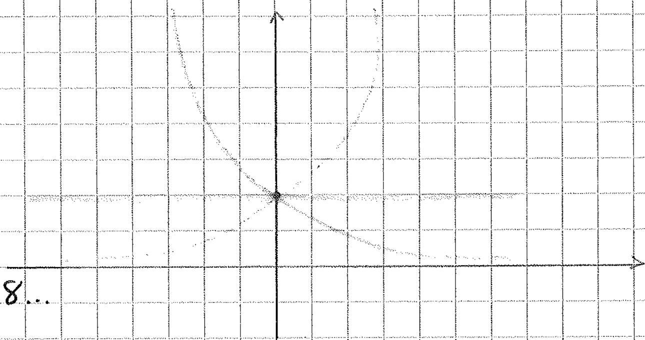
$f(x) = x^{\alpha} = \dfrac{1}{x^{-\alpha}} \quad -\alpha > 0$



ESPONENZIALI

$f(x) = a^{x} \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0$

- $0 < a < 1$
- $a = 1$
- $a > 1$

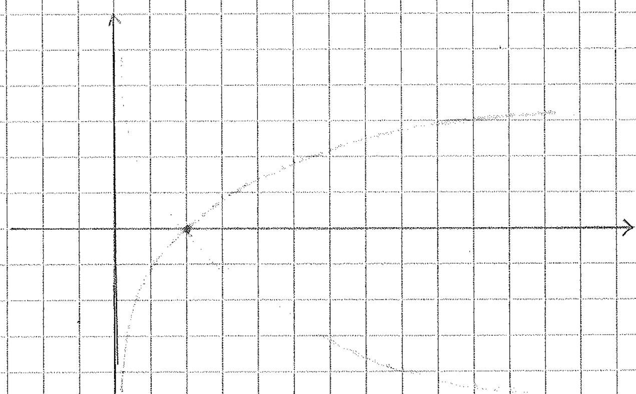


e^{x} e = numero di Nepero = 2,718...

LOGARITMI

$f(x) = \log_a x$

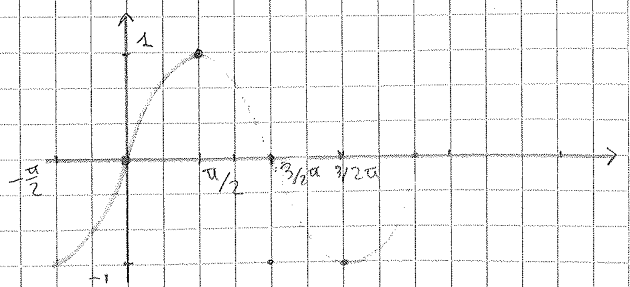
- $0 < a < 1$
- $a > 1$



FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

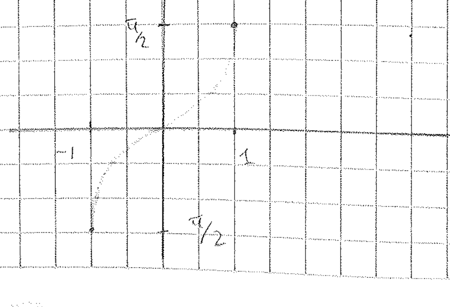
$f(x) = \sin(x)$

- $T = 2\pi$
- dispari
- Invertibile solo se considero la restrizione $\operatorname{sen}|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$



$f^{-1}(\sin x) = \arcsin x$

$\text{dom} f: [-1; 1] \quad \text{Im} f: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

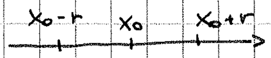


22/10

I LIMITI

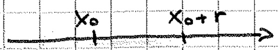
Intorni in $\mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$



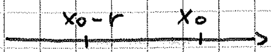
Intorno di centro x_0 e raggio r: $I_r(x_0) = (x_0 - r ; x_0 + r)$

- Intorno destro di x_0 e raggio r:



$$I_r^+(x_0) = (x_0 ; x_0 + r)$$

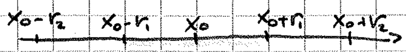
- Intorno sinistro di x_0 e raggio r:



$$I_r^-(x_0) = (x_0 - r ; x_0)$$

OSSERVAZIONE importante! L'intersezione di 2 intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0.

$I_{r_1}(x_0) = (x_0 - r_1 ; x_0 + r_1)$

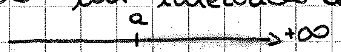


$I_{r_2}(x_0) = (x_0 - r_2 ; x_0 + r_2)$, $r_1 < r_2$ $\quad I_{r_1}(x_0) \cap I_{r_2}(x_0) = I_{r_1}(x_0)$

in GENERALE: L'intersezione di un numero finito di intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0.

- Intorni di ∞

Diciamo intorno di $+\infty$ un intervallo della forma $(a ; +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$



Diciamo intorno di $-\infty$ un intervallo della forma $(-\infty ; a)$ con $a \in \mathbb{R}$

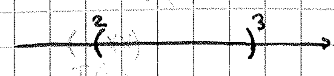
Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Diciamo che x_0 è un punto di accumulazione per A se ogni intorno di x_0 contiene dei punti di A diversi da x_0

Esempio: $A = (2 ; 3)$ $\quad 2,5$ è punto di accumulazione di A.

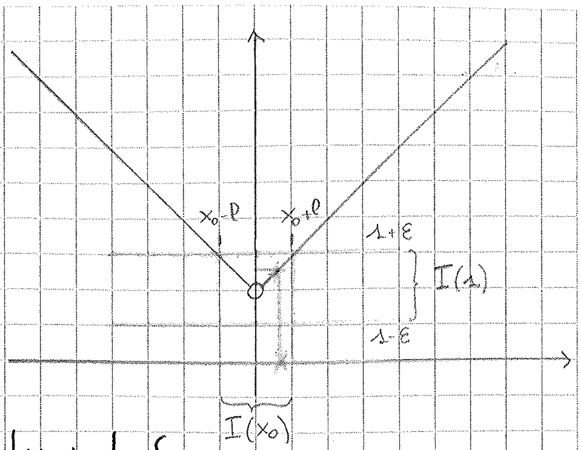
Anche 2 è punto di ACCUMULAZIONE di A.



Esempio: $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^+\}$

0 è punto di accumulazione di A.

CASO 1



$f(x) = \frac{x^2}{|x|} + 1 \quad \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$I(\ell) = (\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon) \quad I(x_0) = (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) / \forall x \in \text{dom} f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$

esplicitiamo $0 < |x - x_0| < \delta$:

$\begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ |x - x_0| > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\delta < x - x_0 < \delta \\ x - x_0 \neq 0 \end{cases} \quad \xrightarrow[x_0]{\text{sommando}} \quad \begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0 - \delta \\ x \neq x_0 \end{cases}$

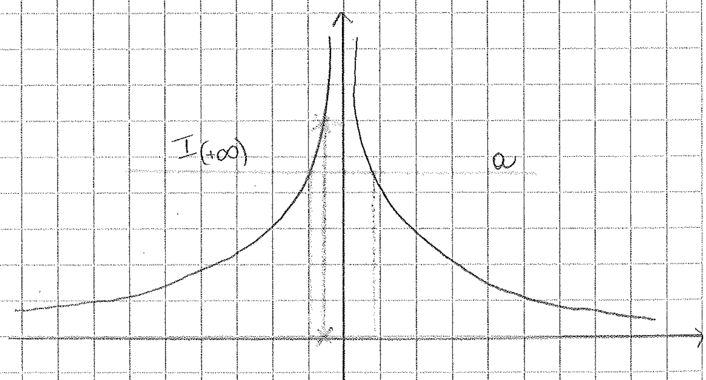
$\Rightarrow \begin{cases} x \in I_\delta(x_0) \\ x \neq x_0 \end{cases}$

esplicitiamo $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$ sommando $\ell \rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

cioè $f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$.

CASO 2



$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad \text{dom} f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad x_0 \in \mathbb{R}, \ \ell = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$

$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{dom} f \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

cioè $x \neq x_0$

deve essere: $f(x) \in (a ; +\infty)$ cioè $f(x) > a$

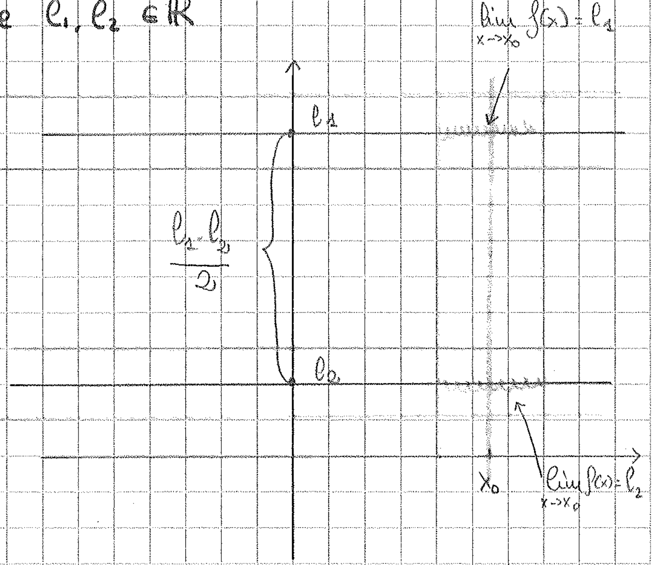
TEOREMA di UNICITÀ del LIMITE

$f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\quad l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\quad [x_0 \text{ P.d.A}]$

se $\cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ $\quad$ allora $\quad l_1 = l_2$

$\cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

Dimostrazione nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$



Per assurdo supponiamo $l_1 \neq l_2$, $l_1 > l_2$

Prendiamo $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$ e scriviamo cosa significa $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$:

$\exists\, I'(x_0) \,/\, \forall x \in \text{dom} f \cap I'(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\to f(x) \in I_\varepsilon(l_1)$ cioè $|f(x) - l_1| < \varepsilon$

cioè $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

Dato che $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$ troviamo :

$\to l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} < f(x) < l_1 + \frac{l_1 - l_2}{2}$

$\to \frac{l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{3l_1 - l_2}{2}$

Ora scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$: $\exists\, I''(x_0) \,/\, \forall x \in \text{dom} f \cap I''(x_0) \setminus \{x_0\} \to$

$\to f(x) \in I_\varepsilon(l_2)$ cioè $l_2 - \frac{l_1 - l_2}{2} < f(x) < l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2}$ cioè

$\to \frac{3l_2 - l_1}{2} < f(x) < \frac{l_2 + l_1}{2}$

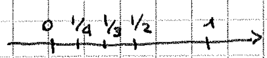
Per $x \in I'(x_0) \cap I''(x_0)$ si ha : $\begin{cases} f(x) < \frac{l_2 + l_1}{2} \\ f(x) > \frac{l_2 + l_1}{2} \end{cases}$ ASSURDO

Limite destro e Limite sinistro

$A \subseteq \mathbb{R}$. x_0 è un punto di accumulazione destro di A se l'intersezione di A con ogni intorno destro di A contiene dei punti di A

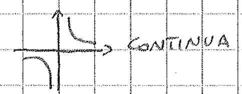
DX $(x_0, x_0 + r)$ $\qquad$ SX $(x_0 - r ; x_0)$

Esempio: $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$



0 è un punto di accumulazione destro ma non sinistro

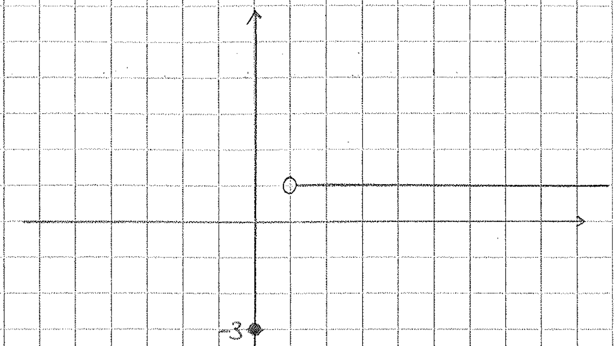
- $f(x)$ è continua se è continua in ogni punto del suo dominio
- $f(x)$ è discontinua in x_0 se non è continua in x_0
- $f(x)$ è discontinua se c'è un punto del dom$f$ in cui f è discontinua
- f continua in x_0 $\Rightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



OSSERVAZIONE: Nella definizione di continuità in x_0 NON SI RICHIEDE che x_0 sia di accumulazione per dom$f$.

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -3, & x = 0 \end{cases}$$



dom $f = \{0\} \cup (1; +\infty)$

0 è un punto isolato ma la f.ne è continua in 0!!!

OSSERVAZIONE: x_0 di accumulazione per il dom$f$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ allora f è CONTINUA in x_0.

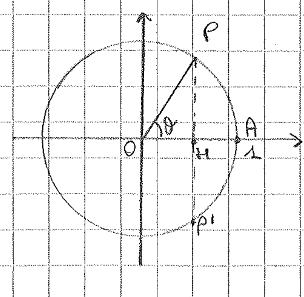
Esempio: $f(x) = \frac{1}{x}$ CONTINUA $\to$ $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{1}{2}$

ELENCO di f.ni CONTINUE

- $f(x) =$ costante
- $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sin x$, $\cos x$, $tg x$, $cotg x$
- $|x|$
- $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg x$, $arccotg x$: a^x, $\log_a x$

Dimostrazione continuità di $\cos x$:

$\to$ PREMESSA: $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $|\sin\theta| \leq |\theta|$



$\overline{PH} = \sin\theta$, $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\sin\theta \leq \theta$

- se $\theta > \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin\theta \leq 1 \leq \frac{\pi}{2} < \theta$
- se $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ $\Rightarrow$ $|\sin\theta|^2 = -\sin(-\theta) \Rightarrow |-\sin|\theta||$

  $\Rightarrow$ $\sin|\theta| \leq |\theta|$

- $\theta < -\frac{\pi}{2}$ $|\sin\theta| \leq \theta$

... dimostrazione... $\cos x$ è continua.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ / $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ cioè...

Dimostrazione nel caso $\ell > 0$

$\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0 \quad \exists\, I(x_0) \,/\, \forall\, x \in \text{dom} f \cap I(x_0) \setminus \{x_0\}$ si ha:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}$$

$-\frac{\ell}{2} < f(x) - \ell < \frac{\ell}{2}$ sommando $+\ell \Rightarrow \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) - \cancel{\ell} + \cancel{\ell} < \frac{\ell}{2} + \ell$

cioè $\frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3}{2}\ell$, $\frac{\ell}{2} > 0$ dunque abbiamo $I(x_0)$ nel quale vale $f(x) > \frac{\ell}{2} > 0 \Rightarrow x \in I(x_0) \cap \text{dom} f \setminus \{x_0\}$

Dimostrazione nel caso $\ell = +\infty$

$\forall\, a > 0 \quad \exists\, I(x_0) \,/\, \forall\, x \in \text{dom} f \cap I(x_0) \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) > a > 0$

· Corollario sulla limitatezza locale delle funzioni continue

$f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{dom} f$

Se f è continua in x_0 allora f è limitata in $I(x_0)$, cioè

$\exists\, I(x_0) \,/\, \forall\, I(x_0) \cap \text{dom} f \Rightarrow |f(x)| \leq M$ con $M \in \mathbb{R}^+$

· Dimostrazione del corollario

f continua in x_0 allora o x_0 isolato e f è banalmente localmente limitata o se invece x_0 è di accumulazione per $\text{dom} f$ allora f continua implica che esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$.

Dunque si può applicare il teorema di limitatezza locale visto prima

f continua non è detto che sia limitata! es. $f(x) = \frac{1}{x}$

· Corollario sulla permanenza del segno per le f.ni continue

$f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$, f continua in x_0

Se $f(x_0) \gtrless 0$ allora $\exists\, I(x_0) \,/$ se $x \in \text{dom} f \cap I(x_0)$ allora $f(x) \lessgtr 0$

TEOREMA

$f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per A

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

allora:

1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \pm\infty$

2) se $l \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$

3) $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = 0$

4) se $f(x)$ ha segno costante $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = \pm\infty$

1 bis) f limitata in $I(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \pm\infty$

2 bis) $f(x) > m > 0$ in $I(x_0)$ oppure $f(x) < -m < 0$ in $I(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$

Forma indeterminata: $f(x) \cdot g(x)$ con $l = 0$ $[0 \cdot \infty]$

Esempi: • 1 bis) $\lim_{x \to +\infty} [x + \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\text{limitata}}] = +\infty$

• 2 bis) $\lim_{x \to +\infty} (\underbrace{\sin x + 3}_{>0}) x = +\infty$

• $f(x) = x \cdot \sin x$ $\quad \nexists \lim_{x \to +\infty} x \cdot \sin x$

Teorema

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$

2) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

Forma indeterminata: $f(x) - g(x)$ $\quad [\infty - \infty]$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Riscrivo la definizione di limite per g:

$\forall a > 0 \quad \exists I''(x_0) \,/\, \forall x \in I''(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}, \quad g(x) > a$

Sommando con $x \in I'(x_0) \cap I''(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow f(x) + g(x) > \underbrace{l - 1 + a}$ $\rightarrow$ è una quantità arbitrariamente fissata.

Cioè la tesi dato che $(l-1)$ è fissato e a è arbitrario.

COROLLARIO: Algebra delle funzioni continue

Siano f e $g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

supponiamo f e g siano continue in un punto $x_0 \in A$, $x \in \mathbb{R}$ allora:

- se $f+g$ è continua nel punto x_0
- se $f \cdot g$ è continua nel punto x_0
- se $f(x_0) \neq 0$, $1/f$ è continua in x_0
- se $g(x_0) \neq 0$, $1/g$ è continua in x_0

Consideriamo $f+g$. Se x_0 è isolato la continuità è banale.
Se x_0 è di accumulazione per A: $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = (f+g)(x_0)$ che ora verifichiamo

$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) =$ usando la continuità di f e g

$\Rightarrow f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$ c.v.d.

Teorema sui limiti delle funzioni monotone

$f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione destro per dom f.

- Se f è decrescente in dom f allora $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup f(x)$, $x > x_0$
- Se f è decrescente in dom f allora $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf f(x)$, $x > x_0$

N.B.: inf e sup possono anche essere $-\infty$ o $+\infty$

Se x_0 è punto di accumulazione sinistro per il dom f allora:

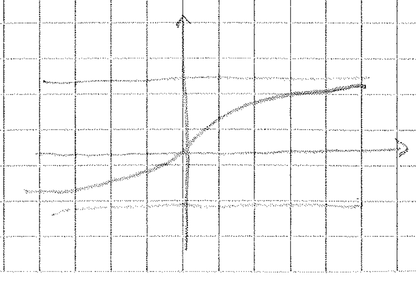
- se f è crescente $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(x)$, $x < x_0$
- se f è decrescente in dom f: $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf f(x)$, $x < x_0$

Osservazione: Valgono enunciati analoghi anche per $x_0 = \pm\infty$

Esempio: $f(x) = \text{arctg}(x)$ è crescente in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup \text{arctg}\, x$, $x \in \text{dom} f$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf \text{arctg}\, x$, $x \in \text{dom} f$



Limiti di funzioni esponenziali

$f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$f(x) > 0 \ \forall x \in A$ $\quad f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x)\log(f(x))} = \begin{cases} e^{\ell \cdot \log y_0} & \text{se } y_0 > 0,\ \ell \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } \lim_{x \to x_0} g(x)\log f(x) = +\infty \\ 0 & \text{se } \lim_{x \to x_0} g(x)\log f(x) = -\infty \end{cases}$$

Forme indeterminate

1) $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} \log f(x) = +\infty$ cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ F.I. $[\infty^0]$

2) $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} \log f(x) = -\infty$ cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ F.I. $[0^0]$

3) $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} \log f(x) = 0$ cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ F.I. $[1^\infty]$

Esempi:

- $\lim_{x \to \pi} |\cos x|^{\log x} = \lim_{x \to \pi} e^{\log|\cos x|^{\log x}} = \lim_{x \to \pi} e^{\overbrace{\log x}^{\log \pi} \cdot \overbrace{\log|\cos x|}^{0}} = e^0 = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} (x^2)^{\operatorname{arctg} x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\log(x^2)^{\operatorname{arctg} x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\overbrace{\operatorname{arctg} x}^{\pi/2} \cdot \overbrace{\log(x^2)}^{+\infty}} = e^{+\infty} = +\infty$

TEOREMA DEL CONFRONTO ①

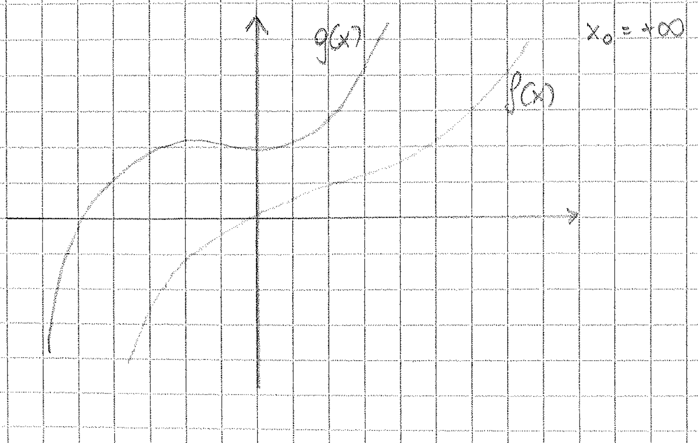
Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, x_0 di accumulazione per A, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Si abbia $\exists\, I(x_0) \,/\, \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \cap A$ affinché valga $f(x) \leq g(x)$

allora:

1) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

2) se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



Teorema del confronto ③ o dei due carabinieri

$f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, x_0 punto di accumulazione per A

se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$, $\exists\, I(x_0) / \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ valga $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

allora $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$

Dimostrazione:

$\forall \varepsilon > 0$ dato che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ $\exists\, I'(x_0) / \forall x \in I'(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$ vale $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

ovvero $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

dato che $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$ $\exists\, I''(x_0) / \forall x \in I''(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$ vale $|h(x) - \ell| < \varepsilon$

ovvero $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Consideriamo l'intorno $I'''(x_0) = I'(x_0) \cap I''(x_0) \cap \overbrace{I(x_0)}^{hp}$

se $x \in I'''(x_0) \setminus \{x_0\} \cap A$ allora $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

hp dell'intorno $I(x_0)$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$

cioè $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$

Esempio:

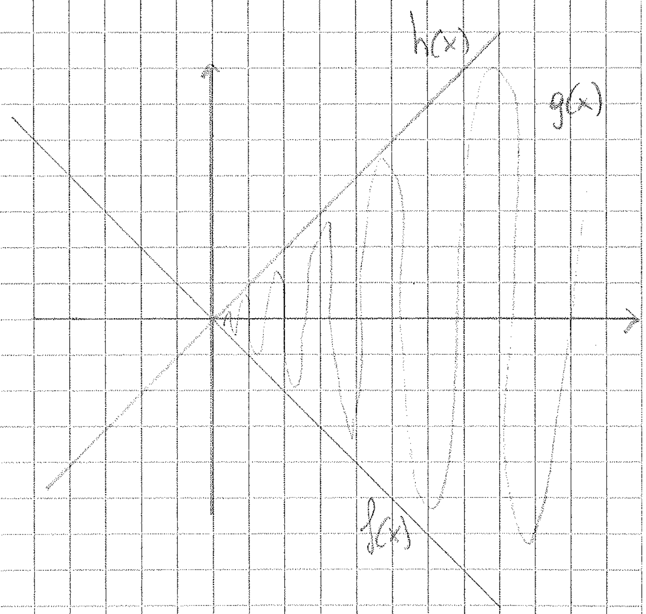
$g(x) = x \sin x$, $x > 0$

$-1 \leq \sin x \leq 1$, moltiplico per x

$-x \leq x \sin x \leq x$, $f(x) = -x$ $h(x) = x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 0$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 86

Dimostrazione del caso $\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \frac{(\sin x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{1^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2}$$

DEFINIZIONE: Sia $f: A\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ di accumulazione per A

Diciamo che f è INFINITESIMA per $x\to x_0$ oppure che f è un INFINITESIMO per $x\to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$

Diciamo che f è un INFINITO per $x\to x_0$ se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$

Esempi:

- $f(x)=x^3$ f è infinitesimo per $x\to 0$
  f è un infinito per $x\to\pm\infty$
- $f(x)=\cos x$ f è un infinitesimo per $x\to\frac{\pi}{2}$
- $f(x)=\frac{1}{|x-3|}$ f è un infinito per $x\to 3$
  f è un infinitesimo per $x\to-\infty$

NON TUTTI GLI INFINITI SONO UGUALI!

- x^3, x^5 li confronto ovvero faccio il rapporto! $\to \frac{x^3}{x^5}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^5+x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}(1+1/x^3)}{x^{\cancel{5}2}(1+1/x)} = 0$$

Definizione: Siano f,g $A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ di accumulazione per A

Diciamo che $f(x)=o(g(x))$ per $x\to x_0$ oppure $f=o(g)$ per $x\to x_0$ se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. Si legge f è "o piccolo" di g.

Esempio: - $f(x)=x^3+1$ $g(x)=x^5+x^4$

f è o piccolo di g per $x\to+\infty$. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

- $f(x)=x^2-6x+9$ $g(x)=2x$ $x\to 3$

$f=o(g)$ per $x\to 3$? $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{2x} = 0$ Si!

LIMITI NOTEVOLI SCRITTI CON GLI o PICCOLO

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

$\Rightarrow \sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$, $\boxed{\sin x = x + o(x) \text{ per } x \to 0}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{2x^2} = 0$

$2 - 2\cos x - x^2 = o(2x^2)$ per $x \to 0$

$2\cos x = 2 - x^2 - o(2x^2)$ per $x \to 0$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}o(2x^2)$ per $x \to 0$

$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \to 0}$

- $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0$
- $x^k = o(e^x)$ per $x \to +\infty$, $k > 0$
- $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$
- $\log x = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $x \to 0$
- $\log x = o(x^k)$ per $x \to +\infty$

Algebra degli "o piccolo"

$x \to 0$

1) $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$

2) $o(x^n) + o(x^m) = o(x^p)$ $p = \min\{n; m\}$ es. $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$

3) $o(\lambda x^m) = o(x^m)$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

4) $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

5) $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$

6) $[o(x^n)]^k = o(x^{nk})$

7) $[x^n + o(x^n)]^k = x^{nk} + o(x^{nk})$ per k per cui ha senso

Dimostrazione della 4)

hp. $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$

th. $x^m \cdot f(x) = o(x^{n+m})$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^m \cdot f(x)}{x^{m+n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^m} \cdot f(x)}{\cancel{x^m} \cdot x^n} = 0$$

$\frac{f(x)}{x^n} \to 0$ per l'hp!

6/10

Definizione: $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accum. per A
Diciamo che f è equivalente a g per $x \to x_0$ e scriviamo:

$$f \sim g \quad x \to x_0 \qquad \text{se vale} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Esempi:

- $\sin x \sim x$ $\quad x \to 0$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $f(x) = 3x^3 + x^2 - 1$ $\quad f(x) \sim 3x^3$ $\quad x \to +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + x^2 - 1}{3x^3} = 1$

anche: $f(x) \sim -1$ $\quad x \to 0$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + x^2 - 1}{-1} = 1$

anche: $f(x) \sim 3$ $\quad x \to 1$ $\quad \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{3} = 1$

Definizione: $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

Diciamo che f è un INFINITESIMO di ordine superiore a g per $x \to x_0$ o equivalentemente g è un infinitesimo di ordine inferiore a f se vale:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Diciamo che f e g hanno lo stesso ordine di infinitesimo per $x \to x_0$ oppure f e g sono infinitesimi dello stesso ordine se

$$f \sim \ell \cdot g, \text{ per } x \to x_0 \text{ con } \ell \in \mathbb{R} \neq 0$$

Esempio: x^2, x^5 $x \to 0$ $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ $\lim_{x \to 0} x^5 = 0$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^2} = 0$

Per $x \to 0$ x^5 è un infinitesimo di ordine superiore a x^2

Esempio: $e^x, \frac{1}{x}$ $x \to -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} e^x / \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^x$ sostituisco $t = -x$ $x = -t$
per $x \to -\infty$, $t \to +\infty$

$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{1/-t} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{t}{e^t} = 0$ e^x è un infinitesimo di ordine superiore a $1/x$ per $x \to -\infty$

Esempio: $1 - \cos x$, x^2 $x \to 0$ $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$ $(1 - \cos x)$ e x^2 sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to 0$

INFINITI STANDARD

per $x \to x_0$ $\frac{1}{x - x_0}$ per $x \to +\infty$ x

INFINITESIMI STANDARD

per $x \to x_0$ $x - x_0$ per $x \to +\infty$ $\frac{1}{x}$

Le SUCCESSIONI

Una successione è una funzione reale che ha come dominio $\mathbb{N}$ oppure un sottoinsieme illimitato A di $\mathbb{N}$.

$a: A \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad n \to a(n) = a_n$ si indica anche come (a_n) o $\{a_n\}$

- Esempio: $\frac{1}{n} = a_n \quad a: n \longmapsto \frac{1}{n} \quad \operatorname{Im} a = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \ldots\right\}$
- Esempio: $\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right)_{n \geq 2} \quad \left\{\frac{5}{1}; \frac{10}{2}; \frac{17}{3}; \ldots\right\}$
- Esempio: $(-1)^n \quad \{1; -1; 1; -1; \ldots\}$

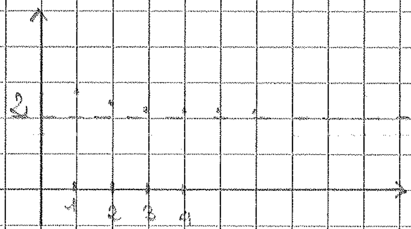
L'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$. Gli unici limiti che hanno senso sono quelli per cui $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n} a_n = \lim a_n$ se a_n è una successione. Esplicitiamo $\lim\limits_{n} a_n = \ell$:

CASO: $\ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ / \ \forall n > n_\varepsilon, \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$

- Esempio: $2 + \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n} a_n = 2$



CASO: $\ell = +\infty$

$\forall M > 0 \ \exists n_M \ / \ \forall n > n_M, \quad a_n > M$

~~Esempio~~

Valgono i teoremi di:

- Unicità del limite
- Limitatezza locale
- Permanenza del segno
- Confronto
- Algebra dei limiti
- Limiti di successioni monotone

Valgono i limiti notevoli per $x \to +\infty$

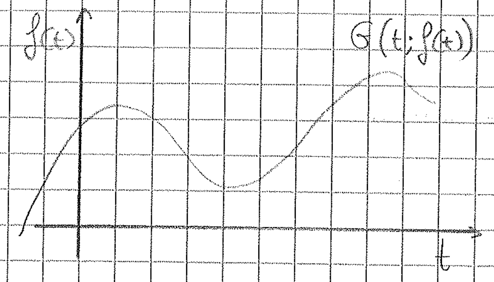
La scala degli ∞: $\log n \quad \underset{p>0}{n^p} \quad \underset{a>1}{a^n} \quad n! \quad n^n$

13/11

Le DERIVATE

Problema cinematico

Punto che si muove su una retta. La descrizione del moto del punto si può fare per mezzo di una funzione: $f: t \to f(t)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

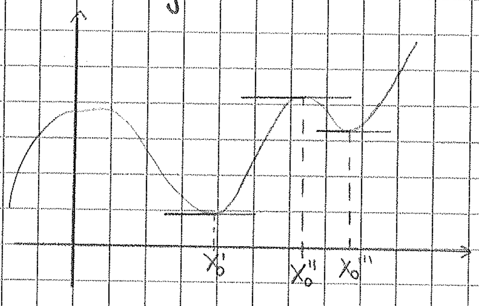


La velocità media del punto in un intervallo di tempo t_0, t_1:

$$v_{[t_0,t_1]} = \frac{\text{variazione dello spazio}}{\text{variazione del tempo}} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

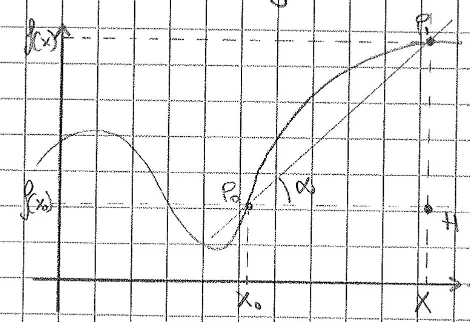
Definiamo velocità istantanea $v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ = derivata in t_0

Problema geometrico



Se x_0 è massimo o minimo per f allora la retta tangente al grafico di f è orizzontale.

Problema delle tangenti



- $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in \text{dom} f$, x_0 interno al dom f
- x_0 è interno al dom f se esiste un $I(x_0)$ tutto contenuto in dom f.

Retta per i punti $P_0(x_0; f(x_0))$ e $P_1(x; f(x))$ secante il grafico di: $y = f(x_0) + tg\alpha(x - x_0)$

· $tg\alpha = \frac{P_1H}{PH} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

La retta tangente al grafico di f in P viene definita come la retta per P con coefficiente angolare:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definizione: Se il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ esiste finito, f si dice derivabile nel punto x_0 e il valore del limite si dice derivata di f in x_0.

Il rapporto $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si dice RAPPORTO INCREMENTALE di f in x_0.

NOTAZIONE: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ dove $h = x - x_0$

PUNTI di NON DERIVABILITA'

1) PUNTO ANGOLOSO : $\exists f'_-(x_0)$ $\exists f'_+(x_0)$ ma $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$

2) CUSPIDE : $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mp\infty$

3) PUNTO di FLESSO a TANGENTE VERTICALE : $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

Proposizione: $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{dom} f$ e interno

$\exists f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ allora f è continua.

Inoltre $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ allora $\exists f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Algebra delle derivate

14/11

$f, g: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ e interno ed $\exists f'(x_0)$ e $g'(x_0)$

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

3) Regola di Leibnitz: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) f(x_0)$

4) se $f'(x_0) \neq 0$ $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$

5) se $g'(x_0) \neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

6) Derivata di f.ne composta:

$f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \text{dom} f$ interno

$g: \text{dom} g \to \mathbb{R}$ / $\text{im} f \subseteq \text{dom} g$, $f(x_0)$ interno a $\text{dom} g$

$\exists f'(x_0)$ e $g'(f(x_0))$ allora $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

7) Derivata di f.ne inversa:

$f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ continua e ~~derivabile~~ invertibile

f^{-1} inversa di f, $x_0 \in \text{dom} f$ e interno, $y_0 = f(x_0)$ interno a $\text{im} f = \text{dom} f^{-1}$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Teorema di Weierstrass

Se f continua su un intervallo chiuso e limitato allora f ammette massimo e minimo assoluti su questo intervallo.

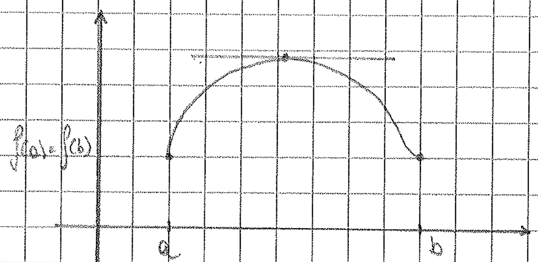
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua allora $\exists\ x_m, x_M \in [a, b] \ / \ \forall x \in [a, b]$

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

N.B.: x_m è minimo assoluto e $f(x_m)$ valore minimo della f.ne.

Teorema di Rolle

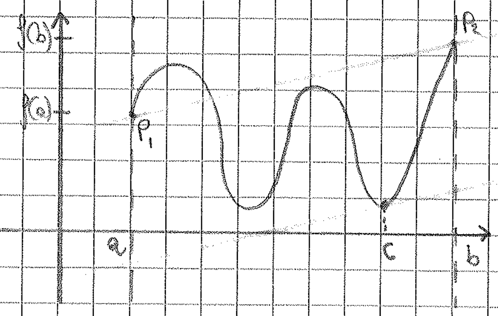
Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) / $f(a) = f(b)$ allora $\exists\ x_0 \in (a, b) \ / \ f'(x_0) = 0$



$f'(x_0) = 0$ cioè la tg al grafico della f.ne nel punto x_0 è orizzontale

Teorema di Lagrange

Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) allora esiste un punto $c \in (a, b) \ / \ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



- $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ = coeff. angolare della retta per i punti P_1 e P_2
- $f'(c)$ è il coeff. angolare della retta tg al grafico della f.ne nel punto c.

Riscriviamo la tesi moltiplicando ambo i membri per $(b - a)$

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(c) \cdot (b - a)} \qquad c \in (a, b)$$

2ª formula dell'incremento finito.

Derivate di ordine superiore

In generale se fissato un numero $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, f^{(n-1)}(x)$ su un intervallo I e se $f^{(n-1)}(x)$ è derivabile, allora $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right) = D^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

Si chiamano le f.ni di classe $\mathcal{C}^n$ su un intervallo I le f.ni che hanno tutte le derivate fino alla n-esima continue su I e si denotano con $\mathcal{C}^n(I)$.

- $\mathcal{C}^0(I)$ sono le funzioni continue su I.
- $f^{(0)}(x) = f(x)$
- f si dice di classe $\mathcal{C}^\infty$ in I se ammette derivate di ogni ordine e tutte continue

FORMULE di TAYLOR

In generale se f è derivabile fino all'ordine n:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \text{ per } x \to x_0}$$

Polinomio di Taylor di grado n per f in x_0 $\quad P_n^{f,x_0} \to P_n(x)$

$\boxed{r_n = f(x) - P_n(x)}$ Resto di Peano di ordine n

Si può scrivere anche come: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$

1) Nel caso $x_0 = 0$ le formule (gli sviluppi) si chiamano di McLaurin

2) Se f è dispari nel polinomio di McLaurin di f compaiono solo le potenze dispari.

3) $P_n(x)$ si può dimostrare che è l'unico polinomio di grado ~~n~~ per cui vale $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$

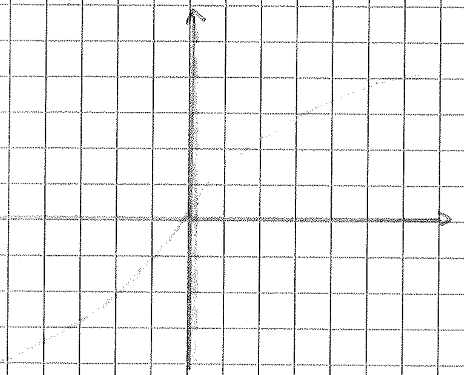
4) $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$

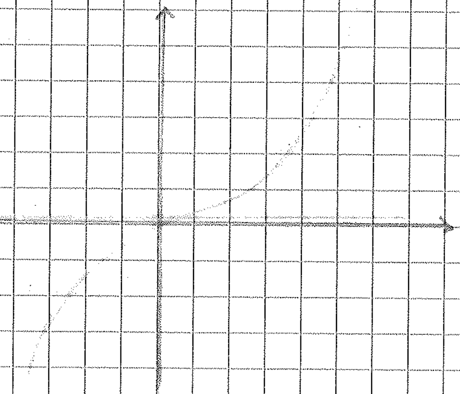
Un punto di flesso si dice a TANGENTE ORIZZONTALE se $f'(x_0)=0$

Se invece $f'(x_0)\neq 0$ il punto di flesso si dice a TANGENTE OBLIQUA

Si dice punto di flesso a TANGENTE VERTICALE un punto x_0 per cui valga:

$$\lim_{x\to x} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \quad \text{oppure} \ -\infty$$





Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, I aperto, f derivabile due volte in I

1) f è convessa [concava] in $x_0 \in I \iff f''(x_0)\geq 0$ $[f''(x_0)\leq 0]$

2) $f''(x_0)>0$ $[<0]$ $\Rightarrow$ f strettamente convessa [str. concava] in x_0

N.B.: Il viceversa di 2) NON È VERO!

3) x_0 di flesso $\Rightarrow f''(x_0)=0$

4) f'' cambia segno in $x_0 \Rightarrow x_0$ di flesso

$$\exists \ \delta>0 \ / \ (x_0-\delta, x_0) \ f''(x)<0 \quad (>0)$$
$$(x_0, x_0+\delta) \ f''(x)>0 \quad (<0)$$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$ interno, f derivabile 2 volte in I, $f'(x_0)=0$

Se $f''(x_0)>0$ allora x_0 è un minimo relativo

Se $f''(x_0)<0$ allora x_0 è un massimo relativo

INTEGRALI INDEFINITI

Definizione: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione

Diciamo che $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I se vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Osservazione: Non c'è un'unica primitiva.

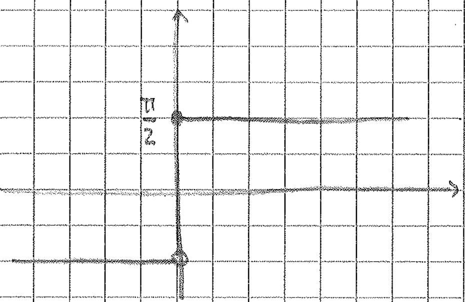
Teorema di caratterizzazione delle f.ni costanti

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile / $\forall x \in [a,b]$ $f'(x) = 0$

allora f è costante su $[a,b]$.

Osservazione:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$



$\tilde{f}$ su $\mathbb{R}$ non ammette primitive
perché se $\tilde{F}$ fosse una primitiva
di $\tilde{f}$ allora sarebbe: $\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x)$

$\tilde{f}$ ha discontinuità di prima specie non ammissibile nelle derivate.

Teorema (proprietà delle primitive)

$f: I \to \mathbb{R}$ con I intervallo

1) Se $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f allora anche $F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I.

2) Se $F: I \to \mathbb{R}$ e $G: I \to \mathbb{R}$ sono due primitive di f allora $F(x) - G(x)$ è costante su I, o, equivalentemente $\exists\, c \in \mathbb{R} \,/\, G(x) = F(x) + c$

Definizione

Si dice INTEGRALE INDEFINITO di una f.ne f definita su un intervallo I l'insieme di tutte le primitive di f su I:

$$\int f(x)\, dx$$

Linearità dell'integrale indefinito

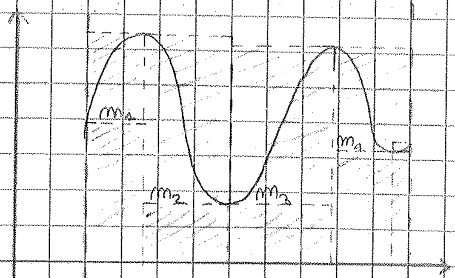
Siano $f, g: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) che ammettono primitive su I e sia $c \in \mathbb{R}$.

Allora: $\int (f+g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

$$\int (cf)(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

Significati dell'integrale

Area della regione di piano delimitata dal grafico di una f.ne positiva.

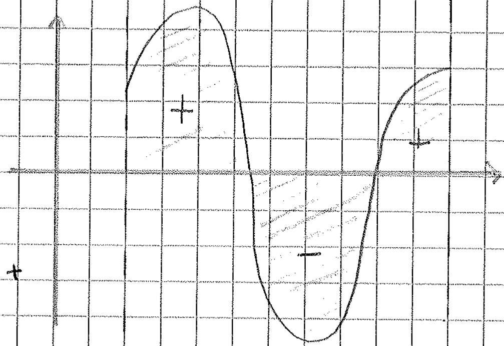


$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad N=4$

$s(f,\sigma) = m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + m_3(x_3-x_2) + m_4(x_4-x_3)$

$+ \quad S(f,\sigma) \quad \int_a^b f(x)\,dx$

Se $f(x) \geq 0$ su $[a,b]$ l'integrale rappresenta l'area compresa fra le rette verticali per a e b, il grafico di f e l'asse delle x.



Se f cambia segno su $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta la somma delle aree comprese fra il grafico di f, le rette verticali per a e per b e l'asse delle x, ma prese con il segno + negli intervalli in cui $f(x)>0$ e col segno − nell'intervallo in cui $f(x)<0$.

Proprietà dell'integrale definito

1) Linearità dell'integrale

- f, g integrabili su $[a,b] \Rightarrow \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $c \in \mathbb{R} \quad \int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

2) $f \cdot g$ integrabile

Se $g \neq 0 \rightarrow f/g$ è integrabile

3) MONOTONIA

Se $f(x) \leq g(x)$ su $[a,b]$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

4) VALORE ASSOLUTO

$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$

5) ADDITIVITÀ rispetto al DOMINIO

$a \leq c \leq b \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

6) "SCAMBIO ESTREMI"

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE

Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

Allora:

1) • La f.ne $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è continua in ogni punto $x_0 \in [a, b]$
- $F(x)$ è derivabile in ogni punto $x \in [a, b]$
- Vale $F'(x_0) = f(x_0)$ cioè F è una primitiva di f su $[a, b]$

2) Se $G(x)$ è una qualsiasi primitiva di f su $[a, b]$
allora: $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$

Definizione: F è una primitiva generalizzata di f su $[a, b]$ se F è continua su $[a, b]$ e F è derivabile tranne che in un numero finito di punti e dove è derivabile vale $F'(x) = f(x)$

INTEGRALI IMPROPRI

17/12

Sia f definita su una semiretta
$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

Sia f integrabile secondo Riemann su ogni intervallo della forma $[a, M]$ con $M > a$
$\forall M \ \exists \int_a^M f(t)\,dt$

Definizione: diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ se $\exists \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(t)\,dt$

in questo caso $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(t)\,dt$

Si dice anche che l'integrale improprio è CONVERGENTE se
$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(t)\,dt = l$$

Si dice che l'integrale improprio è DIVERGENTE se
$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(t)\,dt = \pm\infty$$

Si dice che l'integrale improprio è OSCILLANTE o INDETERMINATO se
$$\nexists \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(t)\,dt$$

CRITERIO della CONVERGENZA ASSOLUTA

$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile in ogni $[a, M]$ con $M > a$

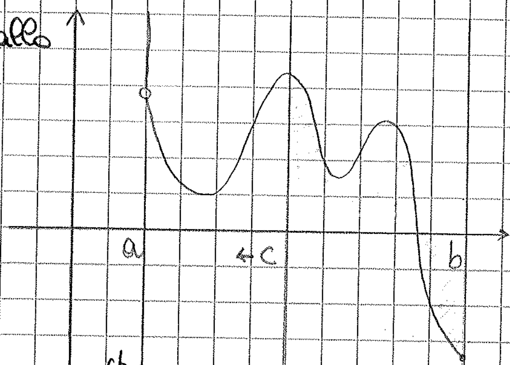
Se l'integrale $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge allora converge anche $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e vale $\left| \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$

Definizione: f è assolutamente integrabile su $[a, +\infty)$ se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge. Il viceversa è falso!

INTEGRALI IMPROPRI di f.ni ILLIMITATE

18/12

$f: (a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo della forma $[c, b]$ con $a < c < b$.



Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $(a, b]$ se esiste:

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(t)\, dt$$

in questo caso si scrive: $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$

Si dice anche che se $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt = \pm\infty$ l'integrale $\int_a^b f(t)\, dt$ è divergente e se $\nexists \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(t)\, dt$ si dice che l'integrale improprio $\int_a^b f(t)\, dt$ è oscillante o indeterminato.

Caso in cui $f: [a, b)$

$f: [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni $[a, c]$ con $a < c < b$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$