NUMERO: 840

DATA: 25/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Antonellini

MATERIA: Analisi Matematica II

Prof. Serra

ANALISI II

02/10/2013

Corso di natura abbastanza pratica

2 MACRO-ARGOMENTI:

1) INTEGRALI

2) SERIE

§ ESAME

1) SCRITTO:
- 7 es. a risposta chiusa
- 1 es. lungo

2) ORALE: lo richiede lui

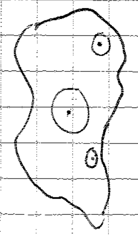
Libri:
- Canuto, Tabacco (complicatissimo)] Teoria
- Bacciotti, "Integrali multipli e serie"] Teoria

- Lancelotti] Esercizi
(buona intro teorica, molti esercizi, alcuni di livello altissimo, molto + del corso)

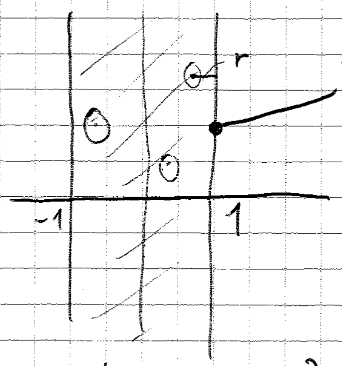
enrico.serra@polito.it

Def: Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice APERTO se $\forall x \in A$, esiste un intorno qualsiasi di x tutto contenuto in A.

es) 1)



2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$



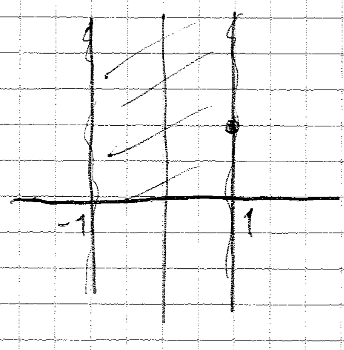
se io prendessi questo punto, non riuscirei a trovare un intorno contenuto in A, ma tanto quel punto non appartiene ad A

↓

A è APERTO

3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$

NON è APERTO

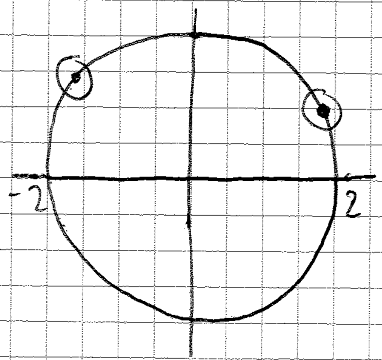


Di solito, quando sono insiemi semplici, quando c'è disuguaglianza STRETTA è APERTO; è CHIUSO invece quando la disuguaglianza è in senso lato.

N.B.: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, non necessariamente appartiene dunque ad A

Quindi insiemi diversi possono avere la stessa frontiera

es) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ che ci sia o no per quanto riguarda la frontiera NON CAMBI



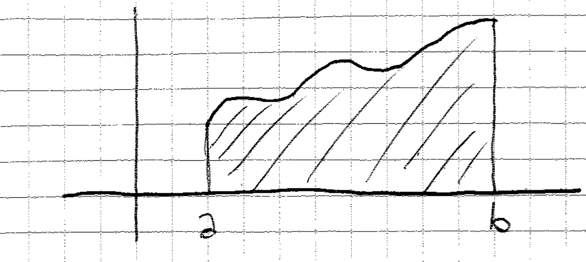
Def: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$

L'insieme dei punti di frontiera di A si chiama BORDO di A.

Il bordo di A è così indicato $\boxed{\partial A}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 324

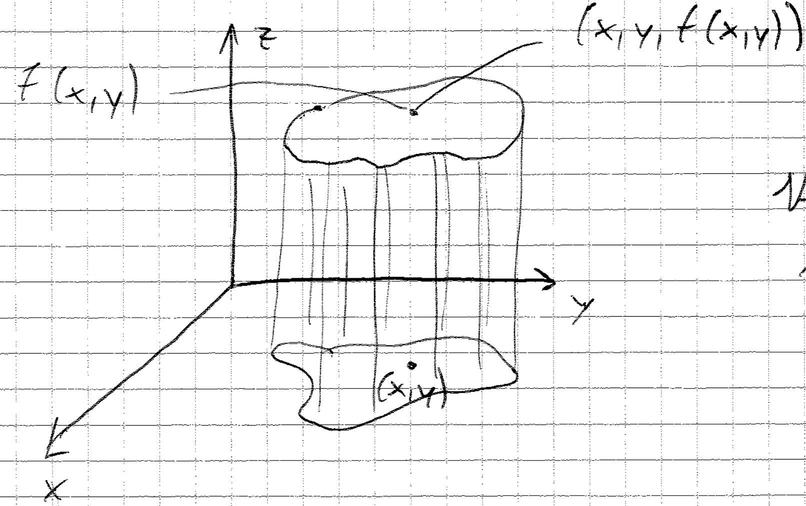
INTEGRALI DOPPI



INTEGRALE SEMPLICE
(1 dimensione)
Calcolare l'area

$D \subset \mathbb{R}^2$ COMPATTO

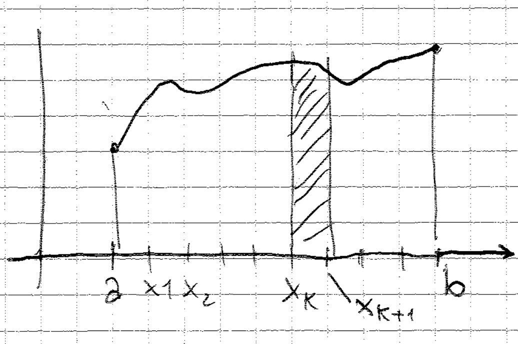
$f: D \to \mathbb{R}$



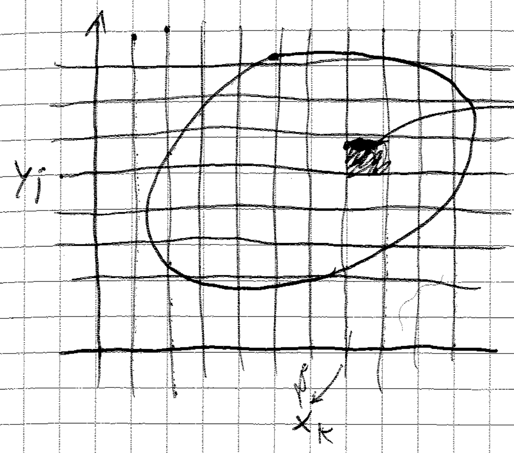
Vogliamo calcolarne il volume

Come si facevano gli integrali semplici:

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$



$D \subset \mathbb{R}^2$ COMPATTO



$\underbrace{[x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}]}_{R_{jk}}$

In ogni R_{jk} prendo un punto $(c_k, d_j) \in R_{jk}$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(c_k, d_j) \cdot \underbrace{(x_{k+1} - x_k)(y_{j+1} - y_j)}_{\text{AREA di } R_{jk}}$$

$$\delta = \max_{j,k} (x_{k+1} - x_k)(y_{j+1} - y_j)$$

$\delta \to 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k} \sum_{j} f(c_k, d_j)(x_{k+1} - x_k)(y_{j+1} - y_j)$$

Se esiste questo limite, si dice che f è INTEGRABILE su D

$$\left.\int_D f(x,y)\, dx\, dy \right] \text{— Integrale Doppio di } f \text{ su } D$$

Si può anche così: $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$

PROPRIETÀ dell' INTEGRALE DOPPIO

$f, g : D \to \mathbb{R}$

D compatto, f, g continue su D

1) LINEARITÀ

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

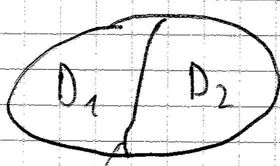
$$\iint_D \left(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right) dx\,dy =$$

$$= \alpha \int_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \int_D g(x,y)\,dx\,dy$$

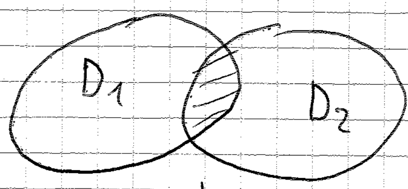
2) ADDITIVITÀ rispetto al DOMINIO

$D = D_1 \cup D_2$ $\quad$ D_1, D_2 COMPATTI

$D_1 \cap D_2$ deve avere area nulla



è in comune, ma ha area nulla



NON va bene

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

6) TEOR. della MEDIA

D compatto, f continua su D

Allora esiste $(x_0, y_0) \in D$ tale che:

abbiamo aggiunto una dimensione

$$\underbrace{\frac{1}{\text{area}(D)} \int_D f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{media di } f \text{ su } D} = f(x_0, y_0)$$

DIM:

$$\min_D f \leq f(x,y) \leq \max_D f$$

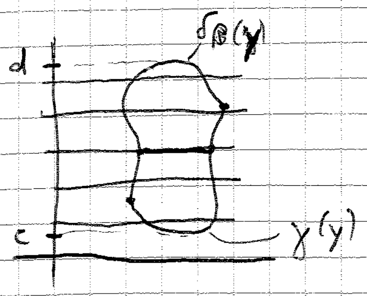
Una fz. continua su un insieme compatto, quindi esistono min e max

$$\int_D \min_D f \leq \int_D f(x,y) \leq \int_D \max_D f \qquad \forall x,y \in D$$

$$\min_D f \cdot \text{area}(D) \leq \int_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \max_D f \cdot \text{area}(D)$$

$$\min_D f \leq \underbrace{\frac{1}{\text{area}(D)} \int_D f(x,y)\,dx\,dy}_{= f(x_0, y_0)} \leq \max_D f$$

2) DOMINIO ORIZZONTALMENTE CONVESSO



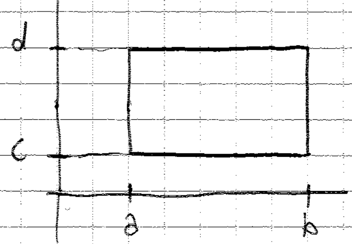
Le rette orizzontali tagliano D in un unico intervallo

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \quad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \}$$

FORMULA di RIDUZIONE

$$\boxed{\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx \right) dy}$$

Abbiamo così INTEGRATO per ORIZZONTALI



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \}$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \}$$

$$\int_D f\, dx\, dy = \boxed{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy}$$

In questo caso sono equivalenti entrambi i metodi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 324

1- Integro allora per verticali

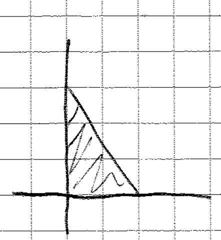
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$$

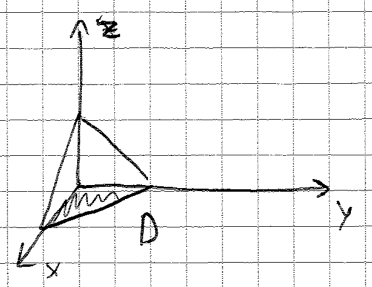
$$\int_D 1-x-y \, dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1-x - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 - 0\right) dx =$$

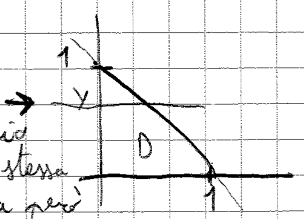
$$= \int_0^1 1-x-x+x^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx = \int_0^1 1-2x+x^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx =$$

$$= \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}(1-x)^3\right]_0^1 = 1-1+\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$





2- Integro per orizzontali



faccio la stessa cosa però per x 'sta volta

$y = 1-x \qquad x = 1-y$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1-y\}$$

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (1-x-y)\,dx\right) dy =$$

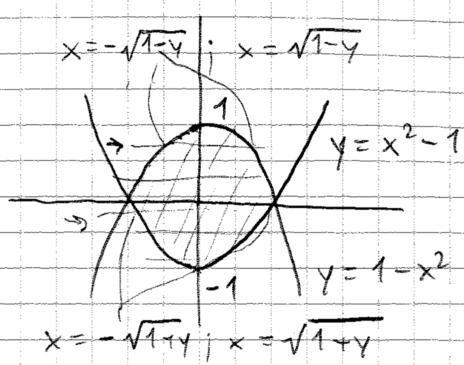
$$= \int_0^1 \left[x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_0^{1-y} dy = \int_0^1 \left(1-y - \frac{1}{2}(1-y)^2 - y(1-y)\right) dy$$

$$= \ldots = \frac{1}{6}$$

03/10/2013

PARTE 2

es) $\int_D (3y + e^x)\, dx\, dy$ dove D è compreso tra $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$



• Proviamo per orizzontali:

Qui le curve di entrata e di uscita sono scritte a tratti → NON CONVIENE

$(x,y) \,/\; -1 \leq y \leq 1, \quad y = 1 - x^2$

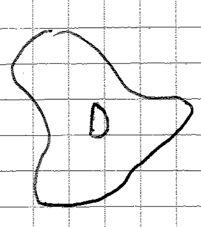
$$\gamma(y) = \begin{cases} -\sqrt{1+y} \\ -\sqrt{1-y} \end{cases} \qquad x = -\sqrt{1-y} \quad +\sqrt{1-y}$$

$$\delta(y) = \begin{cases} -\sqrt{1-y} \\ \sqrt{1+y} \end{cases}$$

, ...

Un' APPLICAZIONE degli INTEGRALI DOPPI.
BARICENTRO

Immaginiamo di avere una lamina metallica:

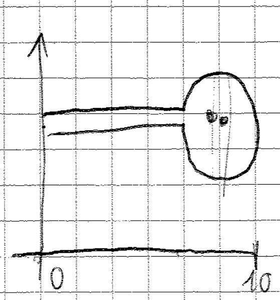


Densità di massa costante = 1

$G = (x_G, y_G)$

Def:
$$x_G = \frac{1}{\text{area}(D)} \int_D x \, dx\, dy$$
$$y_G = \frac{1}{\text{area}(D)} \int_D y \, dx\, dy$$

Questo è il significato geometrico di BARICENTRO: troviamo attraverso la media delle coordinate, le coordinate del baricentro



$$x_G = \frac{\int_D x \, dx\, dy}{\int_D dx\, dy} \qquad y_G = \frac{\int_D y \, dx\, dy}{\int_D dx\, dy}$$

Massa totale $\int_D m(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x\,\frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \quad = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^5)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 \right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12} = \text{MASSA}$$

$$x_G = \frac{\int_D x \cdot m(xy)\,dx\,dy}{\left[\int_D m(x,y)\,dx\,dy\right] = \frac{1}{12}}$$

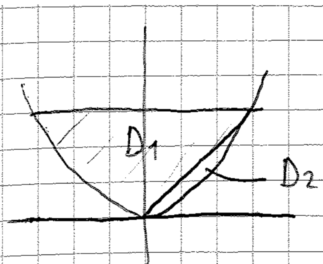
$$\int_D x\, m(x,y)\,dx\,dy = \int_D x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left[y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 - x^6\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}\;\frac{7-4}{28} = \frac{3}{56}$$

$$x_G = \frac{\int xm}{\int m} = \frac{3/56}{1/12} = 12\cdot\frac{3}{56} = \frac{36}{56}$$

Calcolare y_G (deve venire =)



In D_1, $f = y - x$
In D_2, $f = x - y$

$$\int_D |y-x|\,dx\,dy = \int_{D_1} (y-x)\,dx\,dy + \int_{D_2} (x-y)\,dx\,dy$$

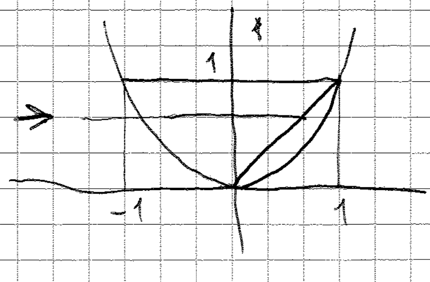
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$$

$$\int_{D_2} (x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x-y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{10}x^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{10-15+6}{60} = \frac{1}{60}$$



In questo caso meglio fare per orizzontali, così NON cambia la funz. d'entrata né quella d'uscita

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{y} \le x \le y\}$$

$$\int_{D_1} (y-x)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{y} (y-x)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1$$

$$= \int_0^1 y^2 - \frac{1}{2}y^2 + y\sqrt{y} + \frac{1}{2}y\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y^2 + y^{3/2} + \frac{1}{2}y\,dy =$$

$$= \left[\frac{1}{6}y^3 + \frac{2}{5}y^{5/2} + \frac{1}{4}y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{49}{60}$$

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f = \frac{49}{60} + \frac{1}{60} = 5/6$$

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto

Prendiamo una funzione $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$
(campo vettoriale) $(u,v) \quad \varphi(u,v)$

(Consideriamo $\mathbb{R}^n$, con $n=2$, ma vale $\forall n$)

φ sia di classe C^1 su A

MATRICE JACOBIANA di φ (sorta di derivata di φ quando siamo in $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $n>1$)

$$\begin{pmatrix} \nabla \varphi_1 \\ \nabla \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = J\varphi(u,v)$$

Def: Si chiama "Jacobiano" o "Determinante Jacobiano" di φ: $\underbrace{\det J\varphi(u,v)}_{\text{(numero)}} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$

Rappresenta il fattore di proporzionalità tra aree

Allora se f è continua su D,

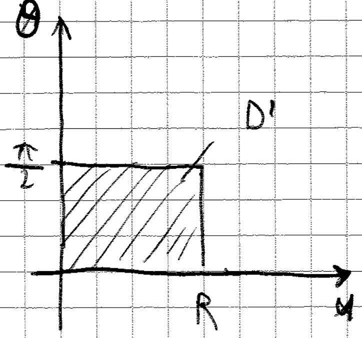
$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\underset{\varphi^{-1}(D)}{D'}} f(\underbrace{x(u,v),\ y(u,v)}_{\varphi(u,v)}) \cdot \Big|\underbrace{\det J_\varphi(u,v)}_{\varphi'(t)}\Big|\ \underbrace{du\,dv}_{dt}$$

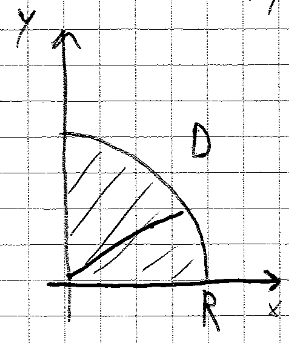
(FATTORE CORRETTIVO)

Esempio

COORDINATE POLARI in $\mathbb{R}^2$ (ρ, θ)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \varphi(\underset{u,\,v}{\rho,\theta}) = (\underset{\substack{x(u,v)\\x(\rho,\theta)}}{\rho\cos\theta}, \underset{\substack{y(u,v)\\y(\rho,\theta)}}{\rho\sin\theta})$$





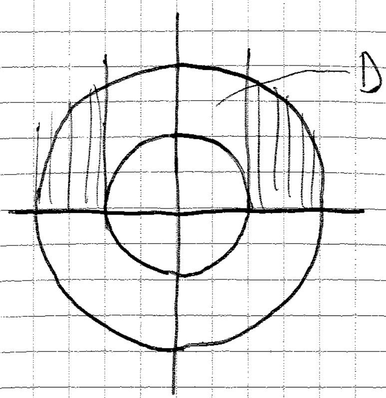
$$0 \le \rho \le R \qquad\qquad 0 \le x \le R$$
$$0 \le \theta \le \pi/2 \qquad\qquad 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$$

Jacobiano in COORDINATE POLARI

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det J_\varphi(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

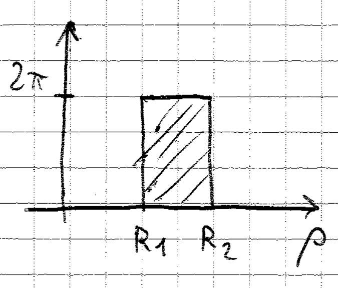
es)



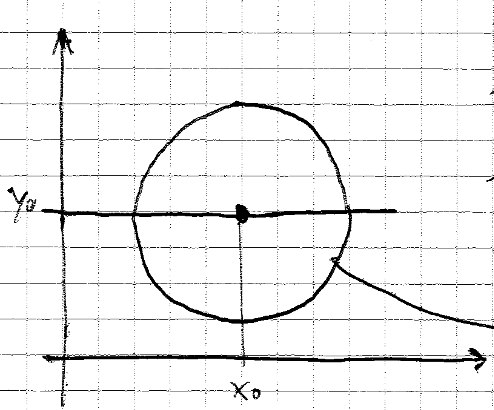
Passando a Coordinate Polari

$R_1 \leq \rho \leq R_2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$



es) VARIANTE



Quando il cerchio non è centrato nell'origine, scelgo le coordinate polari centrate nel modo più opportuno (x_0, y_0)

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq 1$

COORDINATE POLARI centrate in (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - x_0 = \rho\cos\theta \\ y - y_0 = \rho\sin\theta \end{cases}$$

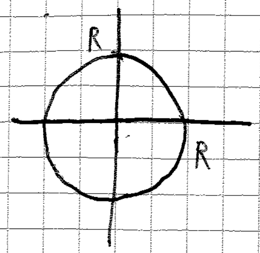
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2$$

$$\Updownarrow$$

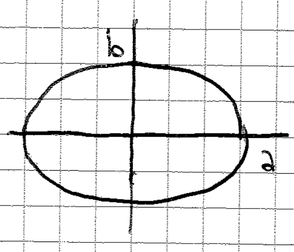
$\rho^2 \leq 1$ $\qquad$ $\rho \leq 1$ (il raggio NON può essere negativo)

$\boxed{\det J\varphi(u,v) = \rho}$ vale in tutti i casi, qualsiasi siano x_0, y_0

CAMBIO di COORDINATE: COORDINATE POLARI ASIMMETRICHE (o ELLITTICHE)



$\rightarrow$ polari



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$ non si semplifica con le coord. polari

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{divido per A}} \\ \xrightarrow{\text{divido per B}} \end{array} \begin{cases} \frac{x}{a} = \rho\cos\theta \\ \frac{y}{b} = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2$$

$$0 \leq \rho \leq 1 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det J\varphi = ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\sin^2\theta = ab\rho$$

INTEGRALI TRIPLI

10/10/2013

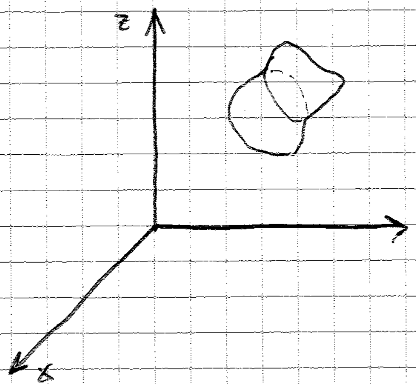
Di fatto, fare gli integrali tripli significa fare 3 integrali semplici che li compongono.

Si perde un po' quello che è il significato geometrico

Integrare significa sommare nel continuo, NON nel discreto (cose puntiformi, non continue)

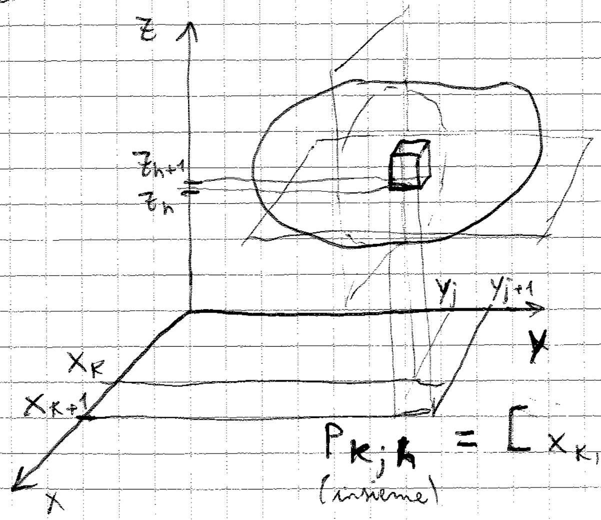
$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ COMPATTO (chiuso e limitato)

"sta dentro ad una scatola"



$f: \Omega \to \mathbb{R}$ ("DENSITÀ")

$f(x,y,z)$: densità di qualcosa (es. carica) nel punto (x,y,z)



Si prendo piani paralleli che individuano dei parallelepipedi ("cubetti")

$P_{kjh} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_h, z_{h+1}]$
(insieme)

Scelgo (a_k, b_j, c_h) punto $\in P_{kjh}$

$$Vol(P_{kjh}) = \underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{=\Delta x_k} \underbrace{(y_{j+1}-y_j)}_{=\Delta y_j} \underbrace{(z_{h+1}-z_h)}_{=\Delta z_h}$$

$$\sum_k \sum_j \sum_h f(a_k, b_j, c_h) \cdot \Delta x_k \Delta y_j \Delta z_h \to \text{APPROSSIMAZIONE}$$

4) MEDIA

Se f è continua, $\exists\ (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \int_\Omega f \, dx\,dy\,dz = f(x_0, y_0, z_0)$$

CALCOLO degli INTEGRALI TRIPLI

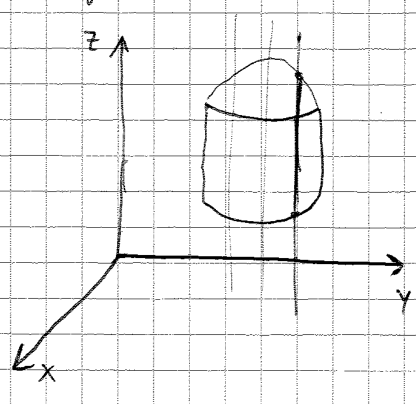
Attraverso un metodo di riduzione, lo scomponiamo in uno semplice ed uno doppio, successivamente anche il doppio in uno semplice

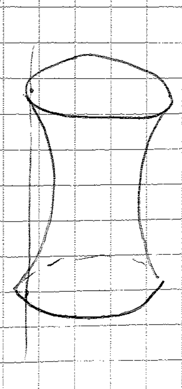
$$\int_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{COMPATTO}$$

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^3 \quad \text{CONTINUA}$$

1) Ω è "CONVESSO in z"

Ogni retta verticale taglia Ω in un segmento solo





→ NO

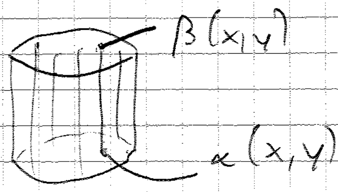
Dunque, se il dominio si può scrivere così:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \in \mathbb{R}^3,\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$$

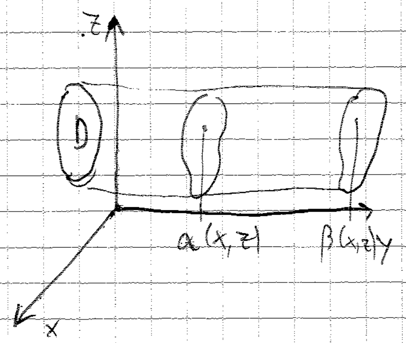
FORMULA di RIDUZIONE

$$\boxed{\int_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\,dy}$$

"Integrazione per fili"



2)



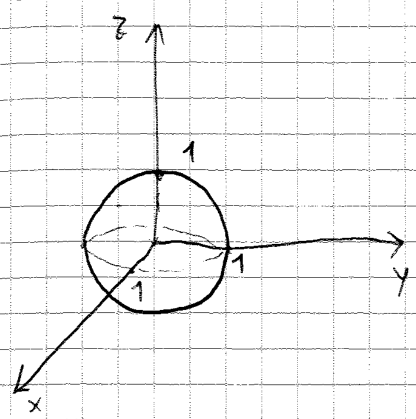
Ω è "CONVESSO in y"

$$\boxed{\int_D \left(\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)\, dy \right) dx\,dz}$$

FORMULA di RIDUZIONE

Esempio)

$$\int_{\Omega} z^2 \, dx\,dy\,dz, \quad \text{dove } \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$



Per fili

Come superfici che delimitano, prendo le 2 calotte che compongono la SFERA

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{xy} \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$x^2+y^2+z = 1 \implies z^2 = 1-x^2-y^2$$

calotta superiore

$$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

calotta inferiore

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, \; -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq +\sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

(ho dovuto riscriverlo in questa forma per adeguarlo allo calcolo dell'integrale triplo)

$$\int_{\Omega} z^2 \, dx\,dy\,dz =$$

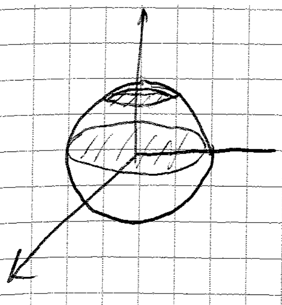
$$= \int_D \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{+\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 \, dz \right) dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 \, dz = \left[\frac{1}{3} z^3\right]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{3}(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(\;''\;)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_{\Omega} z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_D \frac{2}{3}(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \, dx\,dy$$



$$-1 \le z \le 1$$

Dato $z \in [-1, 1]$

$$D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1 - z^2\}$$

$$\int_\Omega z^2 \, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{1} \left(\int_{D_z} z^2 \, dx\, dy \right) dz = \int_{-1}^{1} z^2 \Big(\underbrace{\int_{D_z} dx\, dy}_{} \Big) dz =$$

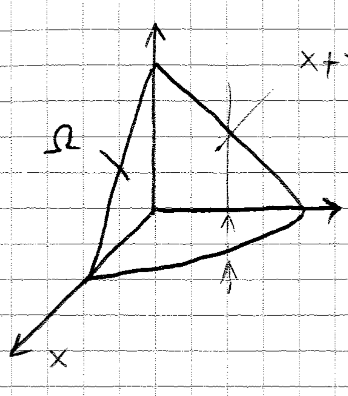
$$= \int_{-1}^{1} z^2 \, \pi (1 - z^2) \, dz = \pi \int_{-1}^{1} z^2 - z^4 \, dz =$$

area del cerchio di raggio $\sqrt{1 - z^2}$

$$= \pi \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15} \pi$$

es) Calcolare il baricentro (x_G) del Tetraedro di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Densità costante $=1$



$x+y+z=1$ (piano)

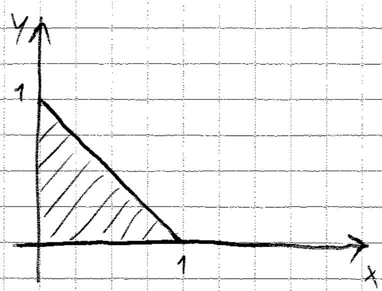
$V(\Omega)=\int_\Omega dx\,dy\,dz$ Per fili

$\Omega=\{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\ \alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y)\}$

D: $\boxed{x\ge 0}$, $\boxed{y\ge 0}$

$x+y=1$

$\boxed{y\le 1-x}$



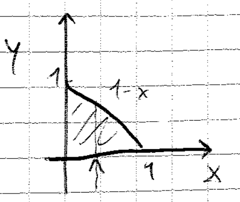
$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge0,\ y\ge0,\ y\le 1-x\}$

$\alpha(x,y)=0$ $\qquad x+y+z=1$

$\beta(x,y)$ ~~≠0~~ $\qquad z=1-x-y$

$$Vol(\Omega)=\int_\Omega dx\,dy\,dz=\int_D\left(\int_0^{1-x-y}dz\right)dx\,dy=\int_D[z]_0^{1-x-y}dx\,dy=$$

$$=\int_D 1-x-y\ dx\,dy=$$



$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}1-x-y\ dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left[y-xy-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx=$$ Per verticali

$$=\int_0^1(1-x)-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2dx=\int_0^1(1-x)(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1=-\frac{1}{6}[1-x]_0^1=\frac{1}{6}$$

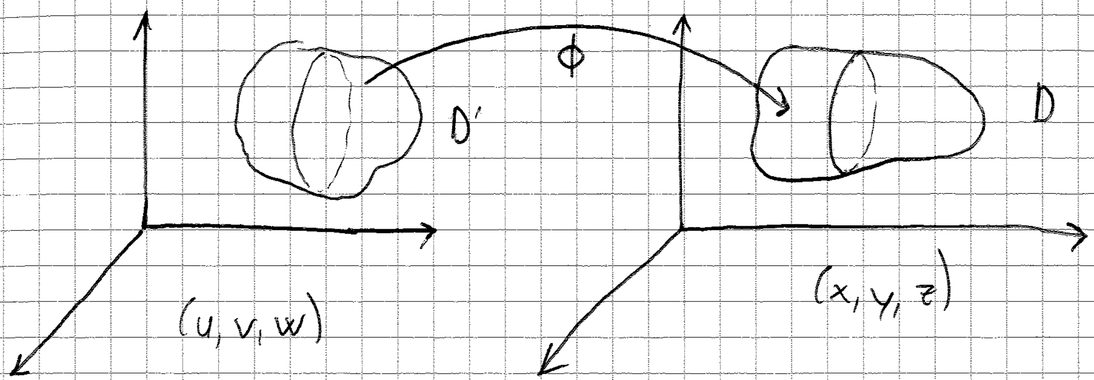
CAMBI di COORDINATE negli Integrali Tripli

16/10/2013

$\phi : D' \rightarrow D$

$D', D \subset \mathbb{R}^3$ domini di integrazione

(u,v,w) (x,y,z)



ϕ biettiva

$\phi(u,v,w) = (x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))$

Matrice Jacobiana $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & & \\ \frac{\partial z}{\partial u} & & \end{pmatrix}$

$\det J\phi$ detto "Lo Jacobiano"

$\phi \in C^1,\ \phi^{-1} \in C^1$

$\det J\phi \neq 0$ (tranne per volumi nulli)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 324

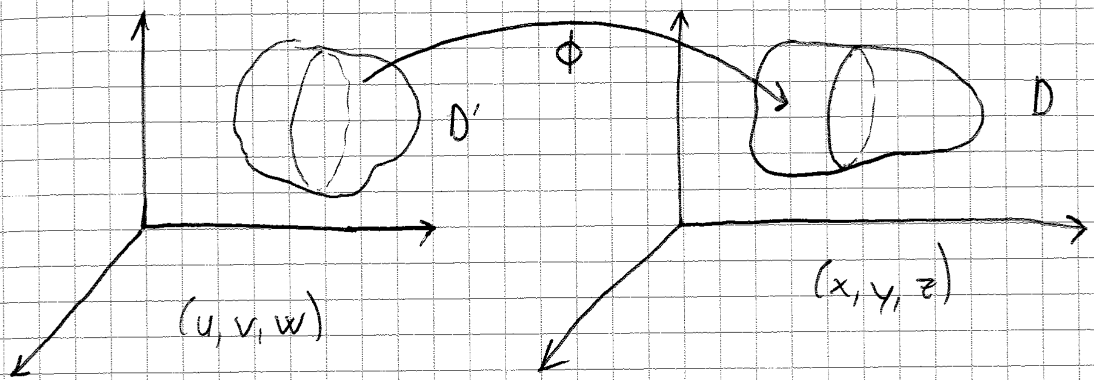
16/10/2013

CAMBI di COORDINATE negli Integrali Tripli

$\phi : D' \to D$

$D', D \subset \mathbb{R}^3$ domini di integrazione

(u,v,w) (x,y,z)



ϕ biettiva

$$\phi(u,v,w) = \big(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big)$$

Matrice Jacobiana $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & & \\ \frac{\partial z}{\partial u} & & \end{pmatrix}$

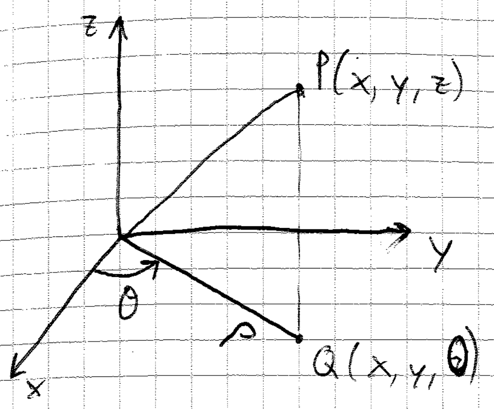
$\det J\phi$ detto "Lo Jacobiano"

$\phi \in C^1$, $\phi^{-1} \in C^1$

$\det J\phi \neq 0$ (tranne per volumi nulli)

1) COORDINATE CILINDRICHE

(In realtà ne cambiamo solo 2 di variabili)



COORD. CILINDRICHE: (ρ, θ, z)

ρ: distanza di Q (proiezione di P sul piano Oxy) dall'origine.

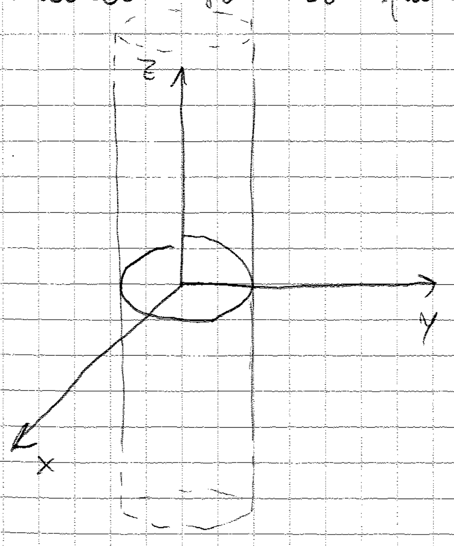
θ: angolo fra asse x e segmento OQ

$z = z$

Nel piano Oxy sono coordinate polari

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in \mathbb{R} \end{array}}$$

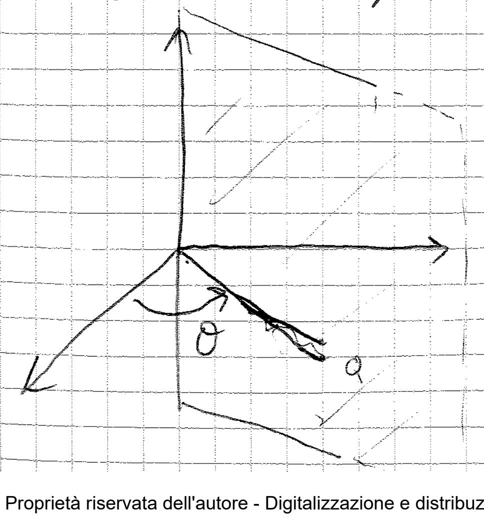
- Quali sono i punti tali che ρ = costante = R



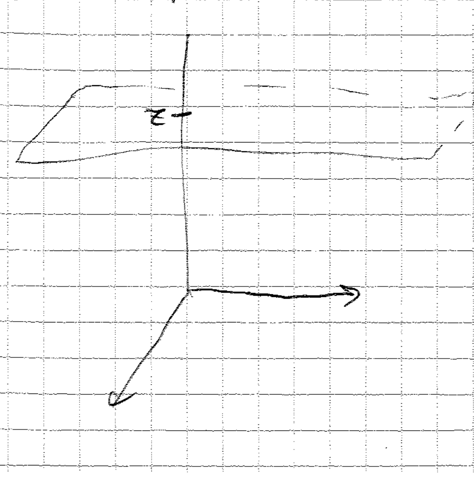
Una sorta di cilindro con altezza infinita

da cui il nome delle coordinate

- θ = costante $\Longrightarrow$ semipiano



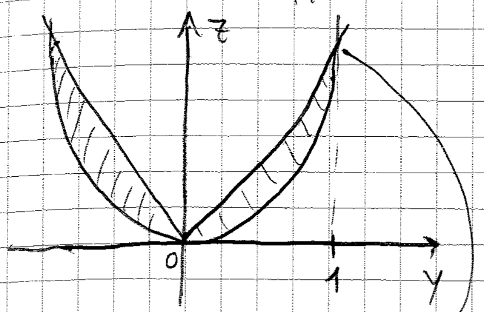
z = cost



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 324

Conviene, però, per rapidità, sezionare le figure solide con dei piani per ottenere le sezioni

Se $x = 0$ (piano Oyz)



$z \geq x^2 + y^2$

$\boxed{z \geq y^2}$

$z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \quad z \leq \sqrt{y^2} = |y|$

$|y| = z$
$z = y^2$

$\rightarrow z = y$

$y = y^2 \longrightarrow \quad y = 0$
$y = 1$

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \alpha^2 = \alpha$

$x^2 + y^2 = 1$

$0 \leq \rho \leq 1$

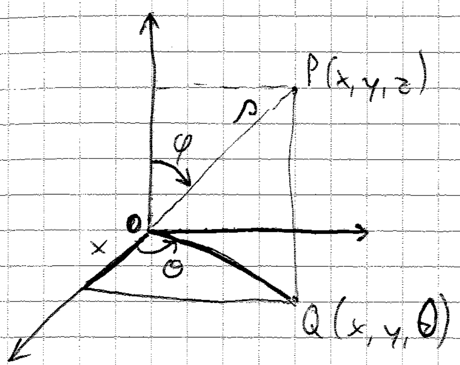
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq z \leq 1$

(continua a pag. succ.)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 324

- $\rho =$ costante $\longrightarrow$ SFERA
- $\theta =$ costante $\longrightarrow$ SEMIPIANO
- $\varphi =$ costante $\longrightarrow$ CONO



$$x = |OQ| \cos\theta$$

$$y = |OQ| \sin\theta$$

$$|OQ| = \rho \sin\varphi$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det J\phi(\rho,\theta,\varphi) = -\rho^2\sin\varphi$$

$$|\det J\phi| = \rho^2 \underbrace{\sin\varphi}$$

$\Downarrow$

φ varia tra 0 e π $\Longrightarrow$ $\sin\varphi \geq 0$

N.B. Si usano queste coordinate quando il dominio è invariante ~~rispetto~~ per rotazioni rispetto all'origine

INTEGRALI CURVILINEI

17/10/2013

RICHIAMI sulle CURVE (PARAMETRICHE) in $\mathbb{R}^n$

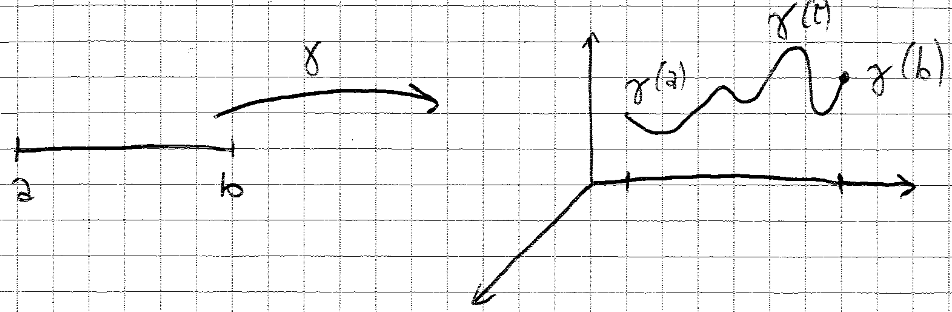
$\mathbb{R}^n \qquad x = \{x_1, \dots, x_n\}$

Una curva è una funzione

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

possiamo considerare questo parametro come il tempo



Una curva si dice di classe C^1
se $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sono funzioni C^1

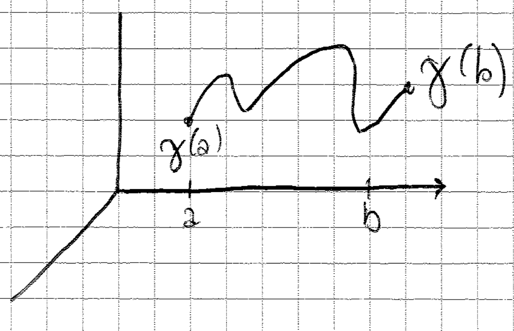


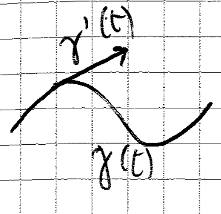
Immagine $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$
è detta SOSTEGNO

la curva è la funzione

VETTORE VELOCITÀ o VETTORE TANGENTE

$\gamma(t) \qquad \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$



$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

$\gamma'(0) = (0, R)$

Consideriamo solo CURVE "REGOLARI"

$\gamma \in C^1$

$\gamma'(t) \neq \vec{0} \qquad \forall t$

o "REGOLARI a TRATTI"

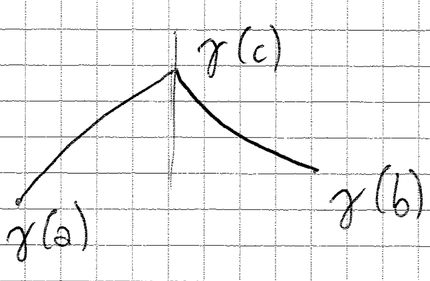
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$c \in (a,b)$

$\gamma : [a,c] \to \mathbb{R}^n$

regolari

$\gamma : [c,b] \to \mathbb{R}^n$



LUNGHEZZA di una CURVA

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare (a tratti)

Def: lunghezza di γ (più precisamente del sostegno):

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$\|\gamma'(t)\| = \|(x_1'(t), \dots, x_n'(t))\| =$$
$$= \left((x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$$

es) $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = (R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} = R$

Lungh: $\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi R$

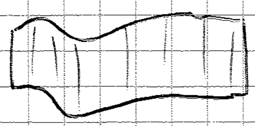
$$\int_a^b f\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right) \cdot \left((x_1'(t))^2 + \ldots + x_n'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$[a, b] \to \mathbb{R}$$

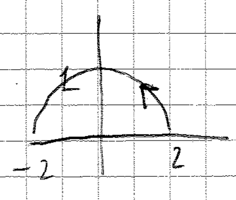
Se $f = 1$ ovunque

$$\int_\gamma ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \text{lunghezza di } \gamma$$



"h"=1

es) $\int_\gamma x^2 y \, ds$ dove γ è la semicirconf. di centro 0 e raggio 2 nel semipiano $y \geq 0$



$$f(x, y) = x^2 y$$

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$$

$$f(\gamma(t)) = f((x(t), y(t))) = f(2\cos t, 2\sin t) = \underbrace{(2\cos t)^2}_{x^2} \cdot \underbrace{\sin t}_{y}$$

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = (4\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\int_\eta f\, ds = \int_\alpha^\beta f(\eta(t)) \cdot \|\eta'(t)\|\, dt = \qquad \boxed{\eta(t) = \gamma(\varphi(t))}$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(t))\ \|\gamma'(t) \cdot \varphi'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(t)))\ \|\gamma'(\varphi(t))\| \cdot |\varphi'(t)|\, dt$$

Chiamo $\cancel{t}\, T = \varphi(t)$

$$t = \alpha \Longrightarrow T = \varphi(\alpha) = a$$
$$t = \beta \Longrightarrow T = \varphi(\beta) = b$$

$\varphi'(t) \neq 0$ per ipotesi

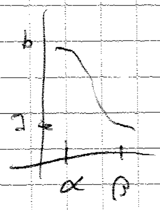
$\varphi(\alpha) = a \qquad \varphi(\beta) = b \qquad \varphi'(t) > 0$

$$|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$$

$$= \int_a^b f(\gamma(T))\ \|\gamma'(T)\|\ d\cancel{T} \quad \underbrace{\varphi'(t)\, dt}_{dT} =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(T))\|\gamma'(T)\|\, dT = \int_\gamma f\, ds$$

Anche con $\varphi' < 0$ NON cambia $\qquad \varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$



$$|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$$

$$t = \alpha \Longrightarrow T = \varphi(\alpha) = b$$
$$t = \beta \Longrightarrow T = \varphi(\beta) = a$$

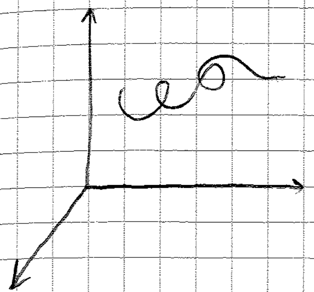
$$-\int_b^a f(\gamma(T))\ \|\gamma'(T)\|\ (+dT) = \int_a^b f(\gamma(T))\, \|\gamma'(T)\|\, dT$$

BARICENTRO di una CURVA

17/10/2013

PARTE II

FILO di densità di massa $m(x,y)$



$m(x,y,z)$

$$\int_\gamma m(x,y,z)\,ds = \text{Massa totale}$$

$$G = (x_G, y_G, z_G)$$

Def:

$$x_G = \frac{1}{\text{massa totale}} \int_\gamma x\, m(x,y,z)\,ds =$$

$$= \frac{\int_\gamma x\, m(x,y,z)\,ds}{\int_\gamma m(x,y,z)\,ds}$$

y_G, z_G si trovano allo stesso modo sostituendo nell'integrale la rispettiva coordinata.

È chiaro che è molto facile che il baricentro ricada fuori dalla curva

b) $$y_G = \frac{\int_\gamma y \, \delta \, ds}{\int_\gamma \delta \, ds} = \frac{\int_\gamma \cancel{\delta} y \, ds}{\pi R}$$

$\int_\gamma y \, ds$ $\qquad \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \qquad t \in [0, \pi]$

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = R$$

$$\int_\gamma y \, ds = \int_0^\pi \underbrace{R\sin t}_{f(\gamma)} \cdot \underbrace{R}_{\|\gamma'\|} dt = R^2 \int_0^\pi \sin t \, dt$$

$$y_G = \frac{2R^{\cancel{2}}}{\pi \cancel{R}} = \frac{2R}{\pi}$$

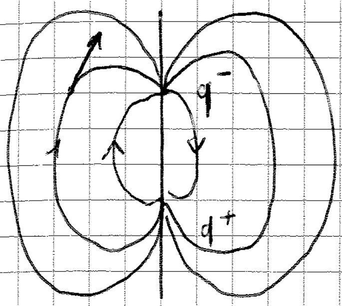
a) $\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$ $\qquad$ b) $\frac{2R}{\pi}$

$$\frac{4}{3}\frac{R}{\pi} < 2\frac{R}{\pi} \implies \text{SEMICERCHIO}$$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$E(x,y) = \left(\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \frac{2y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \right)$$

Campo di forza del DIPOLO ELETTRICO



"INTEGRARE un campo lungo una curva"

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\quad C^1$, regolare, $\gamma'(t)$ $\forall t$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CONTINUO (basta che sia definito nel dominio)

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$F(x_1, \dots, x_n) = \big(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)\big)$

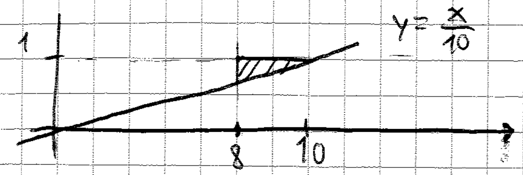
Diamo un nome al versore tangente alla curva in t (PUNTO)

$$\boxed{T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}$$

Esercizio da Esame (2012)

$$\int_D e^{-5y^2+8y}\,dx\,dy$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 8 \le x \le 10 \quad \frac{x}{10} \le y \le 1 \right\}$$



→ Per verticali

$$\int_8^{10} \left(\int_{x/10}^{1} e^{-5y^2+8y}\,dy \right) dx$$

NON esiste la PRIMITIVA!!

⇓

Proviamo per orizzontali

→ Per orizzontali

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{4}{5} \le y \le 1, \quad 8 \le x \le 10y \right\}$$

Conviene cambiare, rigirare il volume

$$\int_{4/5}^{1} \left(\int_8^{10y} e^{-5y^2+8y}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_{4/5}^{1} e^{-5y^2+8y} \left(\int_8^{10y} dx \right) dy =$$

$$= \int_{4/5}^{1} e^{-5y^2+8y}\,(10y-8)\,dy = -\int_{4/5}^{1} e^{-5y^2+8y}\,(-10y+8)\,dy =$$

$$= -e^{-5y^2+8y}\Big|_{4/5}^{1} = -e^{-5+8} + e^{-5\cdot\frac{16}{25}} = -e^{3} + e^{-\frac{16}{5}}$$

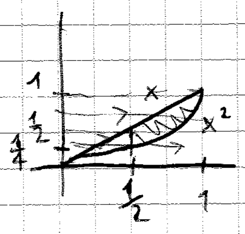
Es. n° 15

$$\int_D \frac{xe^y}{y}\,dx\,dy$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ \tfrac{1}{2}\le x\le 1,\quad x^2\le y\le x\}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{x^2}^{x}\frac{xe^y}{y}\,dy\right)dx \quad ?$$

Orizzontali



$$x=\frac{1}{2}\qquad y=x^2 \Rightarrow \qquad y=\frac{1}{4}$$

- $\frac{1}{4}\le y\le 1 \qquad\qquad y=x^2 \qquad\qquad x=\sqrt{y}$

$$\beta(y)=\sqrt{y}$$

$$\alpha(y)=\begin{cases}1/2 & \text{se } \frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{2}\\ y & \text{se } \frac{1}{2}\le y\le 1\end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\frac{xe^y}{y}\,dx\right)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{y}^{\sqrt{y}}\frac{xe^y}{y}\,dx\right)dy=$$

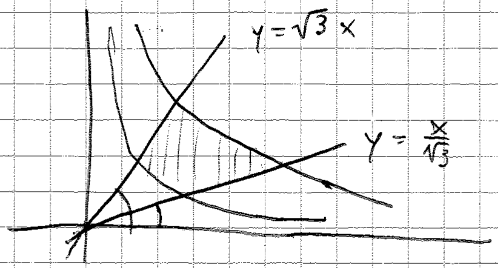
$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{e^y}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^y}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{e^y}{y}\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{8}\right)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^y}{y}\left(\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

Es. 9 foglio 2

$$\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\,dy$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x,\quad 1 \le xy \le 4 \right\}$$



Coord. polari $\quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\rho \sin\theta = \frac{1}{\rho\cos\theta} \qquad \rho^2 = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$y = \frac{4}{x} \qquad \rho^2 = \frac{4}{\sin\theta\cos\theta}$$

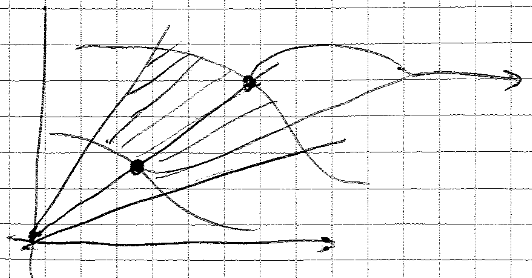
$$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} \le \rho \le \frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \rho \sin\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cancel{3}}{2}\,\frac{\pi}{\cancel{6}_2} = \frac{\pi}{4}$$

Come abbiamo fatto a trovare ρ:



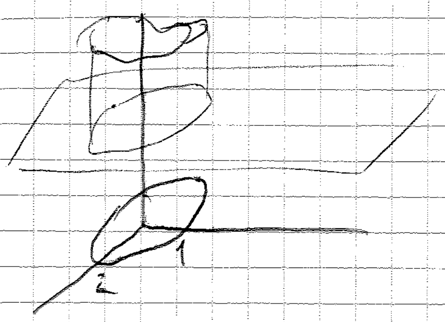
$\le \rho \le$

deve essere compreso fra le 2 funzioni

Es. 8 foglio 3

Volume di

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 12 - xy \}$$



$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

ellisse

Fili $\int_D \left(\int_1^{12-xy} dz \right) dx\,dy = \int_D (12 - xy - 1)\, dx\,dy = \int_D (11 - xy)\, dx\,dy$

Coord. ELLITTICHE $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \text{infatti} \quad \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(11 - \underbrace{2\rho\cos\theta}_{x} \cdot \underbrace{\rho\sin\theta}_{y}\Big) \cdot \underbrace{ab}_{=2}\,\rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 22\rho\, d\rho\, d\theta - \underbrace{4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3 \cos\theta\sin\theta\, d\rho\, d\theta}_{=0} =$$

$$= \left[2\pi \; 22 \; \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \cancel{2}\pi \cdot 22 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 22\pi$$

Esempio)

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$F(x,y,z) = (e^x, x+y, y+z)$

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3 \qquad \gamma(t) = (\underset{x}{t}, \underset{y}{t^2}, \underset{z}{t^3})$

Calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$

$$\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$F(\gamma(t)) = (e^t, t+t^2, t^2+t^3)$

$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (e^t, t+t^2, t^2+t^3) \cdot (1, 2t, 3t^2) =$

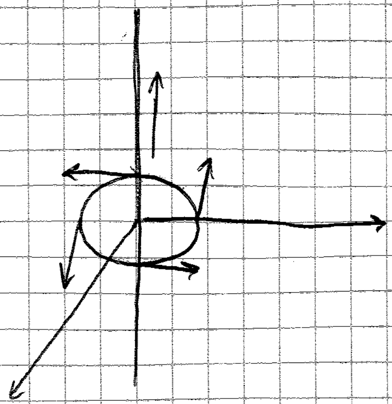
$= e^t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 (e^t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5)\, dt =$$

$$= e - 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = e + \frac{19}{15}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 324

Esempio) Conduttore rettilineo nel quale scorre corrente continua



$$B(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

Calcolare il lavoro compiuto dal campo magnetico se una carica percorre una cfr. di raggio 1, centro nel piano xy

$$L = \int_\gamma B \cdot dP \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$B(\gamma(t)) = \left(-\frac{\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}, 0\right) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\int_\gamma B \cdot dP = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

$$= \int_b^a F(\gamma(s)) \cdot (-\gamma'(s))\,(-ds) = \int_b^a F(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds =$$

$$= -\int_a^b F(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma F \cdot dP$$

→ Se γ è CHIUSA, si indica così:

$$\oint_\gamma F \cdot dP$$ ed è detto CIRCUITAZIONE di F lungo γ

CAMPI CONSERVATIVI

$F: A \to \mathbb{R}^n \qquad A \subset \mathbb{R}^n$ aperto

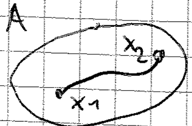
$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Def: Un sottoinsieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice CONNESSO se:

Dati due punti qualunque in A, esiste una curva continua che li connette

Il sostegno della curva deve stare in A

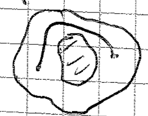
A



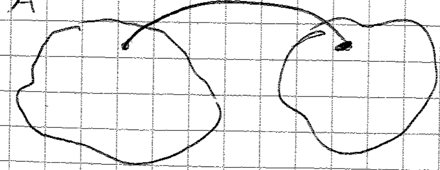
$\gamma : [a, b] \to A$ CONTINUA

$\gamma(a) = x_1 \quad , \quad \gamma(b) = x_2$

CONNESSI



A



Si considereranno sempre CURVE REGOLARI a TRATTI

NON connesso

$F(x,y,z) = (e^{y+z^2}, x e^{y+z^2}, 2xz e^{y+z^2})$, $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

F è CONSERVATIVO

$U(x,y,z) = x e^{y+z^2}$

$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{y+z^2} = F_1$ dove $\nabla U = F$

$\frac{\partial U}{\partial y} = x e^{y+z^2} = F_2$ $\forall c$

$\frac{\partial U}{\partial z} = 2xz e^{y+z^2} = F_3$

In $\mathbb{R}^2$ $U(x,y)$ $\nabla U(x,y) = (F_1, F_2)$

$F(x,y) = (xy^2, y)$

Se fosse $F = \nabla U$ $\frac{\partial U}{\partial x} = xy^2$ $\frac{\partial U}{\partial y} = y$

$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 2xy$ $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$

DERIVATE MISTE: sono diverse, non esiste una fz. derivabile tale che le derivate miste siano diverse

$\downarrow$

CAMPO NON CONSERVATIVO

24/10/2013

CAMPI CONSERVATIVI: REPRISE

$F: A \to \mathbb{R}^n \qquad A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, A connesso

Def: F si dice conservativo se esiste

$U: A \to \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla U(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$$

$$\forall j = 1, \dots, n \qquad \frac{\partial U}{\partial x_j} = F_j$$

U è detta "potenziale"

Attraverso le equaz. del moto, vediamo che l'energia potenziale associata si conserva, capiamo così l'aggettivo che segue campo

---

Calcolo del Lavoro per un Campo Conservativo

T: Sia $F: A \to \mathbb{R}^3$ conservativo

A aperto e connesso $\subset \mathbb{R}^3$

Sia $\gamma: [a, b] \to A$ regolare

Sia U un potenziale di F

Allora

$$\int_\gamma F \cdot dP = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

Per un campo conservativo il lavoro lungo γ è la differenza di Potenziale agli estremi di γ.

2 PROBLEMI

1) Se F è Conservativa, come calcolo del Potenziale.
2) Come vediamo che il campo è Conservativo

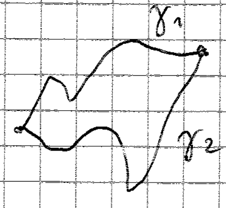
$\boxed{T}$: Sia $F: A \to \mathbb{R}^3$, A aperto e connesso.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti (una implica l'altra)

1) F è conservativo

2) Date 2 curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi,

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$



3) Se γ è chiusa: $\oint_{\gamma} F \cdot dP = 0$

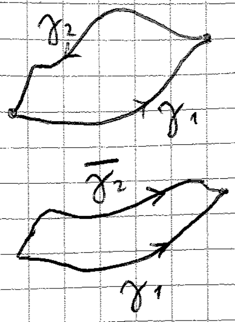
DIM: 1) → 2) FATTO

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = U(\gamma_1(b)) - U(\gamma_1(a)) =$$

$$= U(\gamma_2(b)) - U(\gamma_2(a)) = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

3) $\Longrightarrow$ 2)

Sappiamo che $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$



Definiamo una curva γ, poi γ_1 e γ_2

$$\oint_\gamma F \cdot dP = 0$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\bar{\gamma}_2} F \cdot dP = 0$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 0$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

2) $\Longrightarrow$ 1)

Difficile $\Longrightarrow$ No

N.B: Attenzione! Se $F = \nabla U$, vuol dire che è conservativo $\Longrightarrow$ il calcolo del lavoro risulta notevolmente semplificato

$\gamma_1(t) = (t, 0, 0) \qquad t \in [0, x]$

$\gamma_2(t) = (x, t, 0) \qquad t \in [0, y]$

$\gamma_3(t) = (x, y, t) \qquad t \in [0, z]$

$$U(x,y,z) = \int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP$$

$F(x, y, z) = (2xy \sin z,\ x^2 \sin z,\ x^2 y \cos z)$

$F(\gamma_1(t)) = (0, 0, 0) \qquad \int_{\gamma_1} F \cdot dP = 0$

$F(\gamma_2(t)) = (0, 0, x^2 t)$

$\gamma'_2(t) = (0, 1, 0) \qquad F(\gamma_2) \cdot \gamma'_2 = 0$

$\int_{\gamma_2} F(\gamma_2) \cdot \gamma'_2 = 0 \quad \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 0$

$F(\gamma_3(t)) = (2xy \sin t,\ x^2 \sin t,\ x^2 y \cos t)$

$\gamma'_3(t) = (0, 0, 1)$

$F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma'_3(t) = x^2 y \cos t$

$\int_{\gamma_3} F \cdot dP = \int_0^z$

$= x^2 y \sin z \qquad U(x, y, z)$

Verificare che $\nabla U = F$: è un ottimo metodo per vedere se è corretto