



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 841

DATA: 25/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Antonellini

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale

Prof. Curà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FONDAMENTI di MECCANICA ^{01/10/2013}

STRUTTURALE

- Scritto: 2h e 30 min, con possibilità di consultare libri e appunti
- Avere scritto in libro, non la stampa +.
- l'orale pesa di +
- si può dare lo scritto nel 1° appello, nel 2°
" " " l'orale

interno 6930 nel DIMEAS (orario consulenza 15-16 h)

sono in squadra 1: esercitazioni in aula 6!
YES!

- Laboratorio di meccanica → SEJANNA (ricerimento)

TIPI di MODELLI

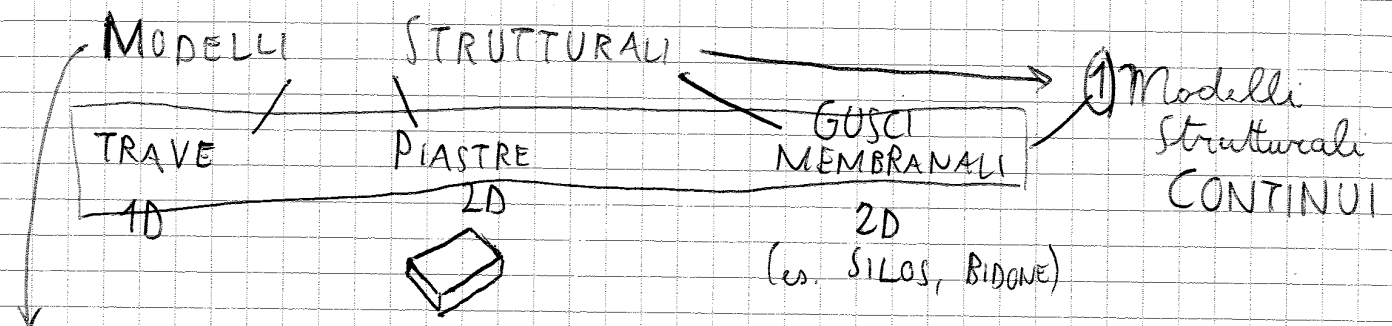
1) MODELLO di FORZA

2) MODELLO di VINCOLO

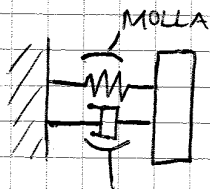
3) MODELLO STRUTTURALE → TRAVE 1D

↓
monodimensionale

Trave De Saint Venant



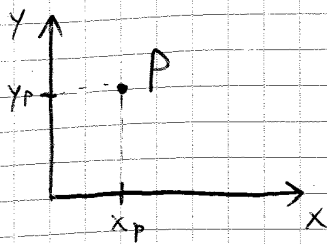
② SISTEMI a PARAMETRI CONCENTRATI



es) MATERASSO

GRADI di LIBERTÀ

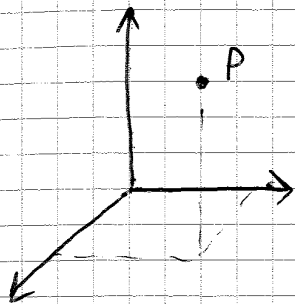
Il numero di direzioni in cui il corpo è libero di muoversi



2D (nel piano)

es) Punto Nave: dove si trova la nave sulla Terra (latitudine e longitudine)

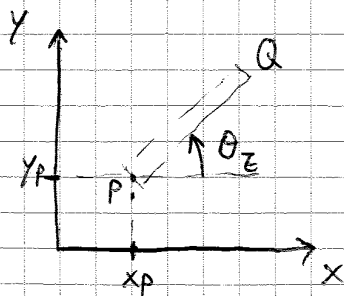
Abbiamo bisogno di definire $n=2$ coordinate



$n=3$

es) Aereo: latitudine, longitudine, quota

TRAVE



(2D)

$n=3$

coordinate:

$$\underbrace{x_p, y_p}_{\text{POSIZIONE}}, \underbrace{\theta_z}_{\text{ROTAZIONE}}$$

POSIZIONE

ROTAZIONE

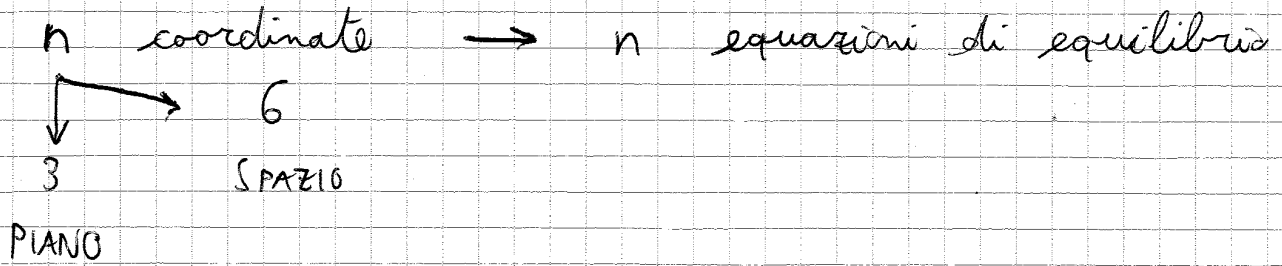
(3D)

$n=6$:

$$x_p, y_p, z_p$$

$$\theta_x, \theta_y, \theta_z$$

EQUAZ. di EQUILIBRIO

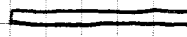


MODELLI di VINCOLO

Ragioniamo nel PIANO: 2D, $n=3$

1) INCASTRO

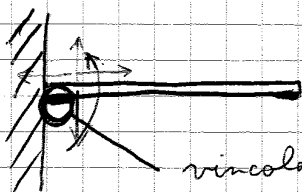
(SALDATURA, COLLA, CEMENTO)



$n=3$

TRAVE:

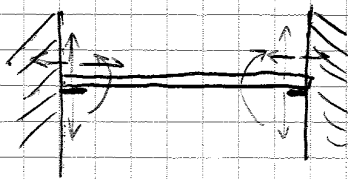
1 sistema rigido (quando isolato)



$m=3$

vincola la trasl. verticale, orizzontale e la rotazione

$$l = n - m = 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{SISTEMA ISOSTATICO}$$



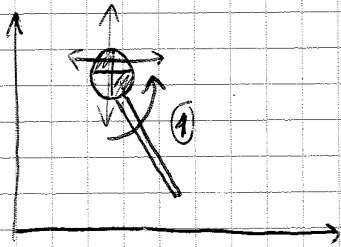
$n=3$

$m = 3 + 3 = 6$

$m > n$

IPERSTATICA (3 volte)

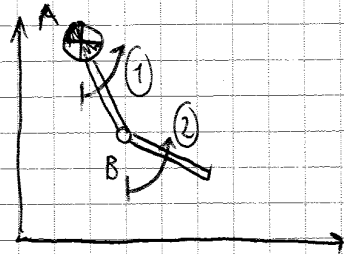
$$3 = 6 - 3 = m - n$$



$$n=3$$

$$m=2$$

$$n-m=l=1$$



A è fissa; B (interna) segue il movimento delle altre strutture

Essendo sistemi rigidi, B si muove in dipendenza da A

Qui i gradi di libertà sono i movimenti liberi e indipendenti {

$$n=3 \quad + \quad 3 = 6$$

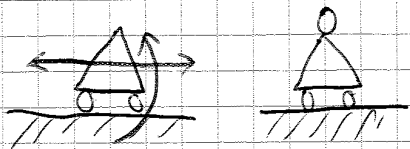
(A) (B)

$$l = n - m = 6 - 4 = 2$$

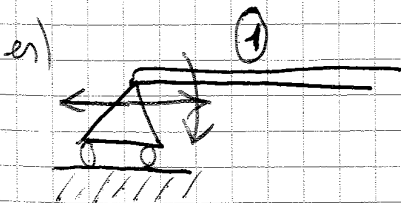
$$m = 2 \quad + \quad 2 = 4$$

(A) (B)

3) CARRELLO o APPOGGIO SEMPLICE



vincola solo al terreno;
lascia libera la rotazione
e la traslazione, ma impedisce
il sollevamento



$$n=3$$

$$m=1$$

$$l = n - m = 3 - 1 = 2$$

EQUAZIONI di EQUILIBRIO

03/10/2013

- $n = 3$ Equaz. di Equilibrio nel Piano
- $n = 6$ " " " " nello Spazio

$$n = m + l$$

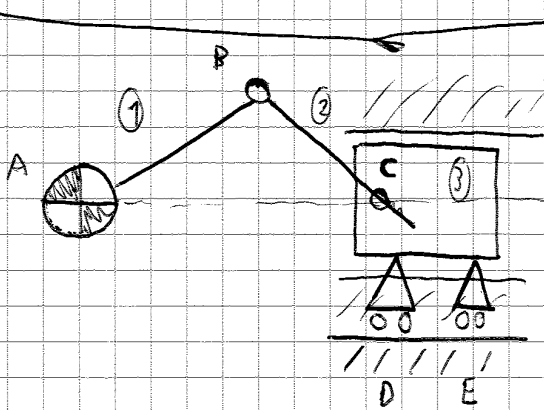
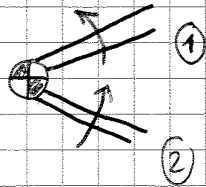
n coordinate libere
 m vincolate
 l

ECCEZIONE:

0 cerniera interna 2 bravi (corpi rigidi)

$$n > m + l$$

$$6 > 2 + 2$$



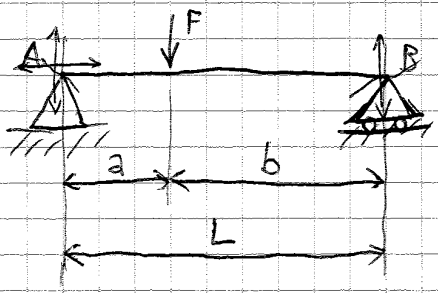
$$n = 3 \cdot 3 = 9$$

$$m = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$$

A B C D E

$$l = n - m = 9 - 8 = 1$$

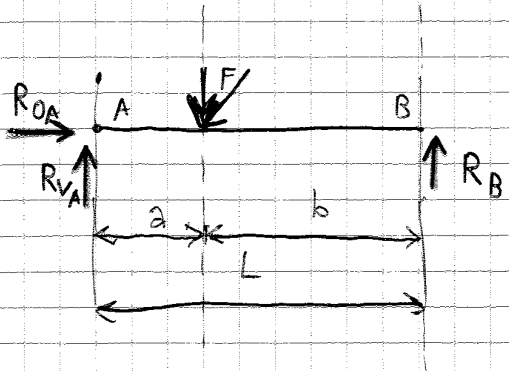
Esercizio 1 (Sistema ISOSTATICO)



$n = 3$

$m = 2 + 1$
A B

Stacca i vincoli e vado a scrivere le forze che i vincoli esercitano



Se il segno viene negativo è sbagliato, ma non cancelliamo se ci viene così, poi si compensa

$R_{A0}, R_{AV}, R_B = ?$

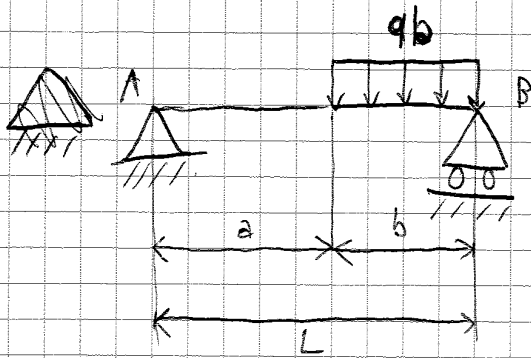
$\oplus \rightarrow R_{A0} = 0$

$\oplus \uparrow R_{AV} - F + R_B = 0 \Rightarrow R_{AV} = F - R_B = \frac{F \cdot b}{L}$

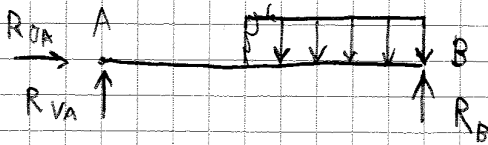
$\oplus \curvearrowright$ eq. di momento rispetto ad A: $-F \cdot a + R_B \cdot L = 0$

$R_B = \frac{F \cdot a}{L}$

Esercizio 3



Stacciamo i vincoli e mettiamo le reazioni vincolari



$$R_{0A} = 0$$

$$\oplus \uparrow \quad R_{VA} + R_B - qb = 0$$

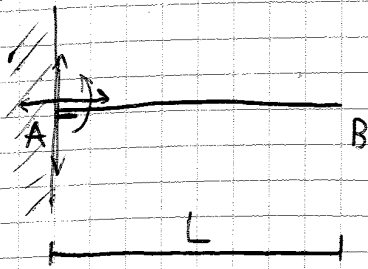
$$\oplus \curvearrowright \quad A: \quad R_B L - qb \left(a + \frac{b}{2} \right)$$

$$R_{VA} = \frac{qb^2}{2L}$$

$$R_B = \frac{qb}{L} \left(a + \frac{b}{2} \right)$$

Un altro tipo di TRAVE: Trave a MENSOLA (o a SBALZO)

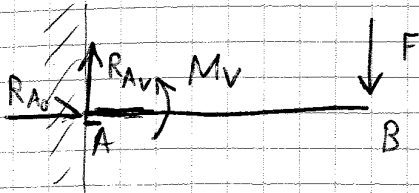
• *Esercizio 1)*



$$h=3 \quad m=3$$

$$h-m=l=0$$

Nella realtà ^{dal punto di vista dinamico} non esiste l'INCASTRO (VINCOLO) PERFETTO, non dovrebbe avere rigidità infinita

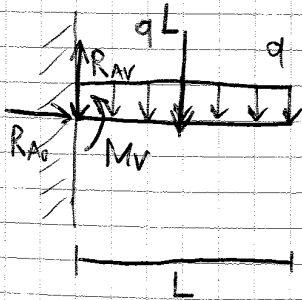


$$\oplus \rightarrow R_{A0} = 0$$

$$\oplus \uparrow R_{AV} - F = 0 \quad R_{AV} = F$$

$$A \curvearrowright -FL + M_V = 0 \quad M_V = FL$$

• *Esercizio 2)*



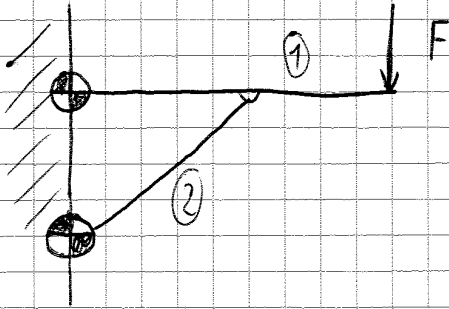
$$h=3 \quad m=3$$

$$h-m=l=0$$

$$\oplus \rightarrow R_{A0} = 0$$

$$\oplus \uparrow R_{AV} - qL = 0 \quad R_{AV} = qL$$

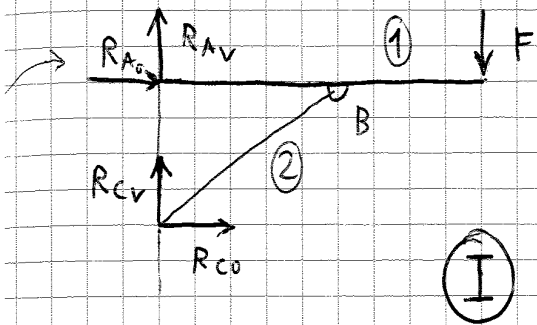
$$A \curvearrowright M_V - qL \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad M_V = \frac{qL^2}{2}$$



$$n = 3 + 3$$

$$m = 2 + 2 + 2$$

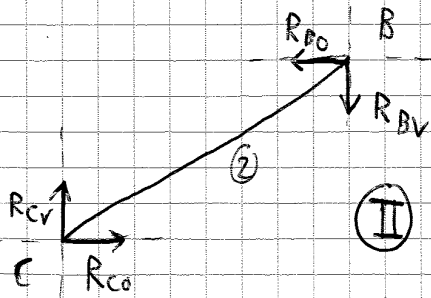
A B C



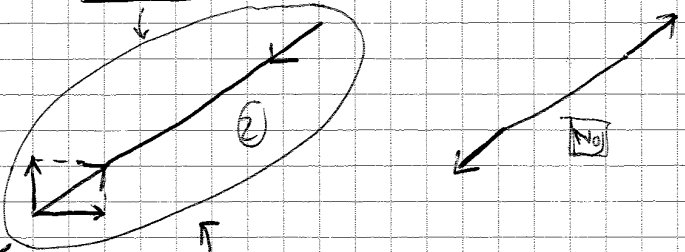
Avendo 4 incognite e 3 sole equazioni, dobbiamo scomodare i vincoli interni, "esplosando" il sistema

N.B. L'asta è una sottspecie di trave che ha la caratteristica di essere caricata solo agli estremi dalle reazioni vincolari, dunque ha delle cerniere

- "Esplosiamo" il SISTEMA (2)



0 tutto + e tutto - :



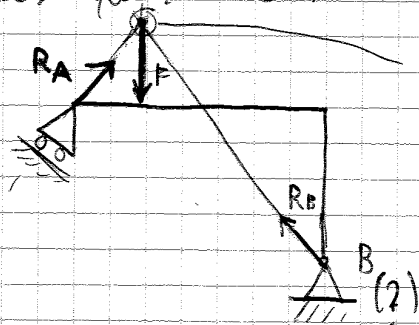
Quello che ho scritto nell'asta dobbiamo vedere il sistema (2) nella sua interezza

METODO delle 3 FORZE (da Esercitazione 1) 08/10/2013

Metodologia grafica (usata prima dell'avvento dei calcolatori)

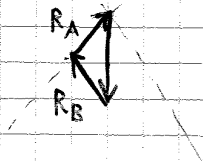
Riesco a calcolare tutte e 3 le forze se di una conosco modulo, direzione e verso e di un'altra solo la direzione

esempio: STRUTTURA PIANA caricata con una forza



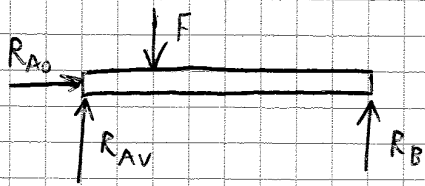
Il punto di incontro delle 3 rette d'azione
 ↓
 PUNTO di MOMENTO ZERO

Infine chiudo il triangolo delle forze



Si basa sulla somma dei momenti = a 0.

SISTEMA RIGIDO:



Abbiamo considerato solo le forze esterne.

Iniziamo ora ad analizzare le FORZE INTERNE

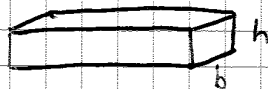
Andr'esse in N e N·m

Non ci interessano ancora ~~forze~~ esterne materiali e forma delle sezioni

SOLIDO di DESAINT VENANT (è un MODELLO)

Elemento strutturale che immaginiamo monodimensionale, nel senso che la sua lunghezza è 10 volte almeno maggiore del lato più lungo della sezione (l o del diametro nel caso del cerchio)

es)



- Nel piano, 2D: $n=3$ coordinate e $n=3$ FORZE INTERNE:
 • 1 verticale, 1 orizzontale, 1 di momento


- Nello spazio, 3D: $n=6$ " e $n=6$
 FORZE INTERNE: 3 di traslazione, 3 di momento

• 2D: $n=3$ (2 [N], 1 [N·m])

• 3D: $n=6$ (3 [N], 3 [N·m])

NB: Le FORZE INTERNE sono anche dette SFORZI o sollecitazioni

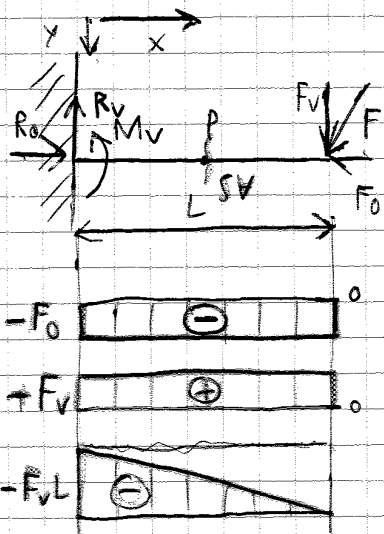
Nello SPAZIO

(-1 momento torcente 
 (-2 " i flettenti (attorno a z e a y))

(X CONVENZIONI)

Considero positivo un momento flettente che possa tendere le fibre inferiori della trave

es) trave a sbalzo con un carico inclinato al suo interno



$$\begin{cases} R_0 = F_0 \\ R_v = F_v \\ M_v = F_v L \end{cases}$$

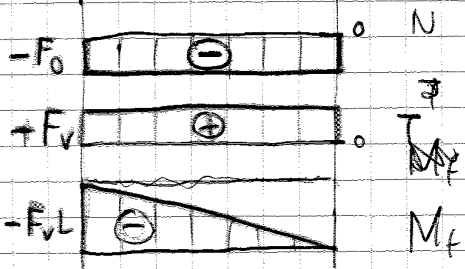
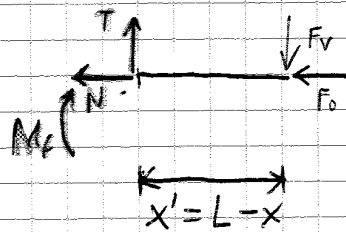
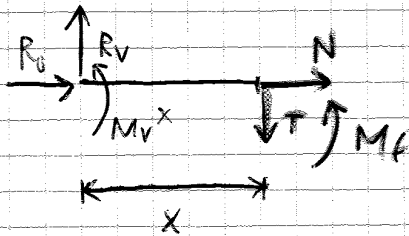


diagramma degli SFORZI
 deve essere in scala
 (es $F_0 = 10 \text{ N}$, 1 quadrato = 10 N)



$$N + R_0 = 0$$

$$\boxed{N = -R_0} \text{ (costante lungo la trave)}$$

\parallel
 $-F_0$

eventuale rottura \checkmark non dipende dalla struttura ma dal materiale

$N < 0$ vuol dire che è compressa per effetto dei carichi orizzontali

$N > 0$ TIRO
 $N < 0$ COMPRIMO

$$T - R_v = 0$$

$$\boxed{T = R_v = F_v}$$

tende a far scivolare i piani, ma non è associato a nessun fenomeno fisico

(P) (+) $M_f - R_v x + M_v = 0$

applicato nel punto di taglio

$$M_f = R_v \cdot x - M_v = R_v x - F_v L = \boxed{-F_v (L - x)}$$

(cioè il segno non ci dice niente) estremi

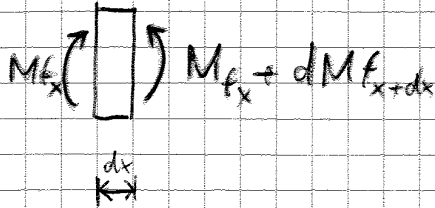


• Dimostreremo in seguito che

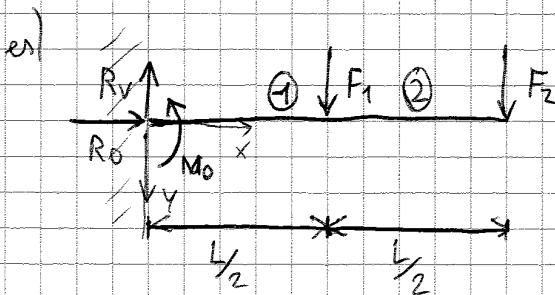
$$\boxed{\frac{dM_F}{dx} = T}$$

(non vale rispetto a dx' (la derivata di x' è infatti costante a quella di x) \rightarrow dovrei mettere un dx')

Coi carichi interni, ogni elemento deve essere in equilibrio



CAMPATA



$$R_0 = 0$$

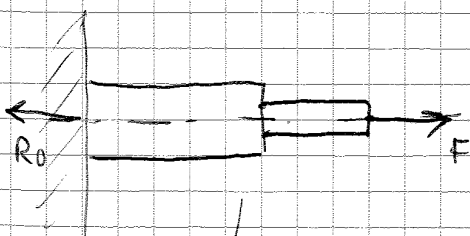
$$R_v = F_1 + F_2$$

$$M_v = F_1 \frac{L}{2} + F_2 L$$

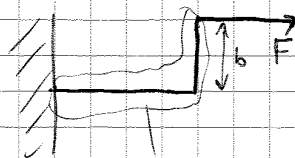
fino a F_1 , da $x=0$ a $x = \frac{L}{2}$, abbiamo lo stesso equilibrio

1^a campata: da $x=0$ a $x = \frac{L}{2} - dx$

2^a campata: da $x = \frac{L}{2} - dx$ a $x = L - dx$



Caso particolare



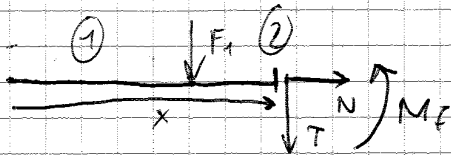
non cambia
l'equilibrio

unica campata

unica trave: 2 campate,
in esse cambiano condizioni
di equilibrio e geometria
(ed, in seguito, se cambia anche il materiale)

Le campate cambiano al cambiare dell'equilibrio

• Vediamo la 2^a campata



$$N = 0 = R_0$$

$$T - R_V + F_1 = 0$$

$$T = F_1 + F_2 - F_1$$

$$M_f + M_v + F_1 \left(x - \frac{L}{2}\right) - R_V x = 0$$

$$M_f = -M_v - F_1 \left(x - \frac{L}{2}\right) + R_V x$$

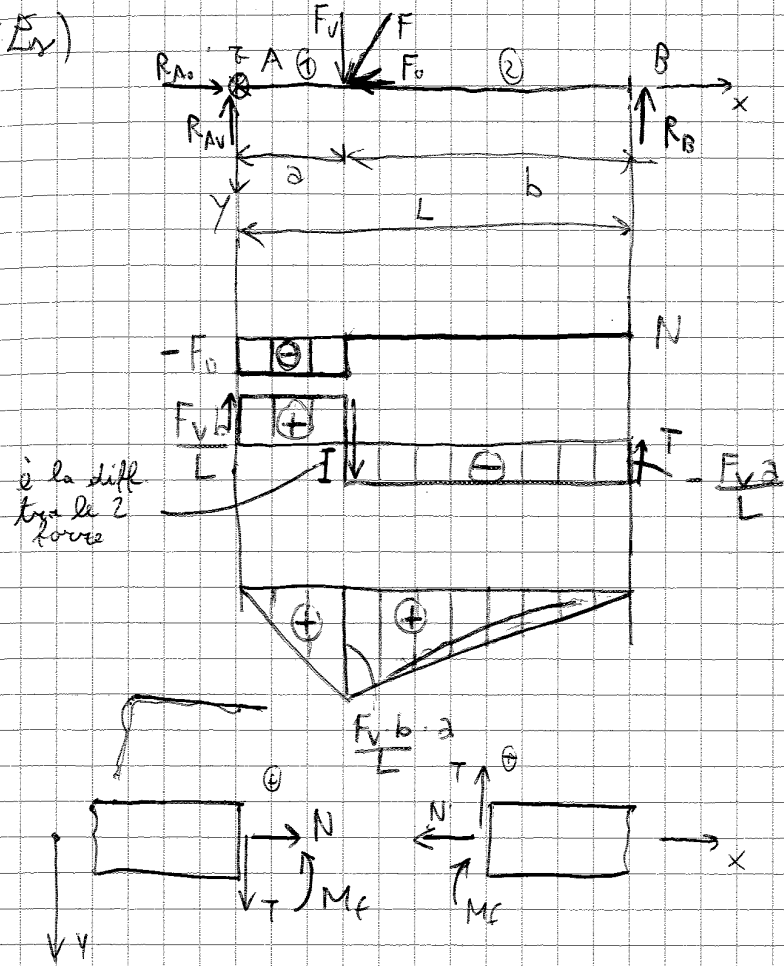
$$M_f = -\frac{F_1 L}{2} - F_2 L - F \left(x - \frac{L}{2}\right) + (F_1 + F_2) x \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{L}{2} \\ x = L \end{array} \right.$$

$$M_{f, x=\frac{L}{2}} = -\frac{F_1 L}{2} - F_2 L + F_1 \frac{L}{2} + F_2 \frac{L}{2} = -F_2 \frac{L}{2}$$

$$M_{f, x=L} = -\frac{F_2 L}{2} - F_2 L - F_1 \frac{L}{2} + F_1 L + F_2 L = 0$$

N.B.: Per vedere l'effetto di una forza sul momento, prima di tutto individuiamo il punto (taglio della sezione), poi vedere in quale ^{quella forza} senso ruotare la trave

17/10/2013



$$R_{A0} = F_0$$

$$R_{AV} = \frac{F_v b}{L}$$

$$R_B = \frac{F_v a}{L}$$

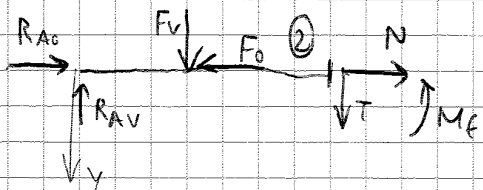
$$\frac{dM}{dx} = T$$

è la diff tra le 2 forze

$$\begin{aligned} \oplus \rightarrow N + R_{A0} &= 0 \Rightarrow N = -R_{A0} = -F_0 \\ \oplus \uparrow T - R_{AV} &= 0 \quad T = R_{AV} \\ \oplus \uparrow M_f - R_{AV} x &= 0 \Rightarrow M_f = R_{AV} x \end{aligned}$$

$x=0 \quad M_{f,x=0} = 0$
 $x=a \quad M_{f,x=a} = R_{AV} \cdot a$

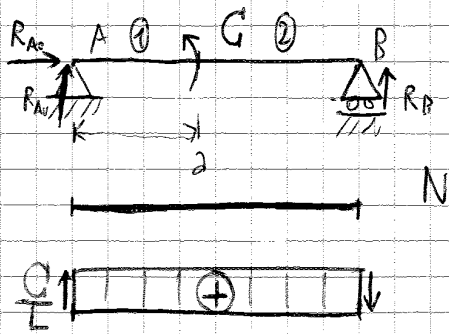
il momento
Agli estremi vedere valore 0 (x = braccio diventa infinitesimo)



$$\begin{aligned} \oplus \rightarrow N + R_{A0} - F_0 &= 0 \\ \oplus \downarrow T + F_v - R_{AV} &= 0 \\ T &= R_{AV} - F_v \\ T &= \frac{F_v b}{L} - F_v = -\frac{F_v a}{L} \end{aligned}$$

Le fibre non sono né tirate, né compresse nella 2ª campata (è sensato essendo il carrello a dx, che non fa reazione ovvio)

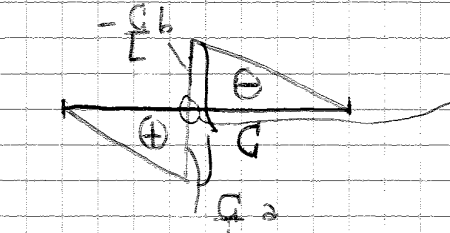
Es) Trave con Coppia Concentrata



$$R_{A0} = 0$$

$$R_{A1} = \frac{C}{L}$$

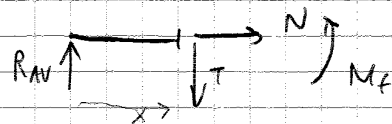
$$R_B = -\frac{C}{L}$$



discontinuità di TIPO SALTO

① $N=0$

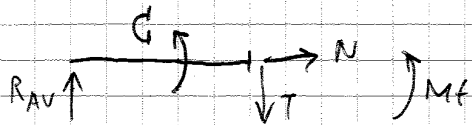
$$T = \frac{C}{L}$$



$$M_F = R_{A1} x = \frac{C}{L} x = \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases}$$

② $N=0$

$$T = R_{A1}$$



$$M_F + C - R_{A1} x = 0$$

$$M_F = \frac{C}{L} x - C = \begin{cases} x=a \\ x=L \end{cases}$$

$$M_{F_{x=a}} = \frac{C}{L} a - C = \frac{C(a-L)}{L} = -\frac{C}{L} \frac{L-a}{L}$$

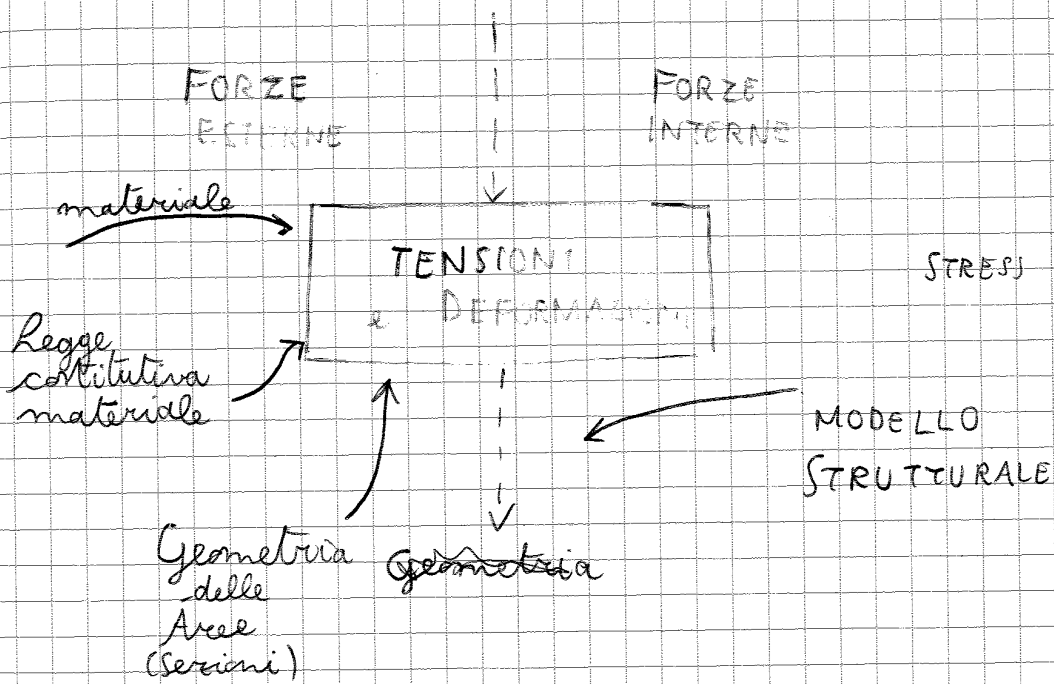
TENSIONI e DEFORMAZIONI

18/10/2013

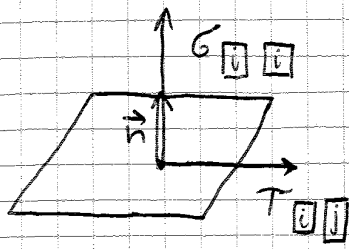
(STRESS)

D'ora in poi ci interesseranno anche materiali e forme delle sezioni

Andremo a calcolare il coefficiente di sicurezza nelle aste + tralicci



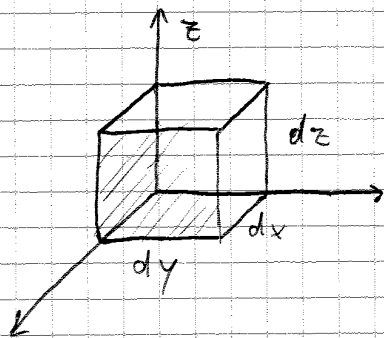
Andiamo ora a rappresentare le Tensioni



i indica la normale al piano;

- Il primo indice identifica la posizione del punto nello spazio
- Il secondo ci indica la direzione della Tensione

TENSORE: Elemento che ci esprime lo stato di (delle Tensioni) tensione in un punto dello spazio



$$dV = dx dy dz \quad \text{Volume infinitesimo}$$

Per determinare lo STATO di TENSIONE di un punto deve stabilire 6 incognite (con 6 equaz. di equilibrio)

Prendo dalla struttura il punto più caldo (è il più pericoloso) e lo vado ad analizzare separatamente in un piano cartesiano

Andiamo ora a vedere le 3 equazioni di equilibrio rispetto alla traslazione:

1) \vec{x} secondo il verso pos. di x

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dz dy - \sigma_{xx} dz dy +$$

parziale perché considero l'eventualità di un materiale anisotropo

$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz +$$

$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy +$$

$$+ \underbrace{F_x}_{\substack{\text{Forza di massa, la} \\ \text{consideriamo trascurabile}}} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz = 0$$

Con il medesimo procedimento, otteniamo le altre due equazioni, relative agli altri 2 assi:

2) \vec{y} (con $F_y = 0$)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

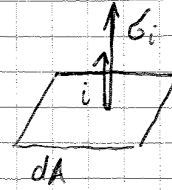
3) \vec{z} (con $F_z = 0$)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

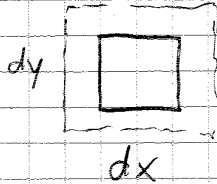
24/10/2013

$\sigma_{ij} \rightarrow \epsilon_i$ (unidimensionale)
 $\tau_{ij} \rightarrow \gamma_{ij}$
 SONO STRESS
 Generici

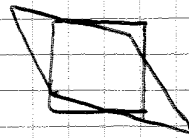
Ad ogni σ_i ,
 corrisponde una ϵ_i ,
 detta STRAIN
 (DEFORMAZIONE)



• ϵ non cambia
 la forma
 (allungo e accorco sempre
 nella direzione della tensione)



• DEFORMAZIONE
 ANGOLARE (γ_{ij})
 (SVERGOLAMENTO)



ϵ e γ sono deformazioni congruenti; non
 si sovrappongono

Le deformazioni sono per loro stessa natura INFINITESIME

DEFORMAZIONI < CONGRUENTI
 INFINITESIME

1) contributi di γ li andiamo ad analizzare separatamente

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{u_{BB'} - u_{O'O}}{dy} + \dots + \frac{v_{A'A} - v_{O'O}}{dx}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

LEGGI COSTITUTIVE del MATERIALE

Sono la relazione che intercorrono tra Tensioni e Deformazioni

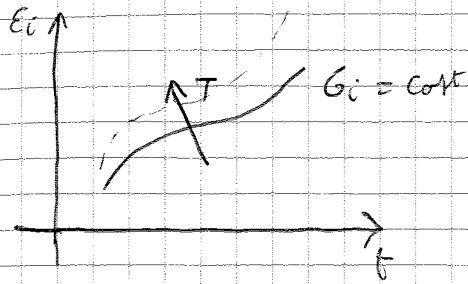
Abbiamo 3 regimi:

1) ELASTICO ← LINEARE → ci occupiamo di questo
NON LINEARE

2) PLASTICO ↘ NON LINEARE,
NON ELASTICO

3) VISCOSO — CREEP

3) Regime viscoso \rightarrow Creep : riguarda le turbine

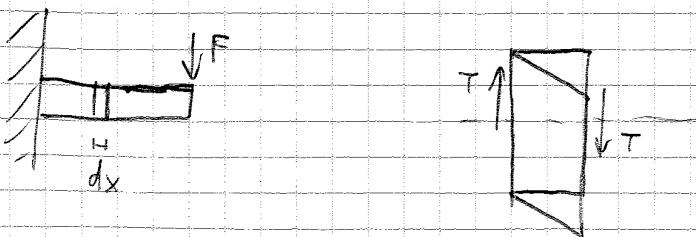


si deforma col tempo e la temperatura

Ritorniamo alla trave: col diagramma degli sforzi, vediamo le zone più caricate e stentate

SFORZO	G, T TENSIONE (STRESS)	DEFORMAZIONE ϵ, γ (STRAIN)	SPOST. FINITI (ALLUNGAMENTI/ROTAZIONI)
N	$G_x = \frac{N}{A}$	$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$	$\Delta L = \frac{N}{EA} \cdot L$
M_f	$G_x = \frac{M_f}{I_z} \cdot y$	$\epsilon_x = \frac{M_f}{EI_z} \cdot y$	$M_f = \frac{E}{R} \cdot I_z$
M_t	$T_{ij} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r$	$\gamma_{ij} = \frac{T}{G}$	$M_t = \frac{T}{r} \cdot I_p$
T	$T_{ij} = \frac{T \cdot S_z^*}{I_z \cdot corda}$	$\gamma_{ij} = x \frac{T}{G}$	$T = \frac{T \cdot I_z \cdot corda}{S_z^*}$

Ecco come la tensione come deforma la trave infinitesima



$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{N}{l^2} = \text{cost}$$

↓

$$\sigma_x = \underbrace{E}_{\text{MODULO di YOUNG}} \epsilon_x$$

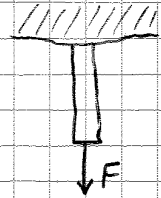
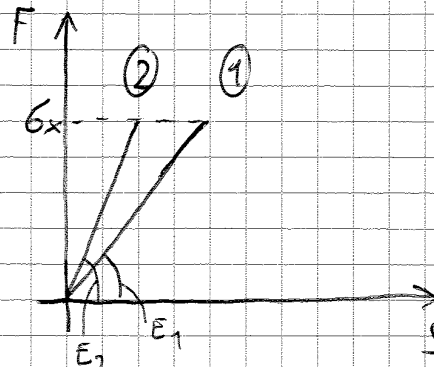
$$[E] = 210'000 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

↓

è un valore ideale;
di solito è più basso,
lo usiamo comunque, a meno
che non ne abbiamo dato una caratterizzazione sperimentale

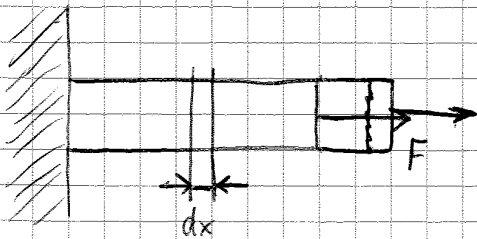
Trattiamo sempre legami
lineari ed elastici

↓
vale la legge di HOOKE
(verso la fine del '700)



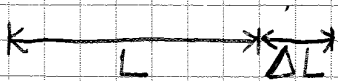
lega linearmente Forza e spostamento

Il materiale ①, a parità di forza, si estende maggiormente e quindi è maggiormente deformabile



$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$$

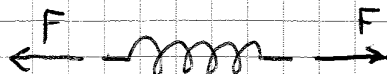


Integrando per fili // case y

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon_x dx = \int_0^L \frac{\sigma_x}{E} dx = \int_0^L \frac{N}{AE} dx = \frac{N}{AE} \int_0^L dx$$

sono tutte costanti

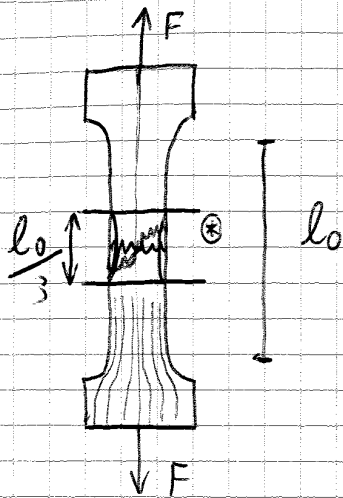
$$\Delta L = \frac{N}{AE} L$$



$$F = Kx$$

PROVA di TRAZIONE

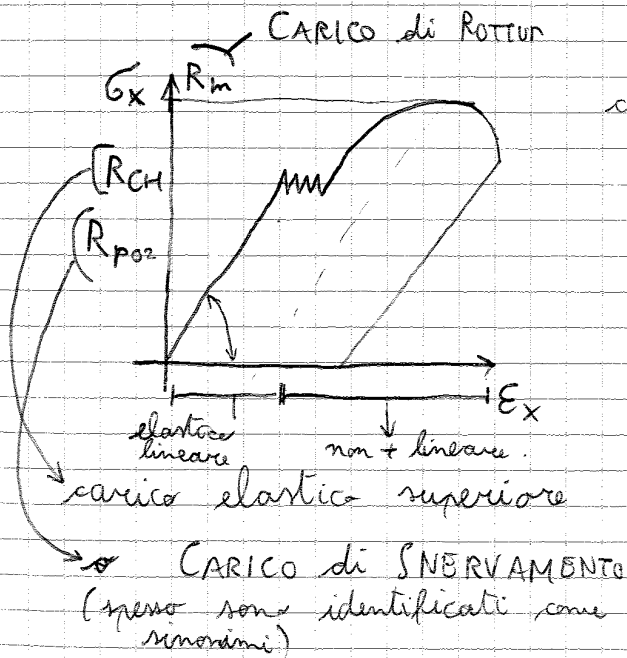
Si usa una macchina di prova (PROVINO)



la prova è considerata valida se si è rotta nel 3° intermedio

le tensioni si possono considerare come la corrente di un fiume (come diceva "De Saint Venant")

una linea di frattura: da questa possiamo capire molto su ciò che gli è accaduto



il PROVINO: ha creato un allungamento elastico

carico in cui ha smesso di essere nella legge di HOOK

$\textcircled{*}$ si crea un collo di bottiglia, (strizione), seguita subito dopo dalla rottura

lunghezza finale

$$\frac{l_f - l_0}{l_0} = A \%$$

5% è la spartiacque minima tra materiale duttile ($A > 5$) e fragile ($A < 5$)

PARAMETRO/indice della duttilità del materiale

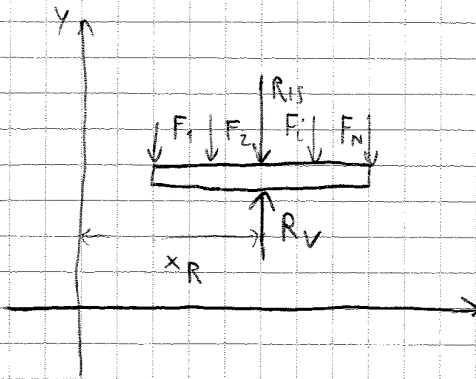
GEOMETRIA delle AREE

31/10/2013

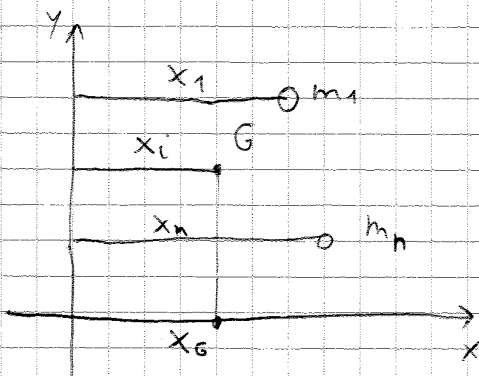
$$G_x = \frac{-N}{A} \quad | \quad E_x = \frac{G_T}{E} = \frac{N}{EA} \quad | \quad \ominus \Delta L = \frac{N}{EA} L$$

PROGRAMMA

- 1) BARICENTRO e MOMENTI STATICI
- 2) MOMENTI d' INERZIA



$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^N F_i x_i}{\sum_{i=1}^N F_i}$$



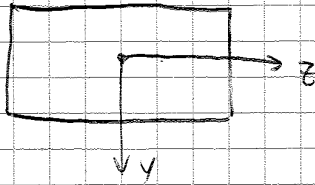
MOMENTO STATICO

$$S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

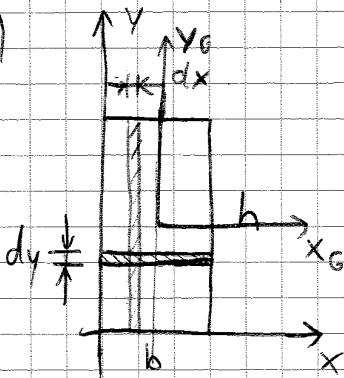
Se una sezione presenta assi di simmetria, naturalmente il baricentro si troverà su di esso (se sono 2 o più, si troverà nella loro intersezione)

es)



RETTANGOLO

es)



$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h y b dy = b \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^h = \frac{bh^2}{2}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2}{2} \cdot \frac{1}{bh} = \frac{h}{2}$$

$$S_y = \int_A x dA = \int_0^b x h dx = \frac{hb^2}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{hb^2}{2} \cdot \frac{1}{bh} = \frac{b}{2}$$

$$S_{y_G} = \int_A x dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} h x dx = \left. \frac{hx^2}{2} \right|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = 0$$

rispetto
ad un
asse
baricentrico

$$S_{TOTX} = S_{PIENO X} - S_{VUOTO X}$$

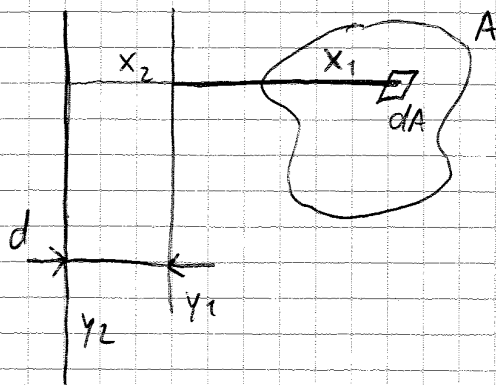
$$A_{PIENO} = BH$$

$$A_{VUOTO} = h(B-b)$$

$$S_{TOTX} = BH \frac{H}{2} - h(B-b) \frac{h}{2}$$

$$Y_G = \frac{S_{TOTX}}{A_{TOT}}$$

Teorema di Trasposizione del Momento Statico



$$S_{Y1} = \int_A x_1 dA$$

$$S_{Y2} = \int_A x_2 dA = \int_A (x_1 + d) dA =$$

$$= S_{Y1} + Ad$$

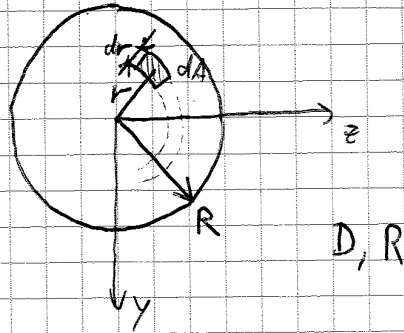
Il momento statico può essere positivo o negativo a seconda di dove ho messo gli assi (il momento d'inerzia invece viene sempre positivo)

MOMENTO di INERZIA POLARE

$$I_P = \int_A r^2 dA =$$

$$= \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr =$$

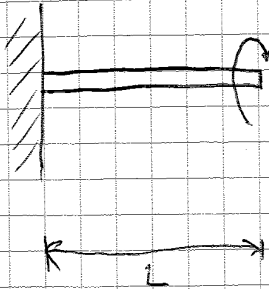
$$= 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$



$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$\frac{\Delta\theta}{l} = \frac{M_t}{G I_P} \cdot L$$

Rotazione
tra 2 facce
di un albero



$$M_t = M_x$$

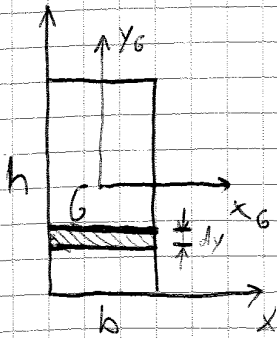
Barra di torsione, è un tubo che smorza le vibrazioni,
l'esagerata rotazione tra le ruote

MOMENTO CENTRIFUGO

Def: $I_{xy} = \int_A yx dA$

È nullo rispetto agli assi di simmetria

Esercizio)



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{3} \quad (\text{allo stesso modo})$$

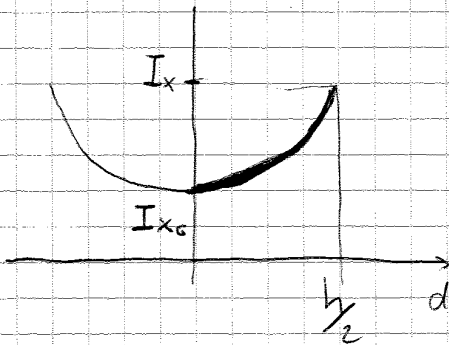
$$I_{x_G} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

Similmente, $I_{y_G} = \frac{hb^3}{12}$

Vediamo se è vero:

$$I_x = I_{x_G} + Ad^2$$

$$I_{x_G} + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{(1+3)bh^3}{12} = \frac{bh^3}{3} = I_x$$



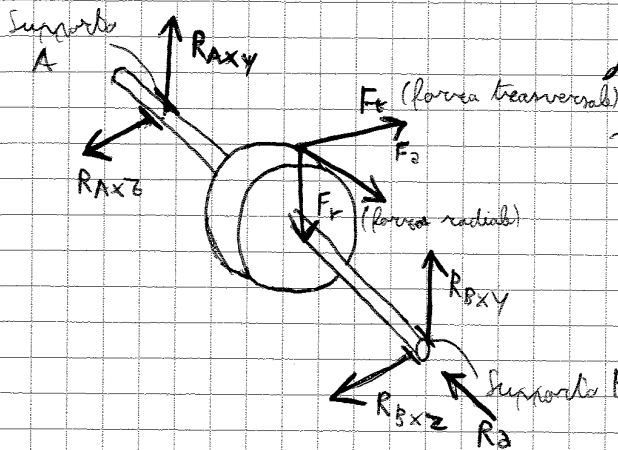
Esercitazione 1

08/10/2013

↑ esercizio base per tutti i sistemi SPAZIALI (3 dimensioni) (sono tutti coperti)

REAZ. VINCOLARI di un SISTEMA SPAZIALE:

ALBERO con RUOTA DENTATA (v. SLIDES)



La forza assiale c'è solo nelle ruote dentate

F → forze applicate
 R → Reazioni Vincolari

O_x è il nostro grado di libertà

$n = 6$

$l = 6 - 5 = (O_x)$

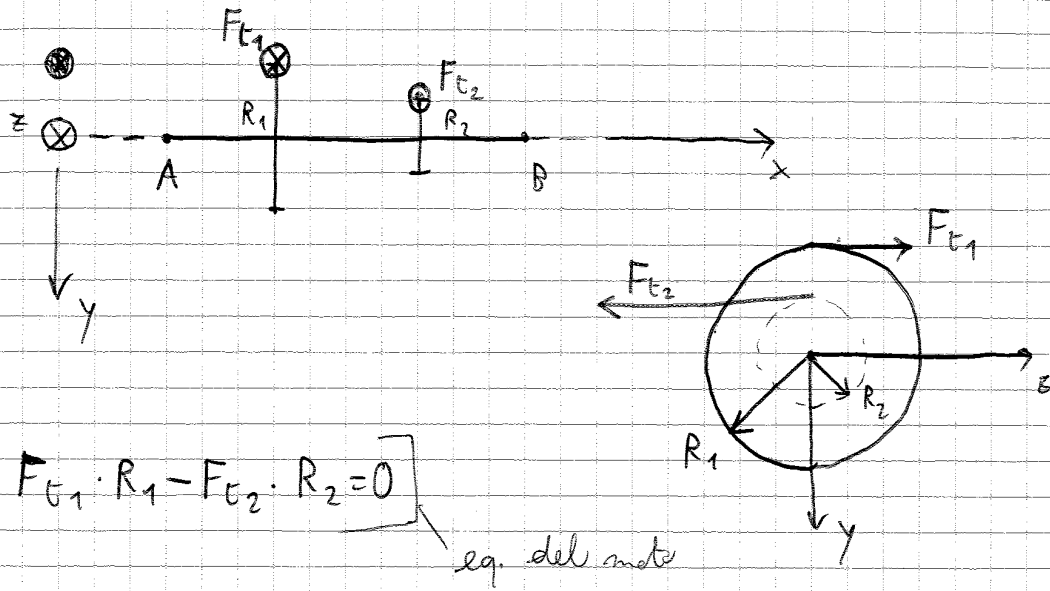
$m = 5$

$m = \begin{cases} x, y, z \\ O_z, O_y \end{cases}$

~~SISTEMA~~

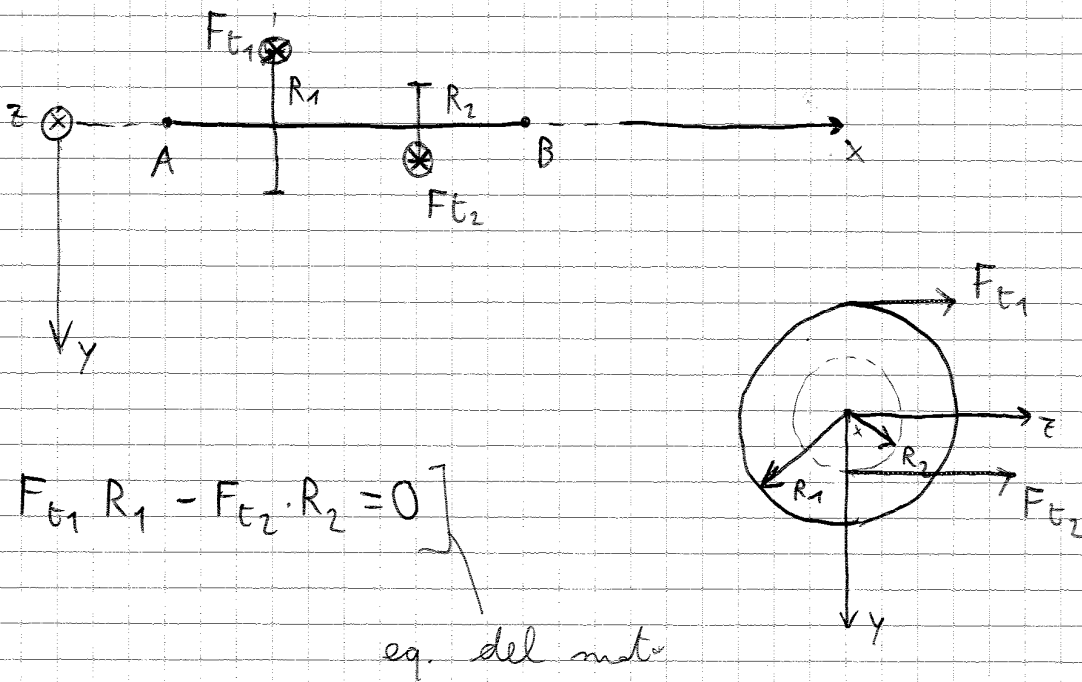
SISTEMA LABILE di un grado

n equazioni di equilibrio $\begin{cases} 5 \text{ eq. per calcolo R.V.} \\ 1 \text{ eq. del moto} \end{cases}$



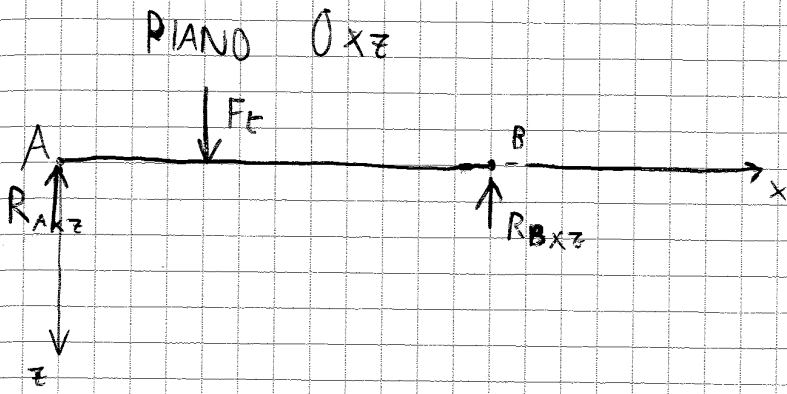
$$F_{t1} \cdot R_1 - F_{t2} \cdot R_2 = 0$$

eq. del moto



$$F_{t1} \cdot R_1 - F_{t2} \cdot R_2 = 0$$

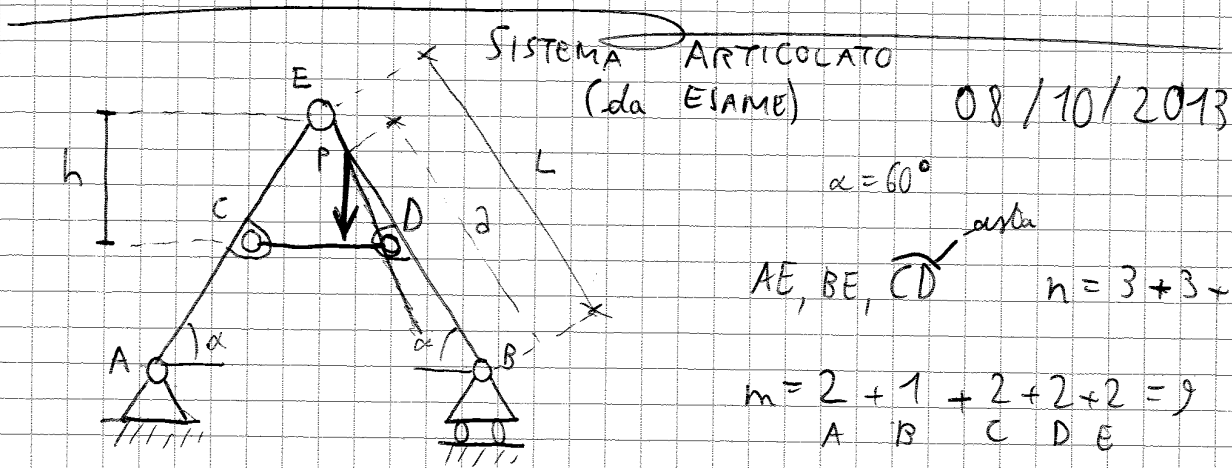
eq. del moto



Non è che non ho usato il momento di trasporto, l'ho usato nelle equazioni del moto

Facendo i calcoli, otteniamo:

• $R_{Axz} = \frac{F_z b}{L}$ • $R_{Bxz} = \frac{F_z a}{L}$



08/10/2013

$\alpha = 60^\circ$
 AE, BE, CD $n = 3 + 3 + 3 = 9$
 $m = 2 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9$
 A B C D E

$n = m \Rightarrow$ SISTEMA ISOSTATICO
 $l = n - m = 0$

asta: trave che può essere caricata solo agli estremi dalle reazioni vincolari: può essere un ^{PUNTO} ~~trave~~ ^{compressione} o un TIRANTE (e dilatata)

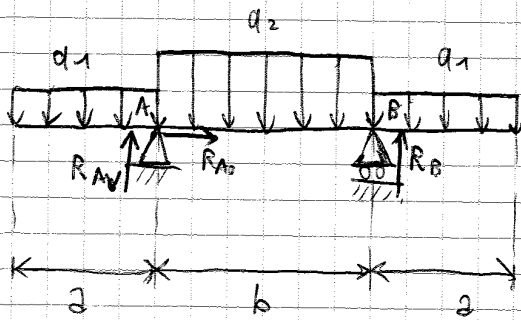


$\oplus \uparrow \text{NO} \oplus$ N_B ; $\oplus \rightarrow$ $-R_C + R_D = 0 \Rightarrow R_D = R_C$

ELENCO INCOGNITE

- R_C, R_D
- ~~R_{Ax}, R_{Ay}~~
- ~~R_B, R_{Bx}, R_{By}~~

ESERCIZIO da ESAME (18/02/2013)



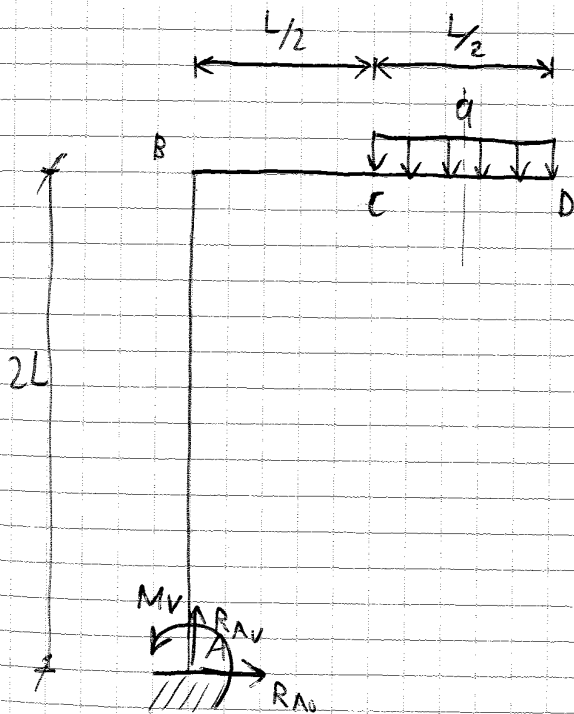
$$\begin{aligned} \oplus \rightarrow R_{A0} &= 0 \\ \oplus \uparrow R_{AV} + R_B - q_1 \cdot 2a - q_2 b &= 0 \end{aligned}$$

$$A \oplus \uparrow R_B \cdot (b + a) - q_2 b \cdot \frac{b}{2} - q_1 a \cdot (b + \frac{a}{2}) + q_1 a \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} R_{AV} &= 2q_1 a + q_2 b - q_2 \frac{b}{2} - q_1 a = \\ &= q_1 a + q_2 \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_B &= (q_2 \frac{b^2}{2} + q_1 ab) \frac{1}{b} = \\ &= q_2 \frac{b}{2} + q_1 a \end{aligned}$$

ESERCIZIO da ESAME (11/07/2013)



$$\begin{aligned} n &= 3 & m &= 3 \\ l = n - m &= 0 & \rightarrow \text{SIST. ISOSTATICO} \end{aligned}$$

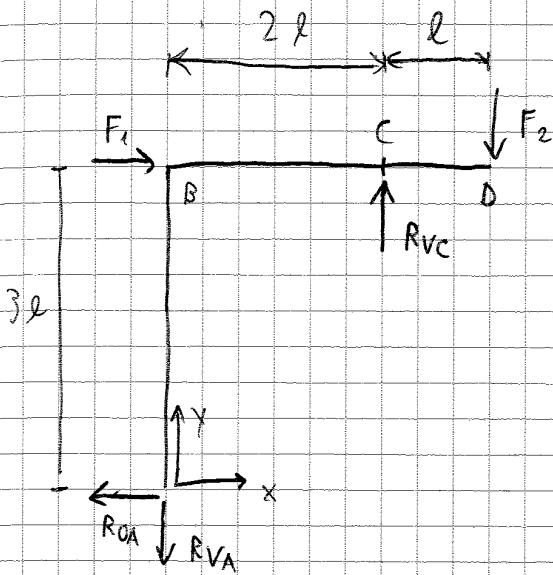
$$\oplus \rightarrow R_{A0} = 0$$

$$\oplus \uparrow R_{AV} - q \frac{L}{2} = 0$$

$$R_{AV} = q \frac{L}{2}$$

$$A \oplus \uparrow M_v - q \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4} \right) = 0$$

$$M_v = q \frac{L}{2} \cdot \frac{3}{4} L = \frac{3}{8} q L^2$$

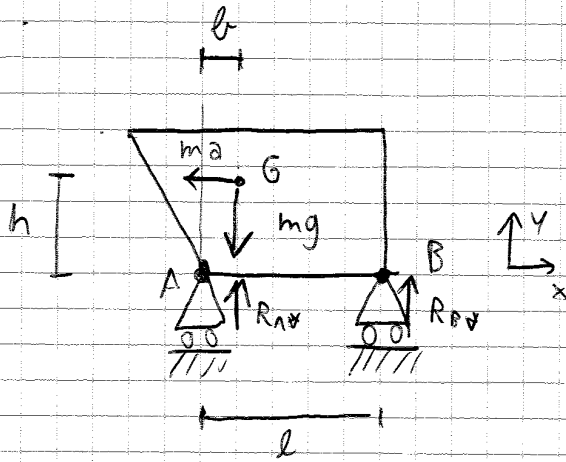


$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \begin{cases} F_1 - \underline{R_{OA}} = 0 \\ F_2 - R_{vc} + \underline{R_{vA}} = 0 \\ F_1 \cdot 3l - \underline{R_{vc}} \cdot 2l + F_2 \cdot 3l = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} R_{OA} = F_1 \\ R_{vA} = F_2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} R_{OA} = F_1 = 3000 \text{ N} \\ R_{vc} = (F_1 + F_2) \frac{3l}{2l} = 7500 \text{ N} \\ R_{vA} = -F_2 + R_{vc} = 7500 \text{ N} - 2000 \text{ N} = 5500 \text{ N} \end{cases}$$

N.B. fatto che hanno tutti i versi positivi, vuol dire che abbiamo scelto ^(a caso) i versi nel modo corretto

Es 4) Struttura chiamata "CARRELLO"



Provare il valore limite di a tale che R_B sia zero, cioè quel valore che impedisce al carrello di ribaltarsi

y) $R_A + R_B - mg = 0$

$R_A = m \cdot \frac{gb - ah}{l} - mg$

A) $-mgb + mah + R_B l = 0$

$R_B = \frac{m(gb - ah)}{l}$

$\frac{m(gb - ah)}{l} = 0$

$a = \frac{gb}{h}$

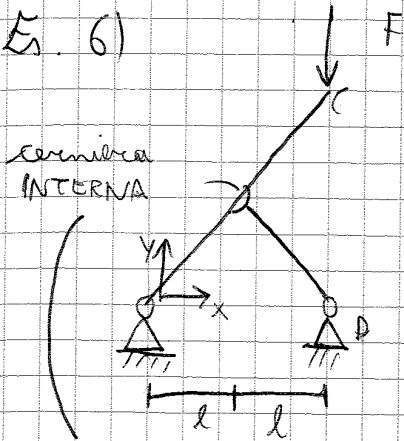
Lungo l'asse x non possiamo dire niente

In realtà ~~poss~~ basta fare il momento in A ~~(MOTO INCIPIENTE)~~

(MOTO INCIPIENTE: nell'istante prima che inizi a ribaltarsi, possiamo considerarlo un problema di statica con $R_B = 0$)

A) $-mgb + mah = 0$ con $R_B = 0$

Es. 6)



$$n = 3 + 3 = 6$$

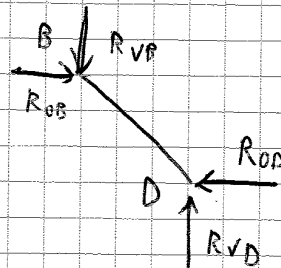
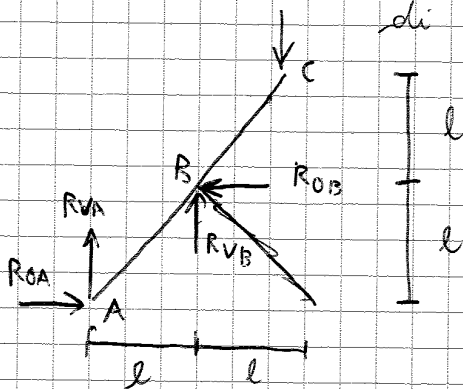
$$m = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$l = n - m = 0 \rightarrow \text{SIST. ISOSTATICO}$$

$$F = 2 \text{ kN}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

Cerniera tra + corpi rigidi: le sue coordinate vincolari si calcolano: $2 \cdot (n - 1)$ dove n è il numero di corpi rigidi attaccati alla cerniera



AC

BD

$$R_{OA} - R_{OB} = 0$$

$$R_{OA} = R_{OB}$$

$$R_{OB} - R_{OD} = 0$$

$$R_{OD} = R_{OB}$$

$$R_{VA} + R_{VB} - F = 0$$

$$R_{VA} = F - R_{VB}$$

$$R_{VB} - R_{VD} = 0$$

$$R_{VD} = R_{VB}$$

$$B) \quad R_{OA} \cdot l - R_{VA} \cdot l - F \cdot l = 0$$

$$B) \quad R_{OD} \cdot l - R_{VD} \cdot l = 0$$

$$R_{OB} - F + R_{VB} - F = 0$$

$$R_{OD} = R_{VD} = R_{OB} = R_{VB}$$

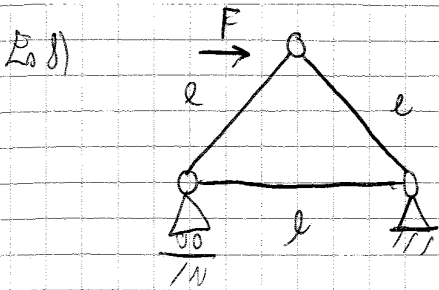
$$R_{OB} = 2F$$

$$R_{VA} = 2F$$

$$R_{OA} = R_{OB} = R_{VB} = R_{OD} = R_{VD} = 2F$$

$$R_{VA} = 2 \text{ kN} \quad 0 \text{ kN}$$

$$24 \text{ kN}$$



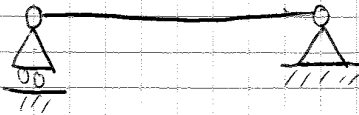
$$n = 3 + 3 + 3 = 9$$

$$m = 2 + 2 + 1 = 5$$

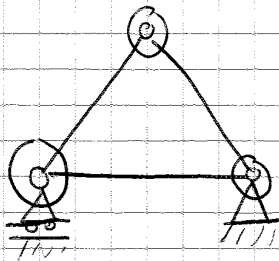
$$l = n - m = 4$$

Struttura "ARCO a 3 CERNIERE" è ISOSTATICO per
eccellenza

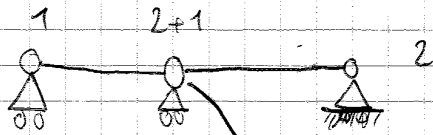
la base è fissa,
è un riferimento



in realtà ognuno dei 'pallini' è una cerniera interna



↓
quando 2 aste sono collegate ad una
stessa cerniera, questa è anche una
cerniera interna



$$n = 3 + 3$$

$$m = 1 + (2 + 1) + 2 = 6$$

$$l = 0 \rightarrow \text{ISOSTATICO}$$

vincola 2 aste \rightarrow Cerniera interna



qui è un unico corpo

$$n = 3$$

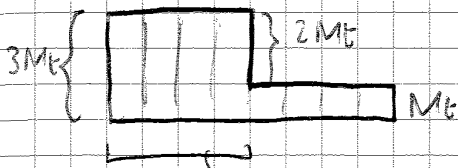
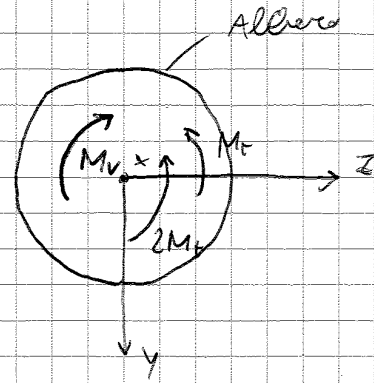
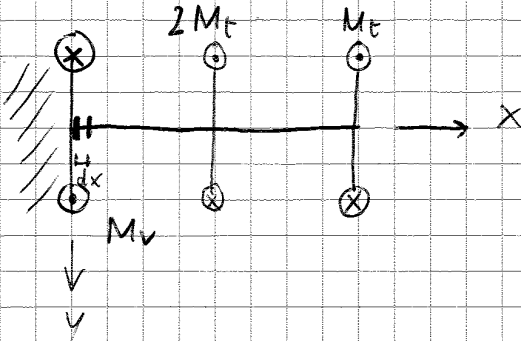
$$m = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\rightarrow \text{IPERSTATICO}$$

Esercitazione 3

22/10/2013

Es. 3)

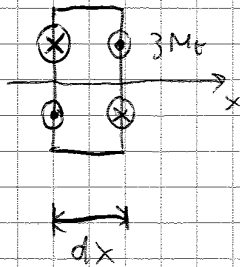


$$\oplus \uparrow M_t + 2M_t - M_v = 0$$

$$M_v = 2M_t + M_t = 3M_t$$

zone di massima carico interno \rightarrow si compierà qui nel caso

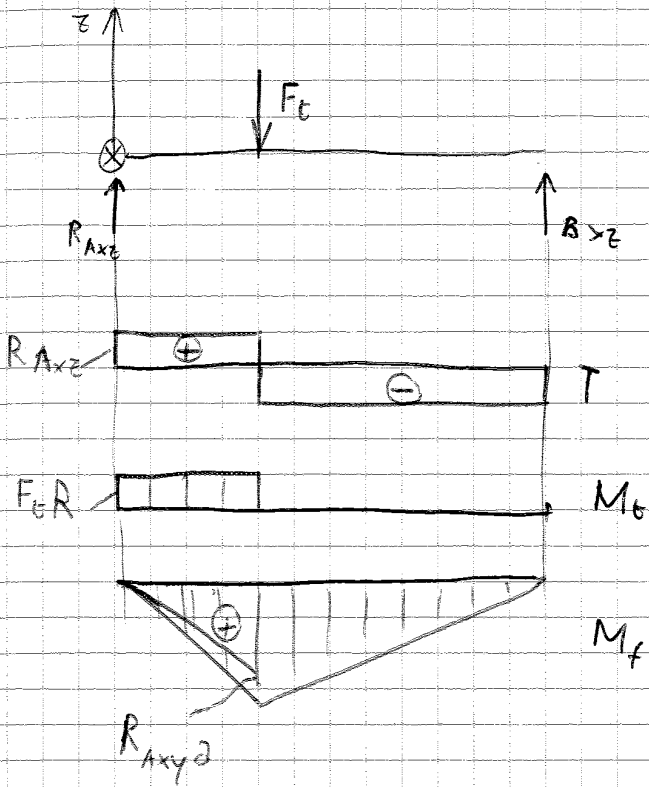
Andiamo ad analizzare il tratto dx:



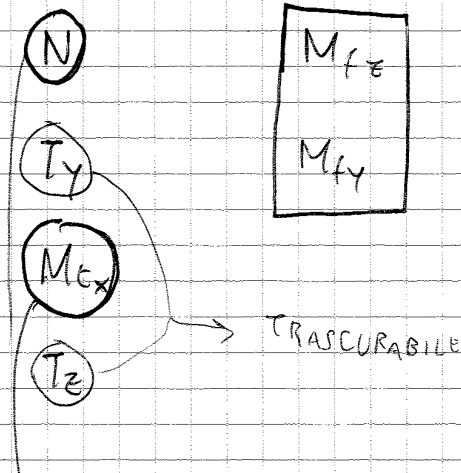
Non sappiamo il segno perché dovremmo sapere le convenzioni per gli sforzi

PIANO xz

F_r e F_a le avevamo già considerate, non servono più



M_t (momenti torcenti)
" " " " " "
è quello di trasporto (?)



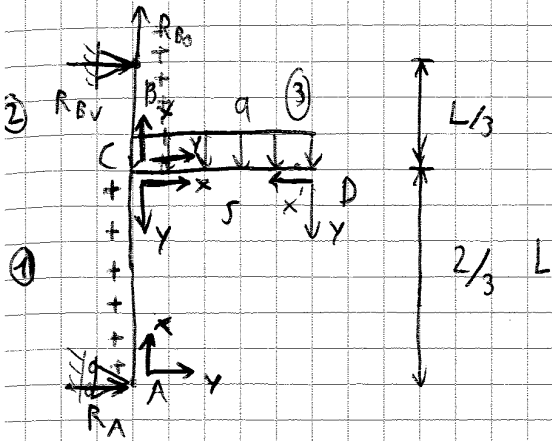
la parte che prima era tesa lo è dopo 180°

risorse di rete propria: non ha convenzioni (pos. e neg.)

Andrà a studiare ^{le termini là} dove c'è il max momento flettente

22/10/2013

Es. 9)

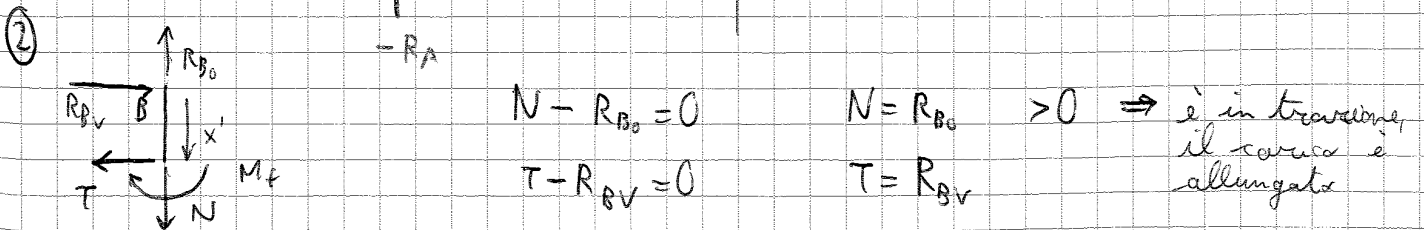
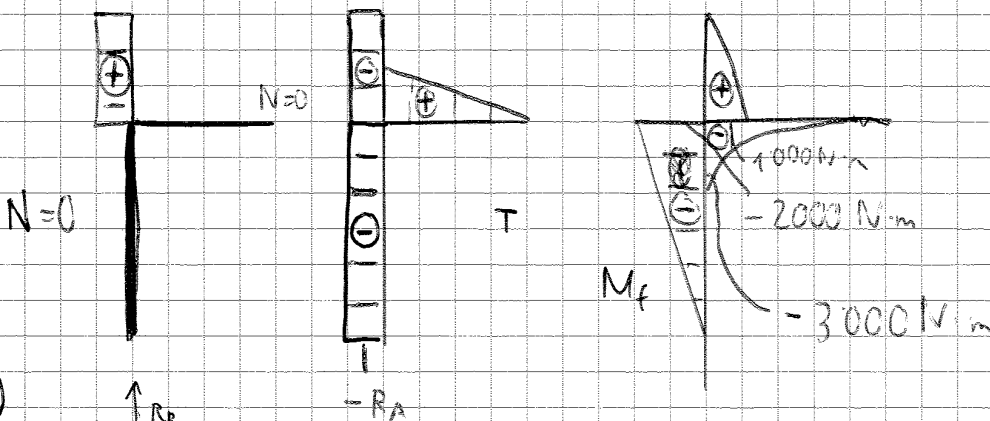
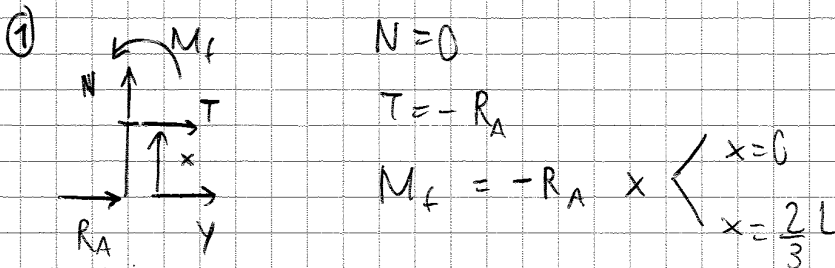


$[R_A = 1000 \text{ N}]$, $[R_{BV} = -1000 \text{ N}]$,
 $[R_{B0} = 3000 \text{ N}]$

dae abbiamo + + + abbiamo

$M_f > 0 \Rightarrow$ fibre in trazione di sopra sulle $y > 0$, di sotto sulle $y < 0$

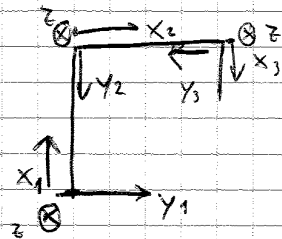
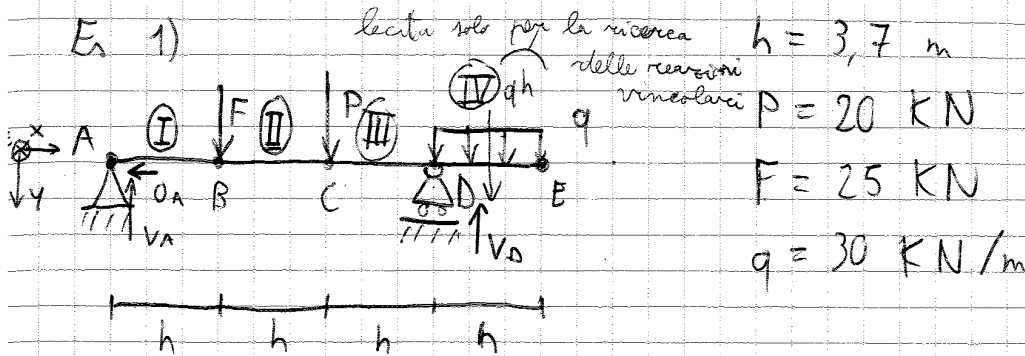
Ho cammino da A a B: **CONVENZIONE:** \sqrt{x} esce dalla pancia, y esce dai piedi:
 Camminando da B ad A: $\swarrow x$ ancora ok



N.B. tutte le componenti sono messe in modo tale che tutte le componenti sulle campate verticali si abbiano

$M_f + R_{BV} x' = 0$
 $M_f = -R_{BV} x' = -(-1000) x'$ $\begin{cases} x'=0 \\ x'=L/3 \end{cases}$

29/10/2013



→ PORTALE (Trave che cambia direzione)

- Prendiamo sempre la z entrante e la x giaccia sulla trave

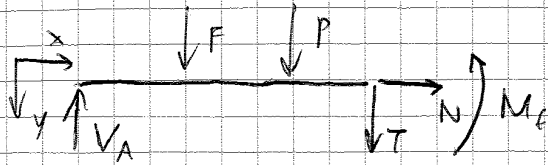
Con unica trave sistemi locali e globale coincidono

$$\begin{cases} F + P + qh - V_A - V_D = 0 \\ O_A = 0 \\ V_A \cdot 3h - F \cdot 2h - Ph + qh \frac{h}{2} = 0 \end{cases}$$

$$V_A = \frac{F}{3} + \frac{P}{3} - \frac{qh}{6} = \frac{25}{3} \text{ KN} + \frac{20}{3} \text{ KN} - \frac{3,7 \text{ m} \cdot 30 \text{ KN/m}}{6} =$$

$$\begin{aligned} V_D &= +F + P + qh - V_A = F - \frac{F}{3} + P - \frac{P}{3} + qh - \frac{qh}{6} = \\ &= \frac{2}{3} F + \frac{2}{3} P + \frac{5}{6} qh \end{aligned}$$

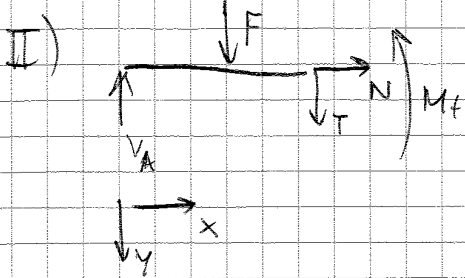
III) $2h < x < 3h$



$$\begin{cases} N = 0 \\ T = V_A - F - P \\ M_F = -P(x - 2h) - F(x - h) + V_A x \end{cases}$$

$$M_F(2h) =$$

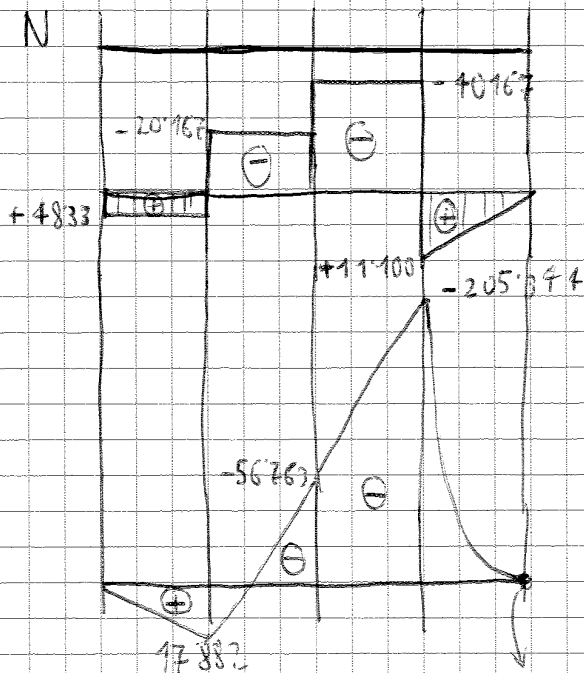
$$M_F(3h) =$$



$$N = 0$$

$$T = V_A - F$$

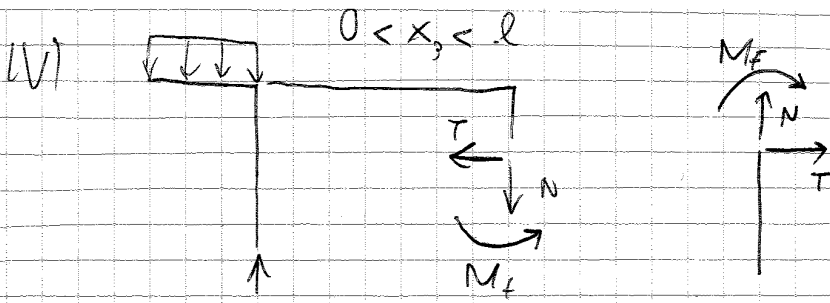
$$M_F - V_A x + F(x - h) = 0 \Rightarrow M_F = V_A x - F(x - h)$$



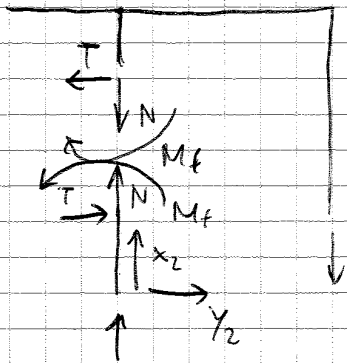
(i segni sono dati dal sist. di riferimento)

qui vicino T_F perché lo sforzo di taglio è nullo

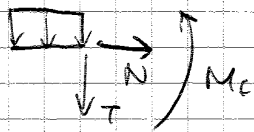
N.B. Sulle travi a halber (quando non interviene una coppia) T e M_F finiscono a zero



II) $0 < x_2 < l$



I)



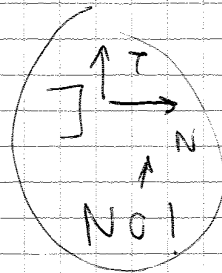
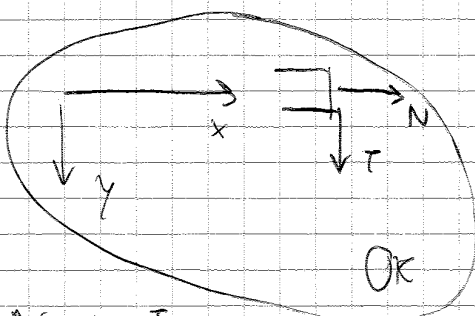
$$N = 0$$

$$T = -q x_1$$

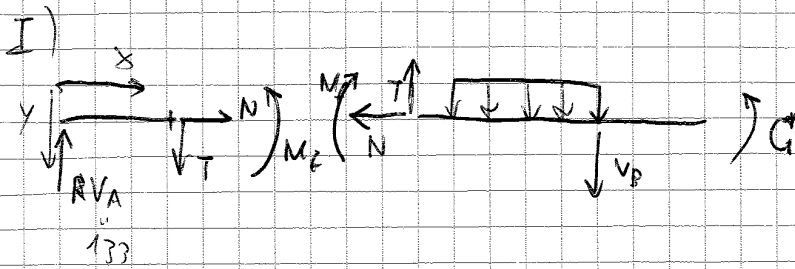
$$M_f = -q \frac{x_1^2}{2}$$

$$\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(l) = -ql \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_f(0) = 0 \\ M_f(l) = -\frac{ql^2}{2} \end{cases}$$



N e T seguono gli assi

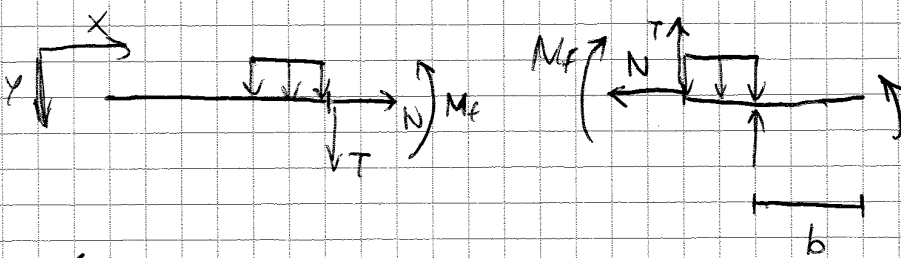


$$T = 133$$

$$M_f = 133x \quad \left\{ \begin{array}{l} M_f(0) = 0 \\ M_f\left(\frac{a}{2}\right) = 53,2 \end{array} \right.$$

$$N = 0$$

II)



$$\begin{cases} V_A - q\left(x - \frac{a}{2}\right) - T = 0 \\ N = 0 \\ M_f = V_A x - \frac{q}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$T\left(\frac{a}{2}\right) = 133$$

$$T(a) = 101$$

$$M_f\left(\frac{a}{2}\right) = 53,2$$

$$M_f(a) = 103,2$$

E1) FLESSIONE

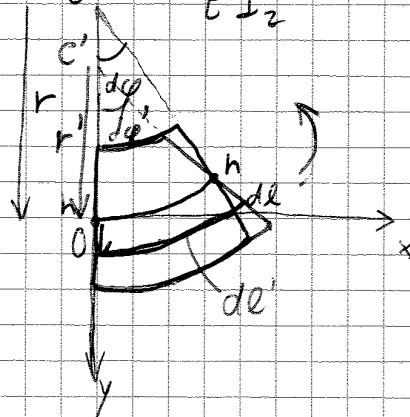
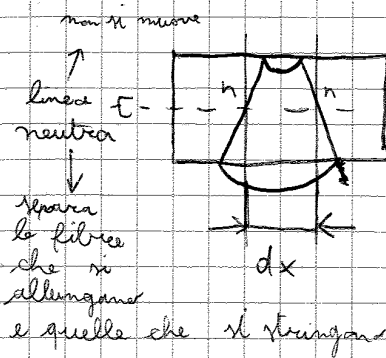
05/11/2013

PARTE II

N^{tr}: $\sigma_x = \frac{N}{A}$ $\epsilon_x = \frac{N}{EA}$

$\Delta L = \frac{N}{EA} L$

M_f: $\sigma_x = \frac{M_f}{I_z} y$ $\epsilon_x = \frac{M_f}{EI_z} y$ f...



$dl = (r + y) d\phi$

$dl' = (r' + y) d\phi'$

$dl_n = r d\phi = r' d\phi'$

$\epsilon_x = \frac{dl' - dl}{dl} = \frac{(r' + y) d\phi' - (r + y) d\phi}{(r + y) d\phi}$

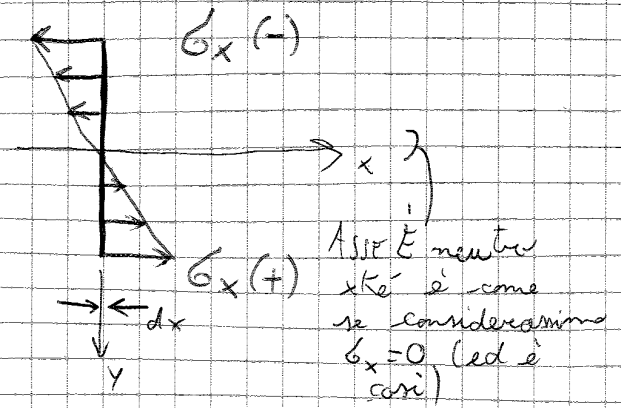
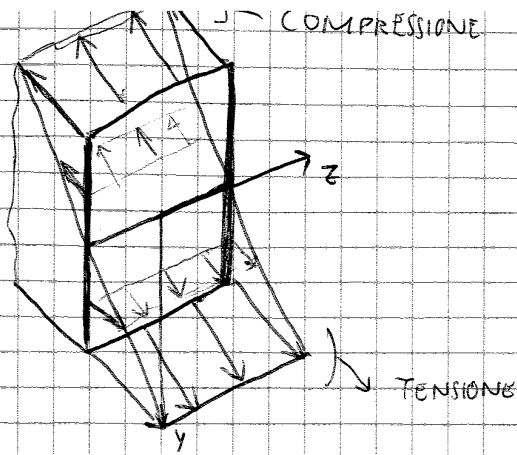
$\epsilon_x = \frac{r' d\phi' + y d\phi' - r d\phi - y d\phi}{(r + y) d\phi}$

$\epsilon_x = \frac{y}{r + y} \left(\frac{d\phi' - d\phi}{d\phi} \right) = \frac{y}{r + y} \left(\frac{d\phi'}{d\phi} - 1 \right)$

$\epsilon_x = \frac{y}{r + y} \left(\frac{r}{r'} - 1 \right) = \frac{ry}{r + y} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$

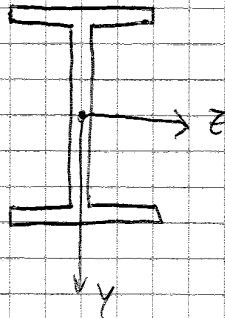
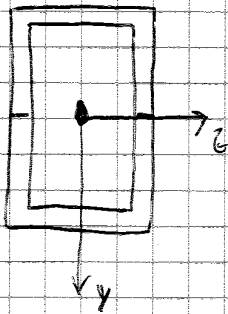
con $r \rightarrow \infty$

↓
0



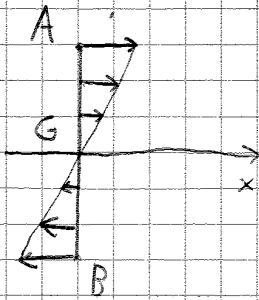
Con flessione pura l'asse neutro è sempre e solo baricentrico

Non essendo la sezione rettangolare la + comoda, proviamo con la sezione rettangolare cava e il profilato ad H



Una sezione molto comoda è quella circolare

② Cambia solo l'intensità della σ , non l'andamento che rimane lineare



$$\sigma_{x_A} = \frac{(-P \cdot \frac{L}{2}) \left(-\frac{D}{2}\right)}{I_z}$$

Solo quando si intende il valore max della tensione

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_z}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

2 CASI CANONICI

• Per la sezione circolare si dimostra che:

$$I_z = I_d = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$W_f = \frac{\pi D^4}{64} \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{32}$$

• Per la sezione rettangolare

$$W_f = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$