



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 844

DATA: 12/03/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Di Paolo

MATERIA: Dinamica dei Sistemi Meccanici + Eserc.

Prof. Marchesiello\_Fasana

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

**RISPOSTA LIBERA**

3 sistemi vibranti sono caratterizzati da 4 elementi:

- MOLLE
- SMORZANTI
- MASSE
- FORZANTI

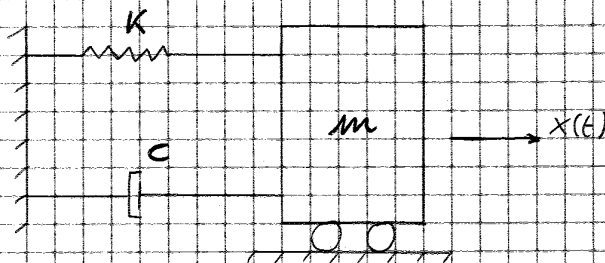
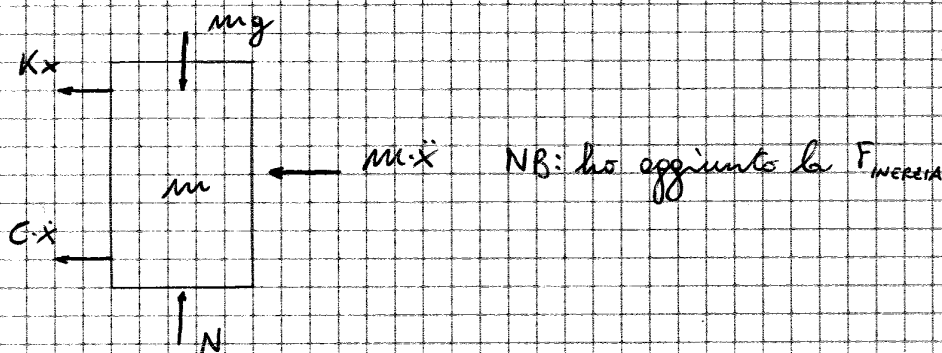


DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO: rappresentazione grafica in un disegno il mio sistema di interesse isolandolo dal resto dell'universo "tagliandolo" e sostituendolo con azioni che si ottengono effettuando tali tagli



$\uparrow N - mg = 0$

$\leftarrow m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$  eq. moto o eq. vincolo lungo l'ascissa (LTI)

Cerchiamo una soluzione del tipo

$x(t) = Ae^{st}$

$\dot{x}(t) = sAe^{st} \Rightarrow$  sostituendo nell'eq. moto  $\rightarrow (ms^2 + Cs + K)Ae^{st} = 0$

Cerchiamo le soluzioni:

$A = 0$  SOL. TRIVIALE

$\hookrightarrow x(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 ; \ddot{x}(t) = 0$

Quindi rimane

$ms^2 + Cs + K = 0$  EQ. CARATTERISTICA

$s_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4mK}}{2m}$  dove  $\Delta = C^2 - 4mK$

Per comodità chiamiamo

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

PULSAZIONE DELLE  
OSCILLAZIONI LIBERE  
SMORZATE

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_d$$

$$x(t) = A_1 e^{(-\zeta \omega_n - i \omega_d)t} + A_2 e^{(-\zeta \omega_n + i \omega_d)t}$$

↳ da qsta tramite EULER otteniamo

$$x(t) = [a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t)] e^{-\zeta \omega_n t} \quad (1.19)$$

oppure

$$x(t) = A \sin(\omega_d t + \alpha) e^{-\zeta \omega_n t}$$

Applichiamo al sistema precedente le C.I.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

CAUCHY

$$x = \omega_d [-a \sin(\omega_d t) + b \cos(\omega_d t)] e^{-\zeta \omega_n t} - \zeta \omega_n [a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t)] e^{-\zeta \omega_n t}$$

$$\begin{cases} x(0) = a \\ \dot{x}(0) = b \omega_d - \zeta \omega_n a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = x_0 \\ b = \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[ x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] e^{-\zeta \omega_n t}$$

$$y(t) = \pm A e^{-\zeta \omega_n t}$$

CURVE DI ESTINZIONE

NB: nella (1.19) il termine tra parentesi rappresenta una oscillazione armonica di pulsazione  $\omega_d$  e periodo  $T_d$ , mentre il termine esp. = numerale espone la diminuzione della ampiezza dello spostamento  $x$  con il crescere del tempo  $t$ .

Si è soliti parlare di un'oscillazione armonica con ampiezza decrescente nel tempo. Per evidenziare tale aspetto si può riscrivere la (1.19) nella forma

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \alpha) \quad \alpha = \text{FASE}$$

→ Gli andamenti di tutte e 3 le soluzioni sono rappresentati a PAG. 6

$$\text{Se } \zeta \ll 1 \Rightarrow \omega_d \approx \omega_n \Rightarrow x(t) = A \sin(\omega_n t + \alpha)$$



**RISPOSTA ALLA FORZANTE ARMONICA**

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$\hookrightarrow f(t) = F_0 \cos(\omega t) \rightarrow$  FORZANTE (è indifferente scegliere un cos o un sin in quanto sono anch'essi)

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x(t) = X_g(t) + X_p(t)$$

Se  $c > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X_g(t) = 0 \rightarrow$  la  $X_g(t)$  quindi rappresenta una parte transitoria della risposta del sistema, che si annulla in un tempo ± lungo.

$$F_0 e^{i\omega t} = \underbrace{F_0 \cos(\omega t) + i F_0 \sin(\omega t)}_{\text{Re}}$$

$\Rightarrow$  ha interesse studiare la sola RISPOSTA A REGIME data da  $X_p(t)$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \text{Re}(F_0 e^{i\omega t})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (1.30) \quad F_0 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x(t) = X_p(t) = X_0 e^{i\omega t} & X_0 \in \mathbb{C} \\ \dot{x}(t) = i\omega X_0 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_0 e^{i\omega t} \end{cases}$$

Sostituendo  $\dot{x}(t)$  e  $\ddot{x}(t)$  nella (1.30)

$$-m\omega^2 X_0 e^{i\omega t} + c i \omega X_0 e^{i\omega t} + k X_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$X_0 (-m\omega^2 + c i \omega + k) = F_0$$

$$\hookrightarrow X_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + c i \omega} \quad (1.32)$$

Per debilitare per comporre i TERMINI MODALI ( $\omega_n, \gamma$ ) nella (1.32)

$$\left( \frac{k}{m} - \omega^2 + \frac{i\omega c}{m} \right) X_0 = \frac{F_0}{m} \rightarrow (\omega_n^2 - \omega^2 + i 2\gamma \omega \omega_n) X_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i 2\gamma \frac{\omega}{\omega_n} \right] X_0 = \frac{F_0}{m \omega_n^2}$$

$$\boxed{\frac{F_0}{k} = X_{\text{statico}}}$$

$$\frac{F_0}{m \cdot \frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k}$$

$\hookrightarrow$  è uno spostamento

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} X_0 = X_{\text{statico}}$$

Calcoliamo  $X_{st}$

$$\frac{X_0}{X_{st}} = \frac{1}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i 2\gamma \frac{\omega}{\omega_n}}$$

dove

$$\boxed{Q(i\omega) = \frac{X_0}{X_{st}}} \quad \begin{matrix} \text{GUADAGNO} \\ \text{AMPLIFICAZIONE} \end{matrix}$$

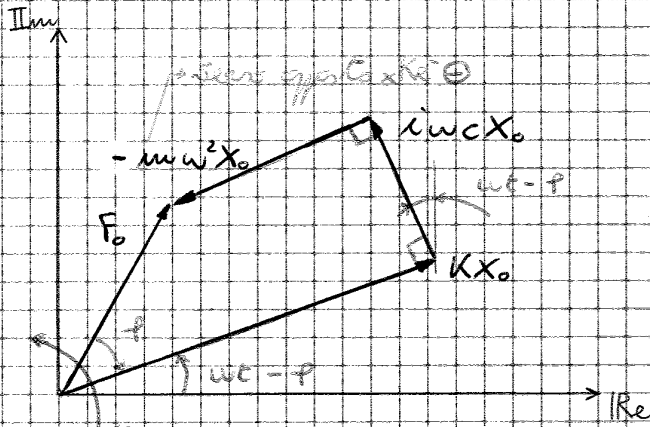
$$|Q|_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ AMPIEZZA MAX}$$

VECTORI ROTANTI

$$-m\omega^2 X_0 e^{i\omega t} + i c \omega X_0 e^{i\omega t} + K X_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{F_{inert}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{F_{viscosa}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{F_{elastica}} \quad \rightarrow$

→ moltiplicando per  $F \Rightarrow$  la equazione anche gli altri termini all'altro membro di  $F$  sono sempre  $F_0 e^{i\omega t}$



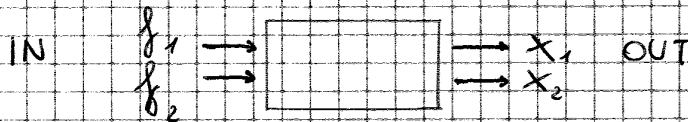
IN CONCLUSIONE abbiamo ricavato le seguenti 4 pulsazioni:

- |                      |                      |   |
|----------------------|----------------------|---|
| 1) $\omega_n$        | PULSAZIONE PROPRIA   | } Sono date al comportamento libero, cioè <u>senza</u> FORZANTE |
| 2) $\omega_d$        | PULSAZIONE SMOCCATE  |   |
| 3) $\omega = \Omega$ | FORZANTE             | } Sono date da FORZANTI ARMONICHE                               |
| 4) $\omega_{ris}$    | PULSAZIONE RISONANZA |   |

FORZANTE PERIODICA

$$f(t) = f(t+T) \quad T > 0$$

Per calcolare la risposta ad una forzante periodica con Fourier + Laplace = posizione degli effetti (linearità)



Le uscite  $f$  sono di quest tipo:

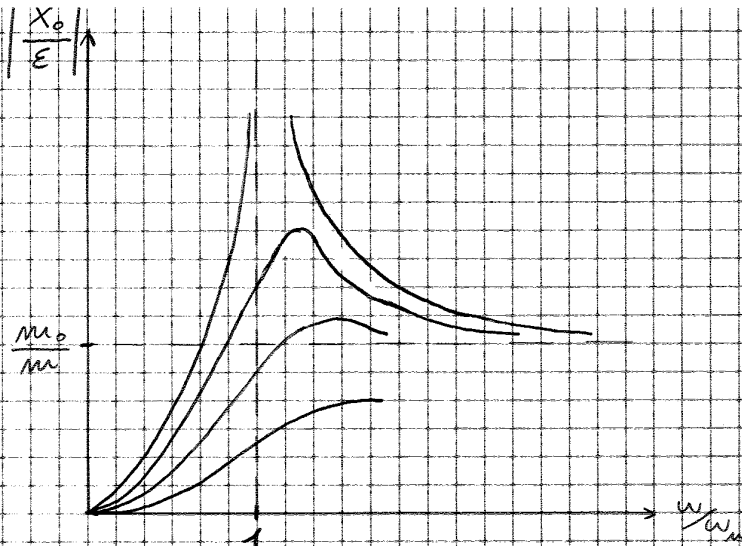
$$f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$$

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

FOURIER

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

dove  $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$        $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$        $T = \text{PERIODO}$   
 $\omega_0 = \text{PULS. FONDAMENTALE}$

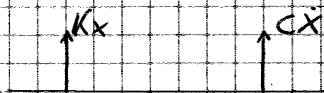


Vediamo se la lavatrice crea disturbo, in pratica la FORZA TRASMESSA A TERRA  $\mathcal{F}_v$

⇒ introduciamo il concetto di:

TRASMISSIBILITÀ

↳ rapporto tra 2 ampiezze commensurabili (grandezze che assumono una comune unità di misura)



$$\mathcal{F}_v(\omega) = Kx + C\dot{x} = (K + i\omega C)X_0 e^{i\omega t} = F_v e^{i\omega t}$$

$$\hookrightarrow F_v = (K + i\omega C)X_0$$

Si definisce TRASMISSIBILITÀ

$$T = \frac{F_v}{M_0 \omega_m^2 \varepsilon} = \frac{K + i\omega C}{M_0 \omega_m^2} \cdot \frac{M_0}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_m)^2 + i2\zeta \omega/\omega_m} =$$

$$= \frac{\omega_m^2 + i2\zeta \omega \cdot \omega_m}{\omega_m^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_m)^2 + i2\zeta \omega/\omega_m} = \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \frac{1 + i2\zeta \omega/\omega_m}{1 - (\omega/\omega_m)^2 + i2\zeta \omega/\omega_m}$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \cdot \frac{1 + i2\zeta \omega/\omega_m}{1 - (\omega/\omega_m)^2 + i2\zeta \omega/\omega_m}$$

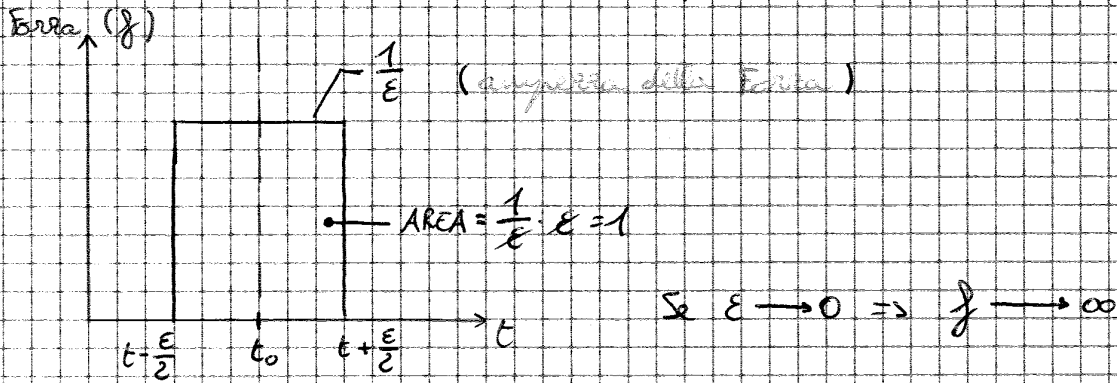
$$\rightarrow |T| = \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta \omega/\omega_m)^2}{[1 - (\omega/\omega_m)^2]^2 + (2\zeta \omega/\omega_m)^2}}$$

Questa  $\mathcal{F}_v$  ha un max per  $\frac{\omega}{\omega_m} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\bullet \left| T \left(\frac{\omega}{\omega_m} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| = 2 \sqrt{\frac{1 + 8\zeta^2}{1 + 8\zeta^2}} = 2 \quad \forall \zeta$$

I( $\sqrt{2}, 2$ ) pt. INVARIANZA

Consideriamo una Forzante del tipo:



→ Diamo una risposta a qst problema

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \quad \text{eq. moto (1.56)}$$

Definiamo le C.I.

$$\begin{aligned} x(0^+) &= 0 \\ \dot{x}(0^+) &= 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Integrando 2 volte l'eq. del moto nell'intervallo  $[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$ , calcolando il lim  $\epsilon \rightarrow 0$  e ricordando le (1.54) e (1.55) si arriva alla (1.57)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} \delta(t) dt d\tau \quad \text{NB: mettiamo } \tau \times k e^{-} \text{ non è un integrale doppio, ma è un integrale fatto 2 volte}$$

$$\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 1 & \tau > 0 \end{cases}$$

$\tau < 0$  →  $x(t) \times k e^{-}$  si pone da un altro da un altro, in qst caso da 0 a 1  
 $\tau > 0$  →  $x(t) \times k e^{-}$  si pone da un altro da un altro, in qst caso da 0 a 1

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} u(\tau) d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\tau u(\tau)]_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\epsilon}{2} u\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{\epsilon}{2} u\left(-\frac{\epsilon}{2}\right) \right] = 0$$

$\epsilon \rightarrow 0 \times k e^{-}$  ai GRADINI prima di essere ridotto a 0

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} \delta(t) dt d\tau = 0$$

$$m [x(0^+) - x(0^-)] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ c \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} \dot{x}(t) d\tau + k \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} x(t) dt d\tau \right] = 0 \quad (1.57)$$

A qst. si fa un'IPOTESI:

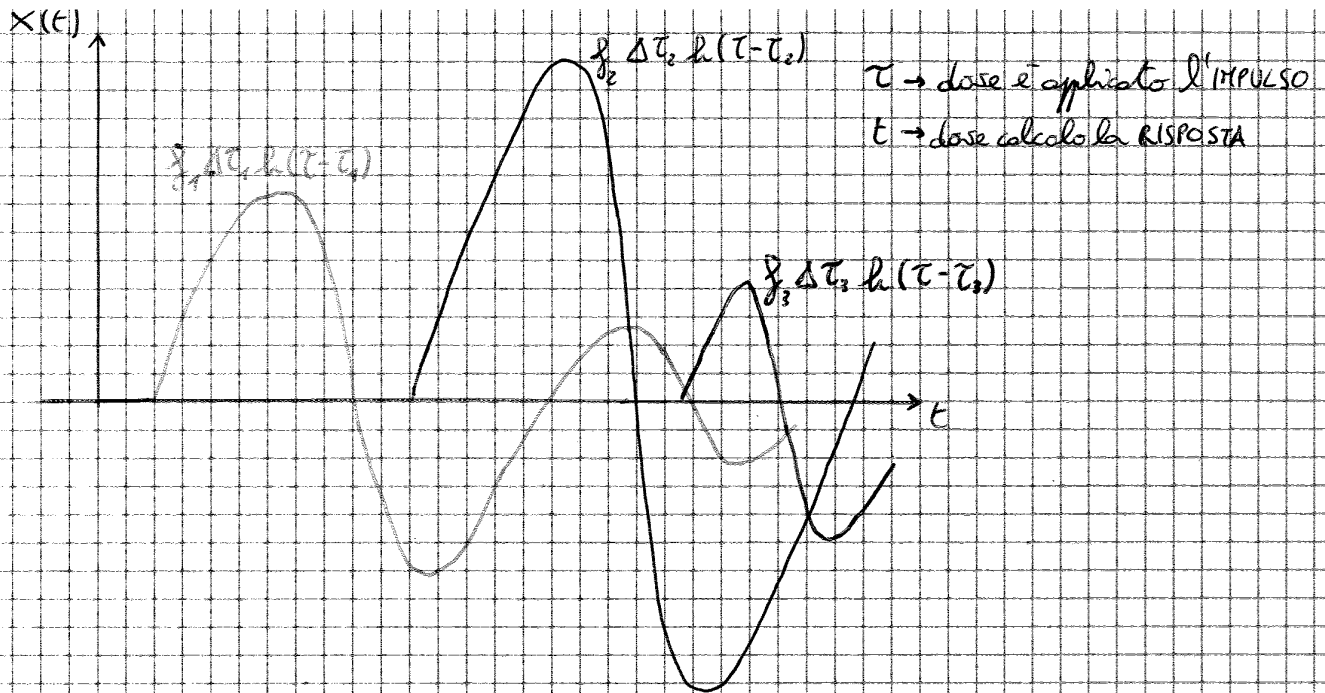
$$x(t) \text{ limitata, cioè non tenda a } \infty, \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\dots] = 0 \Rightarrow m x(0^+) = 0$$

$$\boxed{x(0^+) = 0} \quad 1^a \text{ C.I.}$$

Integriamo 1 volta sola la (1.56)

$$\Rightarrow m [\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)] + c [x(0^+) - x(0^-)] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ k \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} x(t) dt \right] = 1$$





- Metto una costante  $\otimes$  h che stiamo considerando come impulso l'area sotto al rettangolo (ossia l'area sotto del rettangolo)

$$x_0(t) = \int_0 \Delta \tau h(t)$$

$h(t) =$  RISPOSTA ALL'IMPULSO salutato dopo un tempo  $t$  dall'applicazione dello stesso.

$$x_1(t) = \int_1 \Delta \tau h(t - \Delta \tau)$$

...

$$x_n(t) = \int_k \Delta \tau \cdot h(t - k\Delta \tau)$$

Applico la SOPRAPPONIMENTO DEGLI EFFETTI

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x_k(t) = \sum_{k=0}^n \int_k \Delta \tau h(t - k\Delta \tau)$$

Passando al limite

$$\Delta \tau \rightarrow d\tau, \quad n \rightarrow \infty; \quad k\Delta \tau \rightarrow \tau$$

$\Rightarrow$  la  $\Sigma$  si trasforma nell'integrale di convoluzione o di Duhamel

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{consente di calcolare la RISP.} \\ \text{DEL SISTEMA in qualunque istante } t, \\ \text{con le C.I. = 0 e la } h(t) = \text{NOTA} \end{array} \right.$

Effettuiamo un cambio di variabile

$$\lambda = t - \tau \quad \text{differenziale} \quad d\lambda = -d\tau$$

$$\tau = 0 \Rightarrow \lambda = t$$

$$\tau = t \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_t^0 f(t - \lambda) h(\lambda) d\lambda = \int_0^t f(t - \lambda) h(\lambda) d\lambda$$

### Criterio di Sylvester

Teorema che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una MATRICE SIMMETRICA o un prodotto scalare siano definiti positivi.

ENUNCIATO: sia  $A$  una matrice simmetrica e reale di dimensioni  $n$ .  
 Per  $i=1, \dots, n$  sia  $d_i$  il determinante del minore ottenuto cancellando da  $A$  le ultime  $n-i$  righe e le ultime  $n-i$  colonne.  $\Rightarrow A$  è DEFINITA POSITIVA  $\Leftrightarrow d_i > 0 \forall i$

### Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} d_1 = \det(2) = 2 > 0 \\ d_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 6 > 0 \\ d_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ è DEF. POSITIVA}$$

### PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

Consideriamo la seguente equazione del moto:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (2.4)$$

Cerchiamo una SOLUZIONE SINCRONA, caratterizzata cioè dal fatto che tutte le masse possano muoversi secondo un'unica  $f(t)$  del tempo. Tale soluzione può essere espressa nella forma.

$$\begin{aligned} \{x(t)\} &= \{X_0\} g(t) & \{X_0\} &\in \mathbb{R}^n & \{X_0\} &= \text{VETTORE COST e } \neq 0 \\ \{\ddot{x}\} &= \{X_0\} \ddot{g}(t) & & & g(t) &= \text{FZ. GENERICA} \end{aligned}$$

$$[M]\{X_0\} \ddot{g}(t) + [K]\{X_0\} g(t) = \{0\}$$

$$\text{Si pu\`o moltiplicare per } \{X_0\}^T \text{ con } \{X_0\} \neq 0$$

$$\{X_0\}^T [M]\{X_0\} \ddot{g}(t) + \{X_0\}^T [K]\{X_0\} g(t) = 0$$

Si pu\`o osservare che sono valide le relazioni  $\{X_0\}^T [M]\{X_0\} > 0$  e  $\{X_0\}^T [K]\{X_0\} \geq 0$ , in quant la  $[M]$  è DEF. POSITIVA e la  $[K]$  è DEF. o SEMI DEF. POS.  
 Pertanto si ottiene

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = - \frac{\{X_0\}^T [K]\{X_0\}}{\{X_0\}^T [M]\{X_0\}} = - \frac{[K]}{[M]} = -\omega^2 \leq 0$$

Si giunge ad un'equazione del moto armonico del tipo

$$\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$$

## ORTOGONALITÀ DEI MODI PROPRI

È una importante proprietà degli autosestori che riguarda la loro ortogonalità rispetto alle matrici  $[M]$  e  $[K]$ .

Si consideri (2.12)

$$\omega^2 [M] \{X_0\} = [K] \{X_0\}$$

Per ciascuno degli  $n$  autosestori  $\omega_n^2$  (distinti) è possibile calcolare l'autosestori  $\{\Psi_n\}$ . Per 2 autosestori  $\omega_n^2$  e  $\omega_s^2$  si può scrivere:

$$\omega_n^2 [M] \{\Psi_n\} = [K] \{\Psi_n\} \quad (1)$$

$$\omega_s^2 [M] \{\Psi_s\} = [K] \{\Psi_s\} \quad (2)$$

⊗ moltiplicando (1) e (2) per  $\{\Psi_s\}^T$  e  $\{\Psi_n\}^T$

$$\omega_n^2 \{\Psi_s\}^T [M] \{\Psi_n\} = \{\Psi_s\}^T [K] \{\Psi_n\} \quad (1')$$

$$\omega_s^2 \{\Psi_n\}^T [M] \{\Psi_s\} = \{\Psi_n\}^T [K] \{\Psi_s\} \quad (2')$$

Traspongo la (2')

$$\omega_s^2 \{\Psi_s\}^T [M]^T \{\Psi_n\} = \{\Psi_s\}^T [K]^T \{\Psi_n\} \quad (2'') \text{ NB: ho scambiato posto x le regole dell'algebra lineare}$$

$$[M]^T = [M]$$

$$[K]^T = [K]$$

} x 2 matrici simmetriche

Da (1') - (2'')

$$\boxed{(\omega_n^2 - \omega_s^2) \{\Psi_s\}^T [M] \{\Psi_n\} = 0}$$

• Caso  $\omega_n \neq \omega_s$

$$\{\Psi_s\}^T [M] \{\Psi_n\} = 0 \quad (2.26)$$

La (2.26) definisce la  $M$ - $\perp$  ( $M$ -ortogonalità)

• Caso  $\omega_n = \omega_s$

$$\{\Psi_n\}^T [M] \{\Psi_s\} = m_n > 0$$

$> 0$  x  $K$   $[M]$  è DEF. POSITIVA

$m_n = \text{MASSA MODALE}$

Dalla (1')

• Caso  $\omega_n \neq \omega_s$

$$\{\Psi_s\}^T [K] \{\Psi_n\} = 0 \quad (2.28)$$

La (2.28) definisce la  $K$ - $\perp$  ( $K$ -ortogonalità)

• Caso  $\omega_n = \omega_s$

$$\{\Psi_n\}^T [K] \{\Psi_s\} = k_n = m_n \omega_n^2 \geq 0 \quad k_n = \text{RIGIDEZZA MODALE}$$

$> 0$  x  $K$   $[K]$  è DEF. POSITIVA

## AUTOVALORI RIPETUTI

Si consideri un sistema vibrante a  $n$  gradi di libertà, caratterizzato da  $p$  autovalori ripetuti con  $2 \leq p \leq n$ . In qst caso gli autovettori associati all'autovalore ripetuto sono  $\perp$  rispetto agli  $n-p$  autovettori rimanenti, ma possono non essere  $\perp$  tra di loro. È però un teorema dell'algebra lineare che garantisce che è sempre possibile scegliere gli autovettori associati all'autovalore ripetuto in modo che qsti siano  $m-2k-1$  tra di loro.

### Esempio

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo la (2.12) si ottiene

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Da cui si nota l'autovalore ripetuto  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0$

Se si sceglie  $[\Psi]$  come

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

è si calcola

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{NB: la matrice presenta che la matrice è ortogonale, ma non lo è}$$

Una scelta + appropriata  $\Rightarrow$  può essere

$$[\tilde{\Psi}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per cui risulta

$$[\tilde{\Psi}]^T [M] [\tilde{\Psi}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{NB: con qsta nuova scelta tutti gli auto-vettri sono } \perp \text{ tra di loro}$$



SISTEMI CON SMORZAMENTO VISCOSO PROPORZIONALE

Si consideri un sistema a molti G.D.L. non forzato.

⇒ la (2.3) diventa:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (2.49)$$

A qst pt. applichiamo la T.M.D. (2.38) e  $\otimes [Y]^T$

$$[Y]^T [m] [Y] \{\ddot{\eta}\} + [Y]^T [c] [Y] \{\dot{\eta}\} + [Y]^T [k] [Y] \{\eta\} = \{0\}$$

Che sfruttando la  $m-1$  disenta

$$\left[ \begin{array}{c} m_r \\ \vdots \\ m_r \end{array} \right] \{\ddot{\eta}\} + [Y]^T [c] [Y] \{\dot{\eta}\} + \left[ \begin{array}{c} k_r \\ \vdots \\ k_r \end{array} \right] \{\eta\} = \{0\}$$

In generale la matrice  $[Y]^T [c] [Y]$  può essere:

- DIAGONALE ⇒ SMORZAMENTO VISCOSO PROPORZIONALE
- NON DIAGONALE ⇒ SMORZAMENTO VISCOSO NON PROPORZIONALE

Nel caso DIAGONALE la trattazione matematica è molto semplificata ed, in caso di smorzamento di piccola entità, è possibile approssimare lo "smorzamento non proporzionale" con gli "proporzionale".

Il termine SMORZAMENTO "PROPORZIONALE" deriva dalla seguente Condizione Sufficiente (C.S.):

$$[c] = \alpha [m] + \beta [k] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow [Y]^T [c] [Y] = [Y]^T (\alpha [m] + \beta [k]) [Y] = \alpha [Y]^T [m] [Y] + \beta [Y]^T [k] [Y] = \left[ \begin{array}{c} c_r \\ \vdots \\ c_r \end{array} \right]$$

$$\hookrightarrow [Y]^T [c] [Y] = \left[ \begin{array}{c} c_r \\ \vdots \\ c_r \end{array} \right] \quad \text{MATRICE DIAGONALE} \quad c_r = \text{SMO. MODALE}$$

$\hookrightarrow \text{diag}(c_r)$

$c_r = \alpha m_r + \beta k_r \Rightarrow$  l'eq. del moto (2.49) diventa:

$$m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = 0$$

$\otimes m_r$

$$\ddot{\eta}_r + \frac{c_r}{m_r} \dot{\eta}_r + \frac{k_r}{m_r} \eta_r = 0 \rightarrow \ddot{\eta}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

dove  $\left\{ \begin{array}{l} \omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \\ 2\zeta_r \omega_r = \frac{c_r}{m_r} \end{array} \right. \rightarrow 2\zeta_r \omega_r = \alpha + \beta \frac{k_r}{m_r} \Rightarrow \zeta_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta}{2} \omega_r$

RISPOSTA ALLA FORZANZA ARMONICA

Qst caso merita particolare attenzione che  $\underline{x}$  (ossia eccitazione  $\underline{f}$ )  
 può essere vista come somma di componenti armoniche.  
 L'equazione del moto si scrive nel modo seguente:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F_0\} \cos(\omega t)$$

Risulta  $\underline{x}$  particolarmente conveniente ricorrere ad un'eq. complessa:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F_0\} e^{i\omega t} \quad (2.67)$$

È strade alternative al calcolo della risposta alla forzante  
 armonica (oltre all'Integrale di Convulsione che è comodo).

Insersione della matrice di rigidità dinamica

Grazie alla linearità dell'eq. del moto si cerca la soluzione a regime  
 nella forma  $\{x(t)\} = \{X_0\} e^{i\omega t}$  con  $\{X_0\} \in \mathbb{C}^n$ .

Derivando e sostituendo nella (2.67) si ottiene:

$$([K] - \omega^2 [M] + i\omega [C]) \{X_0\} = \{F_0\}$$

NB: è partito il tempo  $t$

$$\hookrightarrow [K_{din}] = ([K] - \omega^2 [M] + i\omega [C])$$

$[K_{din}]$  = MATRICE DI RIGIDEZZA DINAMICA

$$\Rightarrow \{X_0\} = [K_{din}(\omega)]^{-1} \{F_0\}$$

$\{X_0\}$  = VETTORE DELLE AMPIEZZE DI OSCILLAZIONE

$$\hookrightarrow [\alpha(\omega)] = [K_{din}(\omega)]^{-1}$$

$[\alpha(\omega)]$  = MATRICE DI RECELTANZA

NB: qsto metodo è comodo che richiede l'insersione di una matrice  
 quadrata  $\forall$  frequenza.

Approccio modale

Nel caso di smorzamento viscoso proporzionale la soluzione alla forzante  
 armonica può essere calcolata applicando la decomposizione modale  
 $\underline{X}$  e  $\underline{\Psi}$ . Si ottiene un sistema del tipo:

$$(K_r - \omega^2 M_r + i\omega C_r) \eta_r(t) = \{\Psi_r\}^T \{F_0\} e^{i\omega t}$$

$$\{X_0\} = [\alpha(\omega)] \{F_0\}$$

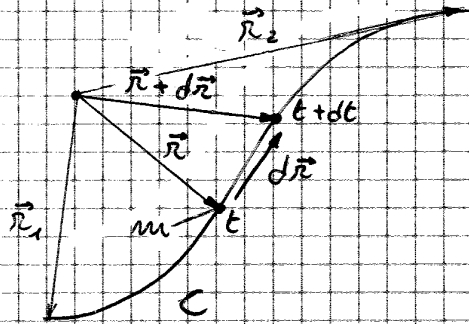
$$\begin{Bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \\ \vdots \\ X_{n0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & \boxed{\alpha_{jk}} & & \\ & & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \\ \vdots \\ F_{n0} \end{Bmatrix}$$

# MECCANICA ANALITICA

↳ LIBERTÉ → fino all'attenzione su Lavoro ed Energia

## INTRODUZIONE

Definiamo un percorso  $C$  ed individuiamo un pt. su cui è applicata una Forza all'istante  $t$ .



$\vec{r}$  = VETTORE POSIZIONE

$$\overline{dW} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$\overline{dW}$  = LAVORO infinitesimo compiuto dalla  $F$

→ con  $gr$  si intende che tale quantità non è un differenziale esatto

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \quad \text{NEWTON}$$

$$\hookrightarrow \overline{dW} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \cdot \vec{r} dt = d\left(\frac{1}{2} m \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right)$$

$T = E_{\text{CINETICA}}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{dW} = dT} \quad \text{TEOREMA ENERGIA-LAVORO}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} dT = T_2 - T_1 = \Delta T \quad \text{TEOREMA } E_{\text{CIN}}$$

Prendiamo una FORZA CONSERVATIVA  $\vec{F}_c$

$$\left( \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \right)_{\text{I}} = \left( \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \right)_{\text{II}} \quad \text{I, II = PERCORSI}$$

Dimostriamo che in un percorso chiuso  $\vec{F}_c = 0$

$$\left( \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \right)_{\text{I}} + \left( \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \right)_{\text{II}} = 0 \Rightarrow \boxed{\oint \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0}$$

Quando una  $F$  è conservativa posso definire una ENERGIA POTENZIALE

↳ Definisco una posizione di riferimento lungo la linea  $\vec{r}_{\text{ref}}$

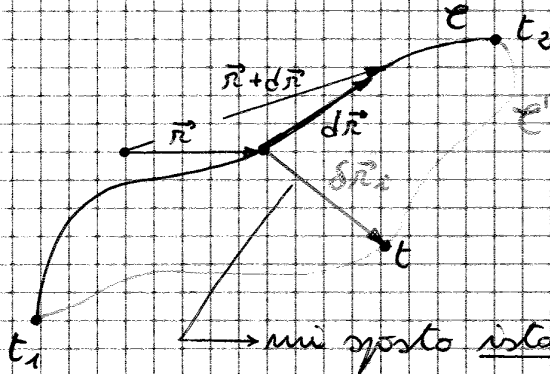
$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_{\text{ref}}} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_{\text{ref}}} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_{\text{ref}}} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \\ &= V_1 - V_2 = -(V_2 - V_1) = -\Delta V \end{aligned}$$

PRINCIPIO LAVORI VIRTUALI

• STATICA

$\delta \vec{r}$  = SPOSTAMENTO VIRTUALE: è uno spostamento infinitesimo, arbitrario, purché rispetti i vincoli imposti irriducibili in certi istanti.

Rappresentazione grafica di  $\delta \vec{r}$



NB: ora seguiamo una traiettoria differente, "virtuale", variata  $t'$

mi sposto istantaneamente in un altro pt. e miesso a definire un nuovo percorso detto MOTO VARIATO SINCRONO

Ora consideriamo un insieme di particelle  $m_i$  e che sia in equilibrio statico

$\vec{R}_i = \vec{0} \quad i = 1, \dots, N \quad \vec{R}_i = \text{RISULTANTE } \forall \text{ massa}$

Ora calcoliamo i LAVORI VIRTUALI

$\delta W_i = \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i \Rightarrow \delta W_i = 0$

$\sum_{i=1}^N \delta W_i = \delta W = 0$

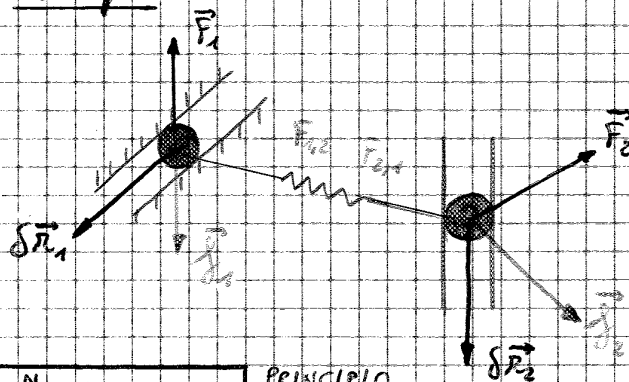
in generale

$\vec{R}_i = \vec{F}_i + \vec{J}_i$

$\vec{F}_i$  = FORZE ATTIVE

$\vec{J}_i$  = REAZIONI VINCOLARI

Esempio



NB: i sensi di  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{J}_1, \vec{J}_2, \delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2$  sono presi a caso

$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{J}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

Se  $\sum_{i=1}^N \vec{J}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$  (dal pt. di vista degli spostamenti virtuali vincolati a un pt. di pulso distribuito)

$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$  PRINCIPIO LAVORI VIRTUALI

in qst caso i  $\delta \vec{r}_i$  sono REVERSIBILI



$$\Rightarrow -Kx \delta x + (m\dot{y} - m\ddot{y}) \delta y = 0$$

↳ NB: ora c'è la  $\ddot{y}$  (e quindi nasce una  $m\ddot{y}$ ) xke ora siamo in DINAMICA ed i corpi non s'è fermo

$$\Rightarrow [-KL(1-\cos\theta)L \delta \sin\theta - mL(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta)L \cos\theta] \delta\theta = 0$$

↳ come ora (come prima) il lavoro virtuale è  $[ \dots ] = 0$

**PRINCIPIO DI HAMILTON**

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \overline{\delta W}$$

$$\overline{\delta W} = \delta W_c + \delta W_{nc} = -\delta V + \delta W_{nc}$$

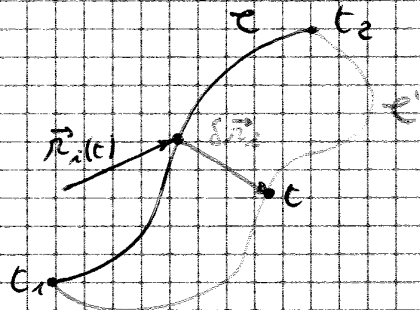
$$\frac{d}{dt} (m \vec{r} \delta \vec{r}) = m \dot{\vec{r}} \delta \vec{r} + m \vec{r} \delta \dot{\vec{r}} = m \dot{\vec{r}} \delta \vec{r} + \delta \left( \frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right) = m \dot{\vec{r}} \delta \vec{r} + \delta T$$

Applicazione D'ALEMBERT

$$-\delta V + \delta W_{nc} - \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \delta \vec{r}_i) + \delta T = 0$$

$$\delta(T-V) + \delta W_{nc} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \delta \vec{r}_i)$$

↳ integrando per le variabili



Integraz. tra  $t_1$  e  $t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T-V) + \delta W_{nc}] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \delta \vec{r}_i) dt =$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \delta \vec{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

xke  $\vec{r}_i(t_1) = \vec{r}_i(t_2) = 0$   
 qst xke s'è lo stesso  
 xke inizialmente ed infine

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} [\delta(T-V) + \delta W_{nc}] dt = 0$$

PRINCIPIO DI HAMILTON "ESTESO"

↳ xke  $\delta W_{nc} \neq 0$  PRINCIPIO DI HAMILTON

$$\text{↳ } \forall \delta \vec{r}_i(t_1) = \delta \vec{r}_i(t_2) = 0 ; \forall i$$

$$\text{Se } \delta W_{nc} = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

dove  $L = T - V$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

LAGRANGE

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$$

→ NB: SEMPRE, ma nei casi di nostro interesse

↳ NB: conviene utilizzare qta × commettere meno errori

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -mL^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = KL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta - mgL \cos \theta$$

$Q_\theta = 0$  → che le uniche F sono qta CONSERVATIVE  $F_{elastica}$  &  $F_{peso}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} (mL^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}) = mL^2 \cos^2 \theta \cdot \ddot{\theta} - 2mL^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

⇒ l'eq. del moto sarà

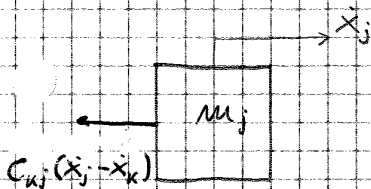
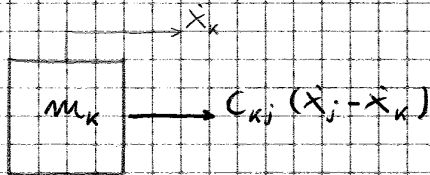
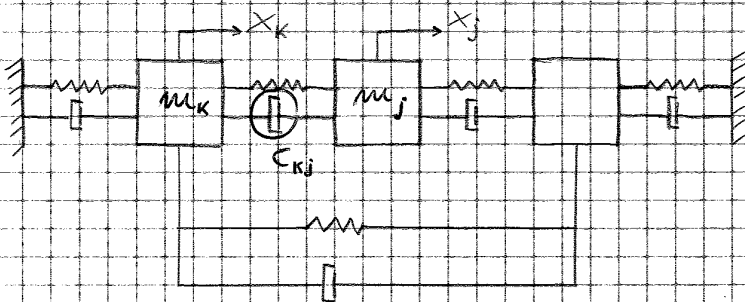
$$mL^2 \cos^2 \theta \cdot \ddot{\theta} - 2mL^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta} + mL^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 + KL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta - mgL \cos \theta = 0$$

### RICHIAMO

#### FORZE CONSERVATIVE:

- FORZA PESO
- FORZA ELASTICA
- FORZA GRAVITAZIONALE
- FORZA ELETTRICA

### Esempio (applicazione $F_{elastica}$ )



$q_1 = x_1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{\Delta} + \ddot{x}_1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_3 (x_1 + \Delta)$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_{i,nc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_1} = \vec{f}_1 \cdot \vec{i} \cdot \frac{\partial (x_1 \cdot \vec{i})}{\partial x_1} - \vec{f}_2 \cdot \vec{i} \cdot \frac{\partial (\Delta + x_1) \vec{i}}{\partial x_1}$$

$\rightarrow Q_1 = f_1 - f_2$   $\rightarrow$  che corrisponde al sistema

$$\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{\Delta} + \ddot{x}_1) + k_1 x_1 + k_3 (x_1 + \Delta) = f_1 - f_2$$

$q_2 = \Delta$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta}} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Delta} = m_2 (\ddot{\Delta} + \ddot{x}_1)$$

$$Q_2 = \vec{f}_1 \cdot \vec{i} \cdot \frac{\partial (x_1 \cdot \vec{i})}{\partial \Delta} - \vec{f}_2 \cdot \vec{i} \cdot \frac{\partial (\Delta + x_1) \vec{i}}{\partial \Delta} \cdot \vec{i}$$

$\rightarrow Q_2 = -f_2$

$$\Rightarrow m_2 (\ddot{\Delta} + \ddot{x}_1) + k_2 \Delta + k_3 (\Delta + x_1) = -f_2$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & k_3 \\ k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - f_2 \\ -f_2 \end{Bmatrix}$$

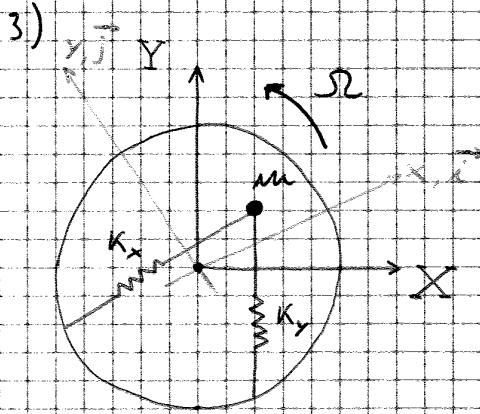
$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad \text{dove} \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$\rightarrow$  perché abbiamo un prodotto uguale  $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \Rightarrow$  scalari si può moltiplicare  
\* non confonderli

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

possiamo considerarlo come  $(a+b) \cdot (c+b)$

TEMA D'ESAME



$\Omega = \text{cost}$   
 $X Y = \text{S.R. Fisso}$   
 $x y = \text{S.R. Mobile}$

$x y \rightarrow$  MOTO RELATIVO, piccoli spostamenti

$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$

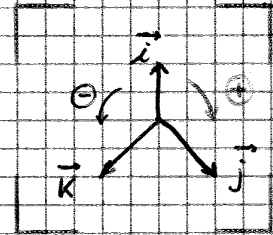
$\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{k}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt}$

dove

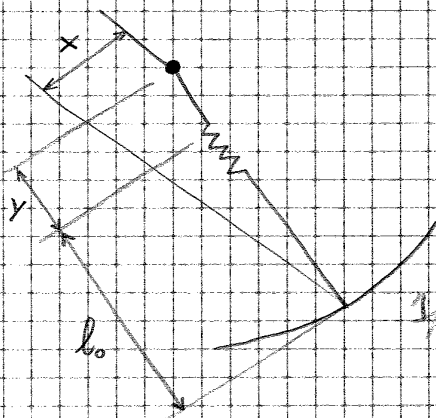
$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i} = \Omega \vec{k} \wedge \vec{i} = \Omega \vec{j}$

$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} = \Omega \vec{k} \wedge \vec{j} = -\Omega \vec{i}$



$\Rightarrow \vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + x \Omega \vec{j} - y \Omega \vec{i} = (\dot{x} - y \Omega) \vec{i} + (\dot{y} + x \Omega) \vec{j}$

$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [(\dot{x} - y \Omega)^2 + (\dot{y} + x \Omega)^2] = \frac{1}{2} m [(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2x \Omega \dot{y} + 2y \Omega \dot{x} + \Omega^2 (x^2 + y^2)] =$   
 $= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m \Omega (x \dot{y} - y \dot{x}) + \frac{1}{2} m \Omega^2 (x^2 + y^2) = T_2 + T_1 + T_0$



$\Delta y = l - l_0 = \sqrt{x^2 + (y + l_0)^2} - l_0 =$   
 $= l_0 \sqrt{\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 + \left(1 + \frac{y}{l_0}\right)^2} - l_0 =$   
 $= l_0 \sqrt{\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 + 1 + 2 \frac{y}{l_0} + \left(\frac{y}{l_0}\right)^2} - l_0$

per piccoli spostamenti

se  $x \ll l_0$  e  $y \ll l_0$

$\Rightarrow \Delta y \approx l_0 \left(1 + 2 \frac{y}{l_0}\right)^{\frac{1}{2}} - l_0 \approx l_0 \left(1 + \frac{1}{2} 2 \frac{y}{l_0}\right) - l_0 \approx y$

Analogamente

$\hookrightarrow \Delta x \approx x$

$(1+z)^\alpha \approx 1 + \alpha z \quad \text{se } z \rightarrow 0$

$\Rightarrow \Delta y \approx y; \Delta x \approx x$



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m\Omega^2 & 0 \\ 0 & -m\Omega^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -h\Omega \\ h\Omega & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[m]\{\ddot{q}\} + ([C^*] + [G])\{\dot{q}\} + ([K^*] + [H])\{q\} = \{0\}$$

dove

$$[C^*] = \begin{bmatrix} c_x + h & 0 \\ 0 & c_y + h \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

[G] = MATRICE GIROSCOPICA

$$[K^*] = \begin{bmatrix} k_x - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k_y - m\Omega^2 \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & -h\Omega \\ h\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

[H] = MATRICE CIRCOLATORIA

$$[G]^T = -[G]$$

$$[H]^T = -[H]$$

sono matrici ANTISIMMETRICHE

## SISTEMI A PARAMETRI DISTRIBUITI

### TRAVI ED ASTE

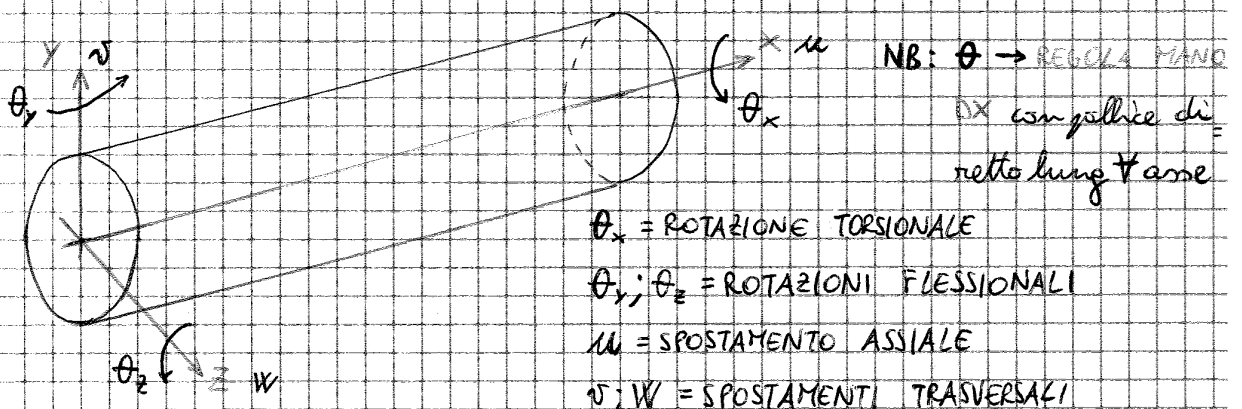
La TRAVE è un corpo in cui una dimensione prevale rispetto alle altre. Spesso si considerano a semplicità gli ad asse rettilineo e prismatica, ovvero con sezione costante lungo l'asse e, se si considera solo il comportamento assiale, si usa la definizione di ASTA.

IPOTESI:

a) travi rettilinee

b) travi prismatiche (secc. costanti)

c) Se siamo interessati solo al comportamento assiale => la definiamo ASTA



Sostituendo (3.4) in (3.2) otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A \cdot E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

supponiamo  $A \cdot E = \text{cost} \rightarrow$   $A \cdot E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  EQ. DEL MOTO

ricordando che  $\mu = \rho \cdot A \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  dove  $c^2 = \frac{E}{\rho}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
 così è l'EQ. D'ALEMBERT (3.7)

Cosa è  $c$ ?

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \left[ \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

dimensionalmente è una VELOCITA'  $\Rightarrow c = \text{VEL. PROPAGAZIONE ONDE ASSIALI}$

Per risolvere la (3.7) si ipotizza una soluzione a variabili separabili e cioè che lo spostamento di una generica sezione è esprimibile come:

$$u(x, t) = \phi(x) \cdot \eta(t)$$

dunque la (3.7) diventa

$$\phi(x) \ddot{\eta}(t) = c^2 \phi''(x) \eta(t) \rightarrow \frac{\ddot{\eta}(t)}{\eta(t)} = c^2 \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \quad (3.10)$$

x costante: deriviamo questa equazione  $= -\omega^2$

che è moltiplicata da costanti arbitrarie

$\rightarrow$  NB: non può essere sia fz. di  $t$  che di  $x \Rightarrow$  l'unica soluzione è che non sia fz. di entrambi

Dalla (3.10) scaturisce un sistema di 2 equazioni diff. ordinarie:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}(t) + \omega^2 \eta(t) = 0 \\ \phi''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \phi(x) = 0 \end{cases}$$

Le cui soluzioni armoniche sono:

$$\begin{cases} \eta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) & \text{COORDINATA MODALE} \\ \phi(x) = C \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) & \text{AUTOFUNZIONE} \end{cases}$$

La soluzione generale dell'eq. del moto si ottiene come somma di un'infinita di soluzioni scritte come sopra, ovvero:

$$\bullet u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right] \left[ C_n \cos\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) + D_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) \right]$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G}{J} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \text{dove } c^2 = \frac{G}{J} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}} \quad \text{EQ. MOTO}$$

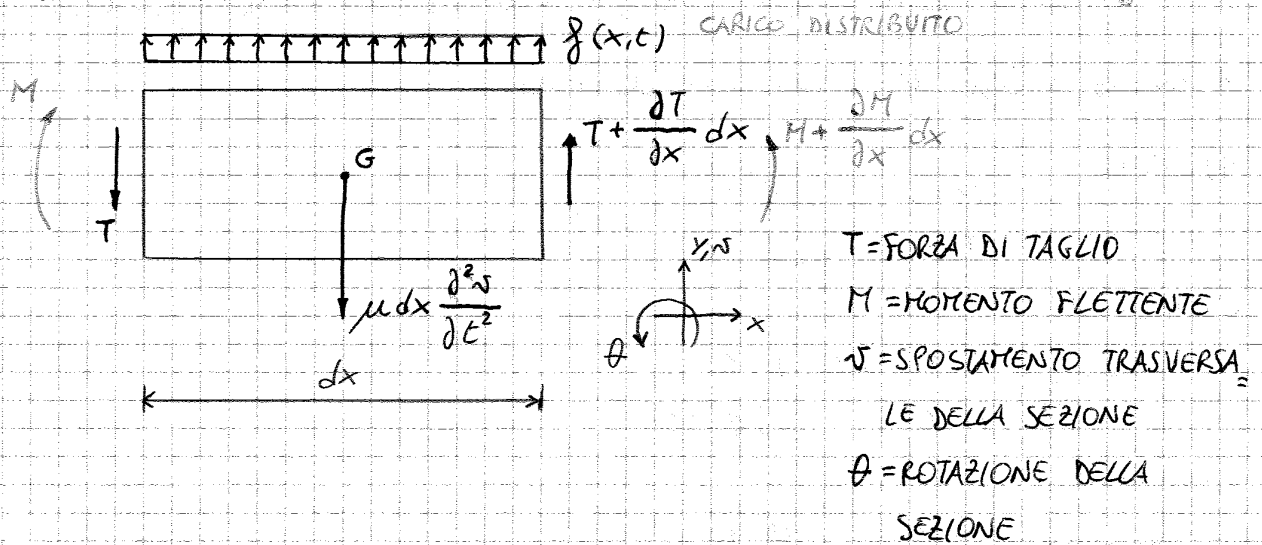
Procedendo come prima, la sua soluzione generale è:

$$\bullet \theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right] \cdot \left[ C_n \cos\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) + D_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) \right]$$

VIBRAZIONI FLESSIONALI DI TRAVI RETTILINEE

Il modello + semplice a rappresentare il comportamento flessionale è la cosiddetta TRAVE DI EULERO-BERNOULLI → TRAVI SNELLE; se invece abbiamo a che fare con TRAVI TOZZE → TIMOSHENKO

Consideriamo un tratto co-erimo → non lo trattiamo



$$\uparrow T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx + f(x, t) dx = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - f(x, t) \quad (3.20)$$

$$\curvearrowright M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M + \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} + T \frac{dx}{2} = 0 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} + T = 0 \quad (3.21)$$

↳ 0 x dx co-erimo di ordine superiore

Dalla (3.21) ottengo:

$$\boxed{T = -\frac{\partial M}{\partial x}} \quad \text{sostituendola nella (3.20) ottengo: } -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - f(x, t)$$

$$\text{dove } \boxed{M_{(2)} = EI_{(2)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} \Rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - f(x, t)$$

Suppongo EI = COST

$$\rightarrow \boxed{EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t)} \quad \text{EQ. EULERO-BERNOULLI} \quad (3.26)$$

Proviamo cercare la soluzione nella forma:

$$v(x, t) = \phi(x) \eta(t) \quad \text{dove } \eta(t) = \eta_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.28)$$

$$\frac{\phi''(l)}{\beta^2} = A [\cosh(\beta l) - \cos(\beta l)] + B [\sinh(\beta l) - \sin(\beta l)] = 0$$

$$\frac{\phi'''(l)}{\beta^3} = A [\sinh(\beta l) + \sin(\beta l)] + B [\cosh(\beta l) - \cos(\beta l)] = 0$$

$$\begin{bmatrix} \cosh(\beta l) - \cos(\beta l) & \sinh(\beta l) - \sin(\beta l) \\ \sinh(\beta l) + \sin(\beta l) & \cosh(\beta l) - \cos(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vogliamo escludere la SOL. BANALE  $A=B=C=D=0$

$$\Rightarrow \det = [\cosh(\beta l) - \cos(\beta l)]^2 - [\sinh^2(\beta l) - \sin^2(\beta l)] = 0$$

PROPRIETA':

$$\bullet \cosh^2(\beta l) - \sinh^2(\beta l) = 1$$

$$\bullet \sin^2(\beta l) + \cos^2(\beta l) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\cosh(\beta l) \cdot \cos(\beta l) = 1}$$

### VIBRAZIONI DI SISTEMI CONTINUI: APPROCCIO UNIFICATO

Per tutti i sistemi continui finora visti, abbiamo trovato

$$\mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ AE(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{VIBRAZIONI ASSIALI}$$

$$I_u(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ GI_p(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{VIBRAZIONI TORSIONALI}$$

$$\mu(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = 0 \quad \text{VIBRAZIONI FLESSIONALI (EULERO-BERN.)}$$

↳ NB: caso in cui  $f(x, EI) = 0$ , cioè forzante nulla

Tutte e tre le eq sono del tipo:

$$M \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + K[w] = 0 \quad M, K = \text{OPERATORI DIFFERENZIALI}$$

Si cerca una soluzione nella forma:

$$w(x, t) = \phi(x) \cdot \eta(t)$$

Visto che  $M$  e  $K$  non presiedono la derivazione rispetto al tempo, ma solo rispetto allo spazio, si può scrivere:

$$M[\phi]\ddot{\eta} + K[\phi]\eta = 0$$

TEOREMA ESPANSIONE  $w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t)$

VIBRAZIONI FORZATE DI SISTEMI CONTINUI

And si applica una FORZANTE (forza generalizzata x unità di lunghez.) ad un sistema continuo monodimensionale, l'eq. del moto diventa:

$$m \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + K[w] = f(x,t) \quad (3.67)$$

la cui soluzione può essere cercata nella forma consueta

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) \quad (3.68)$$

Sostituendo la (3.68) in (3.67) e  $\otimes$  per  $\phi_r(x)$  ed integrando su  $D$

$$\int_0^l \phi_r(x) \sum_{i=1}^{\infty} m[\phi_i] \eta_i dx + \int_0^l \phi_r(x) \sum_{i=1}^{\infty} K[\phi_i] \eta_i dx = \int_0^l \phi_r(x) f(x,t) dx$$

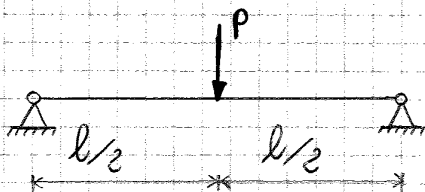
Applicando la  $m \perp$  e  $K \perp$  si ottiene un insieme di  $\infty$  eq. diff. tipo:

$$m_r \ddot{\eta}_r + K_r m_r \eta_r = \int_0^l \phi_r(x) f(x,t) dx \quad (3.71)$$

$N_r(t) =$  FORZA MODALE  $r$ -esima

CARICHI MOBILI SU TRAVI

Un caso particolare di eccitazione di sistemi continui è costituito da carichi mobili. Il caso classico è qll di un ponte attraversato da setture. Il modello semplice di ponte è qll di una trave di EULERO-BERNOULLI "su 2 appoggi". Il modello semplice di settura è rappresentato da una massa  $m$  puntiforme, che esercita sulla trave una  $F_{peso}$ .



Dalla statica:

$$v_{st} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

• ANALISI MODALE ( $P=0$ )

l'eq. del moto della trave si scrive come:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

### QUOZIENTE DI RAYLEIGH

Viene usato x calcolare la "1<sup>a</sup> frequenza propria" x i sistemi continui.  
 Si consideri un sistema a  $n$  G.D.L. senza smorzamento; in assenza di forzanti esterne esso oscillerà con legge armonica con pulsazione  $\omega$  e si avrà un'eq. del moto del tipo (2.4)

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

dalla quale discende il "PROBLEMA AGLI AUTOVALORI" (2.12)

$$\omega^2 [M]\{X_0\} = [K]\{X_0\}$$

le uniche SOLUZIONI non nulle x nullo sono gli:

- AUTOVALORI  $\omega_r^2$
- AUTOVETTORI  $\{\psi_r\}$

⊗ per  $\{\psi_r\}^T$  ed ottengo

$$\{\psi_r\}^T [K] \{\psi_r\} = \{\psi_r\}^T \omega_r^2 [M] \{\psi_r\}$$

$$\omega_r^2 = \frac{\{\psi_r\}^T [K] \{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\}}$$

Ricordando che

$$V = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} \quad E_{\text{pot. ELASTICA}}$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} \quad E_{\text{cin}}$$

Si deduce che l'autovalore  $\omega_r^2$  è legato al rapporto di 2 Energie.

Si ipotizza di utilizzare, al posto dell'autovettore  $\{\psi_r\}$ , un **GENERICO VETTORE**  $\{u\}$  e di definire il rapporto

$$\omega^2 = R(\{u\}) = \frac{\{u\}^T [K] \{u\}}{\{u\}^T [M] \{u\}} \quad \begin{array}{l} \text{QUOZIENTE DI} \\ \text{RAYLEIGH} \end{array}$$

Applichiamo il **TEOREMA DI ESPANSIONE**

$$W(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t)$$

e chiediamoci cosa succede quando  $\{u\}$  è "simile" a  $\{\psi_r\}$  con  $\{u\} \in \mathbb{R}^n$ .

Diciamo che:

$$C_i = \epsilon_i C_r \quad \epsilon \ll 1 \quad \text{per } i=1, \dots, n; \quad i \neq r$$

per esempio

$$\{\psi_r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} 1,01 \\ -0,01 \\ 0,99 \end{Bmatrix}$$



$$E_{tot} = T + V = COST$$

$$\hookrightarrow T_{max} + 0 = 0 + V_{max} \Rightarrow$$

$$T_{max} = V_{max} \quad \text{METODO DELL'ENERGIA}$$

$\hookrightarrow$  NB: assurgono a 2 istanti  $\neq$ , ma numericamente si equivalgono

Esso  $T_{max} = \omega^2 \tilde{T}$  in maniera

$$V_{max} = \frac{1}{2} \{X_0\}^T [K] \{X_0\} \quad e \quad \tilde{T} = \frac{1}{2} \{X_0\}^T [M] \{X_0\}$$

e si ottiene numericamente il QUOZIENTE DI RAYLEIGH

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\tilde{T}} = \frac{\{X_0\}^T [K] \{X_0\}}{\{X_0\}^T [M] \{X_0\}} = R(\{X_0\})$$

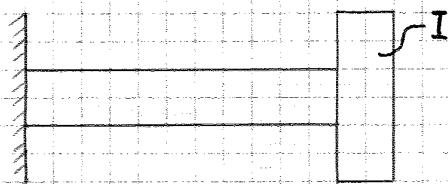
Per stimare la "prima frequenza propria" di un sistema occorre sostituire nel QUOZIENTE DI RAYLEIGH un settore di tentativi  $\{X_0\}$ , che deve essere il + vicino possibile al 1° autosettore.

L'utilizzo del QUOZIENTE DI RAYLEIGH a stimare la "prima frequenza propria" di un sistema vibrante costituisce il METODO DELL'ENERGIA DI RAYLEIGH.

### QUOZIENTE DI RAYLEIGH PER I CONTINUI

$$R(u(x)) \triangleq \frac{\int_D u K[u] dx}{\int_D u m[u] dx}$$

NB: dimensionalmente è una  $\omega^2$



$$I_u \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - G J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$$\theta(x, t) = u(x) \cdot \eta(t) = u(x) \sin(\omega t + \alpha)$$

1° C.B.

$$\bullet \theta(0, t) = u(0) \cdot \eta(t) = 0$$

2° C.B.

Prendiamo un disco e facciamo il D.C.L.

$$M(l, t) + I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(l, t) = G J_p \theta'(l, t) + I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(l, t) = G J_p u'(l) \sin(\omega t + \alpha) - \omega^2 I u(l) \sin(\omega t + \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \bullet G J_p u'(l) - I \omega^2 u(l) = 0$$

## CONCLUSIONI

Abbiamo trattato i seguenti tipi di sistemi:

- SISTEMI A PARAMETRI CONCENTRATI (o DISCRETI)

↳ n° finito di G.D.L.  
↳ sono governati da eq. diff. ORDINARIE

- SISTEMI A PARAMETRI DISTRIBUITI (o CONTINUI)

↳  $\infty$  G.D.L.  
↳ sono descritti da problemi al contorno, che consistono in eq. diff. alle DERIVATE PARZIALI con opportune C.B.

Lo studio delle VIBRAZIONI LIBERE di:

- SISTEMI DISCRETI porta ad un problema ALGEBRICO agli AUTOVALORI
- SISTEMI CONTINUI porta ad un problema agli AUTOVALORI DIFFERENZIALE

Il TEOREMA DI ESPANSIONE vale per:

- SISTEMI DISCRETI
- SISTEMI CONTINUI

Per calcolare la risposta sia di un SISTEMA DISCRETO che di un SISTEMA CONTINUO si eseguono gli stessi passi:

- 1) Si risolve il problema differenziale agli auto-valori
- 2) Si assume la risposta come serie (TEOREMA DI ESPANSIONE)
- 3) Si usa l'ortogonalità delle autofunzioni rispetto agli operatori di massa e rigidità, si ottiene un insieme di  $\infty$  eq. diff. note come EQUAZIONI MODALI

## DINAMICA DEI ROTORI

### VELOCITÀ CRITICA FLESSIONALE

È per definizione la velocità angolare applicata ad un ROTORE tale che la sua deformazione, di tipo esclusivamente flessionale, è massima.

ROTORE: albero rotante su cui sono caltate una serie di plette o dischi di turbina

↳ APPROSSIMAZIONE  $\rightarrow$  albero privo di massa  $\Rightarrow$  tutta l'inerzia è concentrata nel disco

Per poter fornire un pratico esempio si può considerare il:



Ora con qsta ipotesi

$$\begin{cases} x_c = x_c + E \cos(\omega t) \\ y_c = y_c + E \sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{dove } \psi = \omega t$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = \ddot{x}_c - E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{y}_c = \ddot{y}_c - E \omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x}_c + c \dot{x}_c + k x_c = m \omega^2 E \cos(\omega t) & (1) \\ m \ddot{y}_c + c \dot{y}_c + k y_c = m \omega^2 E \sin(\omega t) & (2) \end{cases}$$

Definisco una nuova coordinata, ma complessa

$$z = x + iy$$

$$\Rightarrow (1) + (2) \rightarrow m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = m \omega^2 E [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = m \omega^2 E e^{i \omega t}$$

EQ. MOTO

Ora il sistema ha sempre 2 G.D.L., ma l'eq. del moto può essere trattata come un S.D.O.F. con variabile complessa.

Chiamo la soluzione come:

$$z(t) = z_0 e^{i \omega t} \quad \underline{\text{A REGIME}}$$

Sostituendo

$$(k - m \omega^2 + i \omega c) z_0 = m \omega^2 E \rightarrow z_0 = \frac{m \omega^2 E}{k - m \omega^2 + i \omega c} \in \mathbb{C}$$

Ora dobbiamo mettere in evidenza la fase e quindi scriviamo:

$$z(t) = |z_0| e^{i(\omega t - \varphi)} \quad \rightarrow \text{che qui } \varphi \text{ che è un angolo}$$

$$\rho = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{ma} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_0| = \delta = E \frac{\rho^2}{\sqrt{(1 - \rho^2)^2 + (2 \zeta \rho)^2}} & (6) \\ \tan \varphi = \frac{2 \zeta \rho}{1 - \rho^2} \quad \text{dove} \quad \frac{c}{m} = 2 \zeta \omega_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \delta \cos(\omega t - \varphi) \\ y(t) = \delta \sin(\omega t - \varphi) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \delta^2 \rightarrow \text{è COST rispetto al tempo}$$

$$\tan \beta = \frac{y(t)}{x(t)} = \tan(\omega t - \varphi)$$

→ deriva rispetto a t

Dall'andamento di  $\delta$  tracciato in f. di  $\omega$   $\times$   $\neq$  valori di  $\gamma$  si osserva che  $\delta \uparrow$  all'  $\uparrow$  di  $\omega$  e raggiunge un max  $\times$  un valore di  $\omega$  che si ricava dalla seguente equazione:

$$\frac{d\delta}{d\omega} = 0$$

Sviluppati i calcoli si ottiene

$$\omega_s = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\gamma^2}}$$

con  $\gamma < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\omega_s =$  VELOCITA' CRITICA FLESSIONALE

IN CONCLUSIONE

Perché in generale  $\gamma^2 \ll 1 \Rightarrow$  possiamo affermare con buona stima:

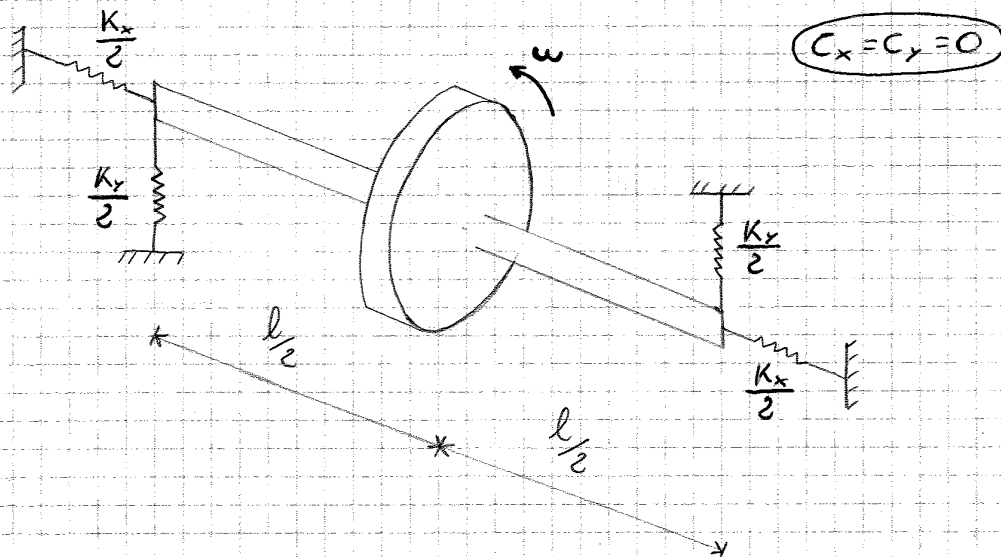
$$\omega_s = \omega_n$$

$\omega_n =$  PULSAZIONE NATURALE

ed è un risultato importantissimo che essendo  $\omega_n$  dipendente solo dalla rigidità del materiale e della sua massa, possiamo già in fase di progetto prescrivere la deformazione massima del rotore.

### SUPPORTI ELASTICI ANISOTROPI

IPOTESI: albero infinitamente rigido e supporti cedevoli



Assimili ANISOTROPI e ORTOTROPI

la rigidità non è  
= in tutte le direzioni

gli assi longitudinali sono una con-  
tinuazione e  $\perp$  tra loro

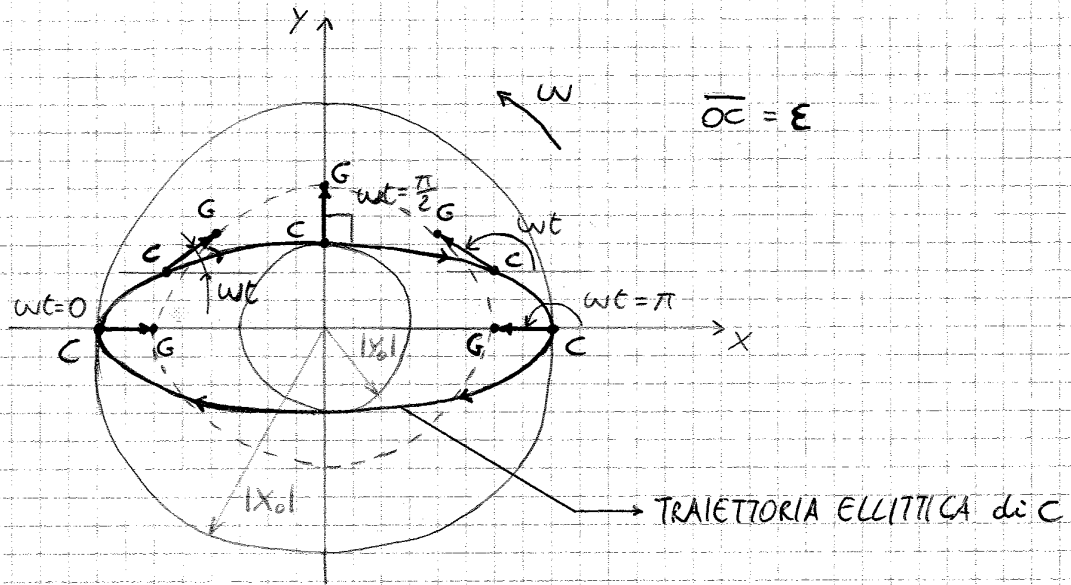
**VELOCITÀ CRITICA FLESSIONALE:** velocità in corrispondenza della quale una delle cause eccitatrici ha frequenza coincidente con una delle frequenze proprie del sistema.

Caso particolare

$$\underline{\omega_x < \omega < \omega_y}$$

$$\underline{X_0 < 0, Y_0 > 0}$$

$\omega$  = VEL. ANGOLARE DELL'ALBERO



NB:  $\omega$  sono istanti in cui G è interno e altri in cui è esterno alla traiettoria ellittica di C

x  $\omega t = 0$

$$\bullet X = -|X_0|, Y = 0$$

$$\bullet X_C = -|X_0| + \epsilon, Y_C = 0$$

Verifichiamo l'auto-centramento

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} X_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\epsilon \omega^2}{\omega_x^2 - \omega^2} = -\epsilon$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Y_0 = -\epsilon$$

$$\Rightarrow (X_0, Y_0) \xrightarrow{\text{tende}} (0, 0)$$

↳ il rotore si AUTOCENTRA

NB: in corrispondenza di  $\omega_x$  e  $\omega_y$  uno dei 2 semiassi diventa talmente + grande dell'altro a tal pt. che la traiettoria degenera in una retta.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  è una Triada BARICENTRICA e FISSA

$\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  è una Triada CENTRALE e ruota  $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{i} = \omega (\vec{i} \cdot \vec{i}_1) \vec{i}_1 + \omega (\vec{i} \cdot \vec{j}_1) \vec{j}_1 = \omega \cos \alpha \vec{i}_1 - \omega \sin \alpha \vec{j}_1$$

$$I_{x_1 x_1} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{y_1 y_1} \equiv I_{z_1 z_1} = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m s^2$$

R = RAGGIO

s = SPESSORE

Svolgendo i calcoli:

$$\vec{M}' = - (I_p - I_d) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{k}_1$$

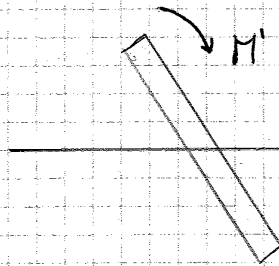
$I_p$  = MOMENTO POLARE

$I_d$  = MOMENTO DIAMETRALE

Facciamo 2 casi:

1) DISCO "SOTTILE"

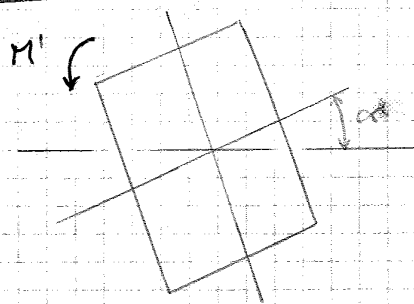
$$I_p > I_d$$



$M' \rightarrow$  è un MOMENTO RADDRIZZANTE, ma ci sono i vortici che si oppongono

2) DISCO "LUNGO"

$$I_p < I_d$$



$M'$  in qst caso è RIBALTANTE >  $k \vec{e}$  tende ad accentuare  $\alpha$

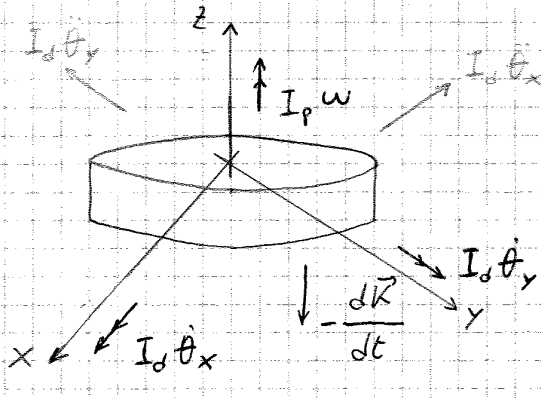
Se  $\alpha \ll 1$

$$\sin \alpha \approx \alpha ; \cos \alpha \approx 1$$

$$\Rightarrow \vec{M}' = - (I_p - I_d) \omega^2 \vec{\alpha} \quad \text{Risultato "Esempio 1"}$$

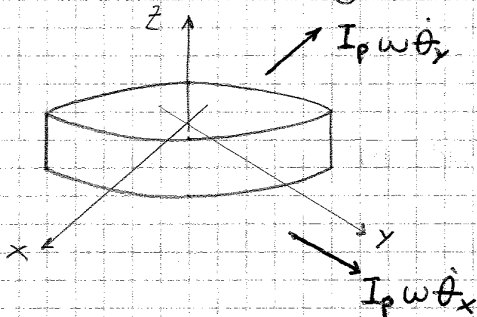
$$\{K_G\} = [I_G]\{\omega\}$$

$[I_G]$  = MATRICE DIAGONALE



NB: dobbiamo ~~o~~ aggiungere le COPPIE GIROSCOPICHE

↳ REGOLA MANO dx



IMP: " $\omega$  su  $\mathcal{R}$ "  $\rightarrow$   $\omega$  tende ad andare su  $\mathcal{R}$

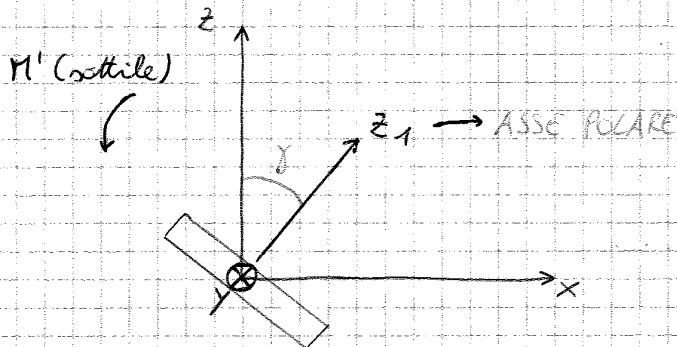
$$I_d \ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_y + K \theta_x = 0 \quad (1)$$

$$I_d \ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_x + K \theta_y = 0 \quad (2)$$

Adesso facciamo 2 "FOTO"

1) "FOTO" per  $\omega t = 0$

$$\theta_x = \theta_y = 0$$



$\gamma$  = SQUILIBRIO

risolvi l'eq.

• OMOGENEA ASSOCIATA

$$\gamma = 0$$

$$\theta = \theta_0 e^{\lambda t}$$

$$I_d \lambda^2 - I_p \omega \lambda + K = 0$$

devo impostare una soluzione generica dell'eq.  $\theta = \theta_0 e^{i\lambda t}$

$$-I_d \lambda^2 + I_p \omega \lambda + K = 0$$

$$I_d \lambda^2 - I_p \omega \lambda - K = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{I_p \omega \pm \sqrt{(I_p \omega)^2 + 4 K I_d}}{2 I_d} \in \mathbb{R}$$

$$\theta = \theta_{1,0} e^{i\lambda_1 t} + \theta_{2,0} e^{i\lambda_2 t} \quad \text{il sistema è STABILE}$$

↳ dove  $\lambda = i\lambda_{1,2}$

$$\lambda_1 = \frac{I_p \omega + \sqrt{\dots}}{2 I_d} > 0 \rightarrow \text{rappresenta MOTO PRECESSIONE AVANTI}$$

$$\lambda_2 = \frac{I_p \omega - \sqrt{\dots}}{2 I_d} < 0 \rightarrow \text{rappresenta MOTO PRECESSIONE INDIETRO}$$

Vediamo gli ASINTOTI

$$\omega \rightarrow \infty$$

$$\lambda_1 \approx \frac{I_p \omega + I_p \omega}{2 I_d} = \frac{I_p}{I_d} \omega \quad \text{ASINTOTO OBLIQUO}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{I_p \omega - I_p \omega}{2 I_d} = 0 \quad \text{ASINTOTO ORIZZONTALE}$$

• INTEGRALE PARTICOLARE

Lo cerco come una fz.  $\theta = \bar{\theta} e^{i\omega t}$  → solo x che ho finito le "θ"

↳ alla fine otterremo:

$$\bar{\theta} = i \frac{\gamma \omega^2 (I_d - I_p)}{K - \omega^2 (I_d - I_p)} \in \mathbb{C}$$

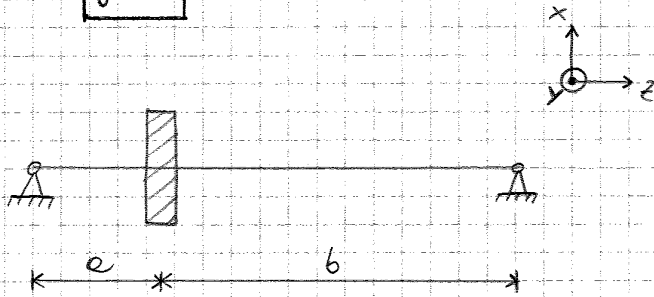
Vediamo gli ASINTOTI

$$\omega \rightarrow \infty$$

$$\bar{\theta} = -i\gamma \quad \text{dove} \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}_x + i\bar{\theta}_y \Rightarrow \bar{\theta}_y = -\gamma$$

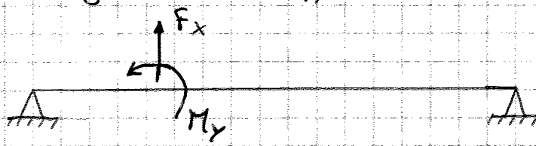
SQUILIBRIO STATICO e DINAMICO

- $\epsilon \neq 0$  STATICO
- $\gamma \neq 0$  DINAMICO



NB: ROTORE non montato in  
 mezz'aria  $\rightarrow$  qsta è la  
nostra causa scatenante

Immaginiamo di applicare al posto del ROTORE una  $F_x$  ed una  $M_y$



$F_x$  = FORZA CONCENTRATA

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow$  MATRICE RIGIDEZZA

$\alpha, \beta, \delta$  dipendono:

- dalle distanze  $a$  e  $b$
- dai VINCOLI
- dal materiale della trave
- dai MOMENTI INERZIALI

Al che succede è che in mezz'aria  $\beta = 0 \Rightarrow$  la MATRICE DI RIGIDEZZA sarà "DIAGONALE"  $\Rightarrow$  le risposte a "SQUILIBRIO STATICO e DINAMICO" risulteranno DISACCOPIATE

Scriviamo direttamente l'eq. del moto

$$z = x + iy \quad \theta = \theta_x + i\theta_y$$

$$m\ddot{z} + \alpha z - i\beta\theta = m\omega^2 E e^{i\omega t} \quad (1)$$

$$I_s \ddot{\theta} - i I_p \omega \dot{\theta} + i\beta z + \delta \theta = i (I_s - I_p) \omega^2 \gamma e^{i(\omega t - t_1)} \quad (2)$$

$$F_{R_{XY}} = F_{R_{XY}} e^{i\omega t}$$

$$j = z e^{-i\omega t} \rightarrow j = (z - i\omega z) e^{-i\omega t}$$

$$F_{R_{XY}} = -C_r (z - i\omega z) e^{-i\omega t} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\hookrightarrow \boxed{F_{R_{XY}} = -C_r (z - i\omega z)}$$

Se sommo opta alla (1) + (2) ottengo

$$\cancel{m\ddot{z}} + (C_m + C_r)\dot{z} + (K - i\omega C_r)z = \cancel{m\omega^2 z} e^{i\omega t}$$

$\hookrightarrow$  ROTORE DI JEFFCOTT con SM. ZIMENTO ROTANTE

• Vediamo la STABILITÀ

Si parte dall'omogeneità omogenea:

$$m\ddot{z} + (C_m + C_r)\dot{z} + (K - i\omega C_r)z = 0 \quad \text{EQ. CARATTERISTICA}$$

Commo 3 CASI:

- 1) CALCOLO ESPlicito ZERI ( $\Leftrightarrow$  grado polinomio  $\leq 4$ )
- 2) ROUTH-HURWITZ (si applica solo ai coefficienti)
- 3) METODO SEMPLICE

$$\hookrightarrow \boxed{\operatorname{Re}(s) = 0} \quad \Delta = \text{ZERI o POLI}$$

Cerco la soluzione nella forma

$$z = z_0 e^{st} \rightarrow \text{significata finno } z = x + iy$$

Se

- $\operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow$  INSTABILE
- $\operatorname{Re}(s) < 0 \Rightarrow$  STABILE
- $\operatorname{Re}(s) = 0 \Rightarrow$  INSTABILITÀ "INCIPIENTE"

$\hookrightarrow$  è un "transitorio" tra le 2 stabilities di prima

Cerco

$$\Delta = i\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -m\lambda^2 + i\lambda(C_m + C_r) + K - i\omega C_r = 0 + i0$$

$$\operatorname{Re} = 0 \begin{cases} -m\lambda^2 + K = 0 \\ \lambda(C_m + C_r) - \omega C_r = 0 \end{cases}$$



$$z = z_0 e^{\gamma t} = x + iy$$

suppongo  $z_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} z(0) = z_0 = x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$z = z_0 e^{\gamma_{REALE} t} e^{i \gamma_{IMM} t} = z_0 e^{\gamma_{RE} t} [\cos(\gamma_{IMM} t) + i \sin(\gamma_{IMM} t)]$$

Assendo assunto  $z_0 \in \mathbb{R}$  posso scrivere

$$\begin{cases} x = \text{Re}(z) = z_0 e^{\gamma_{RE} t} \cos(\gamma_{IMM} t) \\ y = \text{Im}(z) = z_0 e^{\gamma_{RE} t} \sin(\gamma_{IMM} t) \end{cases}$$

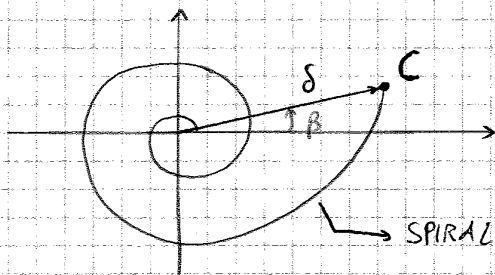
$$\Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{y}{x} = \text{tg}(\gamma_{IMM} t) \quad \beta = \text{ANGOLO PRESSIONE}$$

$$\begin{cases} \text{MOTO IN AVANTI} \rightarrow \gamma_{IMM} > 0 \\ \text{MOTO ALL'INDIETRO} \rightarrow \gamma_{IMM} < 0 \end{cases}$$

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2} = z_0 e^{\gamma_{RE} t} \Rightarrow \delta = z_0 e^{\gamma_{RE} / \gamma_{IMM} \cdot \beta}$$

EQ. SPIRALE LOGARITMICA  
(coordinate POLARI)

$\hookrightarrow$  peso a caso



$\hookrightarrow$  il "peso"  $\uparrow$

• Vediamo il comportamento libero

Rimetto la FORZANTE a 0

$$= E m \omega^2 e^{i \omega t} \quad (3)$$

cerchiamo una soluzione del tipo

$$z = z_0 e^{i \omega t}$$

sostituendola nell'eq. del moto (3) ottengo

$$z_0 [-m \omega^2 + i (C_m + C_r) \omega + k - i \omega C_r] = m \omega^2 E$$

Rimane:

$$\begin{cases} |z_0| = \delta = \frac{m \omega^2 E}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + (C_m \omega)^2}} \\ \text{tg } \varphi = \frac{\omega C_m}{k - m \omega^2} \end{cases}$$

NB: esiste in JEFF. "CLASSICO"

#### 4 Oscillazioni forzate

L'asta rappresentata in figura, di lunghezza  $(a+b)$  e massa  $m$  uniformemente distribuita, è in posizione orizzontale e può ruotare intorno alla cerniera  $O$ . In  $A$  è collegata una molla di rigidità  $k$  e in  $B$  è collegato uno smorzatore con costante di smorzamento  $\beta$ .

In  $A$  è applicata una forza verticale  $F = F_0 \sin(\Omega t)$ .

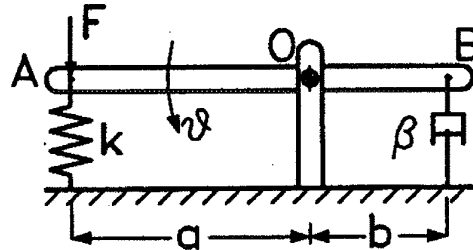
Disegnare il diagramma di corpo libero dell'asta; determinare l'equazione delle piccole oscillazioni che compie l'asta intorno ad  $O$  e la risposta del sistema a regime (ampiezza  $\theta_0$  e ritardo di fase  $\varphi$ ).

Dati:  $a = 1.2 \text{ m}$ ,  $b = 0.8 \text{ m}$ ;  $m = 80 \text{ kg}$ ;  $k = 50 \text{ kN/m}$ ;

$\beta = 2291 \text{ Ns/m}$ ;  $F_0 = 200 \text{ N}$ ,  $f = 13 \text{ Hz}$  (ampiezza e frequenza della forzante).

$$[I_O \ddot{\vartheta} + b^2 \beta \dot{\vartheta} + ka^2 \vartheta = aF_0 \sin(\Omega t);$$

$$\vartheta_0 = 0.00137 \text{ rad}; \varphi = 136.73^\circ]$$



#### 5 Oscillazioni forzate

L'asta rappresentata in figura, di lunghezza  $(a+b)$  e massa  $m$  uniformemente distribuita, è in posizione orizzontale e può ruotare intorno alla cerniera  $O$ . In  $A$  è collegata una molla di rigidità  $k$  e in  $B$  è collegato uno smorzatore con costante di smorzamento  $\beta$ . All'estremità libera della molla è imposto un moto verticale  $x = x_0 \sin(\Omega t)$ .

Disegnare il diagramma di corpo libero dell'asta; determinare l'equazione delle piccole oscillazioni che compie l'asta intorno ad  $O$  e la risposta del sistema a regime (ampiezza  $\theta_0$  e ritardo di fase  $\varphi$ ).

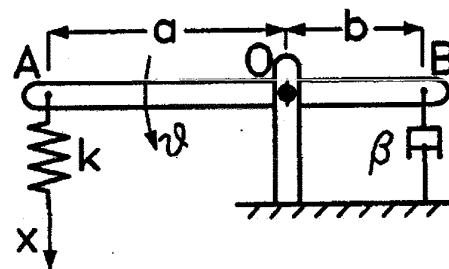
Dati:

$a = 1.2 \text{ m}$ ,  $b = 0.8 \text{ m}$ ;  $m = 80 \text{ kg}$ ;  $k = 50 \text{ kN/m}$ ;  $\beta = 2291 \text{ Ns/m}$ ;

$x_0 = 10 \text{ mm}$ ,  $f = 7 \text{ Hz}$ .

$$[I_O \ddot{\vartheta} + b^2 \beta \dot{\vartheta} + ka^2 \vartheta = kax_0 \sin(\Omega t);$$

$$\vartheta_0 = 0.0091 \text{ rad}; \varphi = 77.56^\circ]$$



#### 6 Integrale di convoluzione

Assegnato un sistema ad un grado di libertà di massa  $m$  e rigidità  $k$  non smorzato, si calcoli la risposta alla forzante  $f(t) = F_0 \sin(\omega_n t) \cdot u(t)$  con condizioni iniziali nulle e  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . A tale scopo si applichi l'integrale di convoluzione e si confronti la soluzione con quella ottenuta applicando un metodo alternativo.  $u(t)$  è la funzione gradino unitario.

$$\left[ x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \left( -\frac{1}{2} t \cos(\omega_n t) + \frac{1}{2\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \cdot u(t) \right]$$

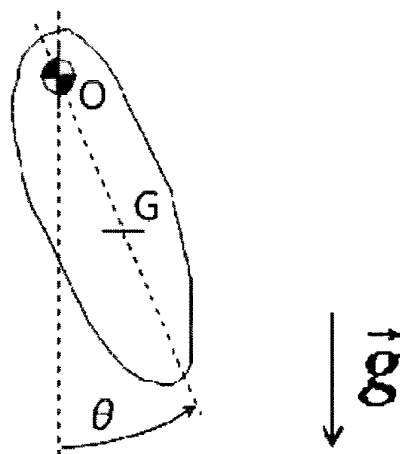
**6bis** Per lo stesso sistema si calcoli con l'integrale di convoluzione la risposta alla forzante

$$f(t) = F_0 \sin(\omega t) \cdot u(t): \quad \left[ x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \cdot u(t) \right]$$

## 8 Pendolo composto

E' assegnato un pendolo fisico di cui si conosce la massa complessiva  $m$ , il momento di inerzia baricentrico  $I_G$  e la distanza tra il baricentro e la cerniera  $OG = l$ . Si assuma come coordinata del moto l'angolo  $\vartheta$  formato tra la retta congiungente il baricentro  $G$  e la cerniera  $O$  e la retta verticale, come illustrato nella figura. Si richiede di svolgere i seguenti punti:

- disegnare il diagramma di corpo libero del pendolo
- ricavare l'equazione del moto nella coordinata  $\vartheta$
- individuare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità
- linearizzare l'equazione nell'intorno del punto di equilibrio stabile e calcolare la pulsazione naturale.



Ora dobbiamo far comparire i termini incogniti  $\omega_n, \zeta$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{Ka^2}{I_0}} = 49 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow Ka^2 = \omega_n^2 \cdot I_0$$

dati in percentuale  $\beta b^2 = \zeta^2 \sqrt{Ka^2 \cdot I_0} = \zeta^2 \sqrt{\omega_n^2 I_0 \cdot I_0}$   
 $\hookrightarrow \beta b^2 = \zeta^2 \omega_n I_0$

$$\Rightarrow I_0 \ddot{\theta} + 2\zeta \omega_n I_0 \dot{\theta} + \omega_n^2 I_0 \theta = F_0 \sin(\omega t) a$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} + 2\zeta \omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = \frac{F_0}{I_0} \sin(\omega t) a \quad \text{EQ. MOTO}$$

la soluzione particolare è del tipo

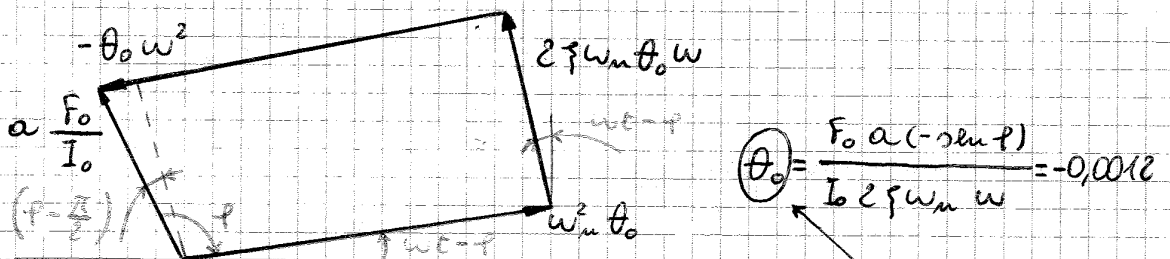
$$\boxed{X_p(t) = X_0 \sin(\omega t - \varphi)}$$

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \sin(\omega t - \varphi) \\ \dot{\theta} = \theta_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) \\ \ddot{\theta} = -\theta_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \rightarrow \omega = 81,7 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1,67 > 1 \Rightarrow \varphi > 90^\circ \quad \text{Se } \frac{\omega}{\omega_n} < 1 \Rightarrow \varphi < 90^\circ$$

$$\Rightarrow -\theta_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + 2\zeta \omega_n \theta_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) + \omega_n^2 \theta_0 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{I_0} \sin(\omega t) a$$

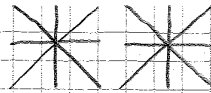


$$\frac{F_0}{I_0} a \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 2\zeta \omega_n \theta_0 \omega \rightarrow \frac{F_0}{I_0} a (-\sin \varphi) = 2\zeta \omega_n \theta_0 \omega$$

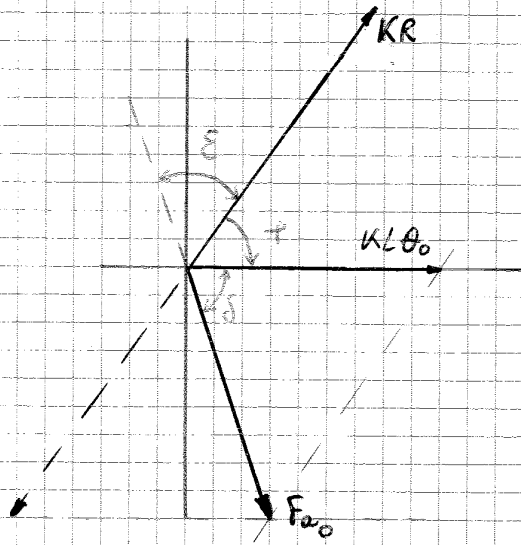
$$\frac{F_0}{I_0} a \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\theta_0 \omega^2 + \omega_n^2 \theta_0 \rightarrow \frac{F_0}{I_0} a \cos \varphi = -\theta_0 \omega^2 + \omega_n^2 \theta_0$$

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta \omega_n \theta_0 \omega}{-\theta_0 (\omega^2 - \omega_n^2)} \Rightarrow \varphi = 138^\circ$$

Forza applicata all'asta (settori costanti)



$$F_a = KX_o - KX_c = KL\theta - KR \sin(\omega t) = KL\theta_o \sin(\omega t - \varphi) - KR \sin(\omega t)$$



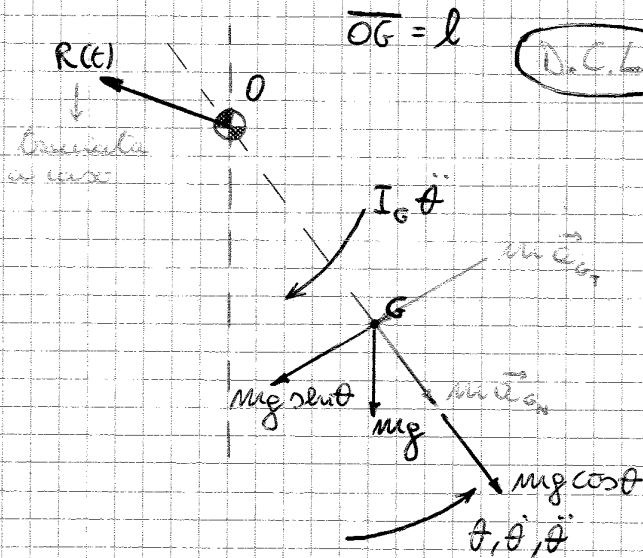
TEOREMA DEL COSENO (o di CARNOT)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$F_{a_o} = \sqrt{L^2 \theta_o^2 + R^2 - 2L\theta_o R \cos \varphi} = 13'200 \text{ N}$$

$$F_{manovella} = KX_c - KX_o$$

8) Pendolo composto



D.C.L.

NOTE: CIRCOLO UNIFORME ACC.

$$\alpha = \omega \dot{\theta}$$

$$\vec{a}_c = \omega^2 R$$

$$a_r = \alpha \cdot R$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_{c_r} + \vec{a}_{c_n} = \ddot{\theta} l + \dot{\theta}^2 l$$

$$0) I_G \ddot{\theta} + m \vec{a}_{c_r} l + mg l \sin \theta = 0$$

$$(I_G + m l^2) \ddot{\theta} + mg l \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I_o \ddot{\theta} + mg l \sin \theta = 0} \quad \text{EQ. MOTO}$$

• caso  $\theta_e = \pi$

$$(3) \ddot{\theta} = A \cdot (-1) \cdot (\theta - \pi) \rightarrow \ddot{\theta} - \frac{mgl}{I_0} \theta = -\pi \cdot \frac{mgl}{I_0}$$

essendo una costante  
è un GRADINO

Sol. PARTICOLARE

$$\theta_p = \pi \quad \theta = \text{cost} \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

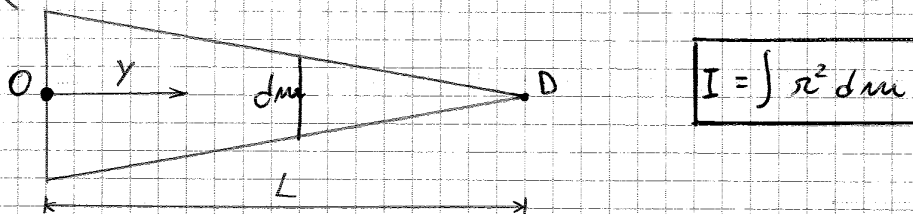
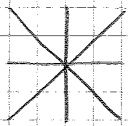
Sol. OMOGENEA

$$\theta = A e^{st}$$

$$s^2 - \frac{mgl}{I_0} = 0 \quad s_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{mgl}{I_0}}$$

$$x(t) = A_1 e^{+\sqrt{mgl/I_0} t} + A_2 e^{-\sqrt{mgl/I_0} t} + \pi$$

↳ Sol. COMPLETAMENTE INSTABILE che opta legge dice che +  
passa il tempo  $t$  e + l'angolo  $\theta \uparrow$ , il che non è  
sfavorevole  $\Rightarrow$  INSTABILE



$$I_0 = \int_m y^2 dm = \int_0^L y^2 \mu dy = \int_0^L y^2 \mu_0 \left(\frac{1-y}{L}\right) dy = \frac{1}{12} \mu_0 L^3$$

$$\rightarrow I_0 = 1,042 \text{ Kg m}^2$$

concludiamo una SOLUZIONE del tipo:  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t - \varphi)$

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \sin(\omega t - \varphi) \\ \dot{\theta} = \theta_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) \\ \ddot{\theta} = -\theta_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -I_0 \theta_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + CL^2 \theta_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) + K \theta_0 \sin(\omega t - \varphi) = KLR \sin(\omega t)$$



### 6) Integrale di convoluzione

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad \begin{array}{l} \text{INTEGRALE} \\ \text{DI} \\ \text{CONVOLUZIONE} \end{array}$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_m} \sin(\omega_m t) \cdot e^{-\gamma\omega_m t} \quad \begin{array}{l} \text{RISPOSTA} \\ \text{ALL'IMPULSO} \end{array}$$

↳ NB: poiché il sistema è NON SMORZATO non c'è il termine  $e^{-\gamma\omega_m t}$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t f_0 \sin(\omega\tau) \frac{1}{m\omega_m} \sin(\omega_m(t-\tau)) d\tau =$$

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ 2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \end{array}$$

$$= \frac{f_0}{m\omega_m} \int_0^t \sin(\omega\tau) \sin(\omega_m(t-\tau)) d\tau = \frac{f_0}{2m\omega_m} \int_0^t [\cos(\omega\tau - \omega_m t + \omega_m \tau) - \cos(\omega\tau + \omega_m t - \omega_m \tau)] d\tau$$

$\omega = \omega_m$

$$x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_m} \int_0^t [\cos(2\omega_m\tau - \omega_m t) - \cos(\omega_m t)] d\tau$$

$$x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_m} \left[ \frac{1}{2\omega_m} \sin(2\omega_m\tau - \omega_m t) - \cos(\omega_m t)\tau \right]_0^t =$$

$$= \frac{f_0}{2m\omega_m} \left[ \frac{1}{2\omega_m} (\sin(\omega_m t) - \sin(-\omega_m t)) - \cos(\omega_m t)t \right]$$

$\sin(-x) = -\sin(x) \Rightarrow -[-\sin(\omega_m t)]$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_m} \left[ \frac{1}{2\omega_m} 2\sin(\omega_m t) - t\cos(\omega_m t) \right]$$

Dati:

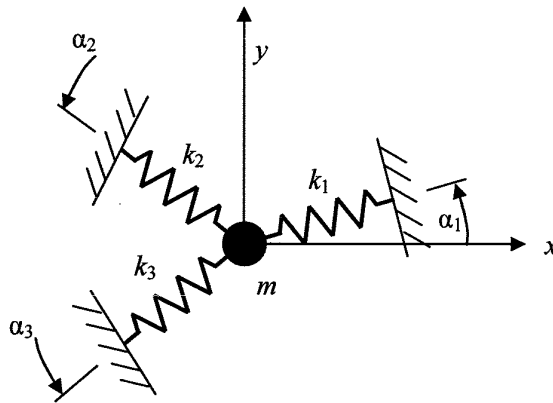
$$OA = l = 0.5 \text{ m}$$

$$m_1 = 5 \text{ kg}; m_2 = 10 \text{ kg};$$

$$k_1 = 2 \text{ N/m}; k_2 = 4 \text{ N/m};$$

$$\left[ \begin{array}{l} \omega_1 = 0.469 \text{ rad/s}; \omega_2 = 1.476 \text{ rad/s}; \\ [\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.45 & -2.45 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

### 3 Sistema a due gradi di libertà



Si consideri il sistema a due gradi di libertà rappresentato nella figura. Le tre molle giacciono nello stesso piano e sono caratterizzate dalle costanti elastiche  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ . La massa  $m$  può muoversi nel medesimo piano  $xy$  e la posizione di equilibrio statico di ciascuna molla è individuata dall'angolo  $\alpha$  che il suo asse forma con l'asse  $x$

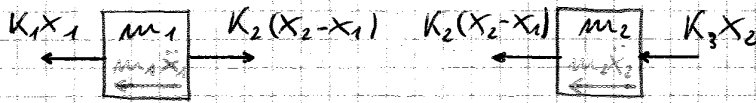
Scrivere le equazioni del moto per piccoli spostamenti, scegliendo come coordinate lagrangiane le componenti  $x$  e  $y$  dello spostamento della massa rispetto alla configurazione di equilibrio statico. A tal fine si supponga che le forze elastiche durante il moto abbiano la stessa inclinazione delle molle nella configurazione di equilibrio.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^3 k_i \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

VIBRAZIONI DI SISTEMI A MOLTI GRADI DI LIBERTÀ (1)

1) Sistemi a 2 G.D.L.

$m_1 = 5 \text{ kg}$     $m_2 = 10 \text{ kg}$     $K_1 = 2 \text{ N/m}$     $K_2 = 2 \text{ N/m}$     $K_3 = 4 \text{ N/m}$



Sistema VIBRANTE, NON SMORZATO, NON FORZATO

↓ del tipo  
 $[m] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$  EQ. MOTO

↓  $m^{-1}, K^{-1}$

$M_r \ddot{\eta}_r + K_r \eta_r = 0$

↓ ammette la soluzione armonica

$\eta_r(t) = A_r \cos(\omega_r t) + B_r \sin(\omega_r t)$

$A_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{x_0\}}{M_r}$

con

$B_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{\dot{x}_0\}}{\omega_r M_r}$

←  $m_1$     $m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 - K_2 (x_2 - x_1) = 0$

←  $m_2$     $m_2 \ddot{x}_2 + K_3 x_2 + K_2 (x_2 - x_1) = 0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2+K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

è della forma  $[m] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$

$$([K] - \omega^2 [m]) \{x_0\} = \{0\}$$
 PROBLEMA AGLI AUTOVALORI (EVP)

$$\det([K] - \omega^2 [m]) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 4 - 5\omega^2 & -2 \\ -2 & 6 - 10\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow 5\omega^4 - 7\omega^2 + 2 = 0$$

$\omega_1^2 = \frac{2}{5} \left(\frac{\text{rad}}{s}\right)^2$   
 $\omega_2^2 = 1 \left(\frac{\text{rad}}{s}\right)^2$

$$\boxed{\begin{matrix} \diagdown & & / \\ K_R & & \\ / & & \diagdown \end{matrix}} = \text{diag}(K_R) = [\Psi]^T [K] [\Psi]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15/2 \end{bmatrix}$$

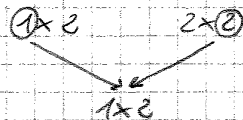
$6 = K_1$  RIGIDEZZA MODALE

$15/2 = K_2$  RIGIDEZZA MODALE

•  $r=1$

$$\boxed{A_r = \frac{\{\Psi_r\}^T [M] \{X_0\}}{m_r}}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = a_1 \cdot 15 \Rightarrow a_1 = 0$$



$$\boxed{B_r = \frac{\{\Psi_r\}^T [M] \{V_0\}}{\omega_r m_r}}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = b_1 \cdot 15 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow b_1 = \sqrt{10}$$

•  $r=2$

Stesse procedure e tracce

$$a_2 = 0 ; b_2 = 0$$

IN CONCLUSIONE

Dalla TMD

$$\{X(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 + \sqrt{10} \sin(\sqrt{2/5} t) \\ 0 + 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \textcircled{X(t)} = \sqrt{10} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{5}} t\right) [1 \ 1]^T$$

CASO 2

Stesse procedure e tracce

$$a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = \frac{2}{3}; b_1 = b_2 = 0$$

$$\{X(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \cos(\sqrt{2/5} t) + 0 \\ \frac{2}{3} \cos(1 \cdot t) + 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \textcircled{X_1} = \frac{1}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{5}} t\right) + \frac{2}{3} \cos t$$

$$\textcircled{X_2} = \frac{1}{3} \cos\left(\sqrt{\frac{2}{5}} t\right) - \frac{1}{3} \cos t$$

$$([K] - \omega_1^2 [M]) \{\Psi_1\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 2K - 0,634 \frac{K}{I_1} I_1 & -K \\ -K & 2K - 2I_1 0,634 \frac{K}{I_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1,366 K & -K \\ -K & 0,732 K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1,366 K \Psi_{11} - K \Psi_{21} = 0 \\ -K \Psi_{11} + 0,732 K \Psi_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_{21} = 1,366 \Psi_{11} \end{cases}$$

$$\Psi_1 = \begin{Bmatrix} \Psi_{11} \\ -1,366 \Psi_{11} \end{Bmatrix} \text{ impiego } \Psi_{11} = 1 \Rightarrow \Psi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,366 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2K - I_1 2,366 \frac{K}{I_1} & -K \\ -K & 2K - 2I_1 2,366 \frac{K}{I_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

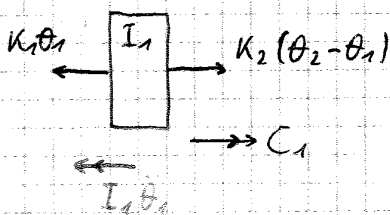
$$\begin{bmatrix} -0,366 K & -K \\ -K & -0,366 K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} -0,366 K \Psi_{11} - K \Psi_{21} = 0 \\ -K \Psi_{11} - 0,366 K \Psi_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Psi_{21} = -0,366 \Psi_{11}$$

$$\Psi_2 = \begin{Bmatrix} \Psi_{11} \\ -0,366 \Psi_{11} \end{Bmatrix} \text{ impiego } \Psi_{11} = 1 \Rightarrow \Psi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,366 \end{Bmatrix}$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,366 & -0,366 \end{bmatrix}$$

2)



$C_1 =$  COPPIA "ARMONICA"

$$\leftarrow I_1 \theta_1 + K_1 \theta_1 - K_2 (\theta_2 - \theta_1) = C_1$$

$$\frac{2C_0(K - I_1 \Omega^2)}{\det [K]} = \frac{K C_0}{\det [K]} \rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{K}{2I_1}}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \rightarrow f = \frac{\Omega}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f_{AR}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{2I_1}}$$

3) Risposta libera

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{N_0\} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{le due al teste}$$

Le celle a puzze

Sistema VIBRANTE, NON SORRATO, NON FORZATO del tipo:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

$$[M_{\Omega}] = \text{diag}(M_{\Omega}) = [Y]^T [M] [Y]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1,366 \\ 1 & -0,366 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 2I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,366 & -0,366 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,732I_1 & 0 \\ 0 & 1,268I_1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = 4,732 I_1 \quad \text{MASSA MODALE}$$

$$M_2 = 1,268 I_1 \quad \text{"}$$

•  $r=1$

$$\text{condiz. } \{X_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

$$\boxed{b_r = \frac{[Y_r]^T [M] \{N_0\}}{\omega_r M_r}}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1,366 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 2I_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = b_1 \cdot 4,732 I_1 \cdot 0,796 \sqrt{\frac{K}{I_1}}$$

$$\bullet r=2 \Rightarrow b_1 = 0,9907 \cdot \theta_0 \sqrt{\frac{I_1}{K}}$$

Stesse procedure sopra ma con  $\{Y_2\}$  e  $\omega_2$

$$\Rightarrow b_2 = 0,3221 \sqrt{\frac{I_1}{K}} \cdot \theta_0$$

IN CONCLUSIONE

Dalla TMD

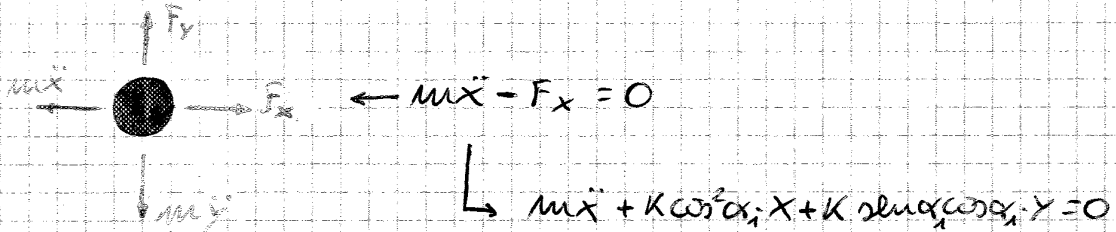
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,9907 \sin(\omega_1 t) + 0,3221 \sin(\omega_2 t) \\ 1,353 \sin(\omega_1 t) - 0,118 \sin(\omega_2 t) \end{Bmatrix} \theta_0 \sqrt{\frac{I_1}{K}}$$



$$\bullet \frac{\partial F_x}{\partial x}(0,0) = -K \cos^2 \alpha_i$$

$$\bullet \frac{\partial F_x}{\partial y}(0,0) = -K \sin \alpha_i \cos \alpha_i$$

$$\Rightarrow F_x(x,y) = -K \cos^2 \alpha_i x - K \sin \alpha_i \cos \alpha_i y$$



IPOTESI PICCOLI SPORSTAMENTI: coincide con la 1<sup>a</sup> EQ. MOTO nel caso di 1 sola molla. Per tenere conto di altre molle si considerano no i valori  $\alpha_i$  e si sommano i contributi.

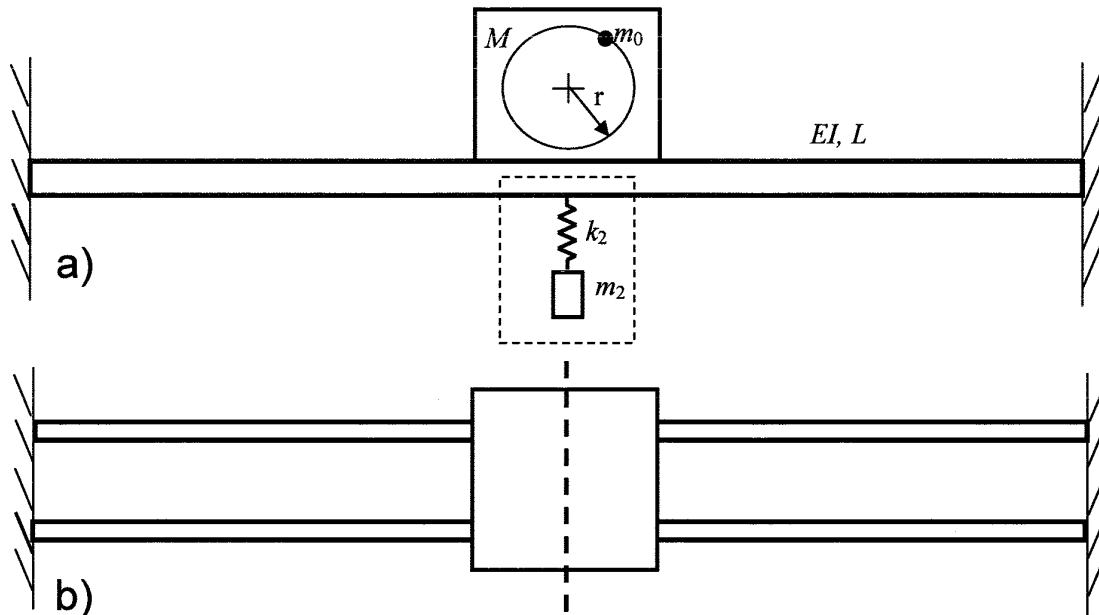
IN CONCLUSIONE

$$\leftarrow m\ddot{x} + K \cos^2 \alpha_i x + K \sin \alpha_i \cos \alpha_i y = 0$$

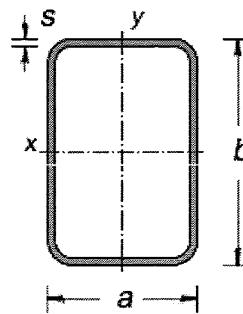
$$\downarrow m\ddot{y} + K \sin \alpha_i \cos \alpha_i x + K \sin^2 \alpha_i y = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^3 K_i \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## 2 Assorbitore dinamico



b x a mm	s mm	Sezione metallica cm <sup>2</sup>	Momento di inerzia	
			I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>
50 x 20	2,0	2,640	7,850	1,760
	3,0	3,840	10,90	2,330
60 x 20	2,0	3,040	12,60	2,090
	3,0	4,440	17,60	2,760
80 x 20	2,0	3,840	26,80	2,740
	3,0	5,640	38,10	3,640



Si supponga di dover montare rigidamente un motore elettrico di massa  $M = 100$  kg su due travi incastrate identiche (vista frontale a), di lunghezza  $L$  e con sezione scatolare come riportato nella figura. Le due travi sono disposte parallelamente l'una all'altra (vedi vista in pianta b) e dunque ciascuna è soggetta a metà del carico statico. Noto il modulo elastico delle travi  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> e la loro lunghezza  $L = 3$  m, si chiede di individuare nella tabella la sezione dello scatolato in modo che la freccia massima, dovuta al peso del motore situato in mezzzeria, sia inferiore a  $\delta_{\max} = 1$  mm. La rigidezza di ciascuna trave con le descritte condizioni di vincolo e di carico è data dall'espressione  $k_0 = 192EI/L^3$ . [sezione 80 x 20,  $s = 3$ ]

Per il sistema così costruito, supponendo le travi non inerti, si calcolino:

- la pulsazione propria delle oscillazioni flessionali nel piano verticale [ $\omega_0 = 106.67$  rad/s]
- la pulsazione propria delle oscillazioni flessionali nel piano orizzontale [ $\omega_{\text{orizz}} = 32.97$  rad/s]
- la pulsazione propria  $\omega_{\text{ass}}$  delle oscillazioni assiali [ $\omega_{\text{ass}} = 1777.2$  rad/s]
- la velocità di rotazione del motore per cui si verifica la risonanza flessionale [ $n_0 = 1018.7$  rpm]

Per consentire al sistema di lavorare esattamente alla velocità  $n_0$  (e solo a quella) si decide di progettare un assorbitore dinamico in modo da sintonizzarlo sulla pulsazione di risonanza flessionale del sistema principale. Conoscendo il valore dello squilibrio statico del motore, pari a  $m_0 \cdot r = 5$  kg·mm, si scelgano il valore della massa e della rigidezza del sistema secondario in modo che l'ampiezza di oscillazione della massa aggiunta alla velocità  $n_0$  sia inferiore a 1 cm.

[Una possibile soluzione è  $m_2 = 0.5$  kg e  $k_2 = 5689.6$  N/m]