



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 836

DATA: 25/02/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Chirico

MATERIA: Fisica I

Prof. Trigiantè

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# Cap 1

meccanica → studio del mov di un corpo.

Corpo puntiforme = punto materiale (punto di dimensioni)  
↳ dim. trascurabili rispetto a spazio.

Cinematica → descrive mov.

dinamica → "perché" del mov.

Traiettoria: luogo dei punti occupati dal pb in movimento  
costituisce una curva continua nello spazio

acc; spazio; tempo; velle → 4 grandezze fondamentali

quiete: coordinate restano costanti:  $v=0$   $a=0$

• movo rettilineo: su una retta con Origine e verso fissati  
↳ solo coordinate

$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  : rap: di  $\Delta$  dello spostamento

$v_{istantanea} = \frac{dx}{dt}$  : v. nell'istante  $t$   $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

↳ suo segno indica verso movo.

posizione  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$  NB:

è lo spostamento con  
preziosi, NON lo spazio  
percorsa, è una  $\mathbb{R}$  alge-  
brica.

$v_m = \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t v(t) dt$

↳ può anche essere = 0, non dà info su fasi del movo.

• movo rettilineo uniforme:  $v = \text{costante}$

$x(t) = x_0 + v(t-t_0)$  → legge oraria  
spazio è funz. lineare di  $t$

• accelerazione:

$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$   $a = \frac{dv}{dt}$  variaz. velocità

$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$   $\int_{x_0}^x a(x) dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$

• movo uniformemente accelerato. →  $a$  costante

$v(t) = v_0 + a(t-t_0)$   $x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} a(t-t_0)^2$

$v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$

▷ Quoziente  $q = x/y$

$$q = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \frac{(1 \pm \delta x / |\bar{x}|)}{(1 \pm \delta y / |\bar{y}|)}$$

valore max. incertezza:

$$\left( \frac{1 + \delta x / |\bar{x}|}{1 + \delta y / |\bar{y}|} \right) = \frac{(1+a)}{(1-b)} \approx (1+a)(1+b) \text{ per } a, b \ll 1$$

→ calcoli →

$$q = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \left( 1 \pm \left( \frac{\delta x}{|\bar{x}|} + \frac{\delta y}{|\bar{y}|} \right) \right) \quad \Sigma \text{ incertezze relative}$$

• Prodotto di grandezze con m.a. m.u.  $\delta q = |B| \delta x$

• Potenze

$$q = x^m \quad \frac{\delta q}{|q|} = m \frac{\delta x}{|x|}$$

Im realtà, se incertezze sono indipendenti, formule sopra danno sovrasfuma.

↳ è altamente improbabile che abbiamo sovrasfuma di  $\delta x$  e  $\delta y$  contemporaneamente.  
50% probabilità di sottofuma di  $x$  e sovrasfuma di  $y$  se si eli dono parzial mente  
 $\delta x + \delta y$  → sovrasfuma dell'incertezza

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad \rightarrow \text{somma quadratica per } q = x + y$$

↳ non sempre applicabile, solo incertezze indipendenti e casuali

prodotti o quozienti

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left( \frac{\delta x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\delta y}{y} \right)^2}$$

Funzioni arbitrarie in una variabile.

$q(x)$

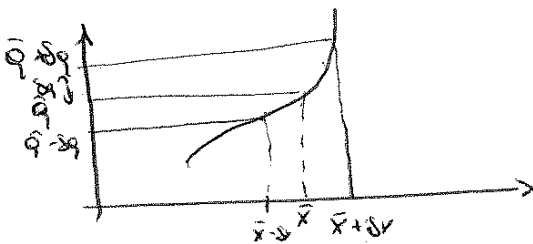
$$x = \bar{x} \pm \delta x$$

$$\bar{q} = q(\bar{x})$$

$$\delta q = q(\bar{x} + \delta x) - q(\bar{x})$$

$\delta x$  piccola

$$\delta q = \frac{dq}{dx} \delta x$$



$v_m = \frac{1}{t-b} \int_b^t v(t) dt$  NB: come valor medio funzione

• moto rettilineo uniforme;  
 $x(t) = x_0 + v(t-b)$  (legge oraria)

$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$       $a_{ist} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$       $a > 0 \quad v \uparrow$   
 $a < 0 \quad v \downarrow$

$v(t) = v_0 + \int_b^t a(t) dt$

• moto uniform. accelerat.

$a = k \quad v(t) = v_0 + a(t-b)$

$x(t) = x_0 + v_0(t-b) + \frac{1}{2}a(t-b)^2$

$\Delta x = \frac{1}{2a}(v^2 - v_0^2)$

• Moto verticale rettilineo, uniformemente accelerat.

$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$

$v < 0; a < 0$

$x(t) = h - \frac{1}{2}g t^2 \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Viniziale:  $v_0$

$v = 0 \quad a \quad v_0 = g t \quad t = v_0/g$

$v(t) = v_0 - g t \quad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}g t^2$

## Teoria degli errori

errori casuali: si possono eliminare ripetendo le misure

errori sistematici: non si possono eliminare ripetendo le misure

↳ "spinge" i risultati sempre nella stessa direzione

errori di parallasse: alcuni strumenti si leggono con l'angolo  
 Se ci poniamo di fronte.

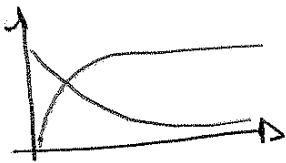
$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{N}$

Deviazione Standard: dalle misure  $x_1, \dots, x_m$ , è una stima  
 (SD) dell'incertezza media

Scarto  $d_i = x_i - \bar{x}$  NB: media degli scarti è zero

$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (d_i)^2}$  Deviazione Standard.

NB: per  $n \rightarrow \infty$ , 68% probabilità che risultati cadano in  $x_{vero} \pm \sigma_x$



$x(t)$   
 $v(t)$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

↳ tende asintoticamente a  $v_0/k$

$\tau = 1/k$ , costante di tempo.

Δ Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$a(x)$ ,  $v(x)$

$$v(t) = v(x(t)) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$a dx = v dv$$

$$\int_{x_0}^x a dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

• moto unia. acc.

$$v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

• moto arm.

$$v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

• moto amorz. exp.

$$v(x) = v_0 - k(x - x_0)$$

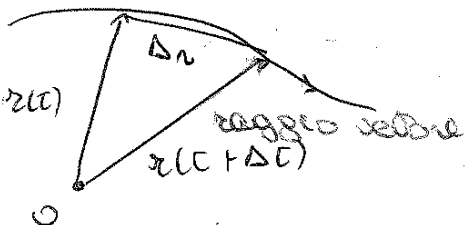
## Cap. 2.

Moto nel piano  $\vec{x}(t)$ ;  $\vec{v}(t)$ ;  $\vec{a}(t)$  sono vettori

↳ due coordinate:  $x(t)$ ;  $y(t)$

$r(t)$ ;  $\varphi(t)$

$\dot{\varphi}(t)$ ;  $\Omega$  ( $s(t)$  → ascissa curvilinea)



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

per  $\Delta t \rightarrow$  lung. arco  
lung. corda

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$ds = ds u_T$   
↳ verso tangente

$$\vec{v} = v u_T = \frac{dr}{dt} u_T$$

→ non dipende da s.d.R.  
invarianza dalle relazioni  
vettoriali

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt$$

$$a_c = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d(\theta) d\theta = \frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_0^2)$$

velocità  $\omega$ :

- $\omega = d\theta/dt$
- diret.  $\perp$  al piano circonferenza
- verso l da estremo velocità moto sembra antiorario



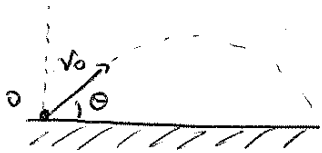
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

prodotto  
vettoriale



$$a = \underbrace{\alpha \times R}_{a \text{ Tang.}} + \underbrace{\omega \times v}_{a \text{ centr.}}$$

### Moto parabolico



$$\vec{a} = -g \hat{u}_y$$

$t=0 \quad v = v_0 \rightarrow$  condizioni iniziali

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a dt = v(t) = \vec{v}_0 - g t \hat{u}_y$$

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = v_0 \sin \theta \end{cases}$$

$$x(t) \begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

↳ secondo moto parabolico

$$\tan \varphi = \tan \theta - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x$$

$\varphi =$  angolo che  $\vec{v}$  forma con asse x

gittata:  $X_G = \frac{2 v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g}$

h max:  $\frac{v_{0y}}{2g} = \frac{y_{\text{max}}}{2g}$

### Moto nello spazio

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{u}_x + y(t) \hat{u}_y + z(t) \hat{u}_z$$

↳ con integrazioni successive risalgo a  $v(t)$  e  $a(t)$

Moto circolare uniforme  $\vec{a}_T = 0$

↳ composizione di due moti armonici semplici

Moto circolare

$$a = \frac{a_T}{R} \quad a = \frac{1}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}$$



$$\vec{a} = \underbrace{a \times \vec{r}}_{a_T} + \underbrace{\omega \times \vec{v}}_{a_N}$$

invece l'andata si resiste a forza del moto

## Cap. 2. Dinamica

$$F = ma = \frac{dp}{dt} \rightarrow \text{usata se massa variabile}$$

Relatività:  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$J = \int_0^T F dt = \Delta p$$

Impulso, provoca variazione q. di moto

in assenza di forze  $\rightarrow \Delta p = 0 \rightarrow$  q. di moto si conserva

Reazione vincolare: forza uguale e contraria all'azione gravit. in generale:

$$F = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N = \underbrace{m \frac{dv}{dt}}_{\text{variaz. modulo acc}} \vec{u}_T + \underbrace{\frac{mv^2}{R}}_{\text{variaz. direzione}} \vec{u}_N$$

► Forza peso:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

► Forza di attrito radente (pendenti)

• statico, corpo fermo

$$F_{as} = \mu_s N \text{ (valore max)}$$

$$F \leq F_{as} \rightarrow \text{quiete}$$

• dinamico, corpo in moto

$$F_{ad} = \mu_d N$$

} Si oppongono al moto.

attrito ha origine da forze coesione due materiali



$$\frac{d^2 d}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \alpha$$

$$m \frac{v^2}{L} = T - mg \cos \alpha$$

$d$ : raggio curva  
 $L$ : lung. filo

piccole oscillazioni  $\rightarrow$  moto armonico semplice

$$\omega^2 = g/L$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$d = d_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$S = d_0 \sin(\omega t + \varphi)$  legge oraria spostamento  
 $v_{max} \rightarrow$  verticale

ampiezza oscillazioni grande  $\rightarrow$  moti periodici, non armonico semplice

Tensione: max verticale

$$T_F = m \left[ g \cos \theta(t) + \frac{v^2(t)}{L} \right]$$

### Tensione del filo

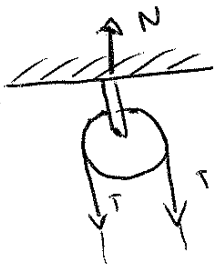
forza che esercita il filo su massa

$$T = -F$$

$T$  è la tensione in tutto il filo.  
 valore massimo  $T_{max}$

filo  $\rightarrow$  trazione, no compressione

bacchetta  $\rightarrow$  trazione e compressione



$$N = 2T$$

### Lavoro, Potenze, Energia

(Wouls)  $W = \int_{A \rightarrow B} F ds$  integrale di linea lavoro: manifestazione di 2 forze

$W > 0 \rightarrow$  lavoro motore  $W < 0 \rightarrow$  lavoro resistente

$$P = \frac{W}{T} = F \cdot v$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$dW = F ds = m a ds = m \frac{dv}{dt} ds = m v dv \rightarrow \text{integrare}$$

$$W_p = m g R$$

$$W_{elast} = \frac{1}{2} k x^2$$

$$W_{conserv} = - \int_A^B N ds$$

$\rightarrow$  dipende da percorso

conservative

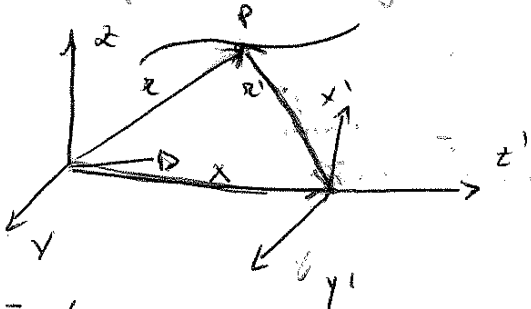
forze conservative: lavoro non dipende da percorso,

$$\oint F ds = 0 \text{ su percorso chiuso,}$$

# Cap 3. Mecc. Relativa

leggi fisiche non dipendono dal S.d.R.

↳ lo spazio è omogeneo e isotropo



\$Oxyz \rightarrow\$ sist. fisso

\$O'x'y'z' \rightarrow\$ sist. mobile.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{OO}' \quad (1)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

\$\vec{v}\_{O'}\$ (veloc. \$O'\$, misurata da \$O\$) = \$\frac{d\vec{OO}'}{dt}\$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OO}'}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

per (1)

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$\vec{r}' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}$$

$$\vec{OO}' = x_0\vec{u}_x + y_0\vec{u}_y + z_0\vec{u}_z$$

derivata verso sist. mobile. (2)

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}$$

formule di Poisson:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_x}{dt} = \omega \times \vec{u}_x$$

$$\frac{d\vec{u}_y}{dt} = \omega \times \vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{u}_z}{dt} = \omega \times \vec{u}_z$$

$$(2) = x'(\omega \times \vec{u}_x) + y'(\omega \times \vec{u}_y) + z'(\omega \times \vec{u}_z)$$

$$(2) = \omega \times \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \omega \times \vec{r}' \quad \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \omega \times \vec{r}'$$

↳ Teo delle velocità relative

velocità di traslazione: \$\vec{v}\_T = \vec{v} - \vec{v}' = \vec{v}\_{O'} + \omega \times \vec{r}'\$

diff. tra velocità misurate nei due S.d.R.

↳ accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}_{O'} = \frac{dv_{O'}}{dt}$$

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{u}_{z'}$$

Se p0 immobile in O → descrive un'orbita in verso opposto a rotazione ω

massa attaccata con filo a asse rotante con velocità = ωv

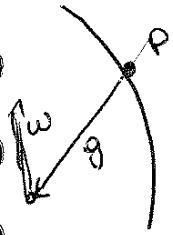


→ ha velocità visuale ω' una volta l'angolo filo.

Mofo rispetto alla terra

SdR inerziale: centro Sole, assi verso stelle fisse

SdR non inerziale: Terra centro, assi su equatore che ruotano.  
↳ ci sono termini centrifughi



$$\vec{g}_0 = \vec{g} + \omega \times (\omega \times \vec{r}) + 2\omega \times \vec{v}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \underbrace{\omega \times (\omega \times \vec{r})}_{\text{acc. centrifuga}} - 2\omega \times \vec{v} \text{ acc. misurata da noi}$$

come zero max  
al equator,  $\omega \perp \vec{n}$   
min a polo,  $\omega \parallel \vec{n}$ .

Forza Coriolis: a posteriori verso Est.  
↳ pendolo di Foucault.

## Cap 4: Oscillatore Armonico

oscillatore armonico semplice

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

eqz. diff. oscillatore armonico.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t \text{ sol. generale}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

eqz. non omogenea:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = f(t)$$

$$\rightarrow x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t + x_p(t) \text{ soluz. particolare}$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{costante} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}}$$

$$= \frac{1}{2} m v^2(x) + \frac{1}{2} k x^2$$

veloc. mediace, poziz. veloc. sono tutti nulli

Oscillazione armonica smorzata B da forza viscosa:

$F = -\lambda v \quad ma = -kx - \lambda v$

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$  eqz. me diff. dell'oscillazione armonica smorzata

$\gamma = \frac{\lambda}{2m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

soluzione,  $\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

- $\gamma^2 > \omega_0^2$  (smorzamento forte)  $x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$ , exp. decresc.
- $\gamma^2 = \omega_0^2$  (smorzamento critico)  $x(t) = e^{-\gamma t} (At + B)$
- $\gamma^2 < \omega_0^2$  (smorzamento debole)  $x(t) = e^{-\gamma t} [(A+B)\cos \omega t + (A-B)\sin \omega t] = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$

Oscillazione armonica forzata

↳ sistema fisico reale con oscillazione persistente, anche in presenza di attrito

$ma = -kx - \lambda v + F_0 \sin \omega t$

forza sinusoidale

cerco soluzione con  $\omega$ , pulsazione forza.

$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \text{tg } \varphi = \frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

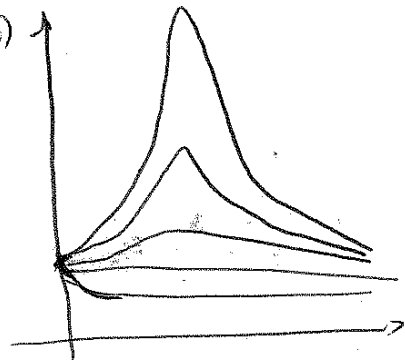
↳ oscillazione assume pulsazione  $\omega$ , della forza.

- $\omega \ll \omega_0$   $A = \frac{F}{k_0}$   $\varphi \approx 0$   $x \approx \frac{F_0}{k} \sin \omega t$  in fase con la forza  
parametro dom. è  $k$ . (cost. el oscillatore)
- $\omega \gg \omega_0$   $A = \frac{F}{m\omega^2}$   $\varphi \approx \pi$  opposizione di fase con la forza  
param. dom. è  $m$ .
- $\omega = \omega_0$   $A = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}$   $\varphi \approx \pi/2$

In quadratura di fase  
param. dom. è  $\delta$ , coeff. smorzamento  
risonanza:

$\omega = \omega_{rm} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0$

↳  $A(\omega)$  è max



(per forze esterne la reazione è compiuta da Universo)  
Momento Angolare:

$$d = \vec{r} \times m \vec{v}$$

Centro di Massa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

→ posizione del CM sist. pt. materiali  
 due posizioni rispetto a pt. materiali  
 non dipende da SDR

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

Se pt. sono in mot. posizione cm  
 varia

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$$

Teorema del centro di massa:

CM si muove come un pt. materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne

$$R_{est} = \frac{dP}{dt} \quad (\text{Risultante forze esterne})$$

→ Conservazione q. di movimento  $R_{est} = 0$

Proprietà del centro di massa

↳ rappresentabile mot. d'insieme dei pt. materiali

Momento angolare

$$\frac{dd}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$d = \vec{r} \times m \vec{v}$$

$$\frac{dd}{dt} = M - \underbrace{\vec{J}_0 \times M \vec{v}_{cm}}_{\text{nulla}}$$

$$d = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

da variaz. dipende da forze esterne

$$M = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{v}_0 \times M \vec{v}_{cm} = 0$$

Se momento forze esterne = 0, momento angolare è costante

SDR centro di massa:

•  $O = \text{cm}$

•  $axi = \text{direz. a SDR inerziale}$

→ q. di movimento totale misurata qui è = 0

→  $M' = M$  e  $d' = d$

Teorema sull'energia

$$W = W_{ext} + W_{int} \quad \text{Somma lavoro forze int. + forze est.}$$

e e rete di azioni di  $\vec{R}$

Momento assiale

dal vettore  $\vec{a}$ :

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{a} \quad \vec{M}_{O'} = \vec{O'P} \times \vec{a}$$

$$|\vec{M}_O| = |\vec{OO'} \times \vec{a} + \vec{M}_{O'}|$$

$\vec{OO'} \times \vec{a} \rightarrow$  momento assiale di  $\vec{a}$  rispetto a  $\vec{OO'}$

## Cap 6: Dinamica del Corpo Rigido

Corpo rigido: sol. p. mat. in cui le d. fra le particelle coppie di p. non possono variare

posso usare 3 DOF: intransl., del CM, ed di rotazione del corpo rig.

6 parametri  $\rightarrow$  3 coord. - 3 condizioni (distanze)

gradi di libertà: n° di parametri necessari per descrivere moto di un sistema

$W^T = 0 \rightarrow$  detto d. fra p. corpo rigido cambierebbe

$$W^E = \Delta E_k$$

Moto del corpo rigido

- traslazione: tutti p. con uguale  $\vec{v}$

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_{cm}^2$$

- rotazione: tutti p. con uguale  $\omega$

$$\vec{M} = d\vec{L}/dt \quad (\vec{J} \text{ dipende da asse rotazione})$$

generalmente moto è rototraslazione

$\hookrightarrow$  visto come somma spostamenti infinitesimi

$$\vec{v}_p = \vec{v}_O + \omega \times \vec{OP} \quad v_O \rightarrow v. \text{ cm}, \quad P \text{ e } Q \text{ 2 p.}$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_q + \omega \times \vec{QP}$$

Corpo continuo

La sistema con p.  $\infty$ , con massa infinitesima  $dm$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$$

$\rightarrow$  massa totale

densità:  $\rho = \frac{dm}{dv}$

$$m = \int \rho dv$$

$\hookrightarrow$  funzione della posizione, di solito si usa  $\rho$  media

- $M=0 \rightarrow$  moti circolari uniforme
- $M=k \rightarrow$  moti circolari unig. accelerati
- $M$  generico  $\rightarrow$  moti circolari vario

Energia e lavoro

• cinematica di rotazione:

$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$  se  $\omega \parallel \omega$ :  $E_k = \frac{\omega^2}{2I_z}$

$E_k = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{I_z}$

• lavoro

$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z (\omega_f^2 - \omega_i^2)$



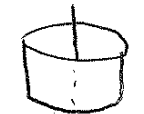
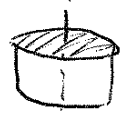
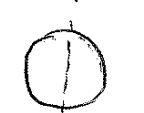



$W = \int I_z \omega d\theta = \int M_z d\theta$

Momento d'inerzia (per rotazioni rigide) [ kg m<sup>2</sup> ]

↳ forma + asse rotazione

$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dv$  somma momenti d'inerzia parziali

↳ dist. elemento  $dm$  da asse  $z$

	anello: $m R^2$		disco: $\frac{1}{2} m R^2$
	guscio cilindrico: $m R^2$		cilindro pieno: $\frac{1}{2} m R^2$
	sfera vuota: $\frac{2}{3} m R^2$		sfera piena: $\frac{2}{5} m R^2$
	asta: $\frac{1}{12} m l^2$		lasta: $\frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$

$I = \int m d^2$  ↳ dimens. azione significativa

↳ fatto numerico, deriva da forma

$k = \sqrt{I/m}$ : raggio girante, come se massa fosse in  $mk$

Teorema di Huygens-Steiner

$I = I_c + m a^2$

↳  $I$  con  $\omega$  ↳ d. fra 2 assi

↳ rispetto asse  $\neq I_c$

$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$

Urti

- se  $\vec{F}$  forze est di tipo impulsivo  $\rightarrow$  si conserva  $\vec{P}$
- se elastico si conserva  $E_k$
- se solo forze interne  $\vec{L}$  si conserva
- NB: si possono conservare solo su alcuni assi!

Statica

- $\vec{R} = 0 \quad \vec{M} = 0$
- $\omega$  del bdm,  $v = 0$   $\hookrightarrow$  no moti rotazionali

Cap 7: Gravitazione

- 1) Pianeti fanno orbite ellittiche in cui Sole è fuoco
- 2) Velocità areolare con cui raggio vettore Sole-Pianeta descrive l'orbita =  $k$

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

- 3)  $T^2 = k$  (costanza per tutti i pianeti a dist. Sole)

leggi di Keplero  $\rightarrow$  descrizione cinematica  
Teoria gravitazione Newton  $\rightarrow$  dinamica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = k \rightarrow \vec{v} = k \rightarrow \vec{F}_{centripeta} = k$$

$$F = m\omega^2 r = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r \quad F = \left( \frac{4\pi^2}{k} \right) \frac{m}{r^2}$$

$m_S k_S = m_T k_T$  (uguaglianza forze per princ. az/ueaz)

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_T} \quad F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2} \vec{u}_{rS}$$

$\hookrightarrow$  costante universale =  $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^2}{kg s^2}$

forza gravitazionale e forze centripeta

NB: massa inerziale e massa gravitazionale sono la stessa

Campo gravitazionale

$$F_{12} = \left( -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, v_{12} \right) m_2$$

campo gravitazionale  $\vec{G}$  generato da massa sorgente in P.  
(masse puntiformi, simmetria sferica)

$$\vec{G}(P) = \sum_i \vec{G}_i$$

$$d\vec{G} = -\gamma \frac{dm \vec{u}}{r^2} \quad \vec{G} = \int -\gamma \frac{dM \vec{u}}{r^2}$$



$\epsilon = 1$  par.

$\epsilon < 1$  ellisse  $\rightarrow A = \pi a b$ .

$\epsilon > 1$  iperbole

$\epsilon = 0$  circonferenza.

$\vec{F} = m \vec{a}_m \quad - \vec{F} = M \vec{a}_M$

$a = \frac{1}{\mu} F$  (acc. relativa)

$\mu = \frac{mM}{m+M}$  massa ridotto

$\rightarrow$  come pb con massa  $\mu$  e forza  $\mu \vec{a}$

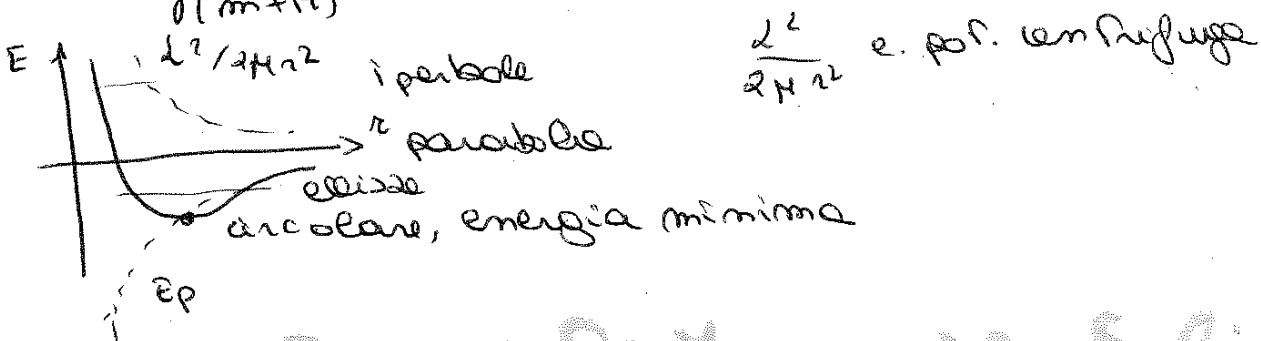
$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{2} = \gamma \mu \frac{mM}{a^2} \rightarrow$  soluz. è traiettoria  $r(\theta)$

$\left| \frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{mM}{a^2} (1 + \epsilon \cos \theta) \right|$  da traiettoria è una conica

$E = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 - \gamma \frac{mM}{r} \quad T = 2 \pi \frac{\mu}{a^3} \sqrt{1 - \epsilon^2}$

$a^2 = \gamma \mu m M a (1 - \epsilon^2)$

$k = \frac{4\pi^2}{\gamma(m+M)}$  3a legge Keplero.



## Cap 8: Proprietà Meccaniche Solidi

Deformazione  $\propto$  carico  $\rightarrow$  legge di Hooke

carico  $\rightarrow$  trazione  
 $\rightarrow$  compressione

Carico specifico o unitario  $\sigma = \frac{F}{S}$   
 deformazione specifica o unitaria  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

modulo di Young  $E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{l}{\Delta l} \frac{F}{S}$

$\pi, E \downarrow$

legge Poisson:  $\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$   
 variazione sezione

pendolo di torsione:

$$-k \theta = I \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad k = \frac{3}{2} G \frac{r^4}{l}$$



$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$  → oscillazione armonica  
 più accurate, solo k, per determinare I

Bilancia di Bussone

$FR = k \theta$  molla a spirale

Pressione

$\frac{F}{S}$  = pressione, compressione uniforme, pressione idrostatica  
 si realizza immergendo un corpo in un fluido

$$\left[ \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta} \Delta P \right] \quad \beta: \text{modulo di compressibilità} \quad \beta_{\text{per}}$$

NB: anche liquidi hanno  $\beta$ , < di quello solidi, ma elevatissimo  
 per gas:  $\beta = \beta_{\text{per}}$ , facilmente comprimibile

NB: fluidi sempre comportamenti elastici

Durezza: resistenza di un corpo alla penetrazione.

↳ si misura empiricamente da tracce lasciate con carico stabili.

Onde elastiche

gotta impulsiva su barra metallica  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$   
 nato iniziale si comprime e poi si dilata, "passando" la compressione a elementi adiacenti.

↳ per l'elasticità si propaga  
 v propag. dipende da materiali

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Onde su corda tesa

non c'è spostamento lungo direzione corda

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

onda trasversale, su piano la corda

### Equilibrio in presenza forza peso

$$f_x = f_y = 0 \quad f_z = -g$$

$$\text{grad } p = \frac{dp}{dz} \quad \text{grad } E_{pm} = g = \frac{dE_{pm}}{dz} \quad E_{pm} = gz.$$

$$(p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)) \quad (\text{con } \rho \text{ costante})$$

$$(p(z) = p_0 + \rho g z) \quad \text{legge di Stevino}$$

• peso colonna liquido:  $mg = \rho g z$ .

• pressione cresce linearmente con profondità.  
Superficie liquido:  $p_{ext} = p_{int}$

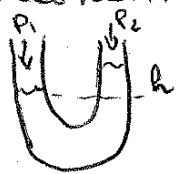
$$(P = p_0 + \Delta p) \quad \text{principio di Pascal}$$

↳ cambiamento  $p_{ext} \rightarrow$  cambiamento  $p$ .

Vasi comunicanti:

due recipienti riempiti con stesso liquido, in comunicazione fra loro. Il liquido assume lo stesso livello dal suolo.

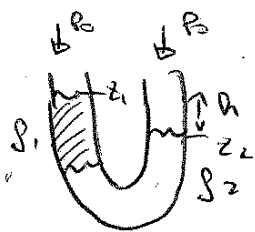
### Manometro ad U



Tubo a forma di "U" con liquido

$$p_2 \neq p_1 \quad p_1 > p_2$$

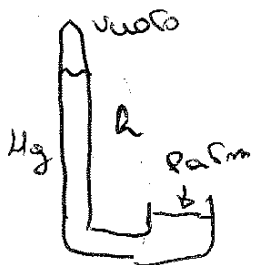
$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$



2 liquidi immiscibili,  $\rho_1$  e  $\rho_2$

$$\rho_1 g z_1 = \rho_2 g z_2 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{z_2}{z_1} = 1 - \frac{h}{z_1}$$

### Barometro di Torricelli (a mercurio)



$$h \approx 76 \text{ cm}$$

$$p_{atm} = \rho g h$$

$$760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$$

### Pressione atmosferica

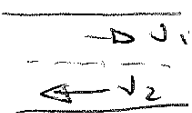
↳ si origina con attrazione gravitazionale della Terra sui gas che la circondano

$$p_{atm} \downarrow \quad h \uparrow$$

$$P = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + k$$

$P(r, z)$ , cresce radialmente. ↳ pressione sul fondo

↳ su questo ai base centrifugazione  
Airòs interno, Viscosità, Fluido ideale



Scomimento relativo

↳ frenato da forza di attrito interno.

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dm}$$

$dS$ : area contatto  
 $\eta$ : viscosità fluido

$\frac{dv}{dm}$ : modulo di  $v$ , sua variazione in direzione  $ds$ .

$\eta \downarrow$  se  $T \uparrow$ ,  $\eta$  dipende dal fluido.

variaz forma liquido in rotazione è dovuta ad attr. int.

fluido ideale =  $\eta = 0$  + incomprimibile

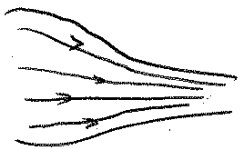
NB: viscosità ha importanza se fluido è immob.

Fluo di un fluido

descrizione euleriana:  $v(x, y, z, t)$  di ogni elemento

regime stazionario:  $v(x, y, z)$ , indipendente dal tempo

regime variabile:  $v(x, y, z, t)$



rappresentazione con linee di corrente, all'interno del tubo di flusso

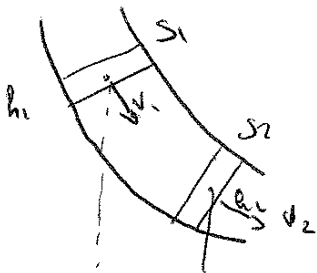
Portata:  $dQ = v dS$  volume che passa da sezione ↳ sezione del tubo di flusso.

Se  $S \downarrow$ ,  $v \uparrow$  Portata:  $Q = v m dS$  ↳ velocità media

Teorema di Bernoulli

$\eta = 0$   $\rho = k$  fluido ideale in moto con regime stazionario

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$



Applicazioni

(in tubo reale de energia dissipata per attr.)

= Tubo di Venturi

condotto orizzontale a sezione variabile

Portata:  $Q = \frac{17 R^4}{8 \eta l} \frac{P_1 - P_2}{l}$  legge di Hagen Poiseuille  
 (Se raggio condottivo è piccolo)

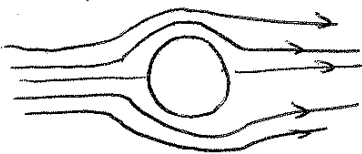
Portata,  $v$  media,  $v$  massima  $\propto (P_1 - P_2) / l$

Moto in un fluido

$\hookrightarrow$  resistenza del mezzo, sia se fluido in quiete che in moto

• fluido ideale

Paradosso di d'Alembert



$P_a$  monte =  $P_a$  valle, genera montata alcuna spinta  
 Simmetria linee di corrente

• fluido reale



$P_a$  valle <  $P_a$  monte  $\rightarrow$  forza sulla sfera che viene trascinata  
 non simmetria linee di corrente

$$F_{res} = \frac{1}{2} \rho S \pi v^2$$

$\hookrightarrow$  dipende da forma corpo

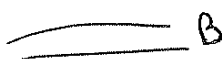
Se  $v$  è piccola:  $F_{res} = 6 \pi \eta R v$  legge di Stokes  
 (sfere)

Effetto Magnus, Portanza

Sfera si muove nel fluido e ruota su se stessa, per cui  $v_B$  "porta" con se parte del fluido



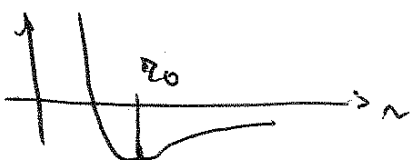
$v_A > v_B$   $P_A < P_B$   
 spinta da B ad A  $\rightarrow$  effetto magnus



ala aeroplani:  $v_{sup} > v_{inf}$   $\rightarrow$  spinta verso l'alto, portanza

$$F_{portanza} = 2 A \rho v \Delta v$$

Fenomeni di Superficie



Energia potenziale, rispetto alla  
 distanze fra 2 molecole  
 (forze intermolecolari)

- Sistema: porzione di universo costituita da una o più parti
- Ambiente: insieme con cui il sistema interagisce (universo Termodinamico)
- \* Aperto → scambi di materia ed energia
- \* Chiuso → no scambi materia, sì energia
- \* Isolato → no scambi materia o energia
- Coordinate Termodinamiche:
  - ↳ Pressione
  - ↳ Volume
  - ↳ Temperatura
  - ↳ massa
- Stato Termodinamico: non conosco  $x(u)$  di ogni particella ma solo alcune coordinate Termodinamiche, ad uno stato Termodinamico possono corrispondere + stati meccanici
- Equilibrio Termodinamico
  - ↳ variabili termodinamiche sono costanti nel tempo (variabili di stato)
  - ↳ meccanico (forze e momenti)
  - ↳ chimico (reazioni)
  - ↳ termico (T è costante ovunque)
- } equilibrio ha forze microscopiche
- Relazione fra coordinate Termodinamiche
  - ↳ Equazione di Stato:  $f(P, V, T) = 0$
- Trasformazione Termodinamica: evoluzione del sistema da uno stato del sistema ad un altro
  - ↳ per calcolo considero stati infinitesimi, in equilibrio
- Equilibrio Termico: Dati due sistemi, se  $T_A = T_B$
- Principio dell'equilibrio Termico:
  - « Due sist. se siano in eq. termico con un terzo sono in eq. termico fra loro »
- Pongo due sistemi a contatto,  $T_A \neq T_B$ 
  - ↳ parete diatermica: se raggiungiamo  $T_C < T_A$
  - ↳ parete adiabatica: se dopo  $\Delta t$ ,  $T_A \neq T_B$
  - ↳ sistema adiabatico se è circondato di pareti adiabatiche
- Temperatura
- $g(x)$  funzione termometrica

• Trasformazioni cicliche o chiuse:  $\Delta U = 0$

$Q = W$   
 macchina termica: trasf. cicliche,  $Q > 0$ ;  $W > 0$

$$Q_{AB} = \int_A^B dQ$$

Trasformazioni Termodinamiche

- Trasformazioni adiabatiche,  $Q = 0$ , no scambio calore  
 ↳ isolato termicamente, scambi solo come E meccanica
- Trasf. reversibili  
 se variazioni piccole → passa da stati di equilibrio.  
 reversibile: avviene attraverso stati di equilibrio e non  
 altrimenti è irreversibile. ↳ sono forze dissipative  
 ↳ passo invertire senza trasformazione.

Calorimetria

$$Q = m c (T_{fin} - T_{in})$$

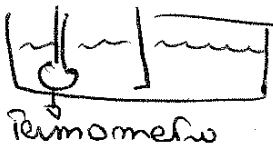
c: calore specifico: Q che si deve dare per far salire di 1 K di campione

$$C = m c$$

C: capacità termica, Q da dare per far variare di 1 K la T del corpo

Tra due corpi, scambio calore, uguagliamo  $Q_1$  e  $Q_2$ .

- gas: calore specifico molare:  $Q = m c \Delta T$  m: n° moli
- calorimetro di Regnault



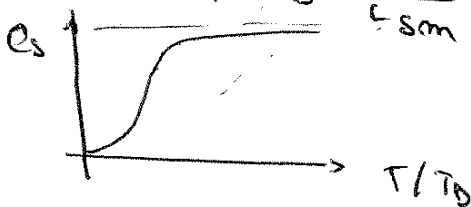
agitatore. Immergo corpi di massa m e c. spec.  $c_x$  e lo immergo.

$$M c_x (T_1 - T_0) = (c_1 + c_2) (T_2 - T_2)$$

↳ cap. term. pareti  
 ↳ eq. term. liq.

NB:  $c_s$  varia con T!

Calori specifici solidi



$T_0$ : Temperatura di Debye, da indicazione della coesione del materiale

↳  $c_{smax} = 2.5 \text{ J/molk}$ . per ogni materiale.  
 Legge di Dulong-Perit

$\alpha = 1$ : dilatazione lineare

Dilatazione termica: volume  $\uparrow$   $T \uparrow$

$\Delta L = \lambda L \Delta T$  se  $P = k$   $\lambda$ : coeff. dilataz. lineare  
funz. temperatura

$\Delta V = \gamma V \Delta T$   $\gamma = 3\lambda$   $\gamma$ : coeff. dilataz. cubica

Valido per corpi isotropi, allung. è lo stesso in ogni direz.

$\Delta S = \beta S \Delta T$   $\beta = 2\lambda$   $\beta$ : coeff. dilataz. sup.

## Cap II: Gas Ideali e Reali

leggi dei gas

gas: fluido senza forma e volume, facilmente comprimibile, si descrive con  $T, P, V$ .

gas ideale  $\rightarrow$   $P$  passa e  $T$  alta

legge di Boyle:  $P \cdot V = k$  isoterma



curve isoterme sono rami di iperbole  
piano di Clapeyron:  $P \times V$

legge di Lavoisier  $V = V_0 (1 + \alpha \Delta T)$   $\alpha$ : coeff. dilataz. termica

legge di Laplace  $P = p_0 (1 + \beta \Delta T)$   $\beta = \alpha$

legge di Avogadro: volumi di gas  $\neq$  con  $T$  e  $P$  contengono stesso n° molecole

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  1 mole  $\rightarrow$  22,4 L  $T = 273,15 K$   $P = 1 \text{ atm}$

Equazione di Stato  $(PV = nRT) = N k_B T$

In un gas in equilibrio sono indipendenti adobe due variab.

$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$   $R = 8,31$

Trasformazioni di gas d lavoro

$W = \int_a^b P(V) dV$  • trasformaz. reversibile  
• mola  $P_{ext}$

• isocora  $\rightarrow W = 0$

in piano di Clapeyron  $W$  è area fra curva e asse volumi

$W_{AB} = -W_{BA}$



= isoterme

$$\Delta U = 0$$

$$Q = W$$

$$W = \int p \, dV = n$$

$$W = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

= calore scambiato

= isocore

$$W = 0$$

$$Q = \Delta U = m c_V (T_B - T_A)$$

= isobare

$$\frac{V}{T} = k$$

$$Q = m c_p (T_B - T_A)$$

$$Q = \Delta H$$

$$\Delta U = m c_V (T_B - T_A)$$

$$W = nR(T_B - T_A)$$

Enfalsia

$$H = U + pV \quad \text{funzione di stato}$$

se gas ideale  $U = U(T) \quad H = H(T)$  solo funz. di T

$$dH = m c_p dT$$

$$\Delta H = m \int_{T_A}^{T_B} c_p dT$$

= Trasformazioni generiche

$$dQ = dU + dW = m c_V dT + p dV$$

si applica se reversibile o irreversibile

$$\hookrightarrow pV = nRT \quad \& \quad W = p \Delta V$$

Trasformazioni cicliche

stabilizzatore di temperatura con stato iniziale  
macchina termica: produce lavoro assorbendo calore.

macchina frigorifera: richiede lavoro, e faendo calore da una sorgente.

$$Q = Q_A + Q_C$$

$Q_A > 0$  calore assorbito

$Q_C < 0$  calore scambiato

$$W = W_F + W_S$$

$W_F > 0$  lavoro compiuto

$W_S < 0$  lavoro subit

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A}$$

rendimento

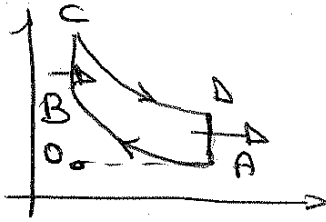
% calore assorbito che viene

trasformato in lavoro

un sistema che compie un ciclo deve scambiare calore con almeno due sorgenti

• Cicli di Otto (motore a doppio)

a 4 Tempi:



OA: miscela di aria e benzina  
è aspirata nel cilindro  
a  $P=k$  (aspirazione)

AB: adiabatica miscela è com-  
pressa da  $V_2$  a  $V_1$ ,  
(compressione)

BC: incendio miscela, rapida crescita di  $P$  e  $T$   
(accensione)

CD: gas caldo si espande spingendo il pistone.  
(espansione)

DA: cessione calore e pressione, apertura valvola  
Tubo scappamento. (decompressione)

AO: gas espulso a  $P=k$

$$Q_A = m c_v (T_C - T_B)$$

$$Q_C = m c_v (T_A - T_D)$$

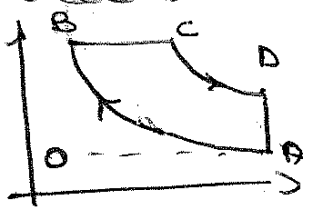
$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

$\pi = V_2/V_1$ , rapporto compress.

$$\eta = 1 - \frac{1}{\pi^{0.4}}$$

gas biatomico

• Ciclo Diesel



OA: gas di aspirazione

AB: gas di compressione

BC: iniezione e combustione,  
gas assorbe calore

CD: espansione

DA: decompressione

AO: scarico

$$Q_A = m c_p (T_C - T_B)$$

$$Q_C = m c_v (T_A - T_D)$$

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{\gamma (T_C - T_B)}$$

$\pi_c = \frac{V_2}{V_1}$  rapp. compress.

$\pi_e = \frac{V_2}{V_3}$  rapp. espans.

$$\eta = 1 - \frac{1/\pi_e^\gamma - 1/\pi_c^\gamma}{\gamma (1/\pi_e - 1/\pi_c)}$$

Teorema di König

relazione momento angolare e energia cinetica

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{cm})$$

$$\boxed{L = L' + L_{cm}}$$

1° Teorema di König  
somma momento dovuto al CM e quello del sistema rispetto CM

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i (v'_i + v_{cm})^2$$

$$\boxed{E_k = E_k' + E_{k,cm}}$$

2° Teorema di König  
somma  $E_k$  CM e  $E_k$  sistema rispetto al CM.

2 Teoremi scompongono  $L$  ed  $E_k$

$$\boxed{p = A e^{-B/T}}$$

Equazione di vapor  
 $A$  e  $B$  due parametri

• Isoforma per  $e$ ; isoforma critica  
 $e$  e  $p_B$  critico;  $(T_c; p_c; v_c)$   $p_B$  di  $p_{max}$  e  $T_{max}$   
in cui c'è equilibrio tra vapore e liquido  
 $T_c \rightarrow T_{max}$  a cui ci può essere liquido

CA: curva sat. vapore

CB: curva sat. liquido

AB: linea tripla, coesistenza le 3 fasi

$$M = p/p_c \quad \phi = v/v_c \quad z = T/T_c$$

• Diagramma  $M - \phi$  tutte sostanze hanno stesso diagramma  $\rightarrow$  legge degli stati corrispondenti

• Eq. me Vander Waals

$$\left( p + a \frac{m^2}{V^2} \right) (V - mb) = mRT$$

• cicli frigoriferi reali  
sotto linea tratteggiata c'è eq. liquido-vapore



A: liquido saturo

AB: esp. di Joule-Thompson

B: liquido + vapore  
BC: isoterma

Equipartizione energia

- per ogni grado di libertà, c'è un contributo di  $\frac{1}{2} k_B T$  a energia (principio equipartizione energia)
- gas biatomico  $\rightarrow$  5 gradi di libertà: 3 assi + 2 rotaz.
- cristallo  $\rightarrow$  3 assi + 3 oscillazioni su asse: 6 gradi di libertà
- $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  (unità di energia)
- $e_V \rightarrow 3R$ , per tutti solidi, ad alta T

legge Dalton

$$p = \frac{RT}{V} \sum_i m_i$$

$m_1, m_2 \dots$  n° moli di ciascuna gas componente la miscela

$$p = \sum_i p_i$$

$P_{BT} = \sum p_i$  parziali (legge di Dalton)

Distribuzione velocità

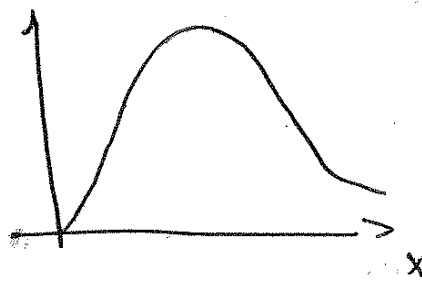
come si distribuisce velocità in singole molecole

$$dN = 4 \pi N_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{1}{v^2} e^{-mv^2/2k_B T} dv = F(v) dv$$

funzione di distribuzione delle v di Maxwell

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

v + probabile

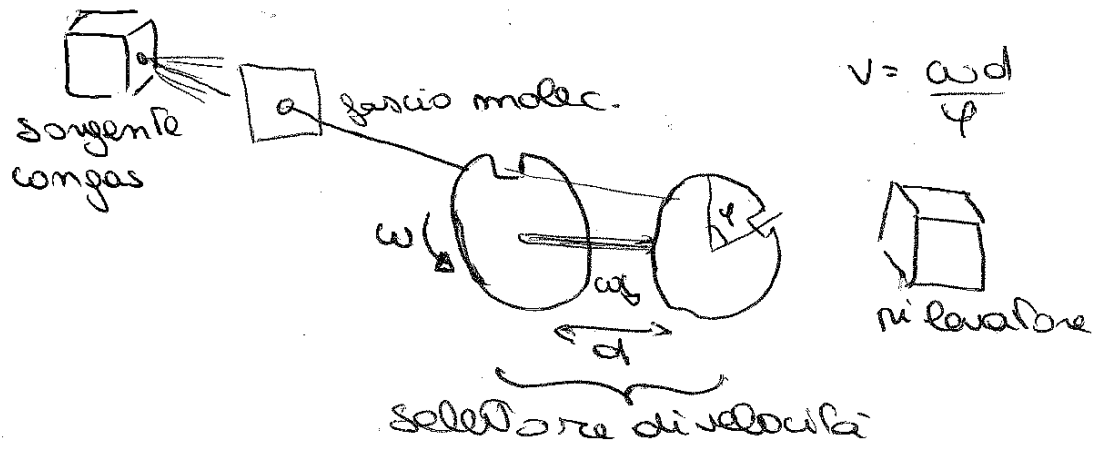


$$y(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2}$$

y(x) = densità di probabilità

$$v_{media} = 1,128 v_p \quad \left[ \bar{v}_{quadr. media} = 1,225 v_p \right]$$

Si verifica distri. maxwelliana:



# Cap 22: 2° principio Termodinamica

## Enunciato del 2° principio

• 2° principio non da limiti trasformazioni, ma il calore non va mai dal freddo al caldo!

Inoltre trasformaz. calore  $\rightarrow$  lavoro è limitata (Kelvin-Planck)

<< È imposs. realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a  $T$  uniforme >> (Clausius)

<< È imposs. realizz. un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di calore da un corpo a un altro a  $T$  maggiore >>

$\rightarrow$  In un processo ciclico, per  $W > 0$  servono almeno 2 sorgenti

• ciclo monoterme  $\rightarrow$  1 sola sorgente

$Q \leq 0 \quad W \leq 0$  o assorbe lavoro e cede calore

NB: principio Clausius è equivalente a princ. K-Planck

## Reversibilità e Irreversibilità

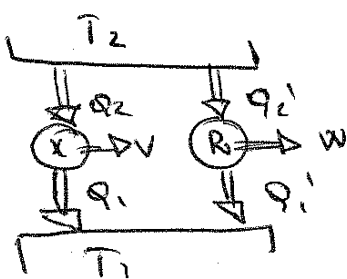
• processo reversibile sistema torna a stato iniziale, ambiente ha subito modifica, e percorrendo inverso si ripulisce ambiente iniziale

Trasformaz. reversibile: non comporta alterazioni permanenti

Trasf. irreversibili: effetti dissipativi per frizione attrito, non è + possibile ritornare a stato iniziale senza modificare ambiente

## Teorema di Carnot $\rightarrow$ quantifica 2° principio

2 macchine  $X$  e  $R$ ,  $R$  è reversibile.



$$T_2 > T_1$$

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2} \quad \eta_R = \frac{W}{Q_2'}$$

$$Q_2 + Q_1 = Q_2' + Q_1'$$

$$\text{suppongo } \eta_X > \eta_R$$

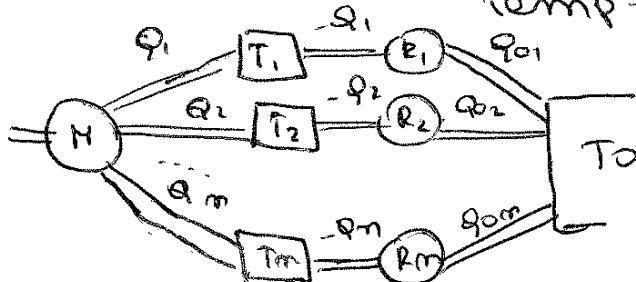
kelvin: 1 della T termodinamica del più riplo  
 273,16 dell'H<sub>2</sub>O, misurata con termometro  
 a ciclo di Carnot.  
 zero assoluto: T a cui una trasformazione, sistema reversibile si svolge senza scambio calore

Teorema di Clausius

tra n sorgenti, generalizzazione Teo Carnot

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Teo Clausius (per mac. reversibili)  
 Q<sub>1</sub>, ..., Q<sub>m</sub> calori scamb. con sorg. a temp. T<sub>1</sub>, ..., T<sub>m</sub>



ogni macchina scambia con sorgente Ti, calore Qi

R<sub>1</sub> ⇒  $\frac{Q_{01}}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}$

R<sub>m</sub> ⇒  $\frac{Q_{0m}}{T_0} = \frac{Q_m}{T_m}$

Sorgenti T<sub>1</sub>, ..., T<sub>m</sub> sono macchine invariate,  
 Me R<sub>1</sub>, ..., R<sub>m</sub> compiono trasform. ciclica monoterma  
 scambia calore solo con sorgente a T<sub>0</sub>

$\sum_i Q_{0i} \leq 0$

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Teo Clausius (per macchine reversibili)

Entropia → funz. dello st. A, B 2 stati, passaggio con 2 ≠ trasf. reversibili

$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$  valore costante, non dipende da percorso

↳ Entropia

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T}$$

• è additiva, S<sub>1</sub> e S<sub>2</sub>, sistema totale S = S<sub>1</sub> + S<sub>2</sub>  
 se m T, S<sub>T</sub> → è estensiva

per calcolarla uso una qualsiasi trasformazione reversibile

- scambio calore corpo massa  $m$ ,  $c_s$ ,  $T_1$ ,  $\rightarrow$   $T_2$   
 $\rightarrow$  irreversibile.

$$\Delta S_{\text{sis}} = \int_{T_1}^{T_2} mc \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_{\text{amb}} = \frac{mc(T_1 - T_2)}{T_2} \quad (\text{congenita})$$

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{amb}} + \Delta S_{\text{sis}} > 0$$

- scambi calore fra 2 corpi:

$$T_c \rightarrow T_{\text{eq}}$$

$$T_c = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

processo irreversibile

$$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln \frac{T_c}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = m_2 c_2 \ln \frac{T_c}{T_2}$$

- cambiamenti di fase

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T} \rightarrow \text{calore latente}$$

- Riscaldamenti per attriti

$$W = -E_{\text{im}} \quad \text{lavoro dissipato} = Q$$

$$\Delta S_{\text{amb}} = -\frac{W}{T_{\text{amb}}} \quad \begin{matrix} \text{reazione} \\ \text{calore} \\ \text{a ambiente} \end{matrix}$$

$$n^\circ \text{ moli da A: } (p_A, V_A, T_A) \text{ a B: } (p_B, V_B, T_B)$$

$$dQ = m c_v dT + dW \quad 1^\circ \text{ principio}$$

$$dW = p dV \quad pV = nRT \quad dW = nRT \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = \int_A^B m c_v \frac{dT}{T} + \int_A^B nR \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = m c_v \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} = m c_p \ln \frac{T_B}{T_A} - nR \ln \frac{p_B}{p_A}$$

energ. inutil. e prova che un verso ha subito modifiche

Pompe di calore

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$\Delta T$  piccolo,  $\eta$  è piccolo.

$$\eta_R = \frac{\Delta T}{T_2}$$

Con poco lavoro posso far passare molte  $Q$  da  $T_1$  a  $T_2$  se  $\Delta T$  è piccolo  
 ↳ pompe di calore

$$\eta_{\text{efficienza}} = \frac{Q_0}{W} = \frac{T_1}{\Delta T}$$

$\Delta T \sim 20^\circ$   $T_1 = 277 \text{ K} = 4^\circ \text{C}$   
 $|W| = 0,065 Q_0$   
 ↳ + conveniente.

Conclusioni Termodinamiche su S

- 1° p. eq. Term  $\rightarrow T$
- 1° princ.  $\rightarrow E$  interna } collegata a  $T_{eq}$  c.m. gas.
- 2° princ.  $\rightarrow E$  entropia + suo aumento è indice modifica permanente

Entropia e Probabilità

def. termod.  $\rightarrow$  può corrispondere a  $N$  stati dinamici degli elementi che lo compongono

$$S = k_B \ln N + \text{cost.} \quad \text{eq. Boltzmann}$$

$m \rightarrow$  numero particelle

$2^m$  stati dinamici

2 gas in 2 contenitori  $\rightarrow$  è semplicemente + probabile che sia + equamente distribuiti in entrambi

prob. termodinamica di uno scambio di calore.

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1} \quad \text{es } 1 \text{ J da } T_2 = 301 \text{ K a } T_1 = 300 \text{ K}$$

$$\Delta S = 10^{-5} \text{ J/K} = k_B \ln \frac{N_f}{N_{im}} \quad \frac{N_f}{N_{im}} \approx e^{10^8}$$

• Cambio fase

↳ cambio struttura interna

↳ rapporto tra p. stab. fin. e p. stab. iniz.

ST passando a fasi + disordinate

• concett. del 2° princ. sono estremamente improbabili non impossibili

Terzo Principio Termodinamica

« Variazione di entropia associata a trasformazione reversibile tende a zero, al tendere a zero di T »  
 Neel-Simon



per reazioni chimiche a  $P = k$

$$\Delta H = H_{\text{prod}} - H_{\text{reag}}$$

$\Delta H_{20}$  endo  $\Delta H_{20}$  eso

$$\lambda = \frac{H_2 - H_1}{m}$$

$m = n^\circ \text{ mole}$

$$S_2 - S_1 = \frac{m \lambda}{T} = \frac{m (h_2 - h_1)}{T}$$

$h_2$  e  $h_1$ , entalpie molari

$$A_1 - T S_1 = A_2 - T S_2$$

en. di gibbs è costante durante passaggi di fase.

• legge di Hess: variaz. entalp. reaz. non dipende da come si svolge (direttamente o a stadi)

$$\Delta H_{1,3} = \Delta H_{1,2} + \Delta H_{2,3}$$

entalpia scalare di formazione:

per formare 1 composto partendo da mol di elementi

• Condizioni standard:

$$28^\circ\text{C}, P = 1 \text{ atm}$$

$$\Delta H = \sum \nu_f H_f^\circ - \sum \nu_r H_r^\circ$$

### Proprietà generali sistemi PVT

↳ descrivibile con coordinate termodinamiche.

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

modulo comp. sistema

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

coeff. dilataz. cubica

$$dP = -\frac{P}{V} dV + \alpha P dT$$

$$e_v = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

•  $U, S, F, H, G, T, P, V$  → tutte possono essere dette in funzione delle altre 2.

$(P, V, T, S)$

↳ var. naturali

$$dH = T dS + V dP$$

$$dF = -S dT - P dV$$

Si applica al campo gravitazionale ed elettrostatico

- campi centrali
- si possono scrivere come sovrapp. di campi elem.
- sono proporzionali a  $d^{-2}$

• campo gravitazionale

$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^m \vec{g}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^m -G M_i \frac{\vec{u}_i}{d_i^2}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{d_i^2} \vec{u}_i$$

• campo elettrostatico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{d_i^2} \vec{u}_i$$

Integrale:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{d_i^2} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

legge di Gauss

$$\oint_S \vec{v} \cdot \vec{m} \, dS = 4\pi \sum \alpha_i \text{ interne}$$



$\vec{m}$ : vettore normale alla superficie  
 $\alpha_i$ : sorgenti interne  
 flusso sup. chiusa dip. solo da sorgenti interne  
 ↳ cariche  
 ↳ masse

$$V(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}) \quad \alpha_i = -GM_i$$

$$\oint_S (\vec{g}) = -4\pi G \sum \alpha_i \text{ interne ad } S$$

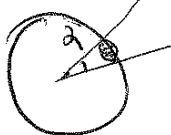
$$\oint_S (\vec{E}) = 4\pi k \sum \alpha_i$$

• angolo piano

• angolo solido.



$$\theta = s/R$$



$$\frac{ds}{r^2} = d\alpha$$

$$ds \perp ar$$

legg = di Newton e di Coulomb

$$f(r) = \frac{q}{r^2} \Rightarrow \bar{V}(r) = \frac{q}{r^2} \bar{u}_r \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{g} = -\frac{GM}{r^2} \bar{u}_r \\ \bar{E} = \frac{kq}{r^2} \bar{u}_r \end{array} \right.$$

campo radiale

↳ simmetria sferica  $\Rightarrow$  simmetria campo

↳ superficie

Terra  $\rightarrow$  sfera omogenea

$$\oint_S (\bar{g}) = \oint_{S_r} \bar{g} \cdot \bar{m} \, dS = \oint_S g(r) \, dS = 4\pi r^2 g(r) \text{ flusso}$$

$$\bar{g}(r) = \begin{cases} -\frac{GM_T}{r^2} \bar{u}_r & r > R_T \\ -\frac{GM_T}{R_T^3} r \bar{u}_r & r < R_T \end{cases}$$

$v_0 \rightarrow$  velocità iniziale  
 ingenerale a varia  $\rightarrow$  movimento

$a = \text{cost.}$  movimento uniformemente accelerato.

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \quad a = v \frac{dv}{dx}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

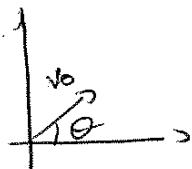
3) movimento uniformemente accelerato

$$a = k$$

movimento di caduta  
 di un grave

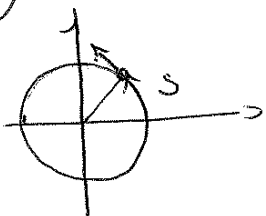
$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$



$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_0 \cos \theta \Delta t \\ y &= y_0 + v_0 \sin \theta \Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \end{aligned} \right\}$$

4) Movimento circolare uniforme,  $a_c$  e  $a_t$



traiettoria è una circonferenza  
 dato che il vettore  $\vec{v}$  cambia nel tempo  
 deve esistere una  $\vec{a}$  che lo fa variare  
 $\hookrightarrow$   $a_c$  centripeta

movimento circolare uniforme  $|v| = k$

se  $\exists$  acc. tangente,  $|v|$  varia  $\rightarrow$  movimento uniformemente accelerato  
 $a_t = k$

si possono usare coordinate polari:

$$\theta(t) = s(t) / R$$

$$\omega \text{ (velocità angolare)} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \quad \text{se } a = 0$$



Cittadinanza  
 Costituzione  
 Sicurezza



MIUR

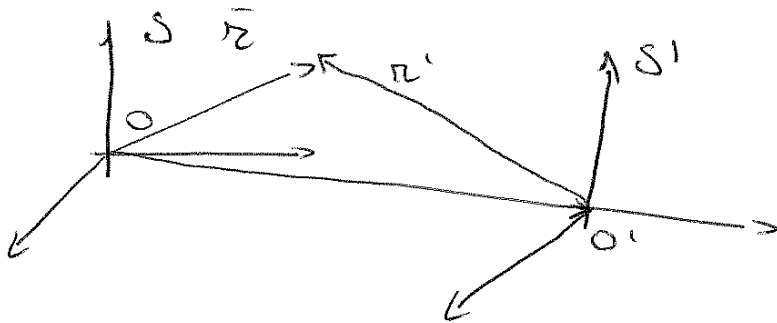


MLPS

Agenzia Nazionale per lo Sviluppo  
 dell'Autonomia Scolastica  
 "Indire"

INAIL

5) Sol R in movimento  
 le leggi fisiche non dipendono  
 dalla scelta di sistema di riferimento,  
 lo spazio è omogeneo e isotropo,  $\exists$  Sol R privilegiate  
 mob è relativo, si deve precisare Sol R.



S' mobile  
 S fisso

$\vec{r} = \vec{OO}' + \vec{r}'$  somma vettoriale

$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\vec{r}' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}$

$\vec{OO}' = x_0\vec{u}_x + y_0\vec{u}_y + z_0\vec{u}_z$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}$   $\vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{OO}'}{dt}$   
 veloc. S' risp. S

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OO}'}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}$

$\frac{d\vec{r}'}{dt}$  non coincide con  $\vec{v}' \rightarrow$  danno anche derivate dei versori!

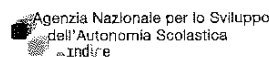
Formule di Poisson:

$\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \omega \times \vec{u}_{x'}$      $\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \omega \times \vec{u}_{y'}$      $\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \omega \times \vec{u}_{z'}$

3 versioni sono legate

$\vec{v} = \vec{v}_{O'} = \vec{v}' + \omega \times \vec{r}'$

Teorema delle velocità relative



clava vale 1<sup>a</sup> legge → Sol R  
 imersali

2) Quantità di moto e sua conservazione  
 $\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  (sistemi a massa variabile)

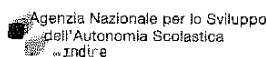
$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  massa relativistica

impulso  $J = \Delta p = \int_0^t \vec{F} dt$

Teo impulso: impulso di forza determina variazione sua p. di moto

→ se  $F = 0$   $\Delta p = 0$

se non ci sono forze applicate la p. di moto di un pb materiale si conserva



Principio di sovrapposizione:

$$im\ 1 \rightarrow sol\ 1$$

$$im\ 2 \rightarrow sol\ 2$$

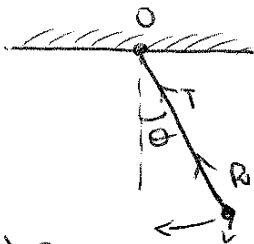
se si vogliono  $1$  e  $2$  contemporaneamente,

$$sol = sol\ 1 + sol\ 2$$

$$E_{mec} = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$v(\omega)$  e  $x(\omega)$  sono alla fase di  $\pi/2$

### 5) Pendolo semplice



pb materiale appeso con un filo inestensibile e di massa trascurabile.

all'equilibrio  $T = mg$



$$R_N = T_r - mg \cos \theta = m a_N$$

$$R_r = -mg \sin \theta = m a_T$$

$\hookrightarrow$  è una forza di richiamo, tende a riportare pb su verticale

$$a_T = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$a_N = \frac{v^2}{l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

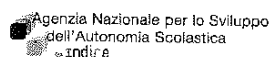
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$S = l \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$v = l \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

ampiezze grandi  $\rightarrow$  moto periodico non armonico

$$T_g = m \left[ g \cos \theta(\omega) + \frac{v^2(\omega)}{l} \right]$$



# lavoro ed Energia

## 1) Energia cinetica

$$W = \int_A^B m v dv = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2)$$

$$dW = F_T ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv$$

$$W > 0 \quad E_{k_f} > E_{k_i}$$

## 2) lavoro ed energia (Teorema)

$$W = \int_A^B \vec{F} ds = \int_A^B F \cos \theta ds$$

$W > 0 \rightarrow$  lavoro motore

$W < 0 \rightarrow$  lavoro resistente

$$W = \sum_i W_i \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot ds = \int_A^B (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n) ds = W_1 + \dots + W_n$$

Somma dei lavori

$$\text{Potenza} = F \cdot v = \frac{dW}{dt}$$

$W = \Delta E_k$  Teorema del lavoro-energia

## 3) Forze conservative ed energia potenziale lavoro non dipende dal percorso

$$\int_A^B \vec{F} ds$$

$$\oint \vec{F} ds = 0 \quad \text{su un percorso chiuso}$$



$$\int_A^B \vec{F} \cdot ds = - \int_B^A \vec{F} \cdot ds$$

inverso verso percorso  
inverso segno

$$\text{Superf. chiusa: } \int_A^B \vec{F} \cdot ds + \int_B^A \vec{F} \cdot ds \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot ds = 0$$



6)  $E_p$  sist. particelle che interagiscono con forze centrali

Sistema isolato

part. 1 è influenzata da part 2 ... N.

$$\vec{F}_{ij} = F_{ij}(r_{ij}) \hat{u}_{ij}$$

$$W_{\{r_{ij}\} \rightarrow \{r'_{ij}\}} = W_{r_{12} \rightarrow r'_{12}} + W_{r_{13} \rightarrow r'_{13}} + \dots$$

$$= E_p(r_{12}, r_{13}, \dots) - E_p(r'_{12}, r'_{13}, \dots)$$

$E_p$  dip. solo da pos. iniziale a pos. finale.

$$d = \infty \quad E_p = 0$$

7) Variazione  $E$  meccanica

$$F(x) = - \frac{dE_p}{dx}(x)$$

$$W_{tot} = W_{noncons.} + W_{cons.} = \Delta E_k \quad W_{mec} = \Delta E_p + \Delta E_k$$

$\Delta E_{mecc. totale} =$  lavoro forze non conservative  
Es. attrib

lavoro forze conservative  $E_{mecc.} =$  si conserva

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \quad W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} \quad \text{si conserva}$$

Corpo rigido

1) Centro di massa sistema particelle

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (\text{decompongo per coordinate})$$

due posizioni non varia a sc. 2dR, solo sue coordinate variano

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{p}_{totale}}{M} \quad \vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

$M$   
↳ massa totale

$$M \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2 \quad \text{come di singola} \\ \text{particella massa } M$$

### 3) Viri e leggi di conservazione

$\vec{v}_0 \times M \vec{v}_{cm} = 0$ , se mom forze esterne è nullo  
il momento angolare è costante.  $M \vec{v} = 0$

→ di st. ideale

→ mom forze est  $\vec{r} = 0$  rispetto a un polo

Due corpi 2 pr materiali vengono a contatto per  $\Delta t$   
trascurabile

forze impulsive, gamma variabile p

se  $\exists F_{ext} \quad p = k$

se  $\exists F_{ext} \quad \Delta p = I$

anelastico → si mangiano alla collisione (comp. an.)

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

$E_{kf} < E_{kim}$  viene assorbita  $E_k$ , e il sistema  
rispetto CM

elastico → si conserva k e p.

NB: per casi a + dimensioni si scompo in  
componenti.

Caso generale → urto anelastico

$$e = \frac{-p_2 f}{p_1 f} \quad \text{coeff. var. fusione}$$

### Modo di rotazione

#### 1) Momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

(rispetto O)

(in un cert. s.d.R.)  
(rispetto O)

$\vec{L} \perp a \vec{r} \text{ e } \perp a \vec{v}$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \begin{matrix} : \vec{r} \\ : \vec{v} \end{matrix}$$



Cittadinanza  
Costituzione  
Sicurezza



MIUR



MLPS

Agenzia Nazionale per lo Sviluppo  
dell'Autonomia Scolastica  
"Indire"

INAIL

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times \vec{v}_i$$

mom totale risp. a CM

$\vec{L}_{CM} = \vec{L}_O - \vec{L}_{CMO} \rightarrow$  momento di  $L$  particella di massa  $M$  situata in CM, risp. a  $O$   
 ↳ con riferimento ad  $O$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_i m_i \underbrace{\frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})}{dt}}_{\vec{v}_i - \vec{v}_{CM}} \times \underbrace{\vec{v}_i}_{\vec{a}_i} + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times \vec{F}_i = \vec{L}_{CM}$$

$\vec{L}_{CM}$ : mom di rotazione relativa a CM

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times \vec{v}_i$$

3) come deriva il momento angolare + con F centrale

$$\vec{F}_{centrale} = F(r) \hat{u}_r$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{F(r)}{r} \vec{r} \times \vec{r} = 0$$

↳ forza centrale ha mom. torcente nullo rispetto suo centro

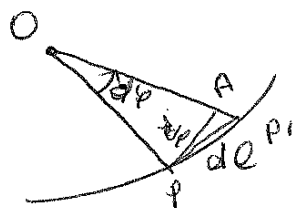
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \vec{L} = \text{cost}$$

↳ mov planare in piano  $\perp$  a  $\vec{L}$

con coord. polari:

$$m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost}$$

Dimostrazione 2<sup>a</sup> legge Keplero



$$|AP'| = dr$$

$$|AP| = r d\varphi$$

$$dA \approx AP \cdot P'P \approx r^2 d\varphi$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost}$$



MIUR



MLPS

Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica "Indire"

INAIL

7) Caratteristiche generali orbite kepleriane

1) Pianeti formano orbite ellittiche ed il Sole è uno dei due fuochi

$$2) \frac{dA}{dt} = k$$

(3 leggi kepleriane)

$$3) \frac{T^2}{a^3} = k$$

movo particella soggetta a forze centrali

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

movo sist part: movo del CM + movo intorno rispetto CM  
 se OR inerziale  $\rightarrow$  movo di part con massa  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$   
 e pos  $\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$

$$M\vec{a} = -\frac{\sigma}{r^2} \vec{u}_{12}$$

masse  $\gg$  m terra, CM è dennoide

$$Q_{Sole} \vec{F}_{12}/m_1 \ll Q_{Terra} \vec{F}_{12}/m_2$$

2 leggi conservazione:

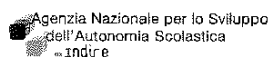
1) mom angolare  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = k_1$

2) Em. mecc  $E = \frac{M}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{\sigma}{r} = k_2$

$$|\vec{L}| = m\mu r^2 \omega(t) = k > 0$$

$$\omega(t) = \frac{k}{m\mu r(t)^2}$$

$$\vec{E} = \frac{M}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{k^2}{2M\mu r^2} - \frac{\sigma}{r}$$



$$d_{iz} = d_i \cos\left(\frac{R}{z} - \theta_i\right) = d_m i v_i \sin \theta_i$$

(componente di  $d_i$  su  $z$ )

$$r_i \sin \theta_i = R$$

$$\omega_i = R_i = v_i$$

$$d_{iz} = d_m i R_i^2 \omega_i$$

Visto che  $\mathbb{F}$  mob relativo fra gli elementi di massa

$$\omega_i = \omega_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{R}$$

$$d_z = \sum_{i=1}^m d_m i R_i^2 \omega = I \omega$$

$I$ : momento di inerzia del corpo rispetto a  $z$

$$I = \int_H R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV$$

$k$ : Raggio d'inerzia

$$I = M k^2$$

d. da dove alla quale possiamo pensare concentrate tutta la massa.

asse principale d'inerzia:

prop:  $\exists$  3 assi fra loro  $\perp$  l se corpo ruota attorno ad uno di questi,  $\mathbb{F}$  sarà diretta lungo l'asse di rotazione

$$d_z = I \omega \quad \text{modulo momento angolare totale}$$

$x_0, y_0, z_0$  sono gli assi principali d'inerzia

$I_1, I_2, I_3$  mom. inerzia risp. a  $x_0, y_0, z_0$   
 $\hookrightarrow$  mom. principali di inerzia

Se il corpo è simmetrico  $x_0, y_0, z_0$  (e alcuni) coincidono con assi principali.

Eq. me. mob. rotazione

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{\tau}_i = \vec{\tau}$$

Se corpo ruota attorno asse z:

$$L = I \bar{\omega}$$

$$I \bar{\alpha} = I \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \vec{\tau}$$

↳ acc. ang. rispetto asse rotaz.

se  $L$  e  $\bar{\omega}$  non // → proiett.  $\frac{dL}{dt}$  su  $\bar{\omega}$

$$\frac{dL_{CH}}{dt} = \tau_{CH} \quad \text{se non c'è alcun pto asse rotaz. fisso rispetto a qualche SdR inerziale}$$

Se asse rotaz.  $\subset CH$

$$\hookrightarrow \vec{L}_{CH} = I_C \bar{\omega}$$

$$\text{Se } \bar{\alpha} = k = I \bar{\omega} \rightarrow \vec{\tau} = 0$$

mob. considerato secondo la sua energia:

$$E_k = \frac{1}{2} M V_{CH}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

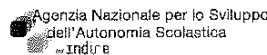
per generico sist. part.  $E_k$  è  $E_{imp}$ , per corpo rigido è  $E$  di rotazione

$$W = E_k^d - E_k^i$$

lavoro totale sul corpo

NB: solo  $F_{ext}$ , ma  $F_{int}$

$$E_{br} = \frac{1}{2} M V_{CH}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \bar{E}_p \quad \text{en. meccanica}$$



$$F + f_x = m a_{CM}$$

eqz. mob

$$\bar{L} = I \omega \quad \text{rotaz. rispetto CM}$$

$$M \dot{\bar{v}} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} + \bar{r} \times \bar{f}$$

$$- m k^2 \ddot{u}_z = - M \ddot{u}_z + r f_x \ddot{u}_z$$

d. da acceleraz

NB:  $\omega$  e  $M$  sono opposti  
su  $z$ .

$$m k^2 a_{CM} = r M - r^2 f_x \quad \text{eqz. della rotazione}$$

$$a_{CM} = \frac{r(F+M)}{m(r^2+k^2)} \quad f_x = \frac{rM - k^2 F}{r^2+k^2}$$

$$f_x \leq \mu_x m g$$

ruota omogenea:  $I = \frac{1}{2} m r^2 \quad k^2 = \frac{r^2}{2}$

$$a_{CM} = \frac{2}{3} r \frac{F+M}{m r} \quad f_x = \frac{2M - rF}{3r}$$

Condizioni di equilibrio statico

$$\bar{R} = 0 \quad \bar{M} = 0$$

$$\hookrightarrow v_{CM} = k \quad \hookrightarrow \text{no mob rotaz. a c.c.}$$

$$\int_{(P_1, P_2)} \vec{v} \cdot d\vec{e} = -\Delta \Phi$$

$\vec{V}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$  uso gradiente  
 ↳ potenziale associato.

$$E_p^G = -G \frac{Mm}{d_i} \quad E_p^E = +k \frac{q_1 q_2}{d_i}$$

Dimostrare che sono conservativi

$$\int_{C(P_1, P_2)} \vec{g} \cdot d\vec{e} = \frac{1}{m} \int_{C(P_1, P_2)} \vec{F}_G \cdot d\vec{e} = \frac{E_p^G(P_1)}{m} - \frac{E_p^G(P_2)}{m} =$$

$$= V_G(P_1) - V_G(P_2)$$

$$\vec{V}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{d_i} \quad (\text{Volt})$$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{d_i}$$

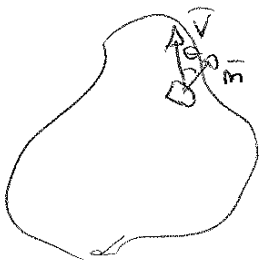
legge Gauss

campi conservativi: sovrapposizione di campi di sorg. puntiformi

$$\Phi_i(\vec{r}) = - \int f_i(\vec{r}) \, d\vec{r} + C$$

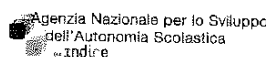
$$F_G(\vec{V}) = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{m} \, dS = 4\pi \sum_{int} q_i \quad \text{legge Gauss}$$

↳ vett. ⊥ ad superficie      ↳ sorg. interne a S



$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{d}{2\epsilon_0} \vec{v}_n$$

$$dF(\vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{m} \, dS = \left\{ \begin{array}{l} + |\vec{V}| \, dS \perp \text{a } \frac{\theta}{2} \\ - |\vec{V}| \, dS \perp \text{a } \frac{\theta}{2} \end{array} \right.$$





spessore  $dz$

$$dm = \rho A dz \text{ massa disco}$$

$\rho = \rho(z)$  fluido è lo stesso ovunque  
ovvero,  $\rho$  dipende da  $z$ .

$$\vec{F}_w = -dmg\vec{u}_z = -\rho A g dz \vec{u}_z$$

NB: forze laterali si annullano.

sopra:  $p(z+dz) = p + dp$ . ( $\vec{F}_+$ )

$$\vec{F}_+ = -(p+dp)A\vec{u}$$

sotto:  $p(z) = p$ . ( $\vec{F}_-$ )

$$\vec{F}_- = pA\vec{u}$$

$$0 = -( \rho A g dz + (p+dp)A - pA ) \vec{u}$$

$$0 = -( \rho A g dz + dp A ) \vec{u}$$

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g(z)}$$
 eqz. dell'equilibrio.

$$p(z) - p_0 = \int_{p_0}^p dp = -g \int_{z_0}^z \rho(z') dz'$$

Sia che  $p$  e  $p_0$  sono su verticale, che se non lo sono  
ci sono contributi non nulli solo nel verticale!

caso particolare: pressione dovuta al peso, liquido  
incompressibile.

$$p(z) = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

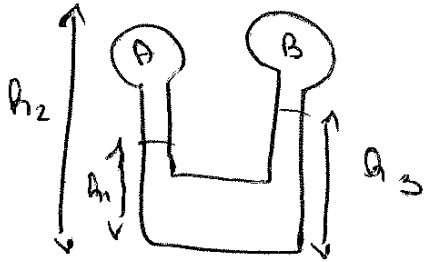
Es1 suppongo in atm  $T = k$ ,  $\rho$  dip. da  $p$ :

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p. \quad \frac{dp}{dz} = -g \left( \frac{\rho_0}{p_0} \right) p$$

barometro a mercurio (Boricelli)

$$P_A = \rho g h \quad 76 \text{ cm}$$

manometro: perifer  $\Delta p$



$$P_A = P_0 - \rho g_{aria} (h_2 - h_1) - \rho g h_2$$

$$P_B = P_0 - \rho g_{aria} (h_2 - h_3) - \rho g h_3$$

$$P_A - P_B = -g(\rho_{aria} - \rho)(h_3 - h_1)$$

Dinamica dei fluidi

1) Equazione di continuità

movo di un fluido

1) descritto come + particelle

$$\vec{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) \quad \forall i$$

→ Strappi dati da gestire (Lagrangiano)

2) pb di visiva locale (Euleriano)

descrive lo stato prescendendo  $\vec{p}$  e  $\vec{v}$  nello spazio, in ogni pb.

$\vec{v}$  media molecole indiv

$\vec{v}(x, y, z, t) \rightarrow$  campo vettoriale del fluido  
 $\forall$  pb c'è un vettore

come sono anche  $p(x, y, z, t)$  e  $\rho(x, y, z, t)$  che sono campi scalari

movo laminare  $\rightarrow \vec{v}(x, y, z, t)$  non dip. da  $t$ !  
 $= \vec{v}(x, y, z)$

si può descrivere come movo di strati //

viscosità: all'int di  $\rho$  che + strati hanno fra loro,  
 (dissipazione  $E$  mecc come  $E$  termica)

