



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 845**

**DATA: 12/03/2014**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Mazzia**

**MATERIA: Fondam. di Meccanica Strutturale + Eserc**

**Prof. Chiandussi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# Lezione 1

1/10/13

In questo corso analizzeremo strutture solamente composte da travi.  
 // Qualsiasi sistema più o meno complesso può essere ricondotto ad un sistema di travi. //

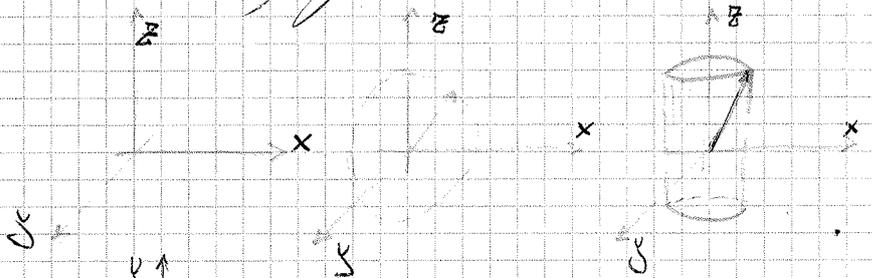
Ci occuperemo solo di statica in cui non compaiono forze di inerzia, movimenti e variazioni tempo.

• Testi consigliati: Fondamenti di meccanica strutturale; Cugli, Cucca

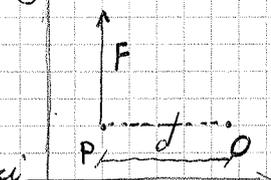
## Forze e momenti

Forza è definita da un vettore (direzione, modulo e verso)

Sistemi di riferimento: cartesiano, cilindrico e sferico.



Se io prendo una forza e la riferisco ad un punto ottengo un Momento della Forza. Essa come i vettori forza è un vettore ma è libero perché non ha punto di applicazione.



$$\vec{M}_O = (\vec{P}-O) \wedge \vec{F} = -d F \vec{k}$$

Se faccio la somma delle forze ottengo la risultante

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \quad \begin{cases} R_x = \sum F_x \\ R_y = \sum F_y \\ R_z = \sum F_z \end{cases}$$

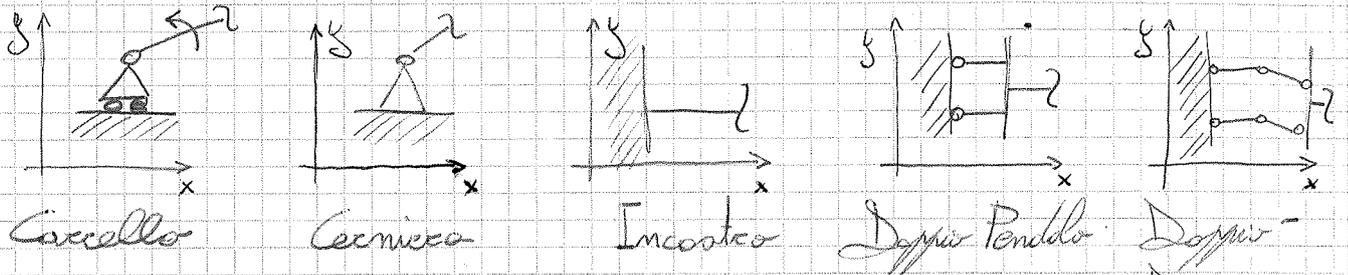
Se faccio la somma dei momenti ottengo la risultante dei momenti delle forze

$$R_{M_O} = \sum_i (\vec{P}_i - O) \wedge \vec{F}_i + \sum_j M_j$$

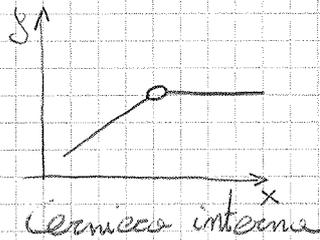
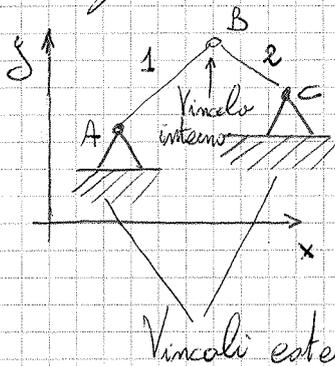
Posso anche riferirlo ad un altro punto

$$R_{M_A} = \sum_i (\vec{P}_i - A) \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\vec{P}_i - O) \wedge \vec{F}_i + \sum (\vec{O}-A) \wedge \vec{F}_i =$$

Con i vincoli nascono le forze



Ma studieremo tutti i sistemi sul piano usando le proiezioni sui tre piani.



$$2(r-1) = \text{numero vincoli}$$

$$3 \cdot N_c = NV$$

(numero coppi)      (numero di vincoli)

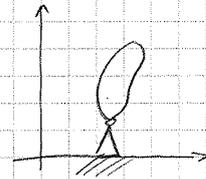
Si definisce grado di iperstaticità la differenza tra i gradi di libertà e i gradi di vincolo

$$h = m - m$$

Cinematismo

$$m = 3$$

$$m = 2$$



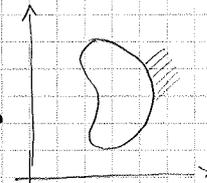
$$h = 1$$

Vengano trattati durante il corso.

Isostatica

$$m = 3$$

$$m = 3$$

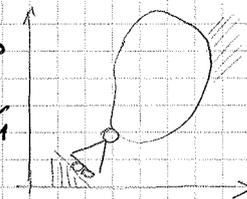


$$h = 0$$

Iperstatica

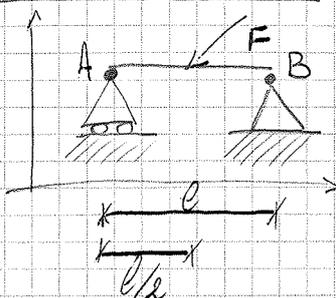
$$m = 3$$

$$m = 4$$



$$h = -1$$

Sistemi isostatici



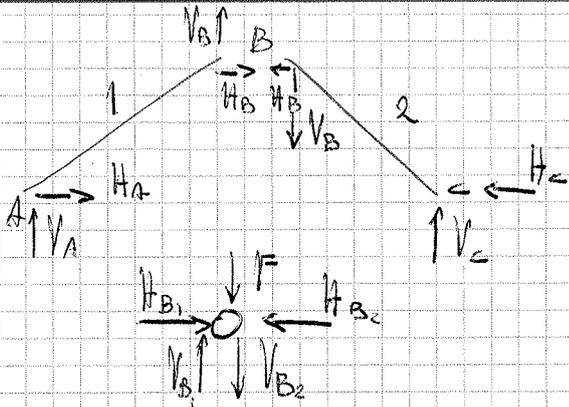
Il metodo completo è calcolare le reazioni vincolari

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

Impostando tre eq. non ricorrendo alle reazioni.



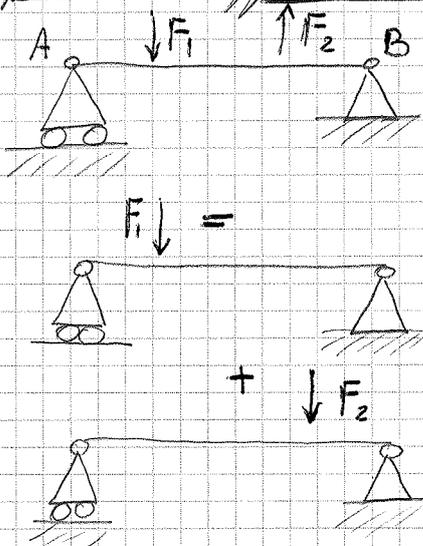
$$\begin{aligned} \uparrow) & V_A + V_C - F = 0 \\ \rightarrow) & H_A - H_C = 0 \\ A) & F \cdot l_1 - V_C(l_1 + l_2) - H_C \frac{l_2}{3} = 0 \\ B) & V_C \cdot l_2 - H_C l_2 = 0 \end{aligned}$$

Per fare l'ultima equazione posso scegliere uno dei due pezzi. Lo scelta dell'equazione ultima da fare viene fatta in base al minor numero di conti.

N.B

I versi delle forze sono indifferenti. Cambia solo i segni e bisogna mettere i versi.

Principio di sovrapposizione degli effetti

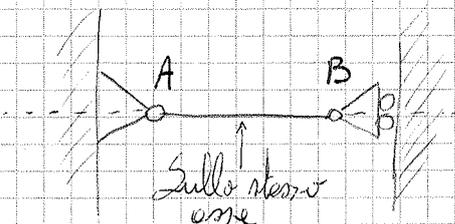


N.B

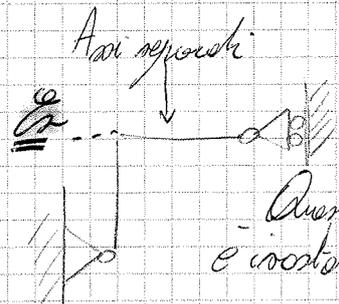


Uno scarto

Due scarti



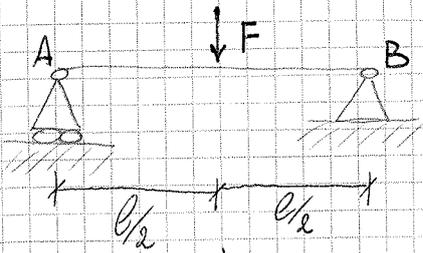
Questo è  
lo stile e più  
poche piccole rotazioni



Questo stile  
è instabile

### Lezione 3

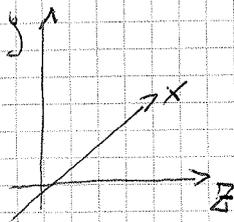
#### Rapporto sistema - mondo



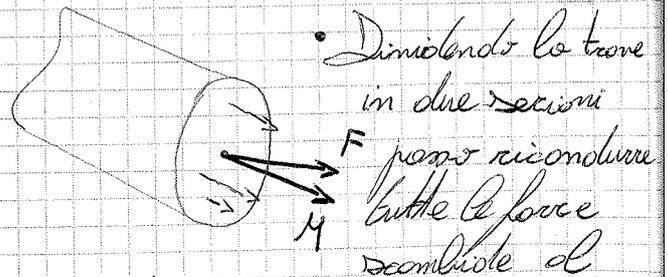
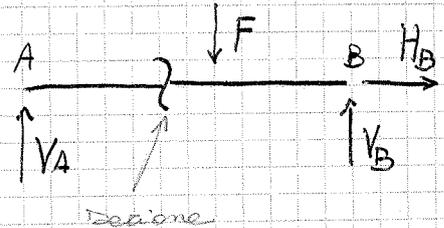
x:  $H_B = 0$

y:  $V_A + V_B - F = 0$

Voglio vedere come si comporta internamente la trave. Faccio una sezione. Creo un sistema di riferimento e posso scegliere arbitrariamente quale asse fa coincidere con la trave.

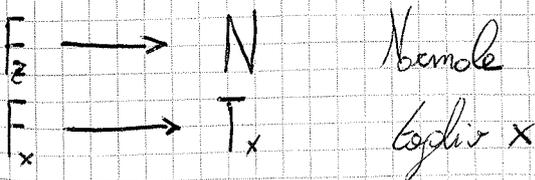


|| z è l'asse di coincidenza con la trave ||

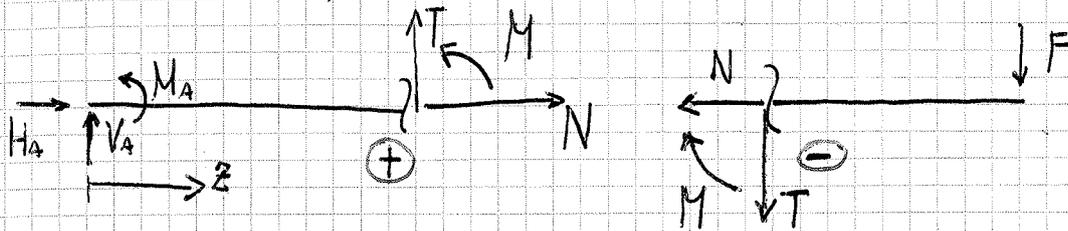


• Dividendo la trave in due sezioni  
 F posso ricondurre tutte le forze scomposte al baricentro dove applico la risultante delle forze e del momento.  
 Il momento lo posso scomporre come  $M_x, M_y, M_z$  e anche le forze come  $F_x, F_y, F_z$

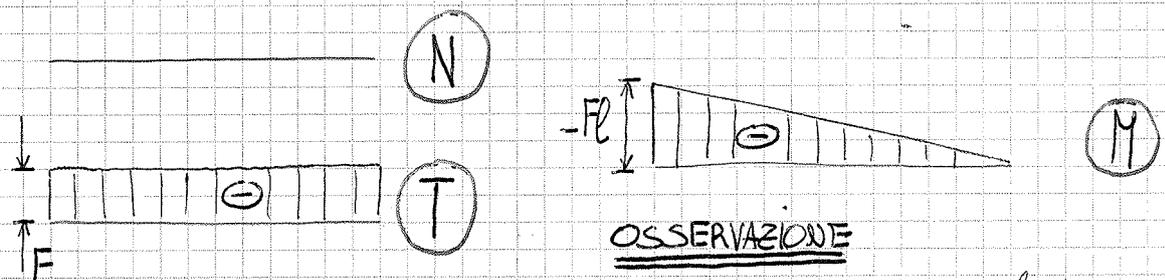
#### Caratteristiche della sollecitazione



Adesso che conosciamo le forze di vincolo sezioniamo la trave per individuare le forze interne.

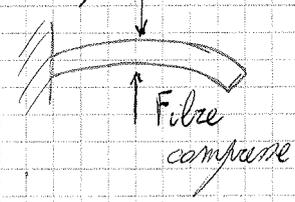


$$\begin{aligned} \rightarrow) \quad H_A + N &= 0 & N &= -H_A = 0 \\ \uparrow) \quad V_A + T &= 0 & T &= -V_A = -F \\ \curvearrowright) \quad M_A + M + T \cdot z &= 0 & M &= -M_A - T \cdot z = -Fl + F \cdot z = F(z-l) \end{aligned}$$

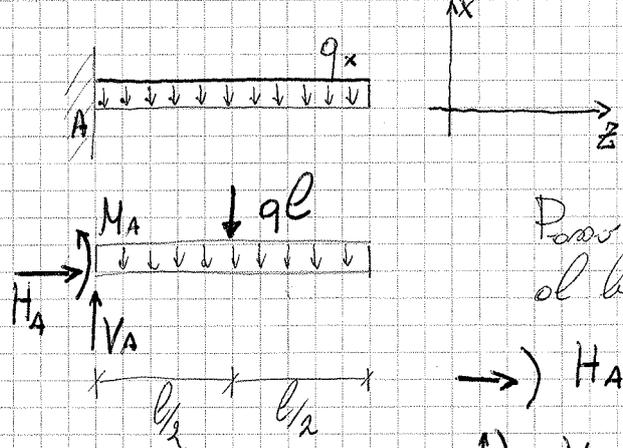


OSSERVAZIONE

Se mai disegnassimo il diagramma delle porte delle fibre tese ci da un'idea delle deformate flessive



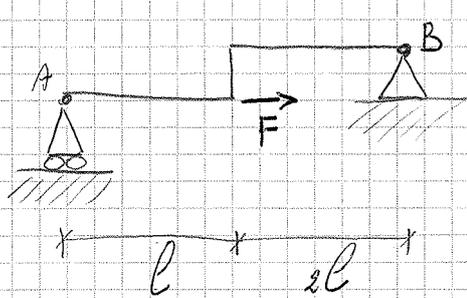
q (carico distribuito)



Per applicare il carico distribuito al baricentro per calcolare il momento

$$\begin{aligned} \rightarrow) \quad H_A &= 0 \\ \uparrow) \quad V_A - ql &= 0 \\ \curvearrowright) \quad M_A - ql \cdot \left(\frac{l}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A &= ql \\ M_A &= q \frac{l^2}{2} \end{aligned} \right.$$

Es 2



$F = 2000 \text{ N}$   
 $l = 2 \text{ m}$   
 $h = 0,5 \text{ m}$

$\uparrow) V_A - V_B = 0 \quad 1)$

$\rightarrow) F - H_B = 0 \quad 2)$

$B) F \cdot h - V_A \cdot 3l = 0 \quad 3)$

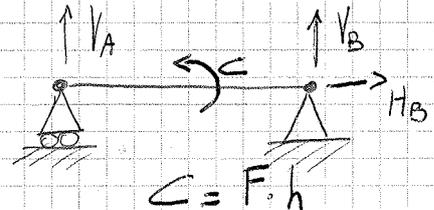
1)  $V_A = V_B \Rightarrow V_B = \frac{F \cdot h}{3l}$

2)  $F = H_B = 2000 \text{ N}$

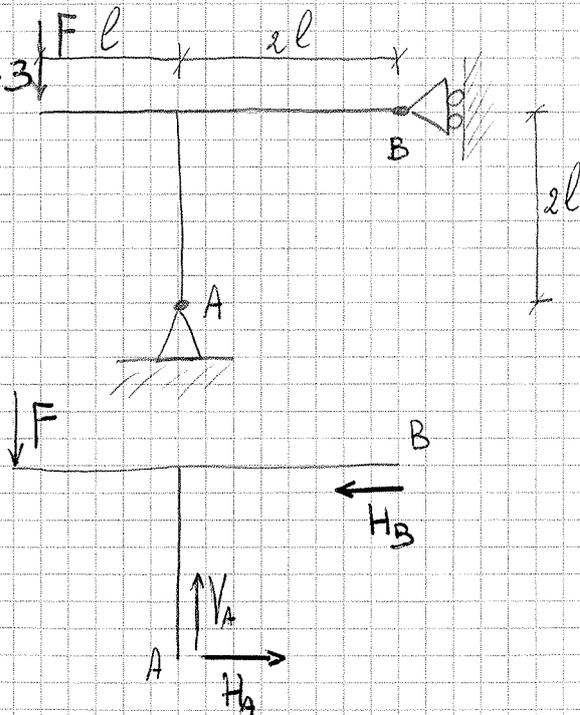
3)  $V_A \cdot 3l = F \cdot h \Rightarrow V_A = \frac{F \cdot h}{3l} = \frac{2000 \cdot 0,5}{3 \cdot 2} = 167 \text{ N}$

OSS.

Però anche trasformare le strutture come



Es 3



$F = 4000 \text{ N}$   
 $l = 0,5 \text{ m}$

$\uparrow) -F + V_A = 0 \quad F = V_A = 4000 \text{ N}$

$\rightarrow) -H_B + H_A = 0 \quad H_A = H_B = -\frac{F \cdot l}{2l} = -2000 \text{ N}$

$A) H_B \cdot 2l + F \cdot l = 0$

$H_B = -\frac{F \cdot l}{2l} = \frac{4000 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,5} = -2000 \text{ N}$

$$\uparrow) T - P = 0 \quad 1)$$

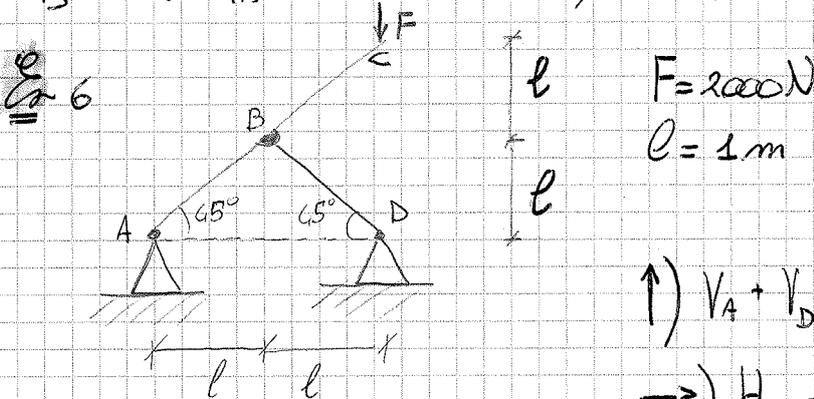
$$\rightarrow) H_A + H_B + R = 0 \quad 2)$$

$$\curvearrow) R \cdot c + P \cdot b - H_A(d-c) - T(b-a) = 0 \quad 3)$$

$$T = P = 10000 \text{ N}$$

$$H_A = \frac{R \cdot c + P \cdot b - T(b-a)}{(d-c)} = 9527 \text{ N}$$

$$H_B = -R - H_A = -1200 - 9527,3 = -10727 \text{ N}$$

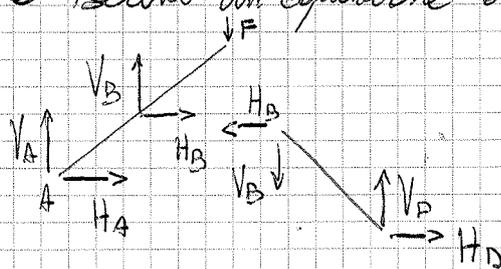


$$\uparrow) V_A + V_D - F = 0 \quad V_A = F - V_D = 0$$

$$\rightarrow) H_A - H_B = 0 \quad H_A = H_B$$

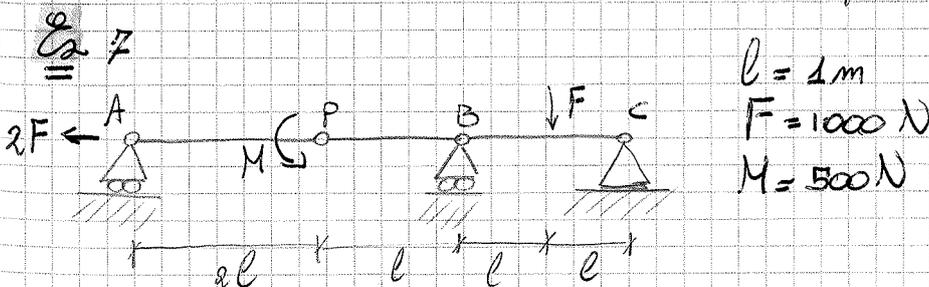
$$\curvearrow) V_D(2l) - F \cdot (2l) \quad V_D = F$$

Per trovare l'ultima incognita prendo una delle due sotto-strutture e scrivo un'equazione di equilibrio.



$$B) -F \cdot l - V_A \cdot l + H_A \cdot l = 0$$

Questa equazione va aggiunta alle altre



$$R = F_1 + F_2 + F_3 = 700 \text{ N}$$

Per trovare il punto di applicazione mi basta imporre l'equilibio del momento

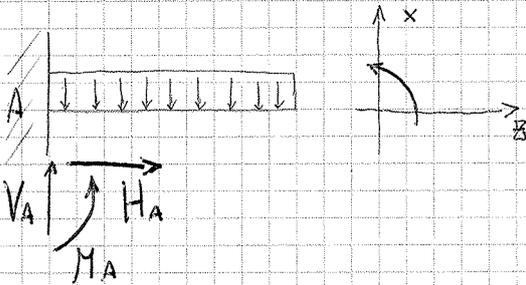
$$R_x = F_1 x_1 - F_2 x_2 + F_3 x_3$$

$$x = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2 + F_3 x_3}{R} = 7 \text{ m}$$

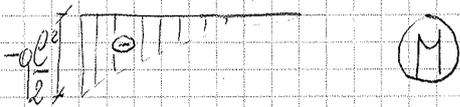
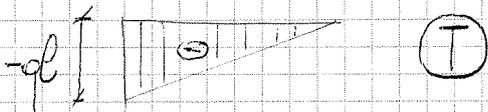
## Lezione 9

10.10.13

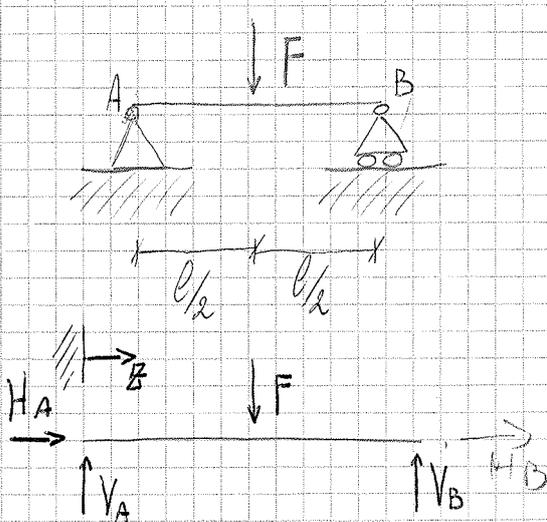
Riprendiamo l'esempio della trave a sbalzo con carico distribuito.



$$\begin{cases} V_A = ql \\ H_A = 0 \\ M_A = \frac{ql^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} N = 0 \\ T = q(z-l) \\ M = q\left(-\frac{l}{2} - \frac{z^2}{2} + zl\right) \end{cases}$$



Per disegnare il grafico proprio rispettivamente  $z=0$  e  $z=l$

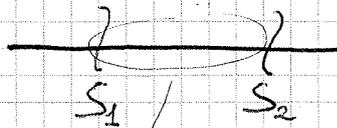
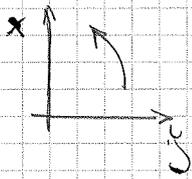


$$\uparrow) V_A + V_B - F = 0$$

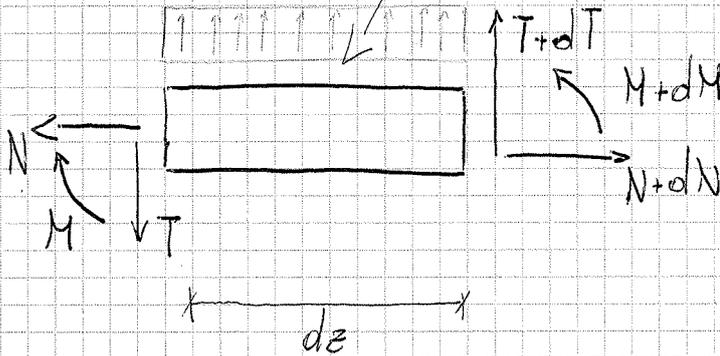
$$\rightarrow) H_A = 0$$

$$\curvearrowright) -\frac{F \cdot l}{2} + V_B l = 0$$

# Derivate del momento e del taglio



Prendiamo una pece obliqua troncata



$$\rightarrow) N + dN - N = 0$$

$$\uparrow) T + dT - T + q dz = 0$$

$$dx) M + dM - M + T \cdot dz - q \frac{dz^2}{2} = 0$$

$$dN = 0 \rightarrow \text{costante}$$

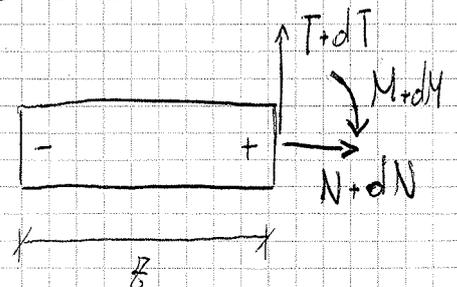
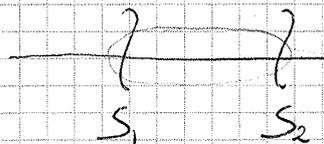
$$dT + q dz = 0 \quad \left[ \frac{dT}{dz} = -q \right]$$

$$dM + T dz - q \frac{dz^2}{2} = 0 \quad \left[ \frac{dM}{dz} = -T \right]$$

$$\rightarrow \left[ \frac{d^2 M}{dz^2} = -q \right]$$

infinitesimo di ordine superiore che può essere trascurato

• Ripetiamo il calcolo prendendo la troncatura cartesiana



$$\rightarrow) (N + dN) - N = 0$$

$$\uparrow) (T + dT) - T + q dz = 0$$

$$dx) M + dM - M - T dz + q \frac{dz^2}{2} = 0$$

Andiamo a fare lo stesso considerando anche lo spale di di  
le di C

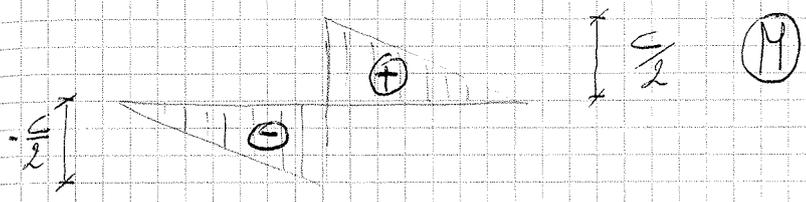
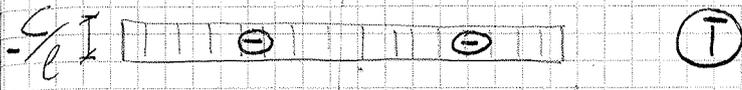


$$N + H_A = 0 \quad N = 0$$

$$V_A + T = 0 \quad T = -\frac{c}{e}$$

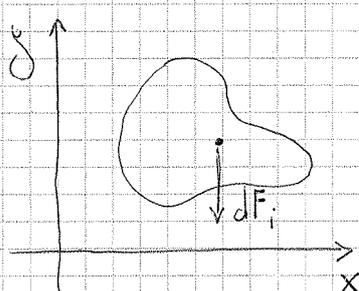
$$M + V_A \cdot B - C = 0$$

$$M = +C - \frac{c}{e} B = C \left(1 - \frac{B}{e}\right)$$



Lezione 5

11.10.13



Geometria delle aree: è lo studio delle sezione della trave

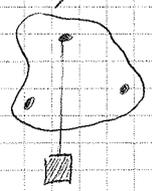
Baricentro

Per calcolarlo considereremo sempre materiali con densità costante (omogenei e isotropi)

$$m = \rho V \quad \rho = \left[ \frac{kg}{m^3} \right] \quad \text{Ma se ci troviamo in due dimensioni } \rho = \left[ \frac{kg}{m^2} \right]$$

N.B Per trovare il baricentro possiamo fare dei fori nella sezione e appendere un filo con un peso.

$$F = \int_A dF_i = \rho g \int_A dA_i = \rho g A \quad dF_i = \rho g dA_i$$



Lo risultante va applicato nel punto in cui il primo momento nullo

$$F \cdot x = \int_A x dF = \rho g \int_A x dA \quad \text{momento statico}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

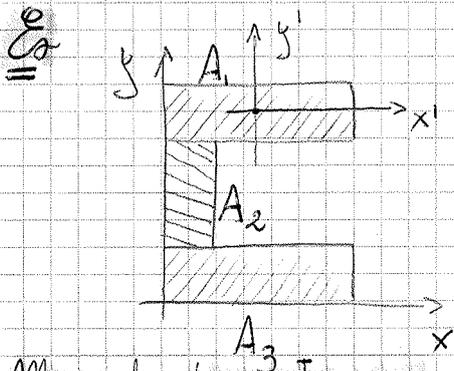
Matrice di rotazione

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = [R]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [R]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S'_x &= \int_A y' dA = \int_A (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dA = \sin \alpha \int_A -x dA + \cos \alpha \int_A y dA \\ &= -S_y \sin \alpha + S_x \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{cases} S'_x = S_x \cos \alpha - S_y \sin \alpha \\ S'_y = S_x \sin \alpha + S_y \cos \alpha \end{cases}$$

**N.B** Nel sistema di riferimento del baricentro il momento statico è nullo.



Pensiamo alle strutture come costituite da tre aree  $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$S_x = \int_A y dA = \int_{A_1} y dA + \int_{A_2} y dA + \int_{A_3} y dA$$

Momenti di Inerzia

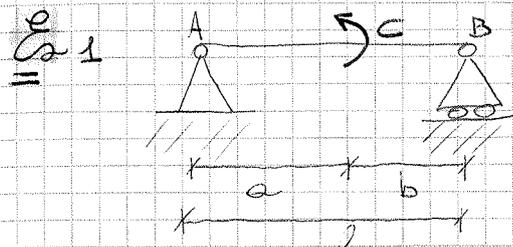
$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

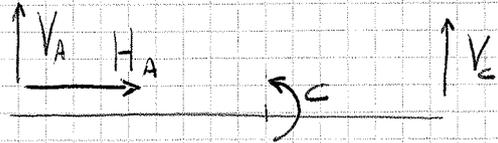
## Esercitazione 2

15.10.13



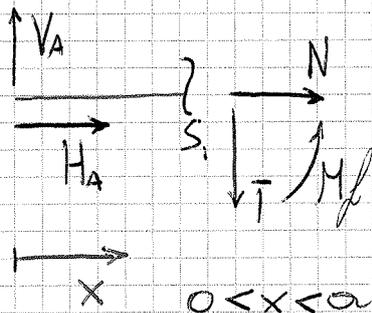
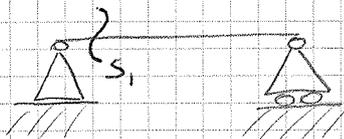
Trovare le reazioni vincolari e le caratteristiche di sollecitazione.

$l = 80 \text{ mm}$     $C = 6000 \text{ N}\cdot\text{mm}$     $a = 60 \text{ mm}$



Faccio una sezione prima della discontinuità creata da C

$$\rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ \uparrow) V_A + V_C = 0 \Rightarrow V_A = \frac{C}{l} = 80 \text{ N} \\ \curvearrowright) C + V_C \cdot l = 0 \Rightarrow V_C = -\frac{C}{l} = -80 \text{ N} \end{cases}$$



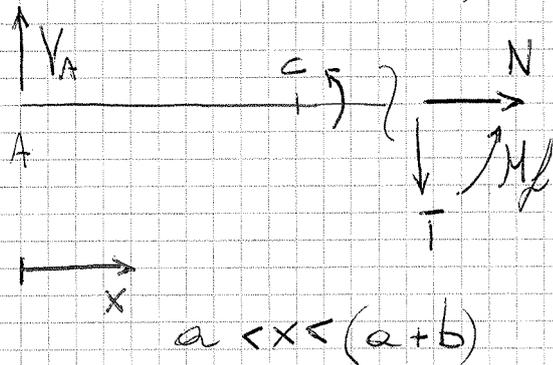
$$\rightarrow) H_A + N \Rightarrow N = 0$$

$$\uparrow) V_A - T = 0 \Rightarrow T = V_A = 80 \text{ N}$$

$$\curvearrowright) M_f - T \cdot x = 0 \Rightarrow M_f = V_A \cdot x$$

$$\begin{aligned} x=0 &= M_f = 0 \\ x=a &= M_f = V_A \cdot a \\ &= 3200 \text{ N}\cdot\text{mm} \end{aligned}$$

La seconda sezione la faccio dopo C



$$\rightarrow) N = 0$$

$$\uparrow) V_A - T = 0 \Rightarrow T = V_A = 80 \text{ N}$$

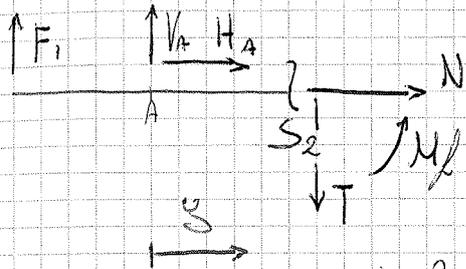
$$\curvearrowright) M_f + C - T \cdot x = 0$$

$$x=a \quad \quad \quad x=(a+b)$$

$$M_f = V_A \cdot a - C = -800 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

Adesso con i risultati ottenuti calcoliamo e disegniamo le caratteristiche di sollecitazione nei tre diagrammi.

2<sup>a</sup> sezione



$$\rightarrow) N + H_A = 0$$

$$\uparrow) F_1 + V_A - T = 0$$

$$\curvearrowright) M_f - F_1(l+y) + (-V_A y) = 0$$

$$0 < y < 2l$$

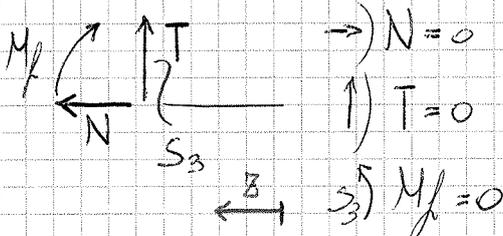
Seossi messo da parte da A ( $F_1$   $l < x < 3l$ )

$$\begin{cases} N = -H_A = -120 \text{ N} \\ T = F_1 + V_A = -11,62 \approx -12 \text{ N} \\ M_f = F_1(l+y) + V_A y \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y=0 & y=2l \\ F_1 l = 32 \text{ N}\cdot\text{m} & F_1(3l) + V_A 2l = 22,4 \text{ N} \end{matrix}$$

Adesso per semplificare i calcoli continuo a sezionare la mia struttura da destra verso sinistra rimanendo però coerente con gli assi

3<sup>a</sup> sezione



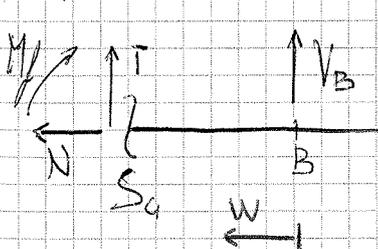
$$\rightarrow) N = 0$$

$$\uparrow) T = 0$$

$$\curvearrowright) M_f = 0$$

$$0 < z < l$$

4<sup>a</sup> sezione



$$\rightarrow) N = 0$$

$$\uparrow) T + V_B = 0 \quad T = -V_B = -12 \text{ N}$$

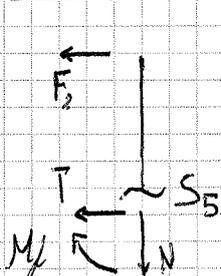
$$\curvearrowright) M_f - V_B \cdot w = 0 \quad M_f = V_B \cdot w$$

$$\begin{matrix} w=0 & M_f = 0 \\ w=l & V_B \cdot l = 4,7 \text{ N}\cdot\text{m} \end{matrix}$$

$$0 < w < l$$

non cambia niente

5<sup>a</sup> sezione

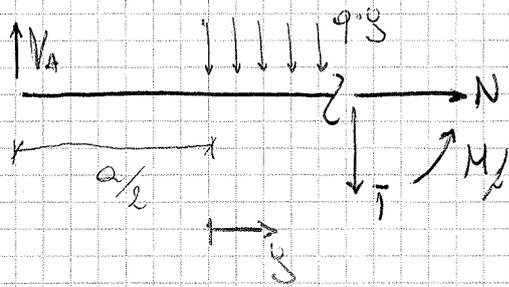


$$\rightarrow) N = 0$$

$$\uparrow) T + F_2 = 0 \quad T = -F_2 = -120 \text{ N}$$

$$\curvearrowright) M_f - F_2 k \Rightarrow M_f = F_2 k$$

$$\begin{matrix} k=0 & 0 \\ k=h & F_2 h = 18 \text{ N} \end{matrix}$$



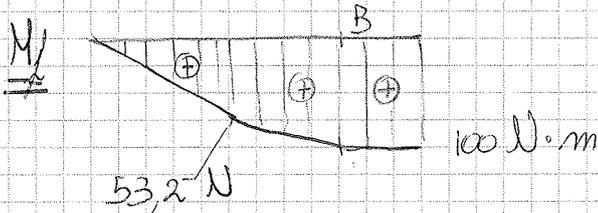
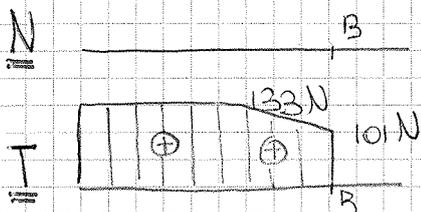
$$\uparrow) T + qy - V_A = 0 \quad 1)$$

$$\sum \curvearrowright) M_x + qy\left(\frac{y}{2}\right) - V_A\left(y + \frac{a}{2}\right) = 0 \quad 2)$$

$$0 < y < \frac{a}{2}$$

$$1) T = V_A - qy \quad \begin{matrix} y=0 & T = V_A = 133 \text{ N} \\ y=\frac{a}{2} & T = V_A - q\frac{a}{2} = 101 \text{ N} \end{matrix}$$

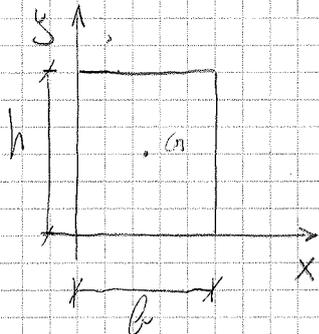
$$2) M_x = V_A\left(y + \frac{a}{2}\right) - q\frac{y^2}{2} = \begin{matrix} y=0 & V_A\frac{a}{2} = 53,2 \text{ N}\cdot\text{m} \\ y=\frac{a}{2} & V_A\cdot a - q\frac{a^2}{8} = 1000 \text{ N}\cdot\text{m} \end{matrix}$$



### Lezione 6

17.10.2013

• Riprendiamo l'esempio del rettangolo



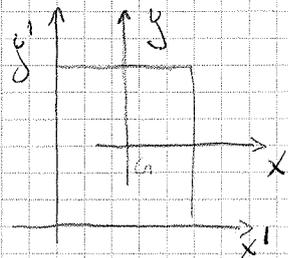
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

$$G \left( \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

Completiamo il sistema di riferimento per trovare i momenti di inerzia baricentrici



$$I_{x'} = I_x + \frac{h^2 A}{4} \Rightarrow I_x = I_{x'} - \frac{h^2 A}{4}$$

$$= \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \boxed{\frac{b \cdot h^3}{12}}$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + 2 I_{xy} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 dA = -I_y \sin^2 \alpha + I_x \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha I_{xy}$$

$$I_{x'y'} = \int x'y' dA = \int (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dA = -\sin \alpha \cos \alpha I_y + I_x \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha I_{xy} = \sin \alpha \cos \alpha (I_x - I_y) - I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

• Ricorrendoci alcune relazioni trigonometriche riscriviamo i momenti di inerzia trovati per gli assi ruotati.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$(\sin^2 x = 1 - \cos^2 x)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Formule di duplicazione

Formule di linearità

$$I_{y'} = I_y \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + I_x \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) + I_{xy} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} (I_y + I_x) + \frac{1}{2} \cos 2\alpha (I_y - I_x) + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{x'} = \frac{1}{2} (I_y - I_x) + \frac{1}{2} \cos 2\alpha (I_x + I_y) - I_{xy} \sin 2\alpha$$

Dalle due relazioni precedenti ricavo che

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

$$\sin 2\alpha = \frac{I_x - I_y}{2I_{xy}} \cdot \frac{-2I_{xy}}{(I_x - I_y)} = -\frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{\frac{1}{2}(I_x - I_y)^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} + \frac{2I_{xy}^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} =$$

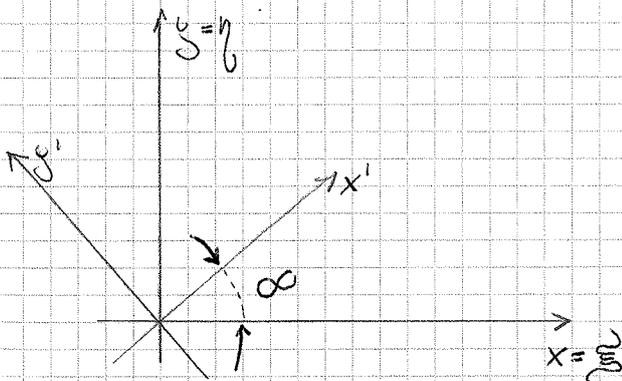
$$= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2} \frac{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = I_{\xi} \quad I_{\xi} \geq I_{\eta}$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = I_{\eta}$$

Lezione 7

18.10.2013



Semplificazione delle espressioni  
 se  $x = \xi$  e  $y = \eta$

$$\begin{cases} I_y = I_{\eta} \cos^2 \alpha + I_{\xi} \sin^2 \alpha \\ I_{x'} = I_{\eta} \sin^2 \alpha + I_{\xi} \cos^2 \alpha \\ I_{x'y'} = (I_{\xi} - I_{\eta}) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

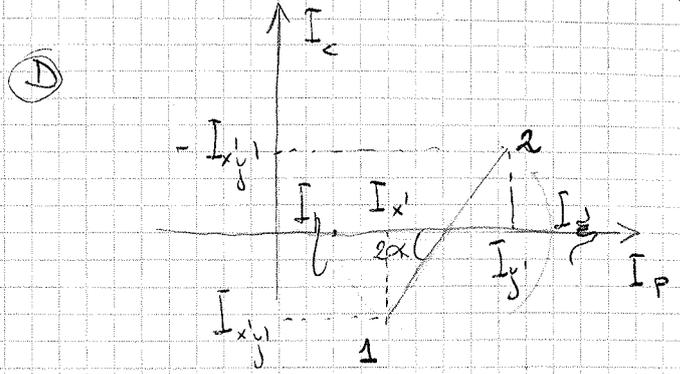
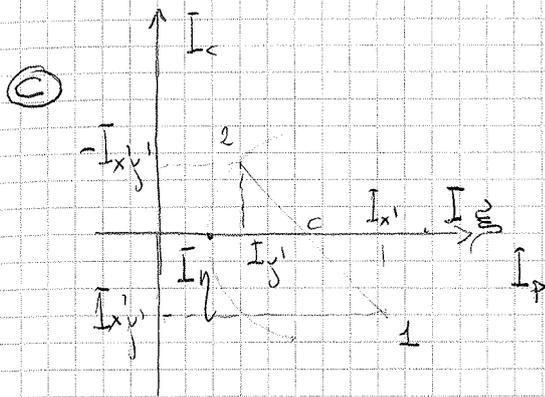
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Equazioni parametriche di  
 una circonferenza

$$I_{y'} = I_{\eta} \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + I_{\xi} \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) =$$

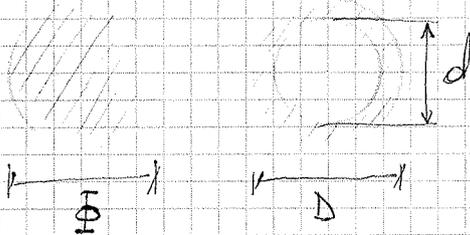
$$= \frac{1}{2}(I_{\xi} + I_{\eta}) - \frac{1}{2}(I_{\xi} - I_{\eta}) \cos 2\alpha$$

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_{\xi} - I_{\eta}) + \frac{1}{2}(I_{\xi} + I_{\eta}) \cos 2\alpha$$



Questi cerchi prendono il nome di CERCHI DI MOHR

Sezione piena, Sezione cava



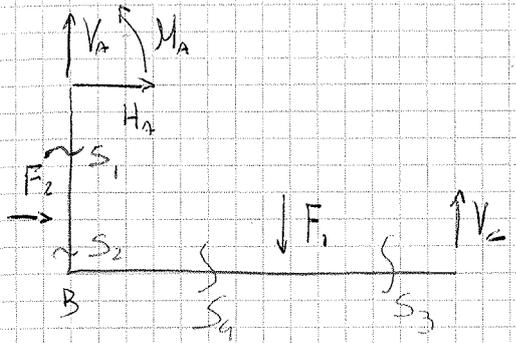
$$\begin{cases} A_{piena} = \frac{\pi \Phi^2}{4} \\ A_{cava} = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \end{cases}$$

Quale delle due superfici è preferibile a parità di momento flettente?

$$\begin{cases} I_{piena} = \frac{\pi \Phi^4}{64} \\ I_{cava} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} \end{cases}$$

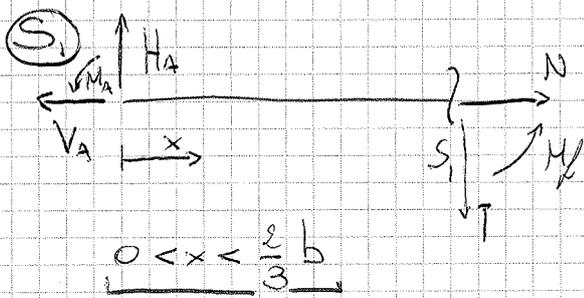
$$\frac{I_{piena}}{I_{cava}} = \frac{\pi \Phi^4}{\pi (D^4 - d^4)} = \frac{(D^2 - d^2)^2}{(D^4 - d^4)} = \frac{(D^2 - d^2)^2}{(D^2 + d^2)(D^2 - d^2)} = \frac{D^2 - d^2}{D^2 + d^2} < 1$$

È preferibile sia in termini di costo e geometrica la sezione cava.



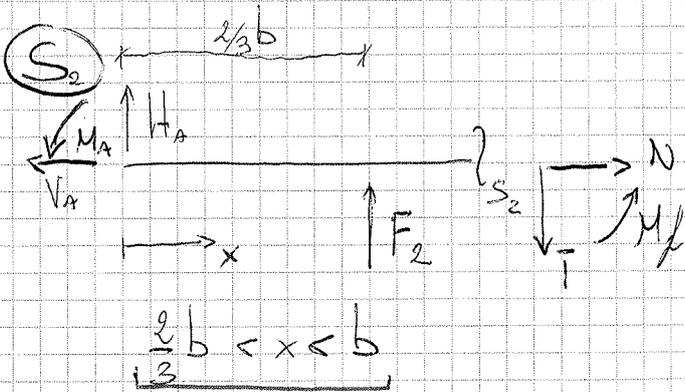
$$\begin{aligned} \rightarrow) H_A + F_2 &= 0 & 1) \\ \uparrow) V_A + V_c - F_1 &= 0 & 2) \\ \curvearrowright) M_A + F_2 \left(\frac{2}{3}b\right) - F_1 \left(\frac{a}{2}\right) + V_c(a) &= 0 & 3) \\ \curvearrowright) \sum_{\text{coppie}} M_B = 0 & F_1 \left(\frac{a}{2}\right) - V_c(a) = 0 & 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) V_c &= \frac{F_1}{2} = 100 \text{ N} \\ 2) V_A = F_1 - V_c &= 200 - 100 = 100 \text{ N} \\ 1) H_A = -F_2 &= -150 \text{ N} \\ 3) M_A &= -6000 \text{ N} \end{aligned}$$



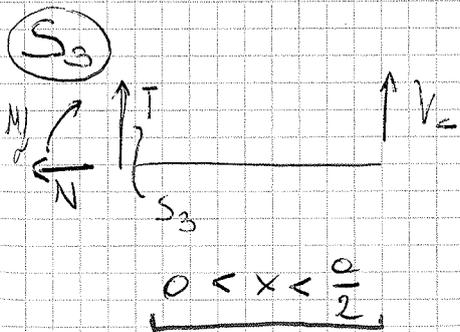
$$\begin{aligned} \rightarrow) N &= V_A = 100 \text{ N} \\ \uparrow) T &= H_A = -150 \text{ N} \\ \curvearrowright) M_f &= H_A \cdot x - M_A \end{aligned}$$

$x=0 \Rightarrow -M_A = +6000 \text{ Nmm}$   
 $x=\frac{2}{3}b \Rightarrow M_f = H_A \cdot \frac{2}{3}b - M_A = 0$



$$\begin{aligned} \rightarrow) N &= V_A \\ \uparrow) T &= H_A + F_2 \\ \curvearrowright) M_f + M_A - H_A x - F_2 \left(x - \frac{2}{3}b\right) &= 0 \end{aligned}$$

$M_f = 0$  (Sostituendo \$M\_A\$ lo si vede algebrico.)

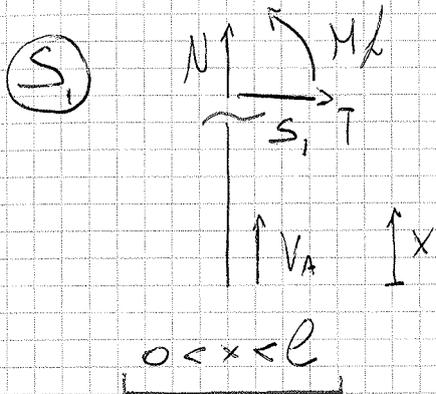


$$\begin{aligned} \rightarrow) N &= 0 \\ \uparrow) T &= -V_c = -100 \text{ N} \\ \curvearrowright) M_f &= V_c \cdot x \end{aligned}$$

$x=0 \Rightarrow 0$   
 $x=\frac{a}{2} \Rightarrow V_c \cdot \frac{a}{2} = 4000 \text{ Nmm}$

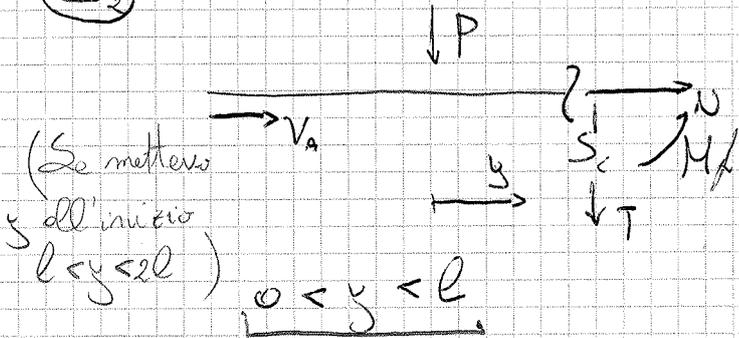
2)  $V_B = -V_A + qa = 1000 \text{ N}$

3)  $V_A = \left( -\frac{qa^2}{2} - C + P \cdot l \right) / a = 29343 \text{ N}$



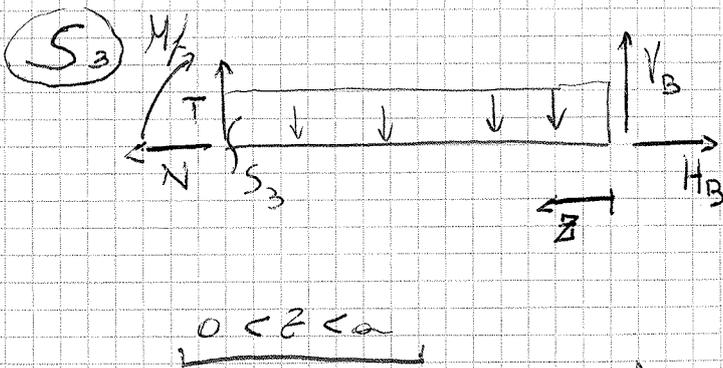
$\uparrow) V_A + N = 0 \quad N = -V_A$   
 $\rightarrow) T = 0$   
 $\curvearrowright) M_x = 0$

$S_2$



(Se mettiamo y dall'inizio  $l < y < 2l$ )

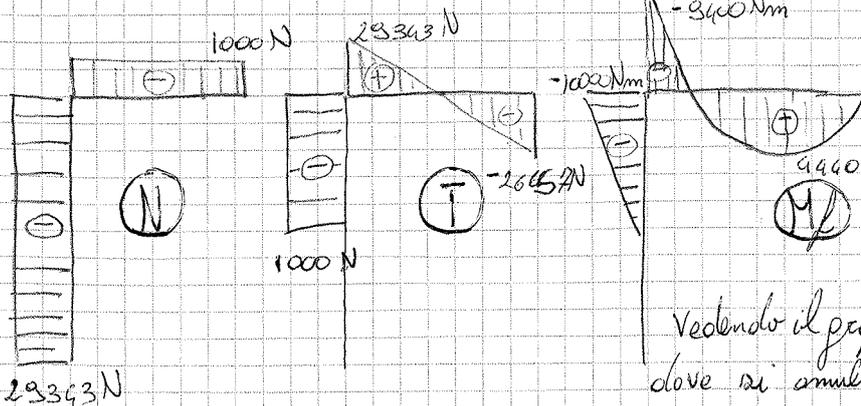
$\rightarrow) N + V_A = 0 \quad N = -V_A$   
 $\uparrow) P + T = 0 \quad T = -P$   
 $\curvearrowright) P \cdot y + M_x = 0$   
 $\downarrow) M_x = -P \cdot y$   
 $y=l \quad M_x = -Pl$   
 $y=0 \quad M_x = 0$



$\rightarrow) -N + H_B = 0 \Rightarrow N = -1000 \text{ N}$   
 $\uparrow) T + V_B - qz = 0 \quad y=0 \Rightarrow V_B = -2665 \text{ N}$   
 $y=a \Rightarrow qa - V_B = 29343 \text{ N}$

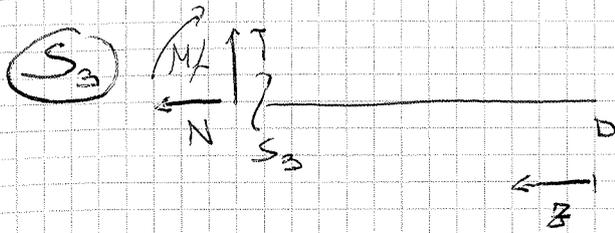
$S_3) -M_x + V_B z - \frac{qz^2}{2} = 0$

$\downarrow) M_x = \frac{qz^2}{2}$   
 $y=0 \quad M_x = 0$   
 $y=a \quad M_x = -9400 \text{ Nm}$



**NB** Sapendo che  $\frac{dM}{dx} = -T$

Vedendo il grafico del taglio deduciamo che dove si annulla nel momento ci deve essere un

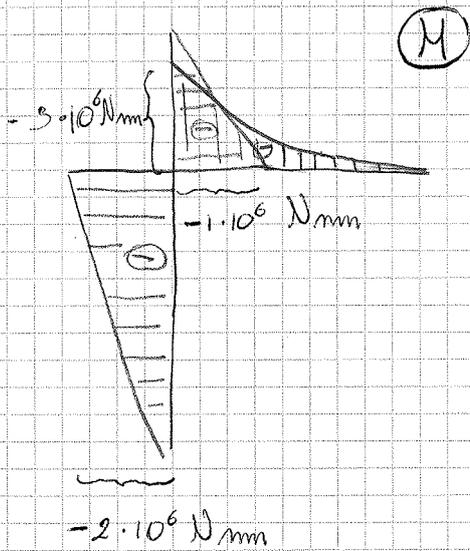
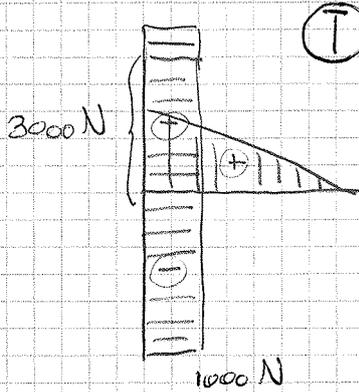
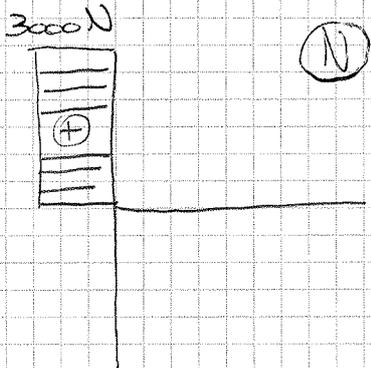


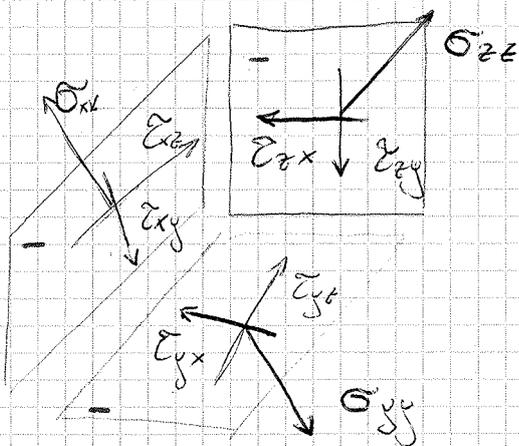
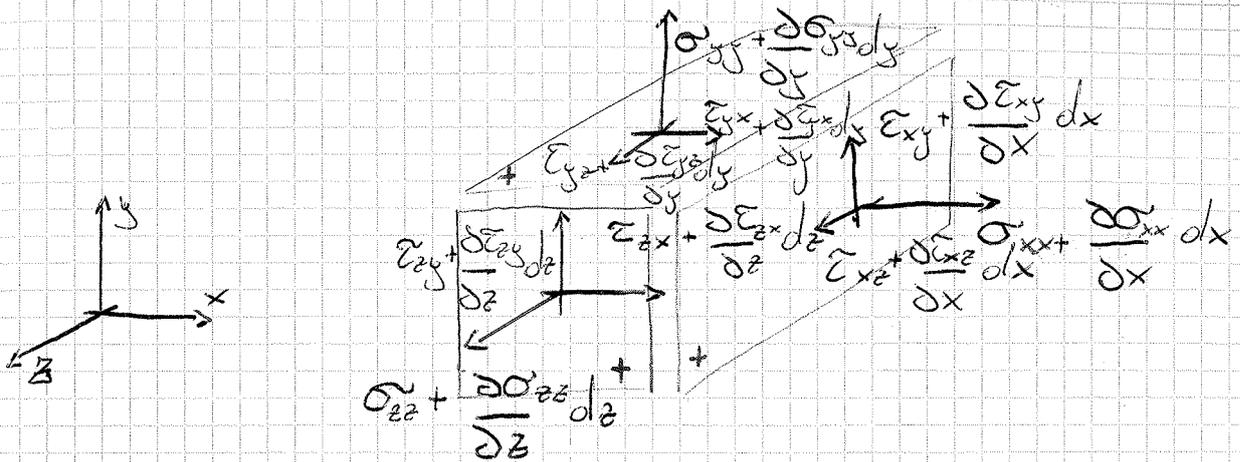
$$N = 0$$

$$T = qz = \begin{matrix} z=0 & 0 \\ z=5 & = 9 \cdot 5 = 3000 \text{ N} \end{matrix}$$

$$0 < z < 5$$

$$M = -q \frac{z^2}{2} = \begin{matrix} z=0 & = 0 \\ z=5 & = -9 \frac{5^2}{2} = -3 \cdot 10^6 \end{matrix}$$





• In questo caso essendo i versori del sistema ortocarti le forze sono negative e quindi le tensioni hanno le direzioni invertite

• Essendo un volume ci occorrono anche forze di tipo volumico

$$dF_x = \bar{\Phi}_x dV$$

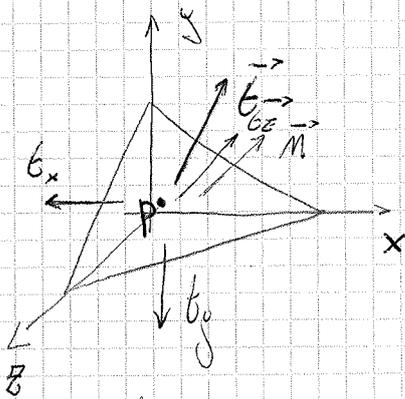
$$dF_y = \bar{\Phi}_y dV$$

$$dF_z = \bar{\Phi}_z dV$$

$$\begin{aligned} x) & -\sigma_{xx} dy dz + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy dz - \tau_{yx} dz dy + \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy \\ & + \bar{\Phi}_x dx dy dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \\ & + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + \bar{\Phi}_x dx dy dz = 0 \\ & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{\Phi}_x = 0 \end{aligned}$$

Lezione 9

25.10.13



Tetraedro di Cauchy

Volume  $dV$  e tre facce  $dA_x, dA_y$  e  $dA_z$

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{m} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

Su una faccia elementare generica, passante per il punto P e normale al vettore  $\vec{m}$  agisce il vettore della tensione  $\vec{t}$ ; vogliamo volutarlo, come vediamo le componenti di quest'ultimo al variare dell'orientazione della faccia

$$\vec{t}_x = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{t}_y = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{t}_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{t} \cdot dA + \vec{t}_x \cdot dA_x + \vec{t}_y \cdot dA_y + \vec{t}_z \cdot dA_z + \Phi dV = 0$$

$$\boxed{dA_x = dA \cdot m_x} \quad \vec{t} + m_x \vec{t}_x + m_y \vec{t}_y + m_z \vec{t}_z = \vec{0}$$

$$\begin{cases} t_x = \sigma_{xx} m_x + \tau_{yx} m_y + \tau_{zx} m_z \\ t_y = \tau_{xy} m_x + \sigma_{yy} m_y + \tau_{zy} m_z \\ t_z = \tau_{xz} m_x + \tau_{yz} m_y + \sigma_{zz} m_z \end{cases}$$

Im componenti ovvero il seguente sistema

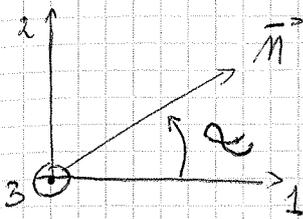
Possiamo raccogliere tutto in una matrice

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = [\sigma] \{m\}$$

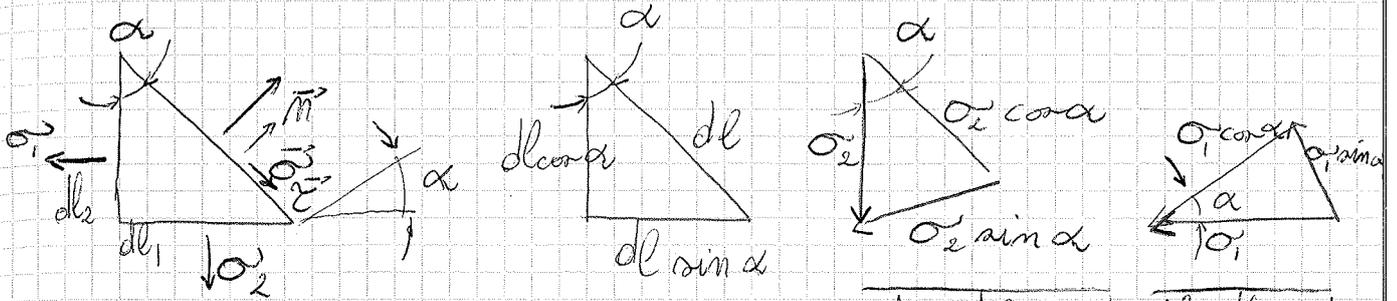
He per colonne i vettori di tensione agenti sulle facce perpendicolari agli assi coordinati.

tenore delle tensioni

• Supponiamo di metterci sul piano 1-2 Cerchi di Mohr



Considero i piani che ruotano attorno all'asse 3 (l'asse principale)



• Facciamo l'equilibrio

parallela a  $\vec{m}$ )  $\sigma dl \cdot dl_3 - \sigma_1 \cos \alpha dl \cos \alpha dl_3 - \sigma_2 \sin \alpha dl \sin \alpha dl_3 = 0$

$$\Rightarrow \sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$\perp \vec{m}$ )  $\tau dl dl_3 + \sigma_2 \cos \alpha dl \sin dl_3 - \sigma_1 \sin \alpha dl \cos \alpha dl_3 = 0$

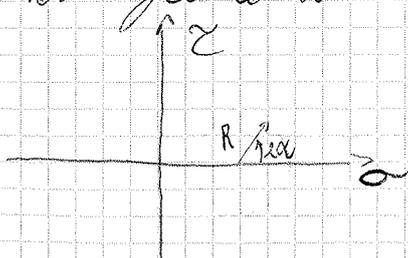
$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + \sigma_2 \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha \\ \tau &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left( \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

Equazione circonferenza

Come ho fatto per i momenti di inerzia posso fare i cerchi di Mohr per le tensioni



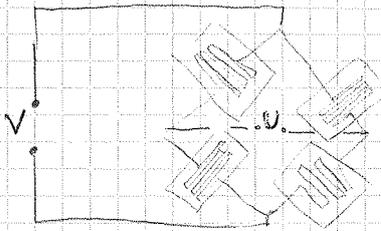
$$C = \left[ \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2); 0 \right]$$

$$R = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

Lezione 10

28.10.13

Deformazioni



Ponte di Wheatstone

Stato di deformazione: se ci sono tensioni ci saranno deformazioni delle superfici. Si deve introdurre il concetto di corpo deformabile essendo insufficiente la trattazione, tipico della meccanica, di corpo rigido.

• Moto di un corpo rigido

$$u_i = \bar{u} V_i \text{ (lungo } x)$$

$$v_i = \bar{v} V_i \text{ (lungo } y)$$

$$w_i = \bar{w} V_i \text{ (lungo } z)$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}$$

• rotazione rigida

In due istanti di tempo  $t$  e  $t'$ .

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

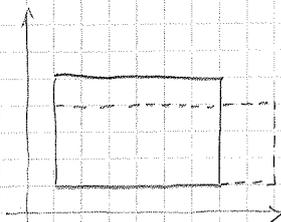
$$u = x' - x = x \cos \alpha + y \sin \alpha - x = x(\cos \alpha - 1) + y \sin \alpha$$

$$v = y' - y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha - y = -x \sin \alpha + y(\cos \alpha - 1)$$

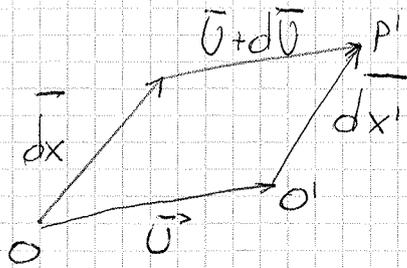
Inoltre se  $\alpha$  è piccolo  $\Rightarrow \cos \alpha \approx 1$ . In questo modo poter approssimare i miei calcoli

• Adesso analizziamo le due possibili deformazioni

Dilatazione



Se io tiro su allunga ma mantiene la topologia rimane sempre un rettangolo



$$d\bar{x} + (\bar{U} + d\bar{U}) = d\bar{x}' + \bar{U}$$

$$d\bar{x} + d\bar{U} = d\bar{x}'$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$d\bar{U}$  può essere scritto come differenziale del campo di spostamenti

$$d\bar{U} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = [\bar{J}] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

Matrice Jacobiana

$$[\bar{J}] = \frac{1}{2} [\bar{J}] + \frac{1}{2} [\bar{J}] = \frac{1}{2} [\bar{J}] + \frac{1}{2} [\bar{J}] + \frac{1}{2} [\bar{J}]^T - \frac{1}{2} [\bar{J}]^T =$$

$$= \left( \frac{1}{2} [\bar{J}] + \frac{1}{2} [\bar{J}]^T \right) + \left( \frac{1}{2} [\bar{J}] - \frac{1}{2} [\bar{J}]^T \right)$$

$$\frac{1}{2} [\bar{J}] + \frac{1}{2} [\bar{J}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Tensore delle deformazioni

$$[\bar{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$\nu$  = coefficiente di Poisson (costante di contrazione trasversale)

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

("Dilatabilità" del materiale alle dilatazioni perpendicolare a quella in cui agisce una tensione di tipo normale)

(Temperatura  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \alpha(T - T_0)$ )

Se si applica una  $\sigma_{zz}$  avrà una dilatazione per l'asse e un restringimento per gli altri due assi.

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$G$  = modulo di elasticità tangenziale

(rigidezza del materiale rispetto alle deformazioni per scorrimento)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Legge di Hooke

Sono sei equazioni che legano  $\epsilon$  e  $\sigma$

Stato di tensione piano

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zz} = 0 \\ \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{l} \text{componenti} \\ \text{trasversali} \\ \text{al piano} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} E\epsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} \\ E\epsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} \\ E\epsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{array} \right.$$

Tensioni nulle

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} + \nu\sigma_{yy}$$

$$E\epsilon_{yy} + \nu E\epsilon_{xx} = \sigma_{yy}(1 - \nu^2) \Rightarrow$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx})$$

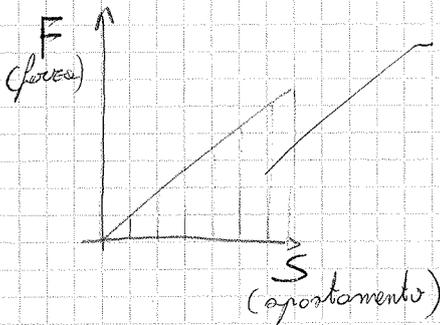
$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xx} = E \left[ \epsilon_{yy} \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{(1-\nu^2)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)} + \epsilon_{xx} \frac{(1-\nu^2)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)} \right]$$

$$= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1+2\nu)} \epsilon_{yy} + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \epsilon_{yy} + (1-\nu) \epsilon_{xx} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \epsilon_{xx} + (1-\nu) \epsilon_{yy} \right]$$

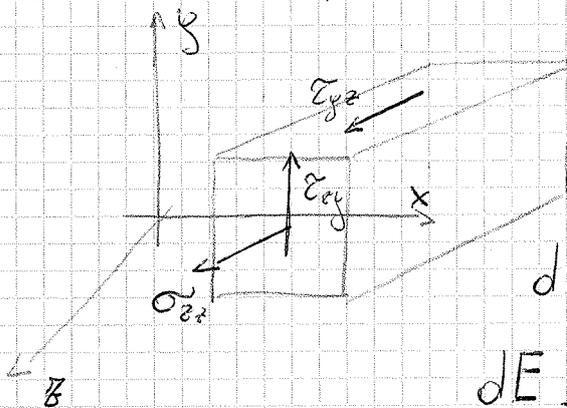
Energia immagazzinata : un corpo che si deforma sotto carico accumula energia potenziale



Energia elastica immagazzinata

$$E = \frac{1}{2} \vec{F} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} k \vec{S}^2$$

Agisce raddo  $\sigma_{zz}$  su  $dx dy$



$$dF_z = \sigma_{zz} dx dy$$

$$du_z = \epsilon_{zz} \cdot dz \quad \text{spostamento elementare}$$

$$dE = \frac{1}{2} dF_z \cdot du_z = \frac{1}{2} \sigma_{zz} \epsilon_{zz} dx dy dz$$

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{zz} \epsilon_{zz}$$

Energia di deformazione per unità di volume.

Consideriamo invece  $\epsilon_{xy}$

$$dF_y = \tau_{xy} dx dy$$

$$dF_z = \tau_{yz} dx dz$$

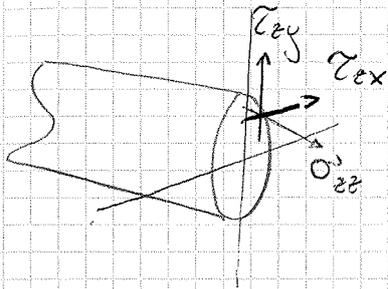
$$dV = \frac{1}{2} \gamma_{xy} dz$$

$$dV = \frac{1}{2} \gamma_{yz} dy$$

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} dF_y \cdot dV + \frac{1}{2} dF_z \cdot dV = \\ &= \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot dx dy \cdot \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot dz + \\ &+ \frac{1}{2} \tau_{yz} dx dz \cdot \frac{1}{2} \gamma_{yz} dy = \\ &= \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA \quad M_x = + \int \sigma_{zz} y dA \quad M_y = - \int \sigma_{zz} x dA$$



$$T_y = \int \tau_{zy} dA$$

$$T_x = \int \tau_{zx} dA$$

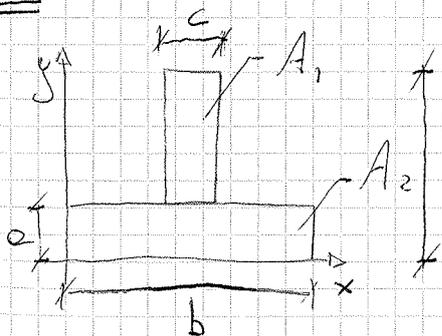
$$M_t = \int \tau_{zy} \cdot x dA - \int \tau_{zx} \cdot y dA = \int (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) dA$$

Esercitazione 4

28.10.13

Quando abbiamo una forza su una struttura questa avrà degli effetti diversi in base alle sue sezioni. Inoltre anche se abbiamo una stessa sezione questa si comporterà in modo differente in base al punto di applicazione della forza: sul lato corto o su quello lungo. Quello che combatterà sarà il momento di inerzia che più è grande e più si oppone alla deformazione.

Es. 1 Calcolare le caratteristiche dell'area.



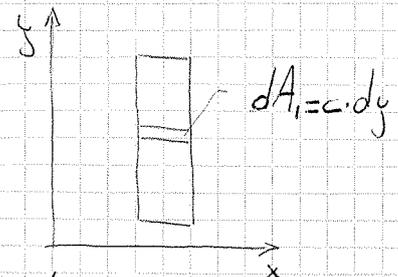
$$A_1 = c(h-a) = 48000 \text{ mm}^2$$

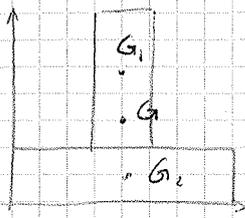
$$A_2 = b \cdot a = 40000 \text{ mm}^2$$

$$S_{x_1} = \int_{A_1} y dA_1 = \int_a^h y \cdot c dy = c \left[ \frac{y^2}{2} \right]_a^h =$$

$$= c \left[ \frac{h^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] = 1.44 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

Posizionare anche risolvere l'integrale in  $dx dy$



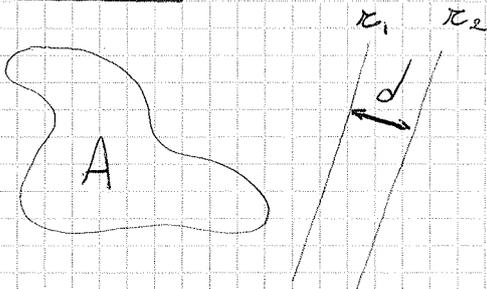


i	$x_{a_i}$	$y_{a_i}$	$A_i$	$S_{x_i}$	$S_{y_i}$
1	200	300	40000	$1,44 \cdot 10^7$	$96 \cdot 10^6$
2	200	50	40000	$8 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$
$\Sigma$			80000	$16,4 \cdot 10^6$	$17,6 \cdot 10^6$

$$x_a = \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A_i}$$

$$y_a = \frac{\sum S_{x_i}}{\sum A_i}$$

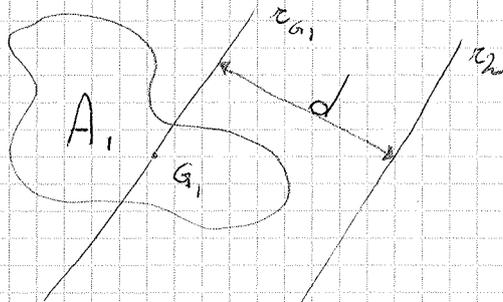
OSSERVAZIONE



$$S_{r_2} = S_{r_1} + A \cdot d$$

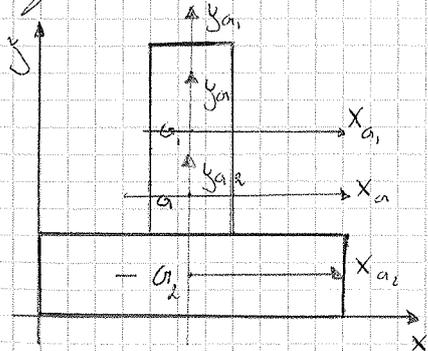
Se gli assi fossero posizionati nel baricentro  $S_{y_a} = S_{x_a} = 0$   
 e per cui  $S_{r_2} = S_{r_1} + A \cdot d$

Considerando adesso i momenti di inerzia



$$I_{r_2} = I_{r_1} + d^2 A_1 - \frac{S_{r_1}^2}{A_1}$$

Prendiamo l'esercizio precedente



$$(I_{x_a})_{Area 1} = I_{x_{a_1}} + (y_{a_1} - y_a)^2 A_1$$

$$(I_{y_a})_{Area 1} = I_{y_{a_1}} + (x_{a_1} - x_a)^2 A_1$$

$$(I_{x_a})_{Area 1} = \frac{c(h-c)^3}{12} + (y_{a_1} - y_a)^2 A_1 = 1,26 \cdot 10^9$$

$$(I_{y_a})_{Area 1} = \frac{(h-c)c^3}{12} + (x_{a_1} - x_a)^2 A_1 = 5,76 \cdot 10^9$$

$$A = A_1 = A_2 = 10000 \text{ mm}^2$$

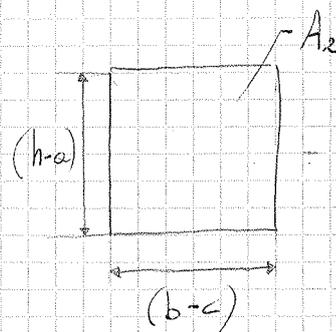
$$\left. \begin{aligned} x_{a1} &= \frac{S_{y1}}{A} = 125 \text{ mm} \\ y_{a1} &= \frac{S_{x1}}{A} = 200 \text{ mm} \end{aligned} \right\} G(125, 200)$$

$$(I_{x_{a1}})_{\text{Area 1}} = I_{x_{a1}} + (y_{a1} - y_a)^2 A_1 = 2,67 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$(I_{y_{a1}})_{\text{Area 1}} = I_{y_{a1}} + (x_{a1} - x_a)^2 A_1 = 3,73 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$(I_{x_a})_{\text{Area 2}} = I_{x_{a2}} + (y_{a2} - y_a)^2 A_2$$

$$(I_{y_a})_{\text{Area 2}} = I_{y_{a2}} + (x_{a2} - x_a)^2 A_2$$



Adesso che abbiamo riportato tutto sulle stesso sistema di riferimento possiamo trovare i momenti di inerzia delle nostre sezioni

$$I_{x_{a2}} = \frac{(b-c)(h-a)^3}{12}$$

$$I_{y_{a2}} = \frac{(h-a)(b-c)^3}{12}$$

$$I_{x_a} = (I_{x_{a1}})_{\text{Area 1}} - (I_{x_{a1}})_{\text{Area 2}} = 2,33 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_a} = (I_{y_{a1}})_{\text{Area 1}} - (I_{y_{a1}})_{\text{Area 2}} = 102 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

In questo caso dobbiamo calcolare anche i momenti centrifughi perché le coordinate degli assi di inerzia sono diversi

$$(I_{x_{a1}y_{a1}})_{\text{Area 1}} = I_{x_{a1}y_{a1}} + (x_{a1} - x_a)(y_{a1} - y_a) A_1 = 7,5 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$(I_{x_{a1}y_{a1}})_{\text{Area 2}} = I_{x_{a2}y_{a2}} + (x_{a2} - x_a)(y_{a2} - y_a) A_2 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_a y_a} = (I_{x_{a1}y_{a1}})_{\text{Area 1}} - (I_{x_{a1}y_{a1}})_{\text{Area 2}} = -7,5 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$y_{a2} = \frac{h}{2} + \frac{H}{2}$$

$$y_{a3} = y_{a1} = 0$$

$$S_{x1} = y_{a1} A_1$$

$$S_{x2} = y_{a2} A_2$$

$$S_{x3} = S_{x4} = 0$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A + A_2 + (A_3 - A_4)$$

$$S_{y1} = \dots = S_{y4} = 0$$

$$S_x = \sum_i S_{x_i} = 0$$

$$S_y = \sum_i S_{y_i} = 0$$

$$x_a = \frac{S_y}{A} = 0$$

$$y_a = \frac{S_x}{A} = 0$$

$$I_{x_{a1}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{x_{a2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{x_{a3}} = \frac{BH^3}{12}$$

$$I_{x_{a4}} = \frac{(B-2D)(H-2D)^3}{12}$$

$$I_{y_{a1}} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{y_{a2}} = \frac{hb^3}{12}$$

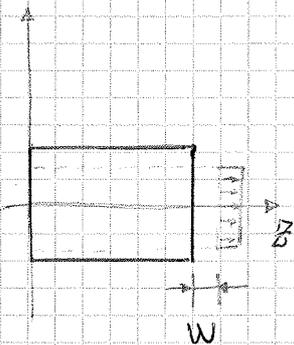
$$I_{y_{a3}} = \frac{HB^3}{12}$$

$$I_{y_{a4}} = \frac{(H-2D)(B-2D)^3}{12}$$

Per terminare l'esercizio basta trovare i momenti di inerzia al baricentro della figura e poi trovarli.

Lezione 11

29.10.13



Ipotesi : ipotizziamo di applicare una  $\sigma_z = \sigma_z(z)$

$$w = w(z)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

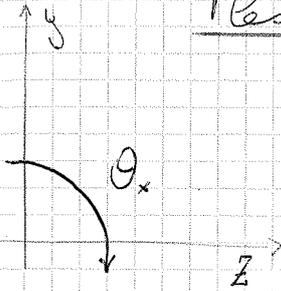
Applichiamo la legge di Hooke

$$\epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} = k \rightarrow \sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E \cdot k$$

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = \sigma_{zz} A$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = \sigma_{zz} \int y dA = 0$$

## Flessione del piano $Ey$



$$\omega = \theta_x \cdot y$$

Per  $\theta_x$  piccolo

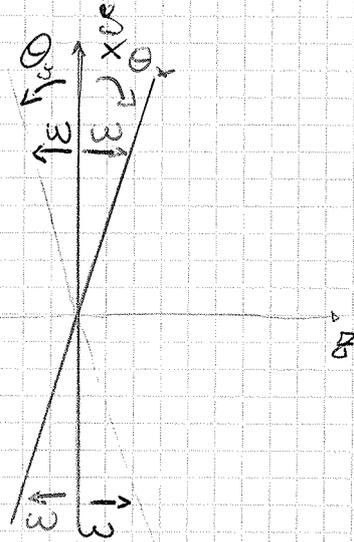
$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \cdot y$$

$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \cdot y$$

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = E \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \int_A y dA = 0$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = E \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \int_A y^2 dA = E \frac{\partial \theta_x}{\partial z} I_{xx}$$

$$M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA = - E \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \int_A xy dA = 0$$



Rappresentazione  
della distribuzione  
della tensione

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial z} = \frac{M_x}{E I_{xx}} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{zz} = \frac{M_x}{E I_{xx}} y \\ \sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_{xx}} y \end{array} \right.$$

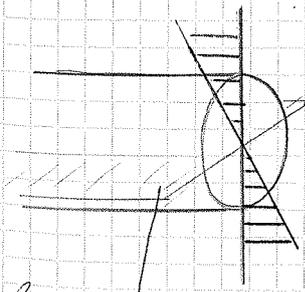
$$\epsilon_{xx} = - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_{yy} = - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

## Flessione combinata

Nel caso in cui agiscono simultaneamente entrambi i momenti flettenti  $M_x$  e  $M_y$  la distribuzione della tensione  $\sigma_{zz}$  si ottiene per sovrapposizione degli effetti.

Diagramma a scala variabile  
linealmente.



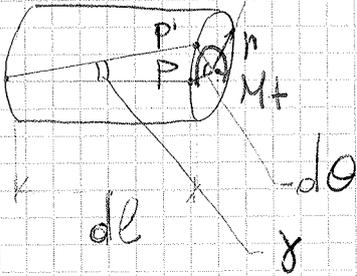
Su questo piano le  $\sigma_x$  sono tutte nulle

## Lezione 12

### Momento torcente

$M_t$  è la risultante delle distribuzioni delle  $\tau$

Le sezioni si mantengono piane



$\gamma =$  deformazione angolare

$$\overline{PP'} = \gamma dl = r d\theta$$

$$\tau = G \gamma$$

$$\frac{\tau}{G} dl = r d\theta \Rightarrow \tau = \frac{d\theta}{dl} r G$$

Da quest'ultima relazione ricavo due formule importanti:

•  $\tau, M_t$  (1)

•  $\frac{\Delta\theta}{\Delta L}$  (2)

### Sezione circolare

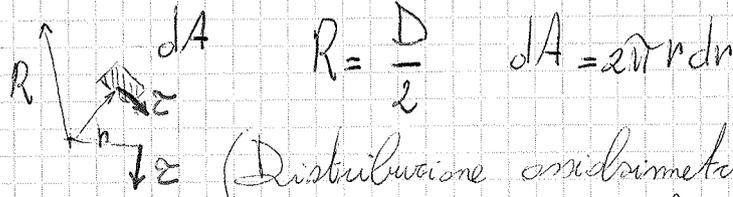
$G$ : modulo di elasticità tangenziale

$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

$$G = 83.000 \text{ N/mm}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

1)  $M_t, \tau$



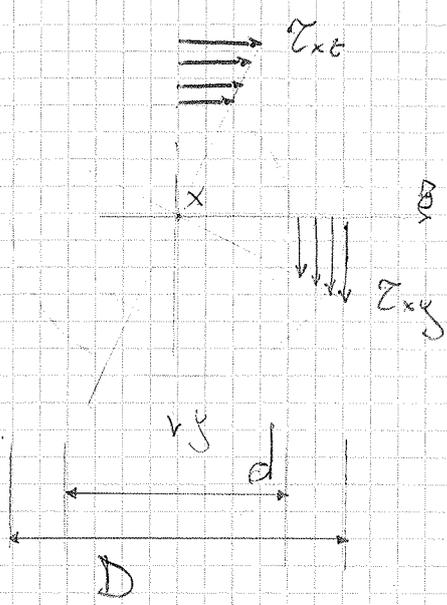
$$M_t = \int_A \tau dA \cdot r = \int_A \frac{d\theta}{dl} G \cdot r \cdot dA \cdot r = \frac{d\theta}{dl} \cdot G \int_0^R 2\pi r^3 dr =$$

$$= \frac{d\theta}{dl} G 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{d\theta}{dl} G \left( \frac{\pi R^4}{2} \right) \quad \begin{matrix} I_p \\ \text{(momento di inerzia polare)} \end{matrix} \quad I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$M_t = \frac{d\theta}{dl} G I_p \Rightarrow \frac{d\theta}{dl} = \frac{M_t}{G I_p} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta\theta}{\Delta L} = \frac{M_t}{G I_p}}$$

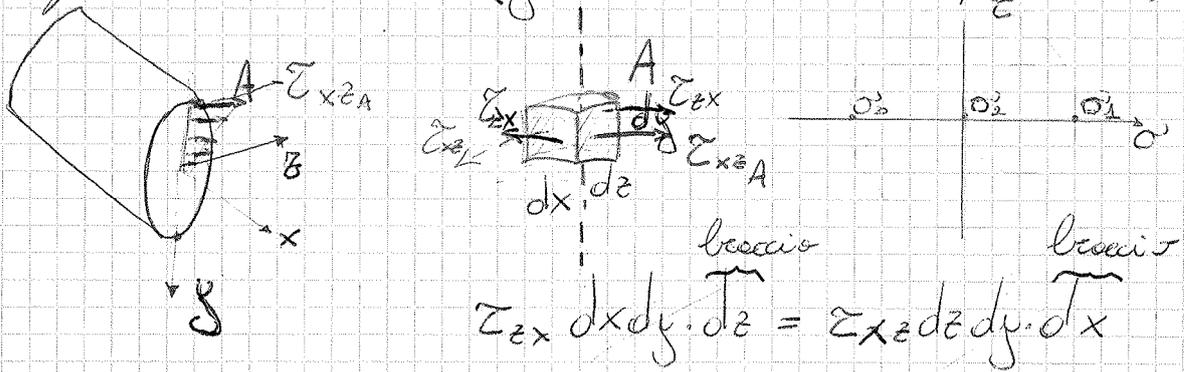
Preghiamo adesso sull'ultima formula trovata prendendo un albero/bacca di torsione.



In questo caso all'interno non ci sono tensioni e inoltre la  $\tau$  è molto meglio distribuita poiché siamo molto vicini alla superficie laterale.

$$\tau_{max} = \frac{M_t r_{max}}{I_p} = \frac{M_t (D/2)}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} = \frac{16 M_t D}{\pi (D^4 - d^4)}$$

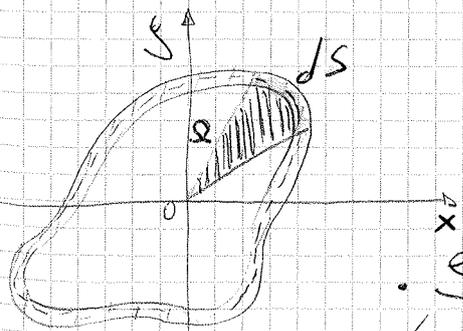
N.B Con la torsione noi possiamo dimostrare la reciprocità delle  $\tau$  (già visto con il cubo elementare)



$$\tau_{xy} = \tau_{xz}$$

Sezioni non assialsimmetriche

Con un momento torcente le sezioni non sono più piane. In questi casi bisogna evitare le torsioni perché creano grosse tensioni.



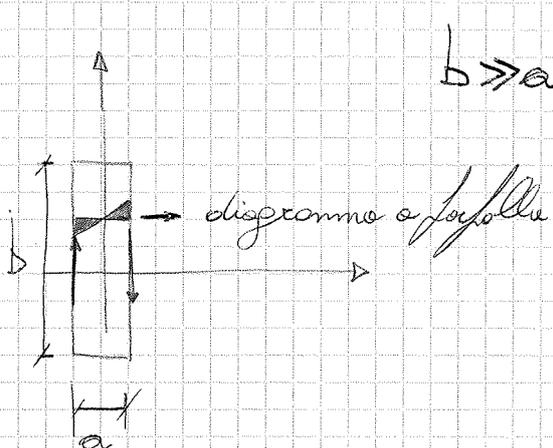
$b(s)$  è lo spessore della parete sottile.  $L$  è la lunghezza media della sezione.

• Se  $b(s)$  è sufficientemente piccolo, se  $\tau$  deve essere tangente in entrambi i bracci,

$$\Rightarrow I_p = \frac{Q \Omega^2}{\oint \frac{ds}{\rho(s)}}$$

L'energia di una sezione sottile chiusa è uguale a quella di una sezione piena caratterizzata da tale momento di inerzia

Sottile aperto



$b \gg a$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{M_z}{GI_p}$$

$$I_p = \frac{1}{3} a^3 b$$

Se  $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$   $\sigma_{MAX} = \pm \frac{M_z a}{I_p}$

$$I_p = \frac{1}{3} (b - 2 \cdot 0.3a) a^2$$

$1 \leq \frac{b}{a} \leq \infty$  Errore inferiore 6%

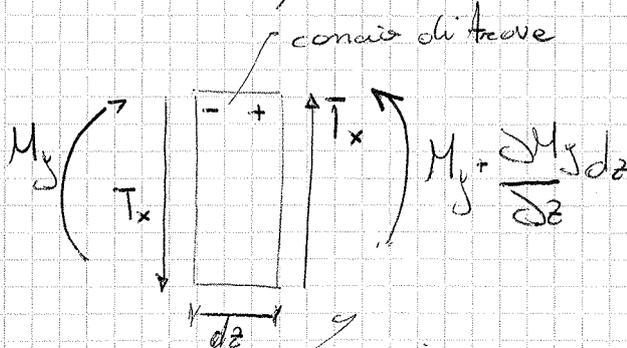
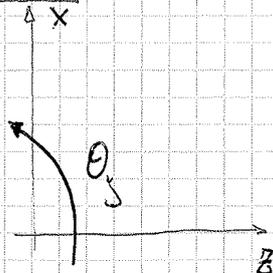
Lezione 13

7.11.2013

Taglio

Non può esistere se non è accompagnato da un momento flettente.

Piano xz



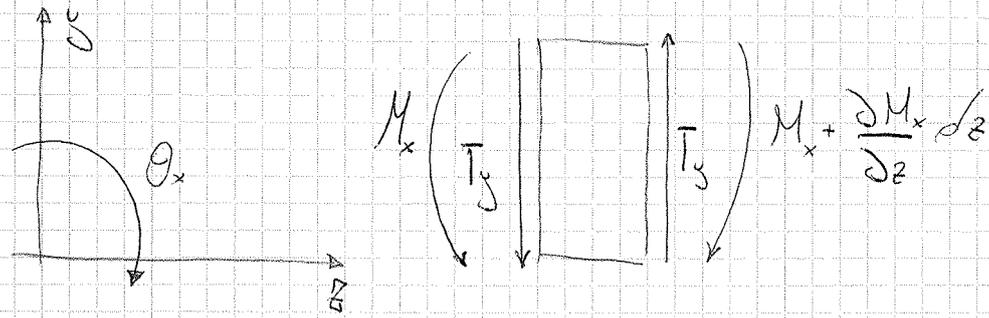
Risultante momenti

$$-M_y + (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial z} dz) + T_x dz = 0$$

La sezione non si mantiene piana ma si deforma.

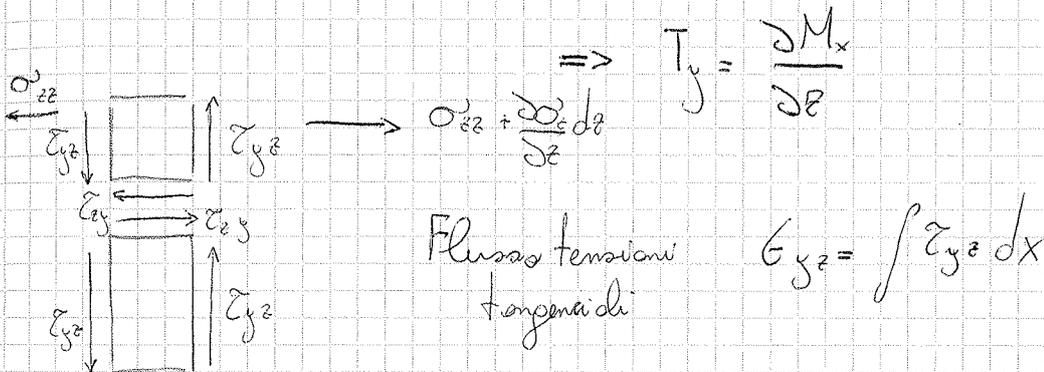
$$T_x = - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

Piano yz



Risultante dei momenti

$$-M_x + \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial z} dz \right) - T_y dz = 0 \Rightarrow$$



$$-\int_{A^*} \sigma_{zz} dA + \int_{A^*} \left( \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \right) dA - \tau_{yz} dz = 0 \quad \text{Equilibrio forze}$$

$$\Rightarrow \tau_{yz} = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dA \quad \text{essendo } \sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_{xx}} y$$

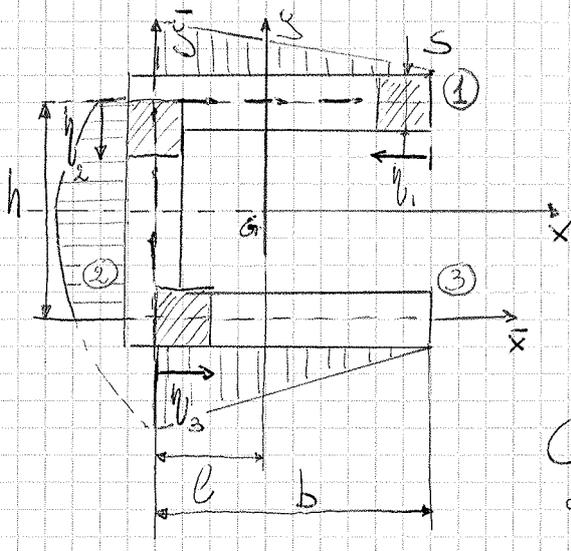
$$G_{yz} = \frac{1}{I_{xx}} \int \frac{\partial M_x}{\partial z} y dA = \frac{T_y}{I_{xx}} \int_{A^*} y dA \Rightarrow \tau_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{I_{xx}}$$

$$\Rightarrow \tau_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{S I_{xx}} \quad \text{DURAND I}$$

Poiché  $\bar{I} = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$

$$\tau_{\alpha} = \tau_{\alpha x} + \tau_{\alpha y} = \frac{\bar{I}_x S_y^*}{S \bar{I}_{yy}} + \frac{\bar{I}_y S_x^*}{S \bar{I}_{xx}}$$

## Centro di taglio



- In ① il verso positivo della  $\tau_e \rightarrow$
- In ② il verso positivo della  $\tau_e \uparrow$
- In ③ il verso positivo della  $\tau_e \leftarrow$

Ciò che le  $\tau$  positive hanno verso opposto all'avvicinamento delle facce ( $\eta$ )

$$x_G = \frac{2bs \cdot \frac{b}{2}}{2bs + hs} = \frac{b^2 s}{s(2b+h)} = \frac{b^2}{2b+h} = e$$

$$\textcircled{T}_y \quad \tau_z = \frac{T_y S_x^*}{S I_{xx}}$$

$$\textcircled{1} \quad \tau_{zx} = \frac{T_y S_x^*}{S I_{xx}} = \frac{T_y}{S I_{xx}} \cdot \eta \cdot s \cdot \frac{h}{2} = \frac{T_y}{I_{xx}} \cdot \eta \cdot \frac{h}{2}$$

$$\begin{cases} \eta_1 = 0 \rightarrow \tau_z = 0 \\ \eta_1 = b \rightarrow \tau_z^{(MAX)} = \frac{T_y}{I_{xx}} \cdot \frac{bh}{2} \end{cases}$$

② Questa parte viene chiamata anima della sezione

$$\tau_z = \tau_{zy} = \frac{T_y S_x^*}{S I_{xx}} = \frac{-T_y (S_x' + S_x^*)}{S I_{xx}} = \frac{T_y}{S I_{xx}} \left[ S_x' + \eta \cdot s \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{\eta}{2} \right) \right]$$

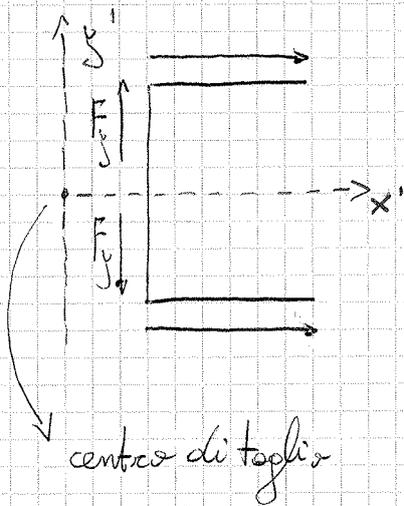
$$\begin{cases} \eta_2 = 0 \rightarrow \tau_{zy} = \tau_{zx}^{(MAX)} \\ \eta_2 = \frac{h}{2} \rightarrow \tau_{zy}^{(MAX)} = \frac{T_y}{S I_{xx}} \left[ S_x' + \frac{hs}{2} \left( \frac{h}{4} \right) \right] = \frac{T_y}{S I_{xx}} \left[ S_x' + \frac{h^2 s}{8} \right] \\ \eta_2 = h \rightarrow \tau_{zy} = \tau_{zx}^{(MAX)} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \tilde{\sigma}_z = \tilde{\sigma}_{zx} = \frac{I_x}{S I_{yy}} \left[ \eta_1 S \cdot \left( b/2 - \frac{\eta_1}{2} \right) \right]$$

$$\begin{cases} \eta_1 = 0 \Rightarrow \tilde{\sigma}_{zx} = 0 \\ \eta_1 = b - e = \tilde{\sigma}_{zx}^{(\text{MAX})} = \frac{I_x}{S_x I_{yy}} \left[ S(b-e) \cdot \left( \frac{b-e}{2} \right) \right] = \frac{I_x}{I_{yy}} \cdot (b-e)^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ (ANIMA)} \quad \tilde{\sigma}_{zx} = \tilde{\sigma}_{zy} = \frac{I_x}{S I_{yy}} \cdot [S_y' + S_y''] = \frac{I_x}{S I_{yy}} [S_y' - S_y'' - e]$$

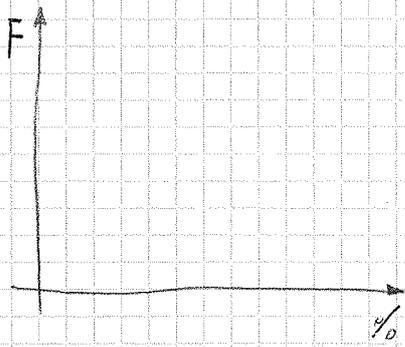
$$\begin{cases} \eta_2 = 0 \rightarrow \tilde{\sigma}_{zy} = \tilde{\sigma}_{zx}(\eta_1 - b) \\ \eta_2 = \frac{h}{2} \rightarrow \tilde{\sigma}_{zy} = 0 \end{cases}$$



centro di taglio  
 ○  
 centro di tensione (se applico un momento  
 torcente il corpo ruoterà  
 intorno ad esso)

Se la retta d'azione del taglio  
 passa per il centro di taglio,  
 si avrà un TAGLIO PURO;

se ciò non accade si avrà anche  
 un MOMENTO TORCENTE



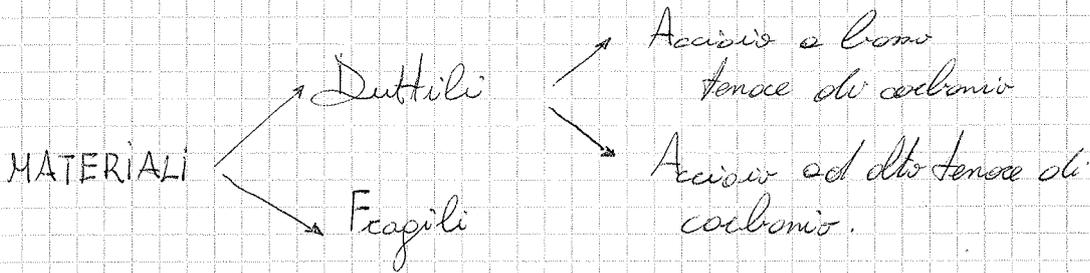
$F = \text{forza di trazione}$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_0} \cdot 100$$

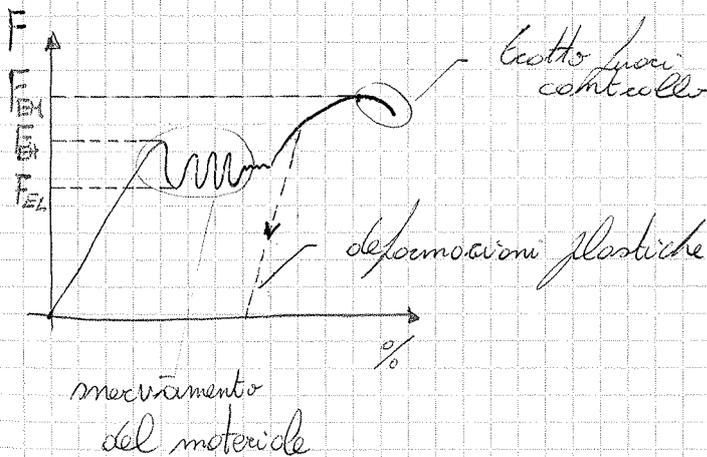
allungamento\*

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \rightarrow \text{tensione*}$$

\* grandezze ingegneristiche



Acciaio a basso tenore di carbonio



$F_{EM}$ : carico di snervamento massimo

$F_H$ : forza di snervamento superiore

$F_L$ : forza di snervamento inferiore.

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{EM}}{S_0} &\rightarrow R_{EM} \\ \frac{F_{EL}}{S_0} &\rightarrow R_{EL} \end{aligned} \right\} \text{Tensioni di snervamento del materiale}$$

N.B pendenza prima retta  $\sigma = E \epsilon$

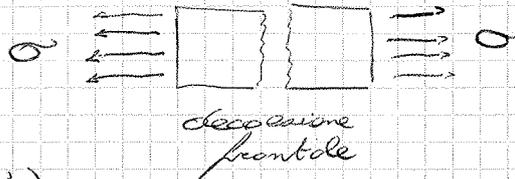
Criteri di rottura (ipotesi di cedimento)

Quello che si tenta di fare è trovare una  $\sigma_{id}$  in funzione delle tre direzioni che ci dia approssimativamente il valore di tensione da confrontare con i corredi cedevoli con la prova in trazione.

$$\sigma_{id} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Le fratture avvengono sempre in direzione  $\perp$  al carico (materiali fragili)

• Materiali fragili



$$\sigma_{CR} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\sigma_{CR} = \sigma_1$$

decoazione frontale  
general. trazione  $\sigma_1 > \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1$

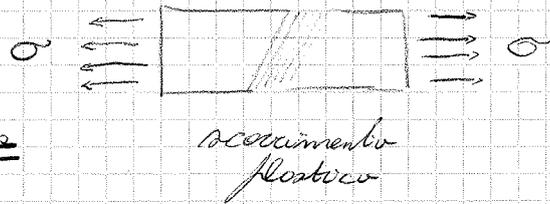
$$\sigma_{eq.id} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Criterio di rottura dei materiali fragili

(Rankine foliato)

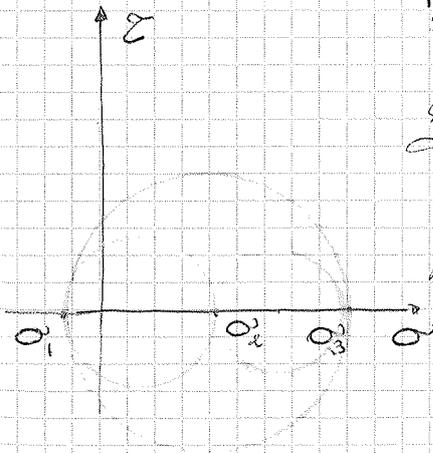
La massima tensione normale.

• Materiali duttili



Trazione

accoppiamento plastico



Si suppone che il materiale ceda, nel senso di iniziare a deformarsi plasticamente, quando la massima tensione tangenziale tra quelle agenti sugli infiniti piani passanti per il punto su cui si esegue la verifica raggiunge un valore limite.

$$\sigma_{CR} = \max \left[ \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right), \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right), \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \right] = \frac{\sigma_1}{2}$$

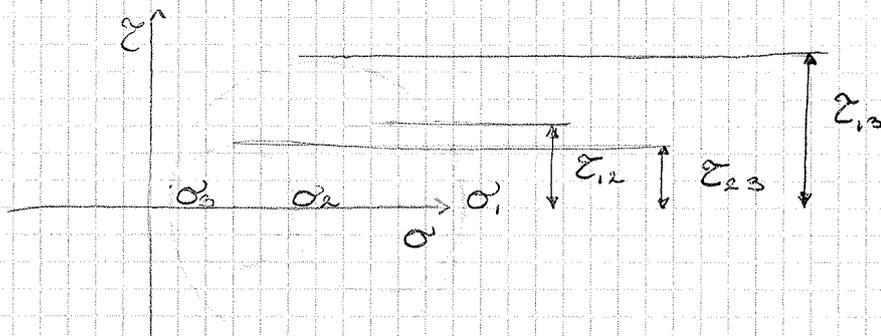
Lezione 15

12.11.13

Criterio di rottura di Von Mises

Questo criterio è valido per i materiali duttili

- Si suppone che il materiale inizi a deformarsi plasticamente quando la quota di energia potenziale elastico di deformazione che corrisponde al puro cambiamento di forma raggiunge un valore critico



Energia, per unità di volume, di distorsione accumulata

$$\bar{E}_d = \frac{1}{3} (\tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{23} \gamma_{23} + \tau_{31} \gamma_{31}) = \frac{1}{3} \frac{1}{G} (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)$$

Esprimendo le tensioni tangenziali massime in funzione di quelle principali si ottiene:

$$\bar{E}_d = \frac{1}{3G} \left[ \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \right]$$

Nel caso delle prove di trazione due tensioni sono nulle perché lo stato di tensione è monoassiale ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) si ha:

$$\bar{E} = \frac{1}{3G} \cdot 2 \left( \frac{\sigma_1}{2} \right)^2$$

$\sigma_1 = \sigma$  tensione di trazione del provino

Equagliamo le due equazioni:

## Coefficiente di sicurezza

$$C_S = \frac{\sigma_{ag}}{R_{p_{0,2}}}$$

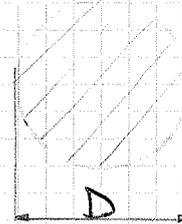
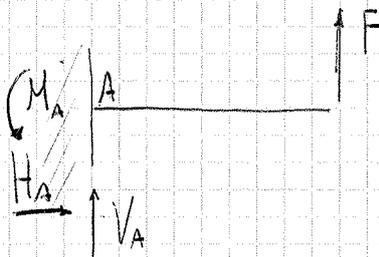
$$C_S = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}}$$

Le norme impongono

$C_S$   $\begin{cases} \rightarrow 1,5 & \text{Duttile} \\ \rightarrow 3 & \text{Fragile} \end{cases}$

In fase di progettazione però si cerca di ridurre quanto più possibile il coefficiente di sicurezza per non "sovraccaricare" il materiale utilizzato.

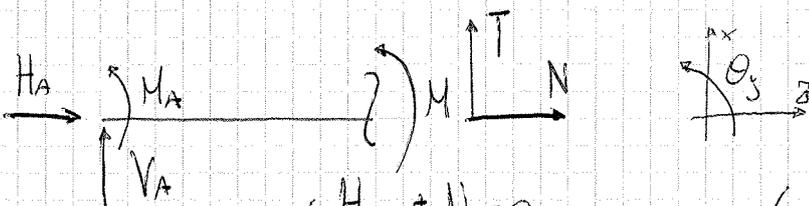
## Considerazioni



Imponiamo l'equilibrio per trovare le reazioni vincolari

$$\begin{cases} V_A + F \\ H_A = 0 \\ M_A + Fl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = -F \\ H_A = 0 \\ M_A = -Fl \end{cases}$$

Troviamo le caratteristiche di sollecitazione



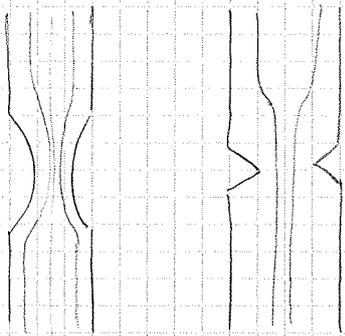
$$\begin{cases} H_A + N = 0 \\ V_A + T = 0 \\ M + M_A + Tz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T = F \\ M = Fl - Fz = F(l-z) \end{cases}$$

Se siamo vicini alla variazione di geometria, lo stato di tensione diventa **BIASSIALE**

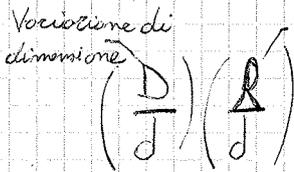
=> In questo caso si parla di effetto di intaglio

$$K_T = \frac{\sigma_{zz}^{(MAX)}}{\sigma_{zz}^{(NOM)}}$$

Coefficiente di intensificazione delle tensioni

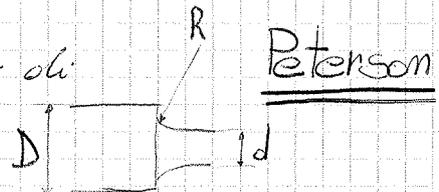


Nei due esempi proposti il passaggio è facilitato nel primo caso. Infatti l'effetto di intaglio è tanto più elevato quanto è maggiore la variazione di dimensione e minore il raccordo.



Raccordo

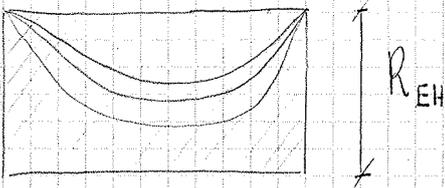
due fattori che permettono di trovare  $K_T$



La cosa più importante è che la tensione che si verifica nella sezione ridotta non superi la tensione di rottura.

$$\sigma_z^{(MAX)} \leq R_{EH} (R_{p0.2})$$

è il margine di sicurezza



Consideriamo **CEDIMENTO** quando un solo punto della sezione raggiunge la **TENSIONE DI SNERVAMENTO**, oppure quando tutti i punti (ovvero la sezione completa) lo raggiungono.

$$\sigma_{MAX} = K + \sigma_{NOM} \leq R_{EH}$$

Incipiente di snervamento

$$\sigma_{MAX} \leq R_{EH}$$

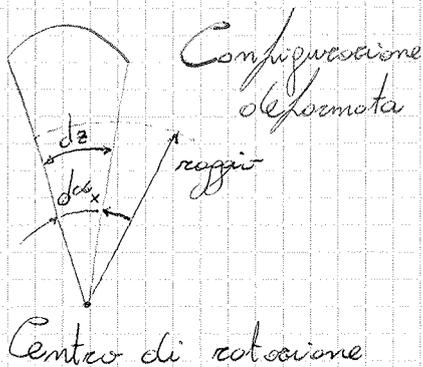
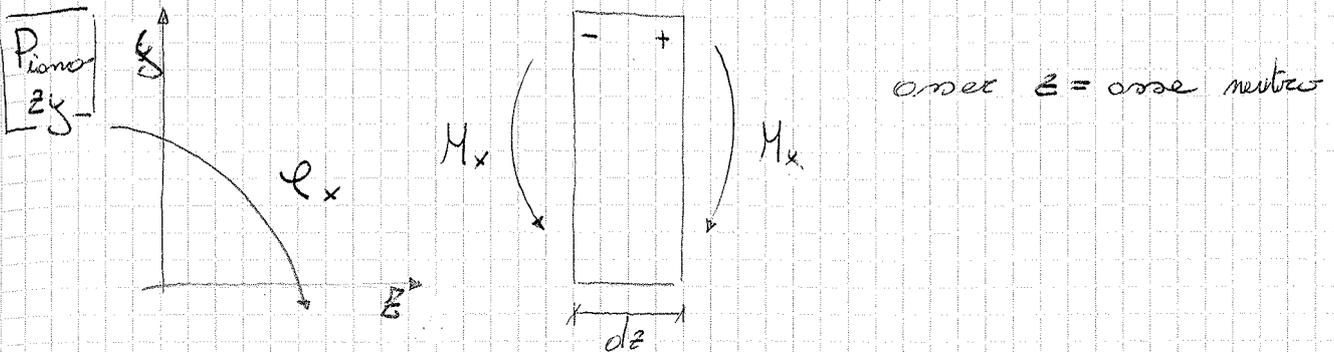
Snervamento della sezione completa

# Equazione della linea elastica

Lezione 16

15.11.13

Analizziamo cosa succede quando si applica un momento flettente.



$$\Rightarrow dz = r_x \cdot d\alpha_x$$

$$\frac{1}{r_x} = \frac{d\alpha_x}{dz}$$

rapporto di curvatura

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(\alpha_x y)}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} \cdot y$$

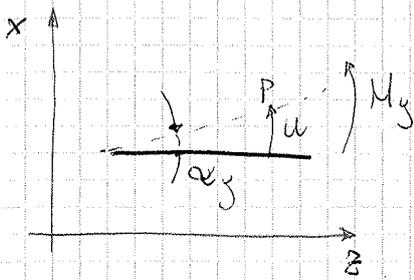
$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} y \Rightarrow M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = E \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} \int y^2 dA$$

$$= E I_x \frac{\partial \alpha_x}{\partial z}$$

Da quest'ultima ricaviamo che

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} = \frac{M_x}{E I_x}$$

Rappresentando lo spostamento trasversale  $w$  della linea d'asse in funzione della coordinata  $z$  si ottiene una curva detta linea elastica



$$\alpha_y = \frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial \alpha_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

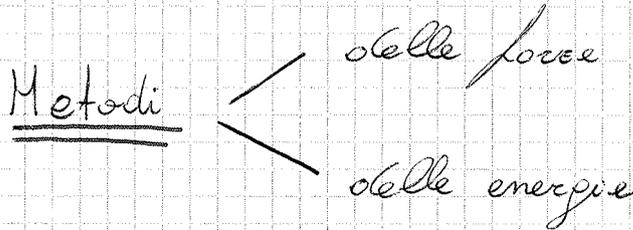
Im definitivo si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{M_y}{EI_y}$$

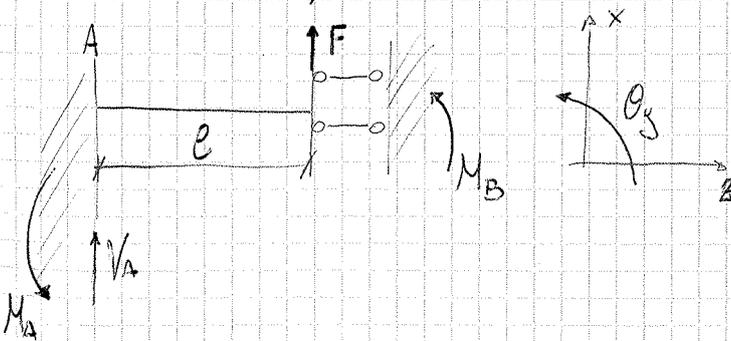
Lezione 17

12.11.13

Strutture iperstatiche

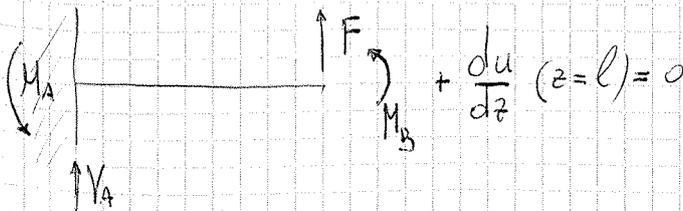


Metodo delle forze



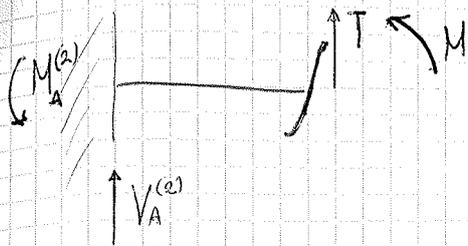
Questo è una struttura una volta iperstatica

• Tagliamo un vincolo per far diventare la struttura ipostatica. La trave a cui fanno forza riprimenti è una "trave a sbalzo".



Dobbiamo sostituire il vincolo del doppio pendolo un'equazione cinematica

Applichiamo per risolvere la struttura il principio di sovrapposizione one degli effetti



$$\begin{cases} V_A^{(2)} + \bar{T} = 0 \\ M_A + M + \bar{T} \cdot l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 0 \\ M = M_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^{(2)}}{dz^2} = \frac{M_B}{EI} \\ \frac{du^{(2)}}{dz} = \frac{M_B z}{EI} + C_1 \\ u^{(2)} = \frac{M_B z^2}{2EI} + C_1 z + C_2 \end{cases}$$

$$u^{(2)}(z=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{du^{(2)}}{dz}(z=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$



$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \frac{M_B z^2}{2EI} \\ \frac{du^{(2)}}{dz} &= \frac{M_B z}{EI} \end{aligned}$$

est.  
gco

Torniamo al problema globale

$$\frac{du}{dz} = \frac{du^{(1)}}{dz} + \frac{du^{(2)}}{dz}(z=l) \Rightarrow \frac{du}{dz}(z=l) = \frac{Fl^2}{EI} - \frac{Fl^2}{2EI} + \frac{M_B l}{EI} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Fl}{2} + M_B = 0 \Rightarrow \boxed{M_B = -\frac{Fl}{2}}$$

Abbiamo così un sistema di due eq. in due incognite:

$$\begin{cases} V_A + F = 0 \\ M_A + M_B + Fl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A + F = 0 \\ M_A - \frac{Fl}{2} + Fl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = -F \\ M_A = -\frac{Fl}{2} \end{cases}$$

N.B Se  $u(z=l) = f$

$$K = \frac{F}{f}$$

Ripetere  
flessione  
della trave

Si può dedurre che non possiamo applicare il principio a causa di  $\frac{F_1 F_2}{K}$ . Nel caso che esso sia zero possiamo applicarlo

$$L_e = \frac{1}{2} F l = \frac{1}{2} \sigma A \epsilon l = \frac{1}{2} \sigma \epsilon V$$

1) Trazione / compressione

$$L_e = \frac{1}{2} \int_0^l N(z) dz \quad d\epsilon = \frac{N}{EA} dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(z)}{EA} dz \Rightarrow L_e = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} l$$

2) Torsione

$$M_t \rightarrow d\theta = \frac{M_t}{GI_p} dz$$

$$L_e = \frac{1}{2} \int_0^l M_t \cdot d\theta = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t^2(z)}{GI_p} dz$$

3) Flessione

$$M_f \rightarrow d\theta = \frac{M_f}{EI} dz$$

$$L_e = \frac{1}{2} \int_0^l M_f d\theta = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2}{EI} dz$$

4) Faglie (scostamento medio sezione)

$$\vec{\gamma} = \chi \frac{T}{GA}$$

$$L_e = L_i = \frac{1}{2} \int_V \vec{\epsilon} \cdot \vec{\gamma} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{T}{A} \cdot \chi \frac{T}{GA} A \cdot dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \chi \frac{T^2}{GA} dz$$

Lezione 19

Carico di punta

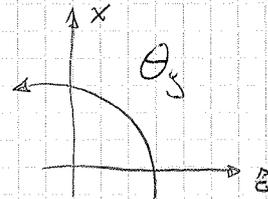
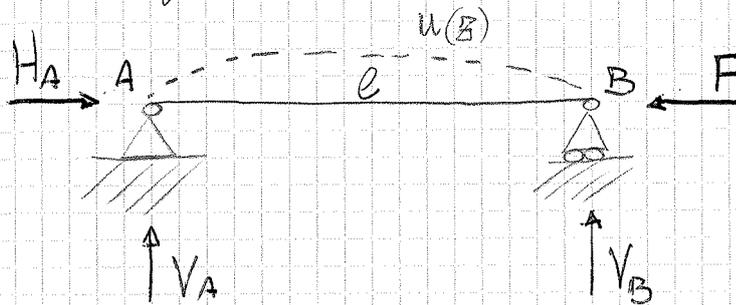
A: area

I: inerzia

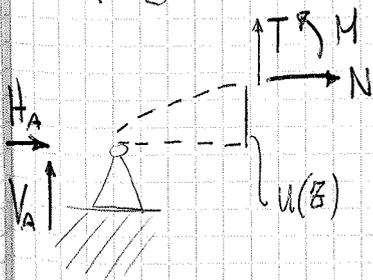
E: modulo di Young

l: lunghezza

La flessione dipende da questi parametri



$$\begin{cases} H_A - F = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ V_B \cdot l = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = F \\ V_A = 0 \\ V_B = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} H_A + N = 0 \\ V_A + T = 0 \\ M + Tz - N \cdot u(z) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = -H_A = -F \\ T = -V_A = 0 \\ M = -Tz + Nu(z) = -Fu(z) \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione della linea elastica:  $= -Fu(z)$

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{Fu(z)}{EI}$$

Ammette come soluzione:

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \frac{Fu(z)}{EI} = 0 \Rightarrow u(z) = C_1 \sin(\omega z) + C_2 \cos(\omega z)$$