NUMERO: 837

DATA: 25/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Chirico

MATERIA: Geometria

Prof. Musso

Geometria cap. vol (1.1) Valabrega

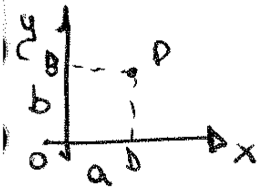
s.1

▷ coordinate cartesiane

dati il piano π e pto O, e due rette r e s passanti per O

- $r \perp s$
- r e s orientate / semiretta positiva r si sovrappone a s con rotazione antioraria di $\pi/2$
- stessa u. di misura

r e s → assi coordinati → ho fissato un sistema di coordinate.

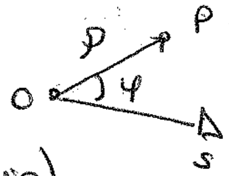


$\underbrace{a, b}_{\text{coordinate}}$ misure con segno di $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$

corrispondenza biunivoca punti - coppie ordinate di numeri

▷ coordinate polari

- punto O (polo)
- semiretta s uscente da O (asse polare)



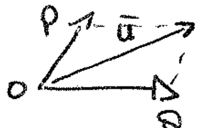
P { → angolo φ (senso antiorario)
→ dist. ρ

- vettore applicato in O: segmento orientato $\vec{OP}$, $P \neq O$
  - direzione
  - verso
  - modulo $|v|$

$\vec{OP}$ (simbolo convenzionale)

- somma di vettori

$\bar{v}$ e $\bar{w}$ due vettori applicati in O



$\bar{v} + \bar{w} = \bar{u} = \bar{w} + \bar{v}$ (commutativa)

vettore nullo: $\bar{0}$ $\quad \bar{v} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{v} = \bar{v}$

- l'opposto: stessa direzione, stesso modulo, verso opposto $(-\bar{v})$

$\bar{v} + (-\bar{v}) = 0$

- differenza di vettori

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 68

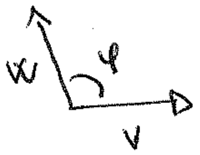
Teo v e w sono // $\Leftrightarrow$ $\exists\, t \in \mathbb{R} \mid \bar{w} = t\bar{v}$, $t \neq 0$

$t > 0 \rightarrow$ stesso verso

$t < 0 \rightarrow$ verso opposto

• Prodotto scalare

$v = \overline{OP}$ $w = \overline{OQ}$ $\neq 0$ e non //



$\hat{vw} = \varphi$

$\varphi = 0 \rightarrow$ = verso

$\varphi = \pi \rightarrow$ verso opposto

$v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos\varphi = v_x w_x + v_y w_y$

- $v \cdot w > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \varphi < \pi/2$
- $v \cdot w = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2$
- $v \cdot w < 0 \Leftrightarrow \pi/2 < \varphi \leq \pi$

P1) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$ P2) $(a\bar{v})\bar{w} = a(\bar{v}\bar{w})$

P3) $\bar{v}(\bar{w} + \bar{z}) = \bar{v}\bar{w} + \bar{v}\bar{z}$

• Angolo tra vettori

$$\cos \hat{vw} = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

$v \perp w \rightarrow \varphi = \pi/2$

▷ Vettori liberi: insieme di tutti i segmenti orientati, aventi stessa direzione e lunghezza

↳ posso spostarli rigidamente

$P - O$: vettore libero

$\overline{OP}$: vettore applicato in O

per farci operazioni li applico in uno stesso punto.

Somma $\rightarrow$ regola della poligonale, v_n si applica con coda coincidente a punta v_{n-1}

Teo: $\forall$ vettore di $\mathbb{R}^2$ v:

$$v = v_x i + v_y j$$

CAP. (1.2)

sistema di coordinate cartesiane su r

- orientamento di r
- pto $O \in r$, origine
- unità di misura delle lunghezze

Coordinate cilindriche
- piano z con coordinate polari $(O; \rho)$
- z, retta, passante per O, $\perp$ ad α

$P(\underbrace{\rho; \vartheta}_{\text{coord. polari proiez. ortogonale di } P \text{ su } \alpha}; z)$ → quota di P

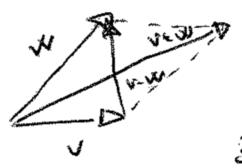
coord. polari proiez. ortogonale di P su α

Vettori di $\mathbb{R}^3$

segmento orientato → ordine degli estremi
vettore applicato in O: segmento orientato OP, $P \neq O$
versore → vettore con modulo $= 1$
somma vettori → regola parallelogramma
→ elemento neutro somma

opposto di vettore: $-\bar{V}$
$\bar{V} + (-\bar{V}) = 0$

- differenza tra vettori
$\bar{V} + (-\bar{W})$



Somma vettori

NB ⇒
1) $v + w = w + v$
2) $(v+w)+z = (z+v)+w$
3) $v + 0 = v$ ∃ elem. neutro
4) $v + (-v) = 0$ ∃ opposto.

3 vettori → parallelepipedo.

Prodotto: $a \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$
- $|av| = |a| \cdot |v|$
- direz. av = direz. v
- verso di av:
  - uguale a verso v, $a > 0$
  - opposto a verso v, $a < 0$

u: normalizzato di v
$u = \text{norm}(v) = \text{vers}(v)$

Prodotto vettore
1) $a(bv) = (ab)v$
2) $1 \cdot v = v$
3) $(a+b)v = av + bv$
4) $a(v+w) = av + aw$

insieme dei vettori dello spazio applicati in O è uno spazio vettoriale rispetto a somma e prodotto. → V_3

Due vettori sono uguali se hanno le componenti ordinatamente uguali

Proiezione di un vettore su un piano

$\vec{v}$, π piano per O

$v_\pi = \overrightarrow{OP'}$, P' proiez. ort. di P su π

$v_\pi = 0 \Rightarrow$ v nullo V $v \perp a\ \pi$

r e s rette $\perp$, $\in \pi$, $v_\pi = v_1 + v_s$

Prodotto Vettoriale

$v, w \neq \vec{0}$ e non $\parallel$

$\boxed{|v \times w|} = \boxed{|v||w| \operatorname{sen} \hat{vw}}$

- direz $\perp$ a piano v e w
- verso $\Rightarrow$ regola mano dx

1) $v \times w = -w \times v$

2) $(av) \times w = a(v \times w)$

3) $v \times (w+z) = v \times w + v \times z$

4) $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$

5) $(u \times (v \times w)) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$

Teo:

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Prodotto misto

$\boxed{v \wedge w \cdot u}$ $\Rightarrow$ volume del parallelepipedo individuato da 3 vettori

$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Scambio tra i vettori nel loro ordine

$\Rightarrow$ cambio segno

$\Rightarrow v \wedge w \cdot u = 0 \Rightarrow$ vettori complanari

Proiezione di $\vec{v}$ su un piano

$$v_\pi = v - \frac{v \cdot w \wedge z}{|w \wedge z|^2} \cdot w \wedge z,$$ w e z vettori $\parallel$ a π, ma non $w \parallel z$

$\Rightarrow$ vettori liberi

AB equipollente BC se stessa lunghezza

Cap (2.1)

Spazio vettoriale: dato K, insieme numerico non vuoto e V un insieme, V è un K-spazio vettoriale

- V ha operaz. di somma e prodotto con alcune proprietà, che mandano elem. di V.

$0_K v = 0_V$

4) V un K-spazio vettoriale, $a \in \mathbb{K}$, $v \in V$

i) $-(a\vec{v}) = (-a)\vec{v}$

ii) $-(a\vec{v}) = a(-\vec{v})$

iii) $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$

Somma di più vettori: posso raggrupparli in modo arbitrario

Sottospazi vettoriali

Dato V spazio vett. sul campo $\mathbb{K}$, $\exists A \subseteq V$ che "eredita" da V struttura di spazio vettoriale, A è un sottospazio

Def. Dato V un K-spazio vettoriale, un sottospazio di V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ rispetto alle operazioni definite su V

- $\vec{v}$ e $\vec{w} \in W \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in W$
- $\vec{v} \in W \Rightarrow a\vec{v}$, $a \in \mathbb{K}$, $\in W$
- $0_V \in W$

NB: un sottospazio vettoriale non è mai vuoto

Es$_1$: $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$

$\vec{v} = (x; y)$ $\quad \vec{w}\ (x'; y')$

a) $\vec{v} + \vec{w} = \underbrace{2x - y}_{0} + \underbrace{2x' - y'}_{0} = 0$

b) $a\vec{v} \in W$ $\quad a\underbrace{(2x - y)}_{=0} = \overset{0}{0}$

c) $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in W$

Es$_2$: $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ non è sottosp. vett.

$(0, 0) \notin W$.

Dato V, spazio vett. su $\mathbb{K}$

sottospazi banali: $\{0\}$ il solo vett. nullo

V tutto sp. vettoriale

→ Intersezione di due sottospazi $W \cap Z = V$ è ancora un sottospazio

$0_V \in W$ e $0_V \in Z \rightarrow 0_V \in V$

▷ Somma di sottospazi

$W + Z = \{ w + z \mid w \in W; z \in Z \} \rightarrow$ sottospazio di V

insieme di elementi di V che posso scrivere come somma di elementi di W e Z

Dim: $V \cap W = \{0\}$

$A = {}^tA \quad {}^tA = -A \quad A = -A \quad A = 0 \Rightarrow V \cap W = \{0\}$

Prodotto Righe per colonne:

$A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$, $B = (b_{ij}) \in K^{n,p}$

n° colonne 1ª = n° righe

$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + \dots$ prendo riga i-esima di A e colonna j-esima di B → faccio prodotti termini corrispondenti e li sommo

$$\begin{pmatrix} \dots \\ a_{i1} \dots a_{in} \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots c_{ij} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$A \in K^{m,n}$, $B \in K^{p,q}$

- $AB \; \exists \Rightarrow n = p$
- $AB \in K^{m,q}$

p1) $(AB)C = (AC)B$

p2) $A(B+C) = AB + AC$

p3) $(A+B)C = AC + BC$

p4) $a(AB) = (aA)B$

p5) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Matrice identica: $n \times n$, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1 su diagonale, zero altrove

* $AI = A$
* $IA = A$

L'inversa: $A^{-1} \mid A \cdot A^{-1} = I$

se A, B invertibili → AB è invertibile

→ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Cap (3.1)

Combinazione lineare: siano $v_1, \dots, v_n \in V$. $v \in V$ è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ se $\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ → insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$

Teorema: $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \in V$, $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n)$ è il + piccolo sottospazio di $V \subset \vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$

- $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \in \mathcal{L}(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$
- $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n)$ è sottospazio V

• Se W è sott. di V e $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \in W \Rightarrow \mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n) \subseteq W$

Teorema, $\exists$ di una base: ogni insieme finito di generatori di V contiene una B_V

Dim: $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ $\rightarrow$ trovo una base con metodo degli scarti

Teo: V K-spazio vett. finit. generato $\Rightarrow$ ogni insieme libero ordinato di elementi di V è contenuto in una base.
ogni ins. libero si può "completare" ad una base

Dim: $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m \in V$, l. i.

$\mathcal{L}(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) = V$

$\vec{v}_1, \vec{e}_1 \dots \vec{v}_m, \vec{e}_n$ generano V $\rightarrow$ con metodo degli scarti estraggo base

$\hookrightarrow$ scarto solo $\vec{e}_i$, mai $\vec{v}_i$

Lemma 1: Sia V un K sp. vett. non nullo, (di Steinitz)

$\underbrace{\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}}$ e $\underbrace{\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m\}}$ sottoinsiemi di V

sott. di generatori e insieme libero $\Rightarrow m \leq n$

Teo: V è K-sp. vett. ha base $E = (e_1, \dots, e_n)$ allora ogni base di V ha n elementi

Dim: $F = (f_1 \dots f_m)$ un'altra base di V

F è insieme libero

E è un ins. di generatori

per lemma 1 $\rightarrow m \leq n$

$\hookrightarrow$ scambio ruoli di F e E $\rightarrow n \leq m \rightarrow m = n$

Def. il K-sp vett. V ha <u>dimensione</u> n se V ha base fatta di n elementi

$\hookrightarrow \dim V$ $\qquad \dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\qquad \dim K^{m,n} = mn$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

$\hookrightarrow$ n gradi di libertà

Teo V K-sp. vett: dim. n $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m \in V$

- $\bar{x}_1, \dots \bar{x}_m$ sono l. i. $\Rightarrow m \leq n$
- $m > n \Rightarrow \bar{x}_1 \dots \bar{x}_m$ sono l. d.
- $V = \mathcal{L}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_m) \Rightarrow m \geq n$
- $m < n \Rightarrow \bar{x}_1 \dots \bar{x}_m$ non possono generare V

Cor. $\dim V = n$ $\quad E = (e_1, \dots, e_n)$ insieme di elem di V
sono equivalenti:

- E base di V
- E libero
- E genera V

Dim: a) ⇒ b)

Se somma diretta $w \in V_1 + \dots + V_m$, $\exists!$ $w = v_1 + \dots + v_m$

$v_1 = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, $e_1 \dots e_n \in \mathcal{B}_1$

↳ si scrive in modo unico.

...... $v_m = a_1 e_{n+1} + \dots + a_n e_m$ $\in \mathcal{B}_m$

⇒ w si scrive in modo unico come comb. lin di elementi $\in B_1 \cup \dots \cup B_m$.

Cor: V sp. vet. $\mathcal{B}$, base di V.

$B = B_1 \cup \dots \cup B_m$, unione disgiunta

$V_1 = \mathcal{L}(B_1) \dots$ $V_m = \mathcal{L}(B_m)$

$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$

Cor: V sp. vet. $V_1 \dots V_m$ sottosp.

$\dim(V_1) + \dots + \dim(V_m) > \dim V$ ⇒ $V_1 + \dots + V_m$ non è diretta

⇒ Spazi vettoriali non finitamente generati

↳ dimensione infinita

Es: $\mathbb{R}[X]$, tutti i polinomi in variabile X

Cap (0.2)

Geometria piana

2 pti ⇒ 1 retta

2 rette ⇒ 1 pto ⇒ incidenti

fascio improprio ⇒ tutte rette //

Geometria spaziale

2 piani ⇒ 1 retta

3 pti non allineati ∨ 1 pto e 1 retta ⇒ 1 piano

retta e piano ⇒ 1 pto

2 rette ⇒ complanari

↳ sghembe

Cap (1,2)

Cambiamenti di coordinate:

$Oxy \to O'XY$

↳ base $(\vec{i}, \vec{j})$ la base ortonormale $(\vec{J}, \vec{I})$, si sovrappone a $(\vec{i}, \vec{j})$ con rotazione di $\pi/2$

$R_1 = p_{11} v_1 + \dots + p_{1r} v_r$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = c_{11} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \dots \\ p_{m1} \end{pmatrix} + \dots$$

$C = \mathcal{L}(w_1 \dots w_r)$

$\dim C \leq r = \dim R$

<u>Rango</u>: è numero $\rho(A) = \dim(R_A) = \dim(C_A)$

↳ uguale al max numero di righe/colonne l.i.

<u>ES</u>:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
spazio righe è $\mathbb{R}^2 \to \dim 2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to$ l.i $\to \dim 2$. Rango = 2

per calcolare il rango → <u>metodo della Riduzione</u>,

<u>matrice ridotta per righe</u>: in ∀ riga non nulla di A c'è un elemento non nullo al di sotto del quale ci sono solo zeri (elemento speciale)

<u>ES</u>:
$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & 2 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema del rango: righe non nulle di una matrice ridotta sono lin. ind.

↳ il loro numero è rango di A.

<u>Dim</u> prime r righe non nulle.

$a_{1j} \dots a_{rj}$ elem. speciali

$x_1(a_{11}, \dots a_{1m}) + \dots + x_r(a_{r1} \dots a_{rm}) = 0$

↳ $x_1 a_{1h} = 0$

$x_2(a_{21}, \dots a_{2m}) + \dots = 0$

$x_2 a_{2j_2} = 0$

...... tutti coeff. $x_n = 0 \to$ sono l.i.

<u>Def</u>: $A \in K^{m,n}$ ridurre per righe vuol dire trovare A' |
- $A' \in K^{m,n}$
- A' rid. per righe
- A e A' stesso spazio righe.

per ridurre posso usare <u>3 trasformazioni elementari</u>

E1) sommo ad riga, di riga ≠ moltiplicata per una costante
- non cambia spazio delle righe
- $a_{ij} \neq 0$, con $R_j \to R_j + x R_i$ posso annullare gli elementi della colonna j-esima ≠ da a_{ij}

Cap (5,2) Geometria differenziale.

Funzione vettoriale:

$P: I \to \mathbb{R}^3$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ | $P = P(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\lim_{t \to t_0} P(t) = P_0 \; \iff \; \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0$

limiti di funzioni vettoriali si calcolano per componenti

Derivata (per componenti)

$P'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{P(t) - P(t_0)}{t - t_0} \qquad P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

1) $(P(t) \cdot Q(t))' = P'(t)\, Q(t) + Q'(t)\, P(t)$

2) $(P(t) \times Q(t))' = P'(t) \times Q(t) + Q'(t) \times P'(t)$

$\frac{d}{dt} |P(t)| = \frac{P(t) \cdot P'(t)}{|P(t)|}$ se $|P(t)|$ è costante, $P(t) \cdot P'(t) = 0$, $P(t) \perp P'(t)$

NB: posso approssimarla con formula di Taylor come una funzione normale.

Curva Regolare

- $P = P(t)$ è iniettiva
- $P(t)$ è C^∞
- $P'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in I$.

Es: retta; circonferenza; elica circolare; ellisse; iperbole; parabola

cambiamenti di parametro (regolari)

$t = t(s)$ | $J = (c; d) \to I = (a, b)$

- $t(s)$ suriettiva
- $t(s)$ è C^∞
- $t'(s) \neq 0 \;\; \forall s \in J$.

Teo: $P = P(t)$ parametrizzazione regolare per α e $t = t(s)$ (curva) un cambiamento regolare di parametro, allora $P = P(t(s))$ è una parametrizzazione regolare per α.

OSS: Date due rappr. regolari di una curva posso trovare un cambiamento di parametro regolare che ci permette di passare dall'una all'altra

Retta Tangente ad α in $P_0 = P(t_0)$ retta passante per P_0 e // al vettore $P'(t_0)$

Versore binormale: $b(t) = t(t) \times n(t)$

$\perp$ a $\bar{t}$ e a $\bar{n}$.

$b(t) = \text{vers}(P'(t) \times P''(t))$

$\bar{n} = \bar{b} \times \bar{t}$

Triedro fondamentale

si individua terna versori liberi $\bar{t}(t)$; $\bar{n}(t)$; $\bar{b}(t)$

le triedro fondamentale di $\mathcal{L}$ - $P(t)$ e la terna

$t(t)$; $n(t)$; $b(t)$

che forma una base ortonormale antioraria di V_3

3 Rette:

* $P = \bar{t}(t_0)u + P(t_0)$ retta tangente
* $P = \bar{n}(t_0)u + P(t_0)$ retta normale principale
* $P = \bar{b}(t_0)u + P(t_0)$ retta binormale

Piano osculatore:

π_0 : passa per $P = P(t)$ $\in \mathcal{L}$ e per la tg t a $\mathcal{L}$ in P_0,

π_0 è // a $P'(t_0)$ e a $P''(t_0)$.

$\exists$ per curve biregolari.

$(P - P_0) \cdot P'(t_0) \times P''(t_0) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Verifica se una curva è piana: $\forall t \in I$.

- $t(t)$ e $n(t)$ sono // a π e $b(t) \perp$ a π
- π coincide con il piano osculatore
- tg e norm a $\mathcal{L} \in \pi$, binorm. è $\perp$ a π

$\to$ da identità intersecata con piano osculatore.

Piano rettificante: piano per P_0 $\perp$ a $\bar{m}(t)$

$(P - P(t_0)) \cdot \bar{m}(t_0) = 0$

$\forall$ pto di una curva biregolare $\exists$:

- 3 versori
- 3 rette
- 3 piani

Orientamento di una curva:

$P(t_2)$ precede $P(t_1)$ sse. $t_2 < t_1$

Teorema: Sia α curva regolare, $t \in (a,b)$, sia t_0 fissato

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\rho'(u)|\, du$$

- $s(t)$ è strettamente crescente quindi invertibile
- $t(s) = s^{-1}(t)$ è un cambiamento regolare
- $\rho = \rho(t(s))$ è intrinseca

Cap (6,1) Applicazioni lineari

applicazione: legge che ad $a \in A$ associa un solo $b \in B$

Applicaz. lineare: V e W due sp. vett. su $\mathbb{K}$. $f: V \to W$ un'app. è lineare se:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(ax) = a f(x)$

μ_A: moltiplicazione per A

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ matr, $\mu_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è app. lin.

$$\mu_A(X) = AX \qquad X \in \mathbb{K}^n$$

vettori - componenti è app. lineare

app. lineari: derivata, integrale

Proprietà:

- $f(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) = a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n)$
- $f(0_V) = 0_W$
- $f(-v) = -f(v)$

Operazioni

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ è app. lineare

$(af)(x) = af(x)$ è app. lineare

$\mathcal{L}(V,W)$ insieme di tutte le applicazioni lineari: è sp. vett.

$f: A \to B \qquad g: B \to C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è app. lineare

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$

$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f \qquad a(g \circ f) = (ag) \circ f = g \circ (af)$

Nucleo: di f è l'insieme di tutti quegli elementi di V che hanno per immagine 0_W

$$\operatorname{Ker} f = \{ x \in V \mid f(x) = 0_W \}$$

φ' si può estendere ad una a.l. $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$\exists$ alm. una $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ $\varphi(x) = \varphi'(x)$ $\forall x \in V'$

app. lineare associata a una matrice:

1) $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $z_1 \dots z_n$ vett. $\mathbb{W}$ con comp. date dalle colonne di A

$f : \mathbb{V} \to \mathbb{W} \mid f(e_1) = z_1 \dots f(e_n) = z_n$

f è a.l. associata con E ed F (basi)

2) def: = $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ a.l. $f(e_1) \dots f(e_n) \in \mathbb{W}$. componenti di $f(e_1) \dots f(e_n)$ rispetto base F, su colonne matrici

$\Rightarrow$ matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

Teo: dati K sp. vett. $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, le basi E di $\mathbb{V}$ e F di $\mathbb{W}$, 1 e 2 danno corrisp. biunivoca fra $\mathbb{K}^{m,n}$ e $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Oss 1 data $A \in K^{m,n}$ $\exists \infty$ appl. lineari associate, dipendono

$\triangleright$ da $\mathbb{V}$, sp. vett. di $\dim(V) = n$

$\triangleright$ base E di $\mathbb{V}$

$\triangleright$ $\mathbb{W}$, $\dim \mathbb{W} = m$

$\triangleright$ base F di $\mathbb{W}$

NB: $\mathbb{V} = K^n$ e $\mathbb{W} = K^m$

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sp vett. φ, ψ a.l. da $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ E, F basi di $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$.

$$M^{E,F}_{\varphi+\psi} = M^{E,F}_{\varphi} + M^{E,F}_{\psi}$$

$$M^{E,F}_{a\varphi} = a M^{E,F}_{\varphi}$$

$$M^{E,G}_{\psi\circ\varphi} = (M^{F,G}_{\psi})(M^{E,F}_{\varphi})$$

f $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ è isomorfismo sse. A è invertibile

- Im f è generata dai vett. i cui aventi le comp. rispetto a F le colonne di A
- Im f è isomorfo allo spazio colonne
- Dim Im f = $\rho(A)$. rango di A
- Suriettiva sse Im f = $\rho(A)$ = dim $\mathbb{W}$

$\hookrightarrow$ righe di A sono l.i.

Teo: $Z \subset \mathbb{K}^n$ spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$

1) isomorfismo $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{V}$

$(x_1 \dots x_n) \to x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

si associa a $Z \to \ker f$

Teorema Rouchè Capelli

1) $AX = B$ risolubile sse.
$\rho(A|B) = \rho(A)$

2) $AX = B$ risolubile, se $p = \rho(A)$ colonne di A sono l.i.
$n-p \rightarrow$ variabili assegn. liberamente.
$p \rightarrow$ assegnate, determinate
Ha ∞^{n-p} soluz.

∘ Sistema lineare $\rightarrow$ riduco matrice associata, trovo facilmente soluzioni

fortemente ridotto: A è rid. per righe se $a_{ij} \neq 0$ elem. spec. e elementi sopra sono nulli

Metodo di pivoting (?) sist. lineari

1) $\rho(A) < \rho(A|B) \rightarrow$ non risolubile

2) $\rho(A) = \rho(A|B)$
si riduce + sostituzione

Sist. lin. equivalenti: cond. stesse soluzioni
$\hookrightarrow$ se riduco sist. lin. non cambia spazio soluzioni

$\triangleright$ Sistema lineare omogeneo: se $B = \hat{O}$
Sistema di $\mathbb{K}^n$, di dimensione $n-p$
$\hookrightarrow$ ins. soluz è sottosp. di $\mathbb{K}^n$

∘ soluzione generale
$AX = B$ $\quad Y_0$ è soluz. del sistema

$\boxed{\cancel{Y = Y_0 + Z}}$
$\hookrightarrow$ soluz. sist. omogeneo associato.

Teo: A invert. $\rightarrow CA = I \rightarrow CA = AB = I \rightarrow A$ ha rango n
$A \in \mathbb{K}^{n,n}$

Teo: $AX = 0$ s. l. om., ins. soluzioni è sottospazio di $\mathbb{K}^n$

Teo: $p = \rho(A)$, $AX = 0$ spazio soluz. ha dim $n-p$, n° incognite libere.

Soluz generale sist. lineare $AX = B$
$Y_0 + Z \quad AZ = 0 \quad Y_0$ soluz. $AX = B$

NB: Si fa stessa cosa con incognite vettoriali

Matrici invertibili $\quad AX = B \quad XA = B$

Teo: sono equivalenti (A è matr. quadrata $n \times n$)

- A è invertibile
- A ha rango n
- $CA = I$
- $CA = AB = I$

- per ogni permutazione $(i_1, i_2 \dots i_n)$ si calcola il prodotto $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$
- a ogni prodotto metto + se perm. pari, − se perm. dispari.

△ B: A scambio due righe,

$$\det B = -\det A$$

△ B è A, ma con 1 riga moltiplicata per μ:

$$\det B = \mu \det A$$

△ $\det A = \det {}^{t}A$

△ $\det A$ è lo stesso con somme di più righe

Minore di una matrice: det di una sottomatrice di A

Complemento algebrico: di a_{ij} $A_{ij} = (-1)^{i+j}$ (minore di A ottenuto cancellando riga e colonna i e j)

1° Teorema di Laplace:

$\det A = a_{11} A_{11} + \dots + a_{1n} A_{1n}$ moltiplico elem. di 1 riga per i loro complementi algebrici

2° Teo di Laplace:

moltiplicando elem. di 1 riga × compl. alg. di 1 altra riga e sommando si ottiene zero.

Teo di Binet

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Teorema:

- A è invertibile sse $\det A \neq 0$ $A = (a_{ij})$
- se $\det A \neq 0$ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ji})$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

<u>Regola di Cramer:</u>

$$Ax = B \quad x = A^{-1}B \quad x = \frac{1}{\det A}(A_{ji})B$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} \quad \dots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}$$

ogni sist. compatibile di p equazioni e rango p può essere risolto con Cramer portando al termine noto le incognite libere.

<u>Teo</u>: sono equivalenti

- $\rho(A) < n$
- $Ax = 0$ ha soluz. non nulle
- colonne/righe A son lin. dip.
- $\det A = 0$

- Trovare autovalori:
  - A, matrice associata a φ
  - $\det(A - TI)$
  - Radici del polinomio in T.
- Trovare autospazi
  - $\forall \lambda$ calcolo $A - \lambda I$
  - risolvo $(A - \lambda I)X = 0$, soluzioni sono componenti degli elementi di V_λ
  - $\dim V_\lambda = n - \rho(A - \lambda I)$
  - trovo la base di V_λ

Traccia: somma elementi diagonale principale.

Endomorfismi Semplici

$\varphi: V \to V$ se $\exists$ base di V formata da autovettori, $\exists$ una base E di V | $M_\varphi^{E,E}$ è matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

se $\dim V = n$, φ ha n autovalori distinti, φ è semplice

molteplicità di un autovalore λ, è m, molteplicità della radice λ del polinomio caratteristico

Sono equivalenti:
- φ è semplice
- $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_\lambda$, somma diretta autospazi
- $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_n}$
- Tutte radici del pol. carat. sono in K
- $\forall \lambda$ con mol. m, si ha $\dim V_\lambda = m$

Teo: $\varphi: V \to V$, λ autovalore di φ con molteplic. m

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq m$$

φ è semplice se:
- radici del p.c. sono in K
- $\forall$ autovalore di λ con moltepl $m > 1$ si ha $\dim V_\lambda = m$

Verificare se φ è semplice:
- calcolo $\lambda_1, m_1 \dots \lambda_n, m_n$
- $\lambda_1 \dots \lambda_n \in K$
- se $\forall m_i = 1 \to$ è semplice
  $\forall \lambda_i, m_i > 1$, $m_i = n - \rho(A - \lambda_i I) \to$ è semplice.

$[v_1 \dots v_n]$ è ortogonale se $v_i \perp v_j$ tutte le volte $i \neq j$
se $v_1 \dots v_n$ sono versori → ~~insieme~~ insieme ortonormale
$(e_1 \dots e_n)$ → base ortonormale
→ ogni insieme ortonormale è libero (vettori lin. indipend.)
• componenti vettore rispetto base ortonormale:

$v = (v \cdot e_1) e_1 + \dots + (v \cdot e_n) e_n$

Esistenza base ortonormale

→ ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

$(v_1 \dots v_n)$ base di V

1) $e_1 = \text{norm}(v_1)$
2) $e_2 = \text{norm}(v_2 - (v_2 \cdot e_1) e_1)$
3) $e_3 = \text{norm}(v_3 - [(v_3 \cdot e_1) e_1 + (v_3 \cdot e_2) e_2])$

→ ∃ sempre base ortonormale se V ha dim finita.

Teo. $V \in \mathbb{R}$-spazio vett. con prod. scalare e dim. finita n.
Sia $e_1 \dots e_k$ ins. ortonormale di elementi di V, allora
∃ base ortonormale di V del tipo $(e_1 \dots e_k, e_{k+1} \dots e_n)$

Matrici ortogonali

$P^tP = I$ l'inversa coincide con la trasposta

• una matrice è ortogonale sse ^tP è ortogonale.

Teo V e $*$ sp. vett. e prodotto vett. E e F due basi di V, P è la matrice di passaggio da E a F

$E = (e_1 \dots e_n)$ $F = (f_1 \dots f_n)$

$f_1 = p_{11} e_1 + \dots + p_{n1} e_1$

$\vdots$

$f_n = p_{1n} e_1 + \dots + p_{nn} e_n$

$$^tPP = \begin{pmatrix} f_1 \cdot f_1 & \cdots & f_1 \cdot f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n \cdot f_1 & \cdots & f_n \cdot f_n \end{pmatrix}$$

è equivalente:
- P è ortogonale
- righe di P sono base ortonormale $\mathbb{R}^n$
- colonne di P sono base ortonormale $\mathbb{R}^n$

$\det(P) = \pm 1$ se P ortogonale

P ortogonale 2×2 è sempre del tipo:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \mp \sin\alpha & \pm \cos\alpha \end{pmatrix}$$ Rotazioni antiorarie e orarie

cambiamenti lineari di variabili

$X = (x_1, \dots x_m)$ $Y = (y_1, \dots y_m)$ e

$$X = PY$$

$q(X) = {}^tXAX$ forma quadratica $X = PY$ un camb. lin. di variabili allora $r(Y) = q(PY)$ è forma quadratica e $B = {}^tPAP$ → sono forme quadratiche equivalenti

rango di $q(X)$ = rango(A)

Studio del segno

- def. positiva $q(x) > 0$ $P = m$
- semidef. pos $q(x) \geq 0$ $N = 0$
- def. neg. $q(x) < 0$ $N = m$
- semidef. neg $q(x) \leq 0$ $P = 0$
- non definita nessuno dei casi precedenti $P > 0$ $N > 0$

r e q forme quadr. equivalenti, hanno stesso segno.

- se $j \neq i$ | $a_{ii} > 0$ e $a_{jj} < 0$ allora q non è definita
- se $a_{11} \leq 0$ $a_{mm} \leq 0$ → semidef neg
- se $a_{11} < 0$ $a_{mm} < 0$ → def. neg
- se $a_{11} > 0$ $a_{mm} > 0$ → def. pos
- se $a_{11} \geq 0$ $a_{mm} \geq 0$ → semidef pos.

- q è in forma canonica se ci sono solo termini al quadrato.
  → ogni forma quadratica ha una forma canonica del tipo:

$$r(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_m^2, \quad \lambda_1 \dots \lambda_m \text{ autovalori ripetuti con molteplicità}$$

Dati: P: n° aut. positivi
N: n° aut. neg.
Z: n° aut. nulli

$$P + N + Z = m$$
$$P + N = \rho(A)$$

Teorema di Cartesio

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^m$ avente tutte radici reali

⇒ radici positive sono tante quanti sono i cambiamenti di segno in $(a_0, a_1, \dots a_m)$.

- Riduzione a forma canonica
  - A associata a q
  - calcolo p.c.
  - $g(T) = {}^tT g(T)$ → $g(T)$ è forma canonica di q.

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ eq. segmentaria della retta $p = -\frac{c}{a}$ $q = -\frac{c}{b}$

$\boxed{y = mx + q}$ eq. ridotta di r.
$q \Rightarrow$ quota intersez. asse y
$m \Rightarrow$ tg d, inclinaz. retta (coeff. angolare)

Parallelismo:

$ax + by + c = 0$ $\quad a'x + b'y + c' = 0$

- $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \Rightarrow rk < 2$
- $la + mb = 0$, (l, m) $\bar{v} \perp a\, r$
- $lm' - l'm = 0$
- $m = m'$ (per $y = mx + q$)

Ortogonalità

- $aa' + bb' = 0$
- $am - bl = 0 \simeq (a, b) = k(l, m)$
- $ll' + mm' = 0$
- $m = -\frac{1}{m'}$

Angoli tra rette

$\bar{u}, \bar{v}$ vettori $\perp$ rispettivamente a r e r'

- $\underline{\cos(r, s)} = \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})}{|\bar{u}||\bar{v}|}$ $\quad$ • $\underline{\operatorname{sen}(r, s)} = \frac{|\bar{u} \wedge \bar{v}|}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

- $\underline{\operatorname{tg}(r, s)} = \frac{|\bar{u} \wedge \bar{v}|}{(\bar{u} \cdot \bar{v})}$

Intersezioni

$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ $\quad rk = 1 \Rightarrow$ coincidono
$rk = 2 \Rightarrow$ " dist. V
1 pto comune

$r: (x_0, y_0) + t(l, m)$ $\quad s: (x_1, y_1) + t(l', m')$

$\begin{cases} (x_0, y_0) + t_1(l, m) \\ (x_1, y_1) + t_2(l', m') \end{cases}$ $\Rightarrow$ stesso pto in due "istanti" diversi

Fascio di rette:
per P_0

$\left.\begin{array}{l} r: ax + by + c = 0 \\ s: a'x + b'y + c' = 0 \end{array}\right\}$ si intersecano in P_0

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 68

coord. polari: (O, ρ)
$\rho = R$ (centro O)

NB: eqz circ. ha stessa eqz anche con rotazione, manca termine xy

Intersezioni

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \end{cases}$$

• 2 pti
• 1 pt (r tg a $\mathcal{C}$)
• 0 pti

• retta tg in P_0 a $\mathcal{C}$ è $\perp$ a $\overline{P_0 - C} = (x_0-\alpha)\,i + (y_0-\beta)\,j$

$$\boxed{s: (x_0-\alpha)(x-x_0) + (y_0-\beta)(y-y_0) = 0}$$

$x^2 \to x_0 x$ $\quad x \to \frac{x+x_0}{2}$ $\quad y \to \frac{y+y_0}{2}$
$y^2 \to y_0 y$ (sostituzione per tg a $P_0 \in \mathcal{C}$)

• rette tg per $P_1 \in \pi$, ext a $\mathcal{C}$
2 tg a $\mathcal{C}$ per P_1
impongo $d(r_{P_1}, O) = r$
retta per P_1

• due circonferenze

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

NB: oltre a casi reali ci possono essere casi complessi

fasci:

$$\boxed{\lambda(x^2+y^2+ax+by+c) + \mu(x^2+y^2+a'x+b'y+c') = 0}$$

• asse radicale: retta passante per i due pti di intersezione
1) P, Q reali o complessi coniugati
2) $P = Q$

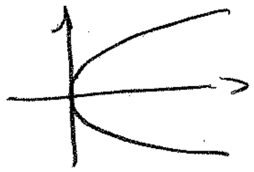
$$\boxed{\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_0^2+y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

circonferenza per tre pti non allineati

Ellisse, Iperbole e Parabola

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ ellisse

$a \to$ semiasse su x
$b \to$ semiasse su y



$x = c$, $c > 0$ 2 sol reali opposte

$x = c$, $c < 0$ 2 sol complesse coniug.

$d(PF) = d(Pd)$

$F = (p/2, 0)$ $x = -p/2$ direttrice

$x = ay^2 + by + c$ parabola traslata

$y = ax^2 + bx + c$ parabola con asse verticale.

Eccentricità

$d(PF) = e\, d(P, d)$ $F \in G$, d retta | $F \notin d$ → direttrice

- $e = 1$ parabola
- $0 < e < 1$ ellisse $e = c/a$
- $e > 1$ iperbole

Coniche → si ottengono da sezione di coni

ellissi, iperboli, parabole → eqz. polinomiale secondo grado

rotazione:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases} \quad y^2 = 2x \quad x^2 + y^2 + 2xy - 2\sqrt{2}(x - y) = 0$$

Luoghi con eqz. di secondo grado

$xy = 0$ asse x e asse y

$(x - 2y)^2 = 0$ retta $x - 2y = 0$, contata 2 volte

prodotti di 2 eqz. di primo (2 rette) → coniche degeneri

Passare alla forma canonica ($\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

- se non contiene xy uso completamento quadrati
- se contiene xy uso cambio coordinate

$\alpha, \beta \neq 0$, ellisse, iperbole o parabola

α, β = segno e γ segno opposto → ellisse immaginaria

eqz. in forma matriciale

$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$

$$\underbrace{B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{matrice associata}} \qquad \underbrace{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{matrice dei termini di secondo grado}}$$

non degeneri:

$\det A > 0 \to \mathcal{C}$ è ellisse

$\det A = 0 \to \mathcal{C}$ è parabola

$\det A < 0 \to \mathcal{C}$ è iperbole

Coniche a centro $\to$ con centro di simmetria

$$\begin{cases} x = X + u \\ y = Y + v \end{cases} \qquad \mathcal{C}: \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

<u>Teo</u>: $\mathcal{C}: f(x,y) = 0$ iperbole con centro C

$g(x,y)$ parte di secondo grado del polinomio allora $\mathcal{C}': g(x,y)$ è unione di due rette distinte, // agli asintoti di $\mathcal{C}$.

<u>Teo</u> $\mathcal{C}: f(x,y) = 0$ parabola:

- asse di $\mathcal{C}$ è // all'autospazio di $\mathcal{C}$ corrisp. a vett. $\vec{0}$
- se $a_{12} \neq 0$ asse // a retta $a_{11}x + a_{12}y = 0$

tg in vertice, $a_{12} \neq 0$ è $= a_{12}x - a_{11}y + t = 0$

$\frac{1}{a^2} = \frac{\lambda_1{}^2\lambda_2}{\det B} \qquad \frac{1}{b^2} = \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{\det B}$

<u>Teo</u> $\mathcal{C}: f(x,y) = 0$ conica non degenere passante per O, tg a $\mathcal{C}$ in O $\exists$, ed è unica, una sua equaz. si ottiene uguagliando a zero parte di 1° grado.

tg a $\mathcal{C}$ in P_0: $f(x,y) = (x,y,t)\,B^t(x,y,t)$

$(x_0, y_0, 1)\,B^t(x, y, 1) = 0 \to$ così ottengo tang. in P_0.

Punto semplice $\in \mathcal{C}$: tg è unica

Punto singolare $\in \mathcal{C}$: tutte r per P_0 sono tg a $\mathcal{C}$

NB: $\mathcal{C}$ parabola: $a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = 0$

$\mathcal{C}$ iperbole: $a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 < 0$

Fasci di coniche:

$\mathcal{C}: f(x,y) = 0 \qquad \mathcal{C}': g(x,y) = 0$

$$\lambda f + \mu g = 0$$

<u>Curve nel piano</u>

- rette
- circonf.
- coniche

$\Big\}$ luoghi geometrici

→ $\bar{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ $(\bar{v} \parallel a\ r)$

→ direttori della retta

$r: (x, y, z) = t(l, m, n) + (x_0, y_0, z_0)$

∘ $Q \in r$? se $\exists\, t$ |

$Q = t\bar{v} + P_0$ $Q = (a, b, c)$ → coefficienti equaz. parametriche.

$$r: \begin{cases} x = t(x_1 - x_0) + x_0 \\ y = t(y_1 - y_0) + y_0 \\ z = t(z_1 - z_0) + z_0 \end{cases}$$

→ allineamento 3 pti:

$$\rho \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} < 2$$

Piani $\begin{cases} P_0 \text{ e } \bar{v} \perp a\ \pi \\ P_0, P_1, P_2 \text{ non allineati} \end{cases}$

1) $P \in \pi$ sse $(P - P_0)\bar{v} = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

equazione cartesiana

$ax + by + cz + d = 0$

∘ $ax + by + cz + d = 0$ $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \text{stesso piano}$$

2) per 3 pti: $(P - P_0) \cdot (P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

3)

$$\begin{cases} x = sl + tl' + x_0 \\ y = sm + tm' + y_0 \\ z = sn + tn' + z_0 \end{cases}$$

eqz parametriche

$P = s\bar{v} + t\bar{w} + P_0$

NB: $\bar{v}$ e $\bar{w}$ non $\parallel$ tra loro $\bar{v} \parallel a\ \pi$ e $\bar{w} \parallel a\ \pi$, $P_0 \in \pi$

- angolo tra due rette

$$\cos \hat{rs} = \pm \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{|V||W|}$$

$\bar{v}$ e $\bar{w}$ sono vettori // alle rette.

$$\operatorname{sen} \hat{rs} = \frac{|\bar{v} \wedge \bar{w}|}{|V||W|}$$

- angolo tra due piani

$$\cos \hat{\alpha\beta} = \pm \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{|V||W|}$$

$\bar{v}$ e $\bar{w}$ vettori ⊥ a piani α e β

- angolo tra retta e piano.

$$\operatorname{sen} \hat{r\alpha} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{|V||W|}$$

$\bar{W}$ è ⊥ a π, $\bar{v}$ è // a r ⇒ faccio $\pi/2 - \theta$

Coseni direttori: coseni del $\bar{v}$ // a r o del $\bar{w}$ ⊥ a π

$$\cos\theta_x = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad \cos\theta_y = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Intersezioni

- due piani:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

→ $\rho(M) = 1$, $\rho(N) = 2$ piani // e distinti

→ $\rho(M) = 2$, $\rho(N) = 2$ piani incidenti

→ $\rho(M) = 1$, $\rho(N) = 1$ piani coincidenti

retta e intersezione di due piani incidenti

$$r: \begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = tm + y_0 \\ z = tn + z_0 \end{cases} \qquad \alpha: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad \alpha': \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

- 3 piani

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

Distanze

- pto da piano π

$$d(P_0, \pi) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$\simeq$ d P_0 da proiez. ortogonale di P_0 su π

- pto da retta r

$$d(P_0, r) = \frac{|(P_0 - P_1) \wedge \bar{v}|}{|\bar{v}|}$$

$r: P = t\bar{v} + P_1$

- due piani //

$d(\pi, \pi') = \Delta d = d' - d$ (termini noti)

- due rette //

$\pi \perp a\, r$ e $\pi \perp a\, s$,

$\pi \cap r \rightarrow P$ $\quad d(P, Q)$

$\pi \cap s \rightarrow Q$

- due rette non //

$\exists!\, p \mid p \perp a\, r$ e $p \perp s$. $d(P_r; P_s)$ fra i due pti di intersezione

$$d(r, s) = \frac{|(P_2 - P_1) \cdot \bar{v} \wedge \bar{w}|}{|\bar{v} \wedge \bar{w}|}$$

$r: P = t\bar{v} + P_1$

$s: P = t\bar{w} + P_2$

Spazio complesso: insieme C^3 delle terne ordinate dei numeri complessi

equazioni simili a eqz. piano reale solo che $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

- piano reale $\rightarrow$ se $\exists$ almeno un' equazione a coefficienti reali
- piani coniugati $\rightarrow$ se i coeff. complessi di uno sono i coniugati dell'altro.

Es: $x + iy - z - i = 0$ e

$x - iy - z + i = 0$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ (x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2 \end{cases}$$

così si indica una circonferenza nello spazio

- $d(\pi, c) = R$, $\pi \cap S$ = 2 rette complesse coniugate che hanno in comune solo pt reale
- $d(\pi, c) > R$, $\pi \cap S$ è circonf. immaginaria
- $d(\pi, c) < R$, $\pi \cap S$ è circonf. reale

Piani tg a superficie sferica S.

- $d(P, C) < R \rightarrow \nexists$ piano per P tg a S
- $d(P, C) = R \rightarrow \exists!$ piano per P tg a S
- $d(P, C) > R \rightarrow \exists\,\infty$ piani per P tg a S

} Pt

- r secante $\rightarrow \nexists$ piano $| r \in \pi$ tg a S
- r tg $\rightarrow \exists!$ piano $| r \in \pi$ tg a S
- r est. $\rightarrow \exists$ 2 piani $| r \in \pi$ tg a S

} retta

$\rightarrow$ Se $P_0 \in S$, eqz. piano tg a S in P_0:

- $(x_0-\alpha)(x-x_0)+(y_0-\beta)(y-y_0)+(z_0-\gamma)(z-z_0)=0$

Circonferenza nello spazio

$\mathcal{C}: \{P \in \pi \mid d(P, C) = R\}$ 3 dati $\begin{cases} C \\ R \\ \pi \end{cases}$

$\mathcal{C}: \pi \cap S$ S (sup. sferica) centro C e raggio R

$$\boxed{\begin{cases} ax+by+cz+d=0 & (1) \\ x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=0 & (2) \end{cases}}$$

NB: controllo se (2) è sfera e se $(1) \cap (2) \neq \emptyset$

- $r = \sqrt{R^2 - D^2}$ $\quad D = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = d(C, \pi)$

- Circonferenze per 3 pti (non allineati)
  intersezione tra piano $\pi \mid P_1, P_2, P_3 \in \pi$ e S passante per P_1, P_2, P_3 e un generico $P_4 \mid P_4 \notin \pi$
- Tg a $\mathcal{C}$ da pt generico nello spazio
  piani per P, $\perp$ ad α (piano $| \mathcal{C} \in \alpha$),
  determino quelli per cui $d(\pi, C) = R$,
  li interseco con α.

Curve: luogo dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio (x, y, z) soddisfa contemporaneamente due eq. indipendenti:

$f(x,y,z)=0 \qquad g(x,y,z)=0$

forma cartesiana: $\alpha: \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$

in forma parametrica: luogo α $P(x,y,z)$ le cui coordinate sono funzioni di $t \in \mathbb{R}$ si chiama curva

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \alpha: (x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$$

- La stessa curva α ha equazioni cartesiane diverse in riferimenti diversi

Intersezioni

- $S: f(x,y,z)=0$ e $\alpha: (x,y,z) = (x(t), y(t), z(t))$
  $\Rightarrow f(x(t), y(t), z(t)) = 0$
- $\alpha_0: (x, y, z) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$
  $\alpha_1: (x, y, z) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$
  $\Rightarrow x_0(t) = x_1(s)$
  $y_0(t) = y_1(s)$
  $z_0(t) = z_1(s)$

Curve piane: $\exists$ piano π che la contiene
$\Rightarrow$ se no gobba o sghemba

$\rightarrow$ prendo P_0, P_1, P_2 su α, non allineati
α passante per P_0, P_1, P_2
verifico $\alpha \subseteq$ in α

$\rightarrow$ $\alpha: (x(t), y(t), z(t)) \subseteq$ in $\pi: ax + by + cz + d = 0$
se:
$a\,x(t) + b\,y(t) + c\,z(t) + d = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ α è piana se. $x(t), y(t), z(t), 1$ son lin. indip.

Superfici che contengono curva:

$\alpha: \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \rightarrow \lambda f(x,y,z) + \mu g(x,y,z) = 0$
Tutte sup. di questo tipo cont. la curve

Superfici di rotazione

S di rotazione di asse r se $\exists$ curva $\mathcal{L} \subseteq$ in S | $\forall P \in \mathcal{L}$ intera circonf. C passante per $P \subseteq \alpha \perp r$ e avente $C_C \in r$ giace su S

Se interseco β con S, $\beta \perp a$ r trovo circonferenze

- paralleli: circ. ottenute intersecando S con piani $\perp r$
- meridiani: curve ottenute intersec. S con piani incui r è c

$$\boxed{f(x^2+y^2, z) = 0}$$ Sup. di rotazione attorno asse z.

$$\begin{cases} \rho = R \\ z = h \end{cases}$$ in coord. cilindriche

Ellissoidi

$$S: \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$ 3 piani di simmetria $\perp$ tra loro

Se interseco con piani $\perp$ ad assi ottengo ellisse.

- ellissoide di rotazione: 2 semiassi uguali

Iperboloide a una falda

$$S: \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$ 3 piani simm. $\perp$ tra loro

Se interseco con piani $\perp$ a piani simm. ottengo ellissi o iperboli (2:1)

- iperboloide di rotazione: 2 semiassi uguali.

Iperboloide a due falde

$$S: \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Se interseco con piani $\perp$ a piani simm, ottengo ellissi o iperboli (1:2)

- iperboloide di rotazione: 2 semiassi uguali

Ellissoide immaginario

$$S: \boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$ $\nexists$ p.ti reali che soddisfano equazione

A = Matrice di tutti i coefficienti
B = Matrice coeff. termini 2° grado. (matrice della forma quadratica)

$f(x,y,z) = (x,y,z,1)\, A\, {}^t(x,y,z,1)$
$q(x,y,z) = (x,y,z)\, B\, {}^t(x,y,z)$
↳ forma quadratica.

Teorema: sia $f(x,y,z)=0$ una quadrica. ∃ un sistema di coordinate in cui si ha equaz.

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$$
oppure
$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 2\delta z$$

α, β, γ o $\alpha, \beta, 0$ sono autovalori di B

Teorema: A e B, A' e B' matrici associate a una quadrica in sistemi Oxyz e Ox'y'z'

$T(x,y,z) = P\, {}^t(x',y',z') + {}^t(a,b,c)$

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & a \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & b \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

$A' = {}^tQ\, A\, Q \qquad B' = {}^tP\, B\, P = P^{-1} B P$

- $\det A = \det A'$
- $\rho(A) = \rho(A')$
- B e B' simili e hanno stesso p.c.

- Una quadrica non è degenere se $\det(A) \neq 0$
- quadr. degenere
  - ↳ $\rho(A) = 3$: cono o cilindro
  - ↳ $\rho(A) = 2$: unione 2 piani
  - ↳ $\rho(A) = 1$: piano doppio.
- Una quadrica è a centro se $\det B \neq 0$)

Teo. Γ : $f(x,y,z)$ quadr. non degenere, P_0 suo pto. rette tg a Γ in P_0 formano
$\pi : (x_0,y_0,z_0)\, A\, {}^t(x,y,z,1) = 0$

→ Γ : $f(x,y,z)=0$ è irriducibile se non è unione di due piani

Quadriche rigate: $\forall P_0 \in \Gamma\ \exists\, r$ e $s \subseteq$ in Γ la cui unione è intersezione Γ con piano tg a Γ in P_0.

1) $\emptyset$ e X sono chiusi
2) $\{C_i\}_i$ famiglia di chiusi, $\bigcap_{i \in I} C_i$ è chiuso
3) C_1, C_2 chiusi, $C_1 \cup C_2$ chiuso

P interno: $\exists\, d \neq 0 \mid$ palla: $d(P, d) \subseteq C$, C è intorno di P
P esterno: $\nexists\, d \neq 0 \mid$ palla: $d(P, d) \subseteq C$.
P accumulazione: $P \in X$, pto acc. di $D \subseteq X$ sse $\forall\, U$, intorno di P:

$$(U \setminus \{P\}) \cap D \neq 0$$

- Un insieme è chiuso sse. contiene tutti i suoi pti di accumulazione

Ext(D): esterno di D, pti di $\underbrace{X \setminus D}_{\text{complementare di } D}$.

frontiera: complementare di $\mathrm{Int}(D) \cup \mathrm{Ext}(D)$

ogni spazio metrico X è di Hausdorff:
$\forall\, P_1 \neq P_2 \in X\ \exists$ 2 aperti A_1 e A_2, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Sottoinsieme $D \subseteq X$ si dice limitato se ha diam(D) finito
Sottoinsieme $D \subseteq X$ si dica compatto se è chiuso e limitato

Limite e Continuità

Def: funz $f: X \to Y$ si dice continua se la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto in X.
Si dice continua in $P \in X$ sse la controimmagine di ogni aperto che cont. $f(P)$ è un aperto di X che $\subseteq P$.

- $f: X \to Y$ è continua sse. è continua in ogni pto $P \in X$
- $f: X \to Y$ cont. in $P_0 \in X$ sse.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid d_X(P_0, P) < \delta \Rightarrow d_Y(f(P_0), f(P)) < \varepsilon$$

- Se f cont. e g cont $\Rightarrow g \circ f$ cont.

Continuità di campi scalari e vettoriali

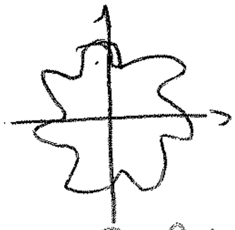
campo scalare reale su D è una funzione $f: D \subseteq X \to \mathbb{R}$ continuo in P_0 sse. f cont. in P_0

L 14 Curve parametrizzate

Curva parametrizzata: di $\mathbb{R}^m$, app. di classe C^k,
$\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, def su intervallo I della retta reale a val. in $\mathbb{R}^m$
$\to \alpha(t)$ punto mobile che descrive traiettoria

Curve di grandi:

$$\alpha(t) = ((R+k\cos(\omega t))\cos(t), \mathrm{sen}(t))$$

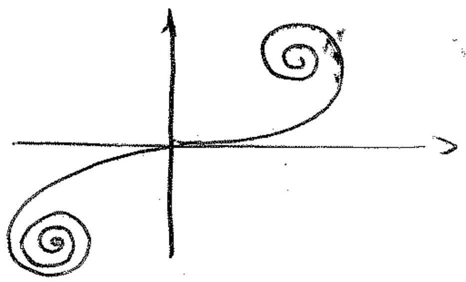


Spirale di Archimede

$$\alpha(t) = (vt\cos(\omega t), vt\,\mathrm{sen}(\omega t))$$

Spirali di Cornu

$$\alpha(t) = \left(\int_0^t \cos(hu^2)\,du, \int_0^t \mathrm{sen}(hu^2)\,du\right)$$



Elica circolare

$$\alpha(t) = (r\cos(\omega t + t_0), r\,\mathrm{sen}(\omega t + t_0), vt + z_0$$

$\to \alpha'(t)$ velocità $\alpha''(t)$ accelerazione

se $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ $\alpha(t_0)$ regolare $\to \alpha$ è regolare

$\underbrace{\int_\Gamma f(ds)}_{\text{int. di linea}} = \int_a^b f[\alpha(t)] \, \|\alpha'(t)\| \, dt$

Curve piane

$f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ c valore regolare di f, $c \in Im(f)$

e $\nabla f_P \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ $\forall P \in \mathbb{R}^2 \mid F(P) = c$

$F(x,y) = c$ curva di livello piana

P p.to singolare: $F(x,y) = c$ se $F(P) = c$ e $\nabla F_P = 0_{\mathbb{R}^2}$

Teo: $\nabla F_{P_0} (P - P_0) = 0$

L15 Funzioni a + variabili a val. $\in \mathbb{R}$

$D(P,r)$ disco aperto $\forall P \in D \ \exists r > 0 \mid D(P,r) \subseteq A$

A, famiglia tutti sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ $\to$ topologia aperta euclidea

- $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset \in A$
- $\{U_j\}_{j \in J}$ collez. aperti, $\bigcup_{j \in J} U_j$ è aperto (unione),
- $\bigcap_{j \in J} U_j$ è aperto (intersez.)

C, fam. chiusi

- $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset \in A$
- $\{U_j\}_{j \in J}$ collez. chiusi unione e intersez. sono chiusi

Derivate

$D_v(f) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(t\bar{v} + P) - f(P)]$ deriv. direz. in P rispetto a vett. $\bar{v}$

$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ derivate parziali

Gradiente

$\nabla f = (\partial f / \partial x_1 \ldots \ \partial f / \partial x_n$

P_0 stazionario

- autov $H(f)|_{P_0} > 0$ P_0 min
- autov $H(f)|_{P_0} < 0$ P_0 min
- $H(f)|_{P_0}$ $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ P_0 sella

NB: non posso fare previsioni se:
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ e $\det(H(f)|_{P_0}) = 0$

L16: Funz. + var reali a val. vettoriali

$f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ valori vettoriali in $\mathbb{R}^m$

$f(P) = (f^1(P), \ldots, f^m(P))$ → funzioni numeriche

f derivabile se sue componenti sono derivabili

Matrice Jacobiana di f in P_0

$$J(f)|_{P_0} = \begin{pmatrix} \partial_{x^1} f^1|_{P_0} & \ldots & \partial_{x^n} f^1|_{P_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x^1} f^m|_{P_0} & \ldots & \partial_{x^n} f^m|_{P_0} \end{pmatrix}$$

funz. ha rango p in P_0 se $J(f)|_{P_0}$ rk p.

Δ se f è differenziabile in P_0

differenziale:

$$f_*|_{P_0}: v \in \mathbb{R}^n \to (f^1_*|_{P_0}(v), \ldots, f^m_*|_{P_0}(v)) \in \mathbb{R}^m$$

$h = f \circ g$ $\quad f^1 \ldots f^m$ comp. di f

$\quad g^1 \ldots g^n$ comp di g

$$h^a(x^1 \ldots x^p) = f^a[g^1(x^1 \ldots x^p), \ldots g^n(x^1 \ldots x^n)]$$

comp a-esima di h

h è differenziabile se f e g diff.

f è diffeomorfismo:

- f iniettiva e $f(X)$ sottoins. aperto
- $f^{-1}: f(X) \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^k

$J(f)|_P$ è invertibile.