



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 834

DATA: 25/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Ottina

MATERIA: Scienza delle Costruzioni II 2013/2014

Prof. Ferro

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Prof. Ing. Giuseppe Andrea FERRO
Politecnico di Torino

30 settembre 2013

INDICE

- Impostazione della metodologia
- Costruzione della matrice di rigidezza per la singola asta
- Calcolo automatico delle strutture
- Elementi finiti
- Esempi di risoluzione strutture iperstatiche col MdS
- Ricadute teoriche

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Argomenti della lezione

- ➔ **Introduzione**
- ➔ **Sistemi di bielle in parallelo**
- ➔ **Matrice di rigidezza della trave**
- ➔ **Risoluzione di telai**

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Il metodo delle forze

Le $(v-g)$ incognite iperstatiche vengono determinate attraverso $(v-g)$ equazioni di congruenza

Il metodo degli spostamenti

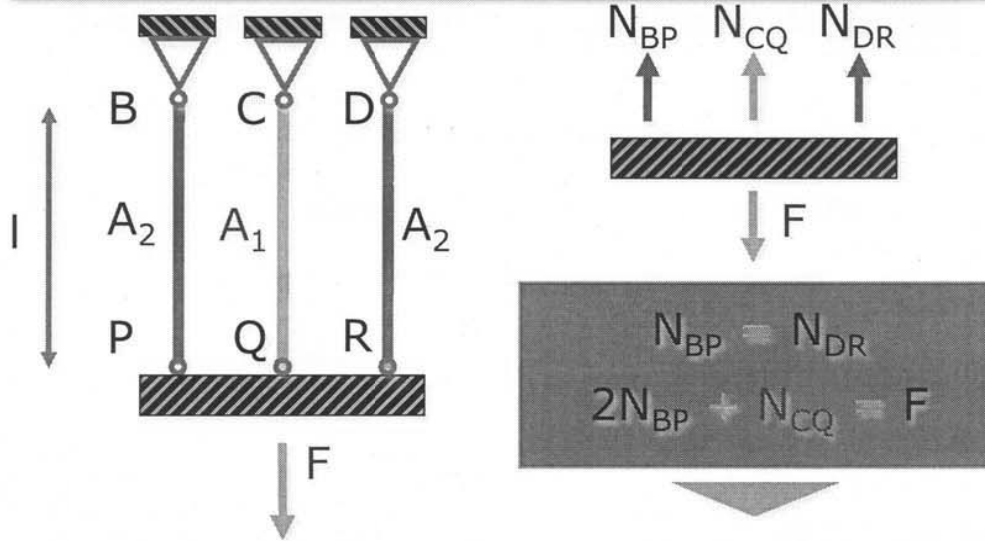
Le (s) incognite cinematiche vengono determinate attraverso (s) equazioni di equilibrio

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Risoluzione con il metodo delle forze



La struttura è 1 volta iperstatica

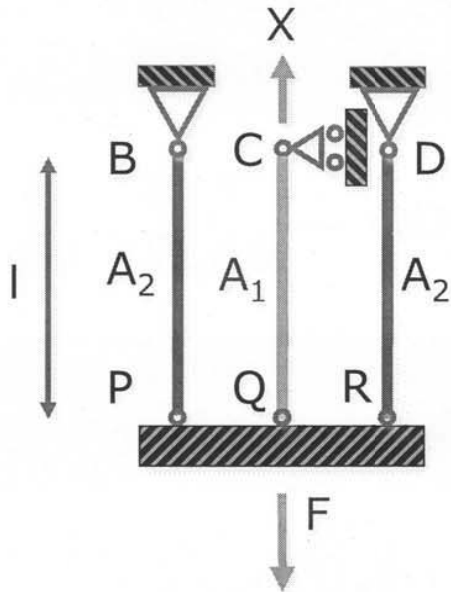
PER EFFETTO DI X , IL PUNTO C SI SPOSTA DI:

$$v_c(X) = -\frac{L}{EA_2} \frac{X}{2} - \frac{L}{EA_1} \cdot X$$

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

PER EFFETTO DI F $v_c(F) = +\frac{L}{EA_2} \frac{F}{2}$

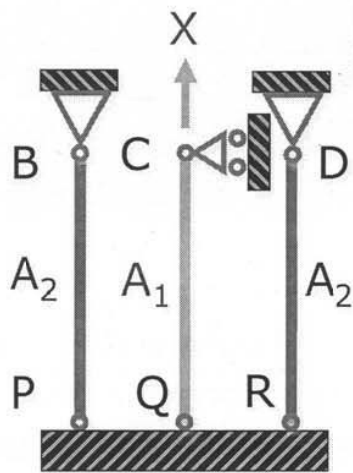
L'EQUAZIONE RISOLVENTE SI HA PER $v_c = 0$ EQUAZIONE DI CONGRUENZA



La struttura è ora staticamente determinata per qualsiasi X

Il valore di X va determinato imponendo la congruenza ($v_c = 0$)

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



Equazione di congruenza

$v_c = 0$ UGUAGLIO LE 2 EQUAZIONI ED OTTENGO X

$$X = \frac{A_1}{A_1 + 2A_2} F = N_{CQ}$$
 SFORZO SULL'ASTA INCOGNITA

LO SFORZO NELLE ASTE ESTERNE È PROPORZIONALE ALLA PROPRIA AREA

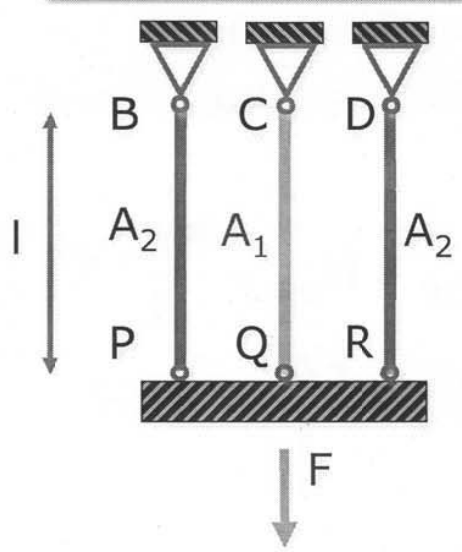
$$N_{BP} = N_{DR} = \frac{A_2}{A_1 + 2A_2} F$$

$$\left(-\frac{l}{2A_2} - \frac{l}{A_1}\right) X = \frac{l}{2A_2} F$$

(L, E) SI SEMPLIFICANO, PERCHÉ LA RIGIDEZZA DIPENDE DALL'AREA
 QUALE N È MAGGIORE? LO SFORZO DIPENDE DALLA AREA: SE $A_1 > A_2$, $N_{CQ} > N_{BP}$

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Risoluzione con il metodo degli spostamenti



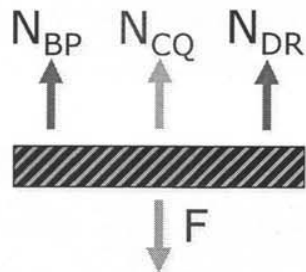
LA STRUTTURA È CINEMATICAMENTE DETERMINATA PER QUALSIASI δ .

$$v_P = v_Q = v_R = \delta$$

La struttura è 1 volta cinematicamente indeterminata

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Equazione di equilibrio



$$2k_2\delta + k_1\delta = F$$

$$N_{BP} + N_{CQ} + N_{DR} = F$$

$$\delta = \frac{F}{k_1 + 2k_2}$$

RIGIDEZZA
TOTALE

SOSTITUISCO δ IN N .

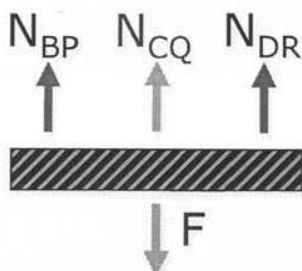
$$N_{CQ} = \frac{k_1}{k_1 + 2k_2} F$$

$$N_{BP} = N_{DR} = \frac{k_2}{k_1 + 2k_2} F$$

COEFFICIENTI DI RIPARTIZIONE

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Equazione di equilibrio



$$N_{BP} + N_{CQ} + N_{DR} = F$$

$$\delta = \frac{F}{k_1 + 2k_2}$$

REGIONE CON I RAPPORTI DI AREA

$$N_{CQ} = \frac{A_1}{A_1 + 2A_2} F$$

$$N_{BP} = N_{DR} = \frac{A_2}{A_1 + 2A_2} F$$

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

→
$$\delta = \frac{F}{\sum_{i=1}^{2n+1} k_i}$$

$$N_i = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^{2n+1} k_i} F$$

Coefficiente di ripartizione
$$k_i = \frac{E_i A_i}{l_i}$$

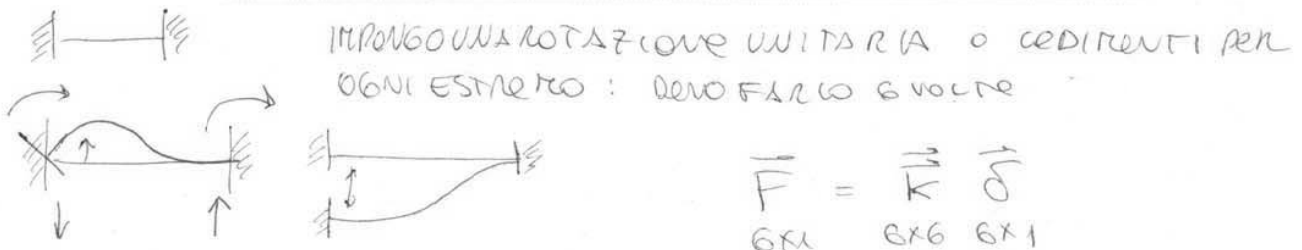
MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE



MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

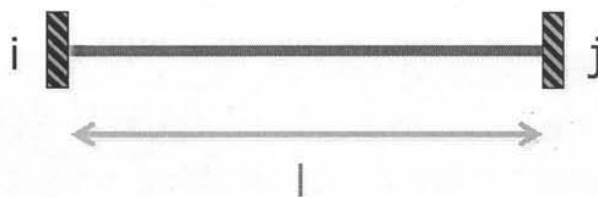
Il metodo degli spostamenti

Per scrivere le equazioni di equilibrio è necessario conoscere le reazioni di alcuni schemi elementari cinematicamente determinati per effetto di cedimenti vincolari



MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

Trave doppiamente incastrata



Occorre calcolare le reazioni vincolari per effetto di cedimenti vincolari (spostamenti nodali) imposti

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

$$v''(l) = 0 = c_1 \frac{l^2}{2} + c_2 l = +\varphi \quad \leadsto \quad c_2 = +\frac{\varphi}{l} - c_1 \frac{l}{2}$$

Condizioni al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0) = 0 \rightarrow c_4 = 0 \\ v'(0) = -\varphi_i \rightarrow c_3 = -\varphi_i \\ v(l) = 0 \\ v'(l) = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -6\varphi_i/l^2 \\ c_2 = 4\varphi_i/l \\ c_3 = -\varphi_i \\ c_4 = 0 \end{array} \right.$$

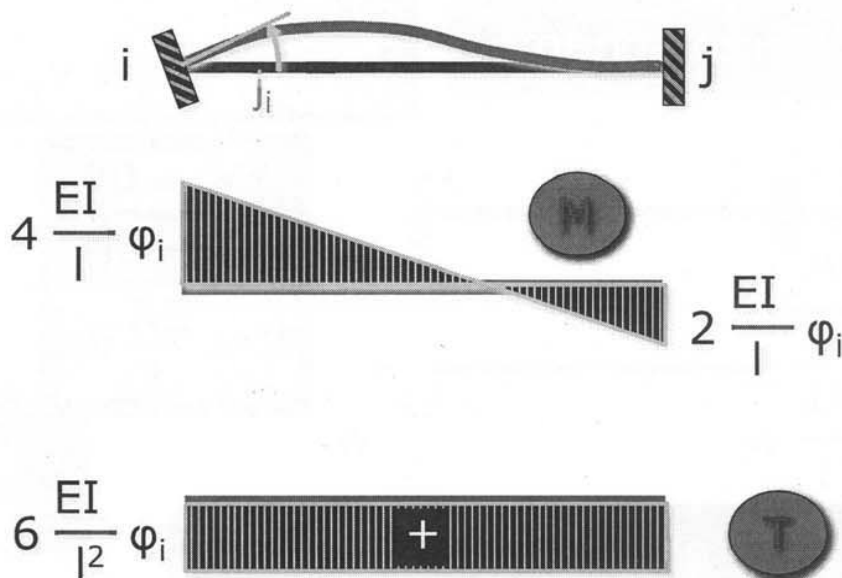
$$v(l) = c_1 \frac{l^3}{6} + \left(+\frac{\varphi}{l} - c_1 \frac{l}{2} \right) \frac{l^2}{2} + \varphi l = 0$$

$$M(z) = \frac{EI}{l} \varphi_i \left(6 \frac{z}{l} - 4 \right)$$

$$T(z) = \frac{6EI}{l^2} \varphi_i$$

$T(z)$ COSTANTE
 $M(z)$ LINEARE.

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE



- SAPERE -

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE - MATRICE SIMMETRICA

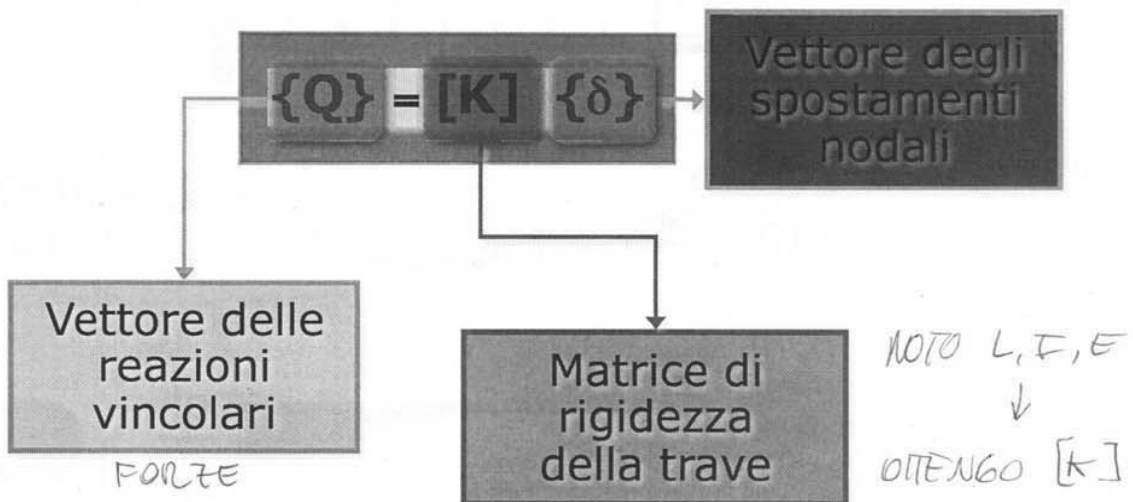
OGNI TERMINE È RICAVATO PER ROTAZIONE O CREDITO UNITARIO.

I risultati ottenuti possono essere espressi in forma matriciale (espansa)

$$\begin{pmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 4/l & -6/l^2 & 0 & 2/l & 6/l^2 & 0 \\ -6/l^2 & 12/l^3 & 0 & -6/l^2 & -12/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & A/l & 0 & 0 & -A/l \\ 2/l & -6/l^2 & 0 & 4/l & 6/l^2 & 0 \\ 6/l^2 & -12/l^3 & 0 & 6/l^2 & 12/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & -A/l & 0 & 0 & A/l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{pmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

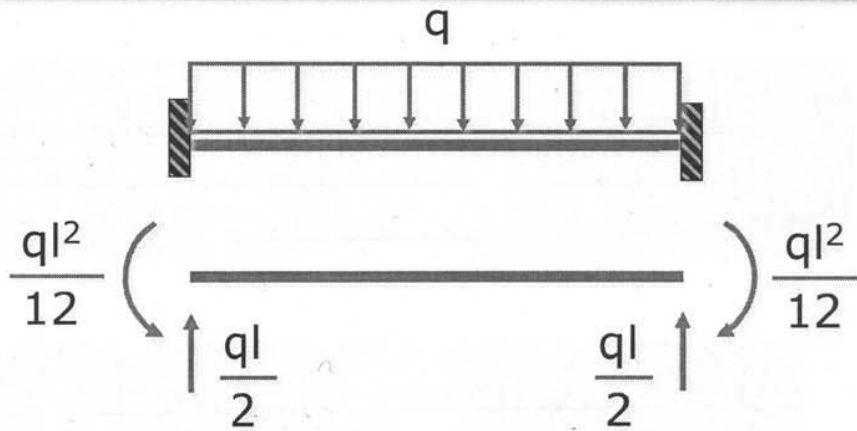
I risultati ottenuti possono essere espressi in forma matriciale (espansa)



$$\{Q\} = [K] \{δ\}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

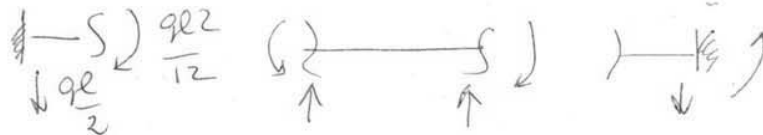
Carico uniformemente distribuito q



$$\{F\}^T = \left\{ -\frac{ql^2}{12}, +\frac{ql}{2}, 0, +\frac{ql^2}{12}, +\frac{ql}{2}, 0 \right\}$$

VECTORE
DELLE
FORZE
AI NODI

SUL NODO
È L'OPPOSTO



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Il metodo degli spostamenti

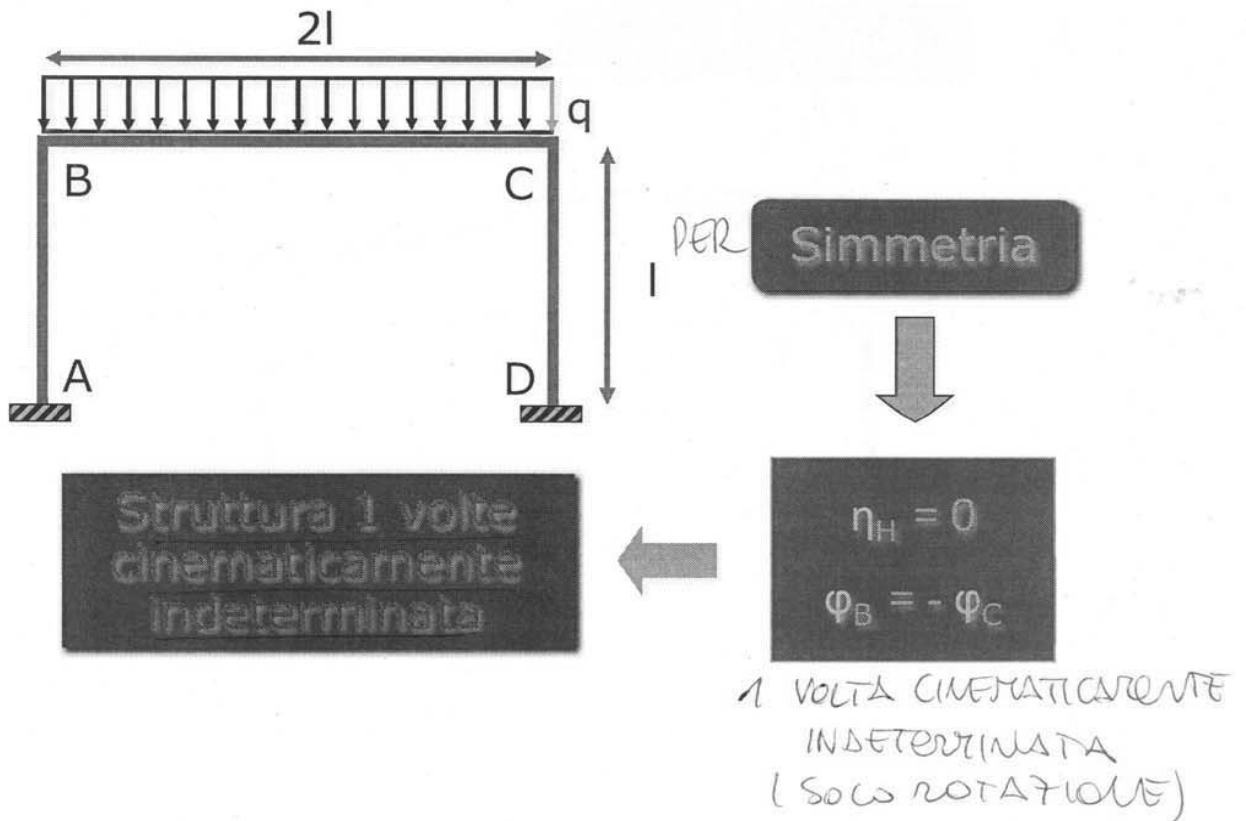
Gli (s) spostamenti nodali incogniti vengono determinati attraverso (s) equazioni di equilibrio nodali duali degli spostamenti incogniti (scritte sfruttando i termini della matrice di rigidità)

RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Il metodo degli spostamenti

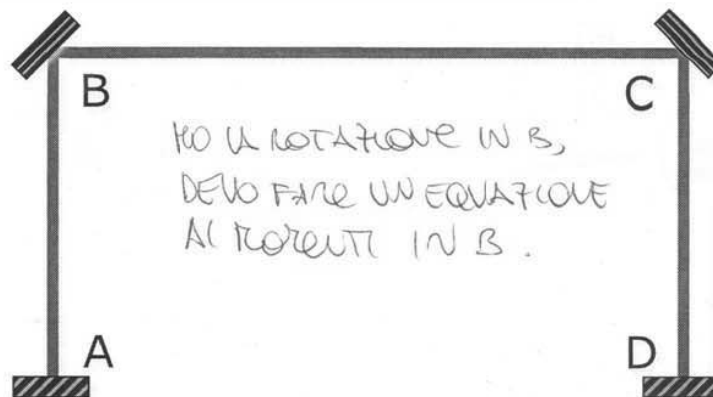
Tra le ∞^5 soluzioni cinematicamente ammissibili (congruenti) si sceglie l'unica che rispetti anche l'equilibrio

RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

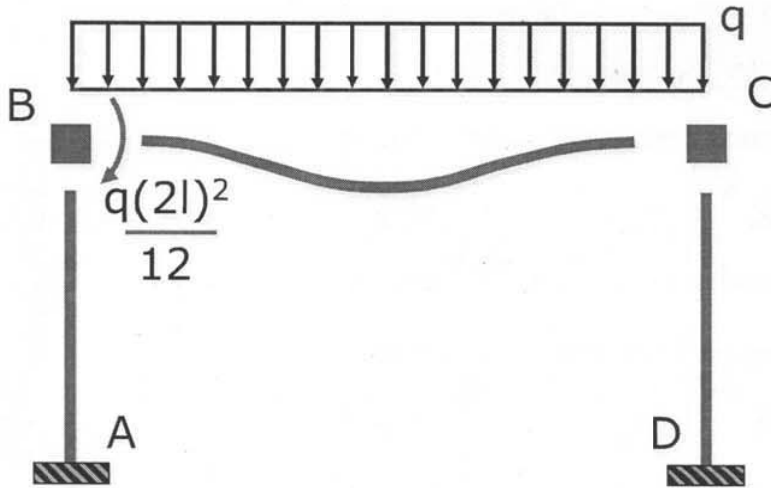
Struttura a nodi bloccati



È soggetta ai cedimenti vincolari incogniti (φ_B, φ_C) ed ai carichi esterni

RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

(c) Carico esterno



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

colonna 13 schemi

Equazioni di equilibrio alla rotazione del nodo B

$$4 \frac{EI}{2l} \varphi_B + 4 \frac{EI}{l} \varphi_B + 2 \frac{EI}{2l} \varphi_C + \frac{q(2l)^2}{12} = 0$$

Per simmetria
 $\varphi_C = -\varphi_B$



$$\varphi_B = -\frac{1}{15} \frac{ql^3}{EI} = -\varphi_C$$

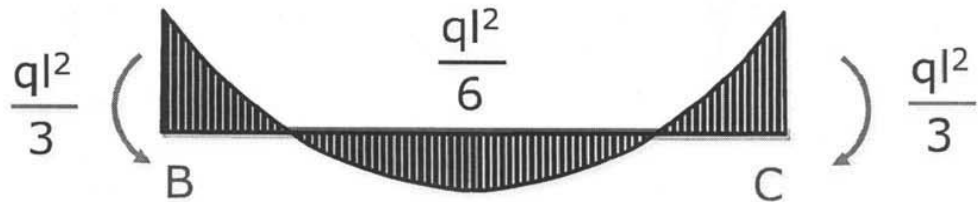
RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Diagramma di momento: **trave BC**

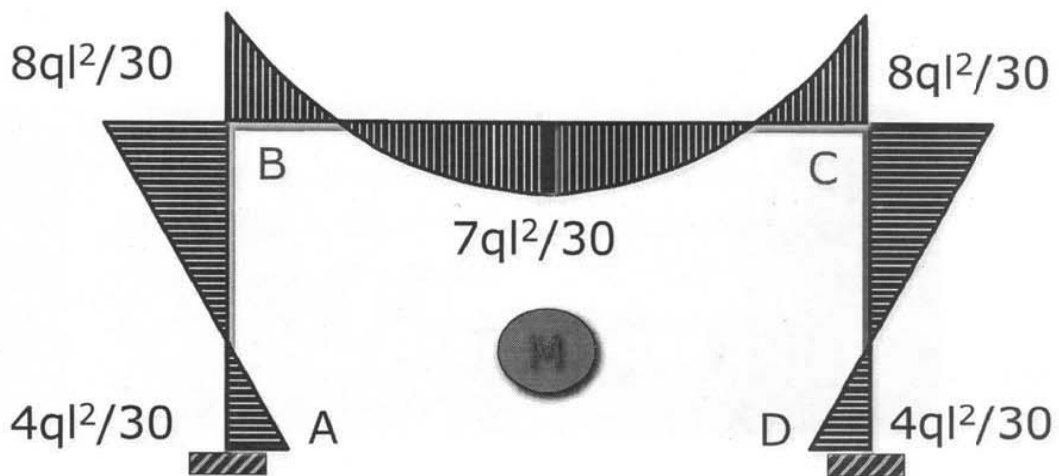
Da $\{Q\} = [K]\{\delta\} + [F]$ (contributo carichi esterni)

$$M_B = + \frac{q(2l)^2}{12}$$

$$M_C = - \frac{q(2l)^2}{12}$$

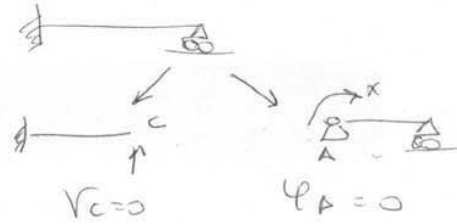


RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Osservazioni



La scelta delle incognite è arbitraria col metodo delle forze, univoca col metodo degli spostamenti

RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Osservazioni

Nel metodo delle forze le incognite sono forze (generalizzate) e le equazioni sono di congruenza

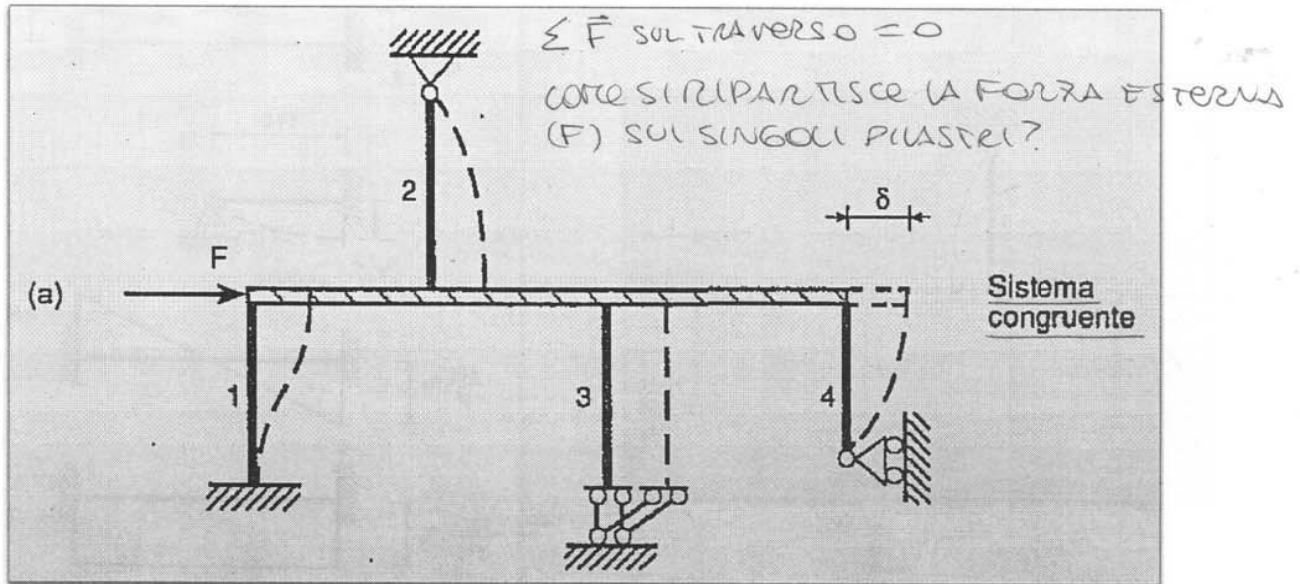
Nel metodo degli spostamenti le incognite sono spostamenti (generalizzati) e le equazioni sono di equilibrio

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

Si consideri, come secondo caso fondamentale, un traverso rigido orizzontale, vincolato al suolo da una serie di piedritti di varia lunghezza, diverso momento di inerzia e costituiti da materiali diversi.

Il traverso orizzontale sia sollecitato da una forza orizzontale F.



IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

A deformazione avvenuta, il traverso risulterà traslato orizzontalmente della quantità δ , così come le estremità dei piedritti. Per la congruenza si ha perciò:

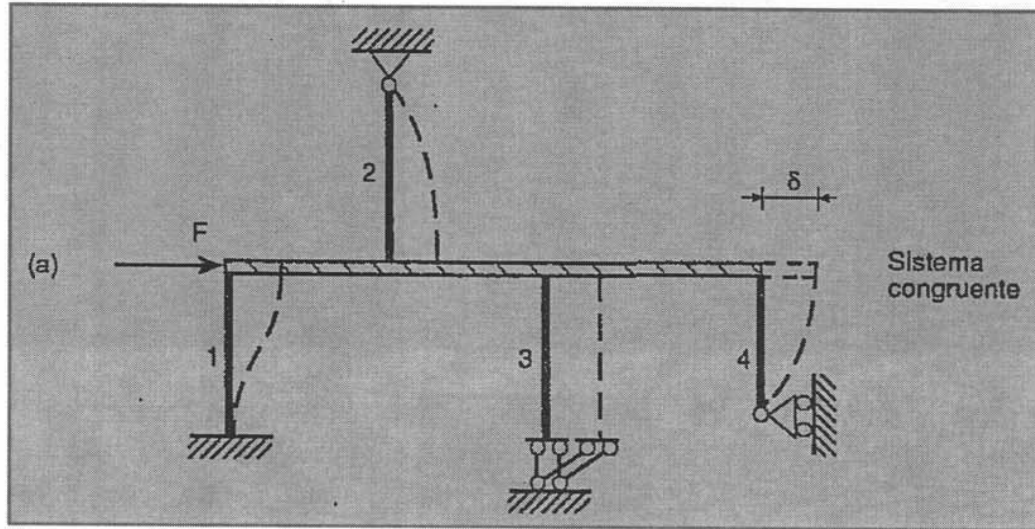
$$\delta_i = \frac{T_i \ell_i^3}{c_i E_i I_i} = \delta,$$

ove T_i è il taglio trasmesso al traverso dal piedritto i-esimo, I_i , ℓ_i , E_i sono come in precedenza le caratteristiche dello stesso piedritto, mentre c_i è un coefficiente numerico dipendente dal vincolo con cui il piedritto è vincolato al suolo.

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

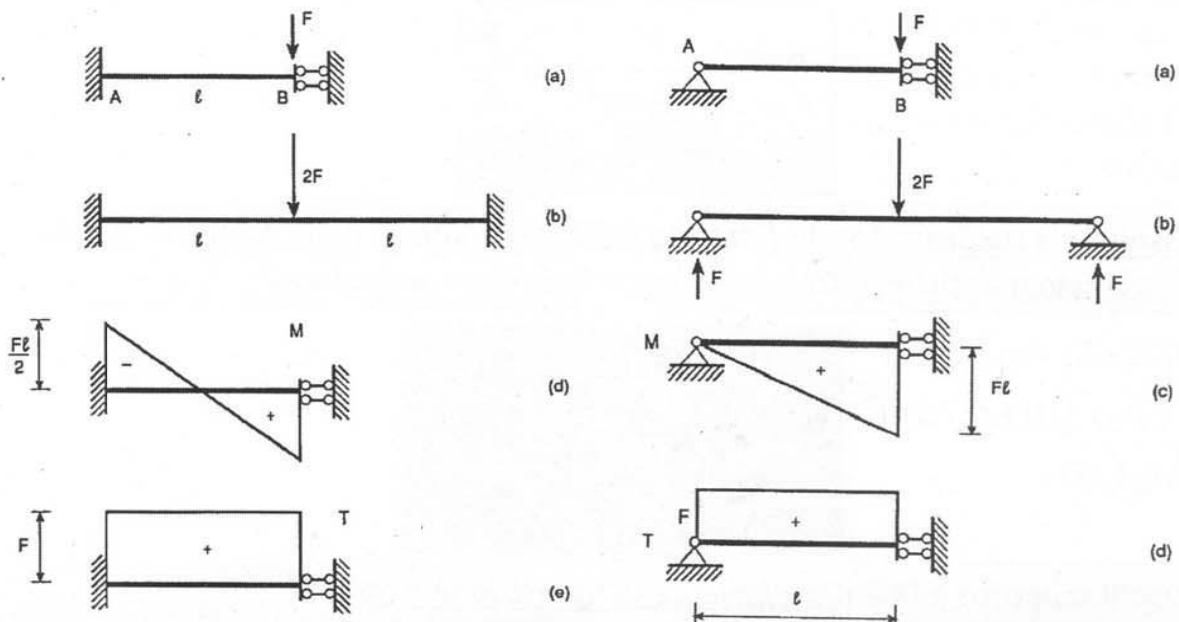
Infine, per il piedritto 3 il coefficiente è nullo, $c_3 = 0$, poiché le traslazioni orizzontali del piedritto sono permesse dal doppio pendolo verticale.



IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

Imposto lo spostamento δ_i , si è quindi ricavata la reazione iperstatica di taglio T_i . Invertendo i ruoli, come già si è visto nello schema fondamentale precedente, è possibile applicare la forza T_i e ricavare lo spostamento elastico δ_i . È sufficiente considerare rispettivamente gli schemi per il calcolo dei coefficienti c_1 e $c_2 = c_4$.



METODO DELLE FORZE

Metodo base per le nuove norme tecniche, già visto nel PLV ma che servirà per il Metodo dei Telai.

NOTA: nel metodo dei telai bisogna prestare attenzione ai VERSI e LUNGHEZZE.

Il metodo delle forze è 1 dei 2 metodi possibili per risolvere le strutture iperstatiche.

g = gradi della libertà della struttura

r = gradi di vincolo esterni

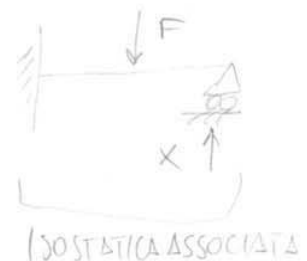
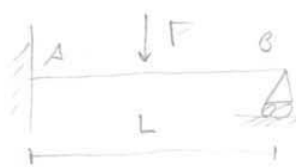
Se $g = r$, struttura isostatica, se $r > g$ struttura iperstatica.

Con le strutture iperstatiche dov'è un'unica delle equazioni aggiuntive che, applicando il Metodo delle Forze sono EQUAZIONI DI CONGRUENZA: nel solido elastico, ma le infinite soluzioni equilibrate, scegliamo la congruenza.

ESEMPIO

$r = 4, g = 3 \rightarrow 1$ - IPERSTATICA

La struttura di partenza diventa un'isostatica equivalente solo se risolviamo l'equazione di congruenza.



Nelle strutture iperstatiche, qualunque carico produce un'intensità di forze equivalente.

Equazione di congruenza: $\boxed{v_B = 0}$

Tra le infinite soluzioni del problema, scegliamo l'unica che rispetti la congruenza di $v_B = 0$.

Sovrinnano i contributi:

$$v_x = \frac{x^3}{6EI}$$

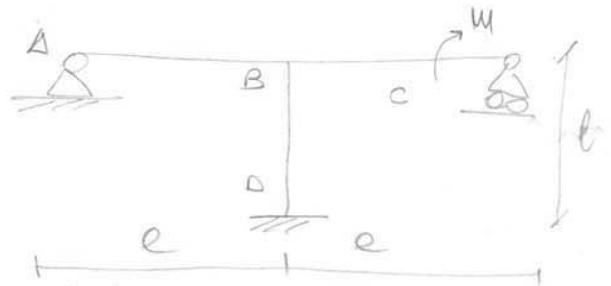


NONI SPOSTABILI

Struttura soggetta ad alti di moto rigido dove dobbiamo usare equazioni di congruenza (per i movimenti iperstatici) ed equazioni di spostamento (dei nodi): metodo misto

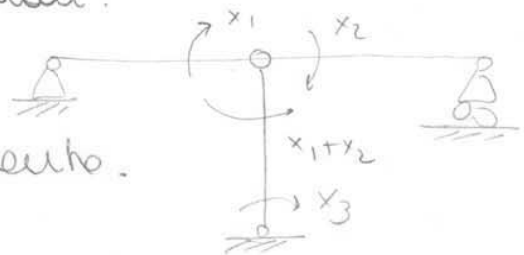
ESEMPIO - TREI NODI FISSI -

Ho 6 g.d.r ed applicando il PLV ottengo 3 sistemi instabili associate.

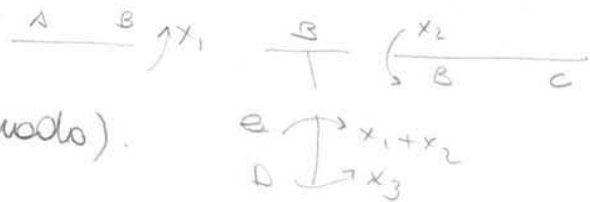


Insensibile tutte le cerniere nei nodi.

Tutte le aste che concorrono nel nodo possono essere soggette ad 1 momento.



Indico i movimenti che agiscono sugli elementi (opposti di quelli nella struttura / nodo).



Come visto nel PLV, i movimenti incogniti inseriti possono essere arbitrari: se poi ottengo un risultato del momento negativo, significa che devo cambiare verso.

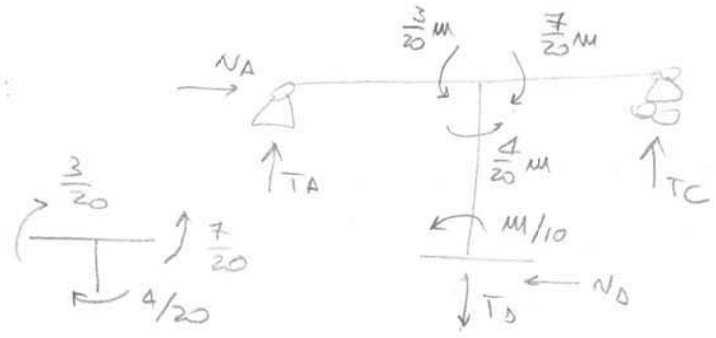
Partiamo da una soluzione che a priori è equilibrata: il sistema di momenti interni è equilibrato.

$$\sum_{i=1}^n X_i = \begin{cases} 0 & \text{MODO SCARICO} \\ M & \text{MODO CARICATO} \end{cases}$$

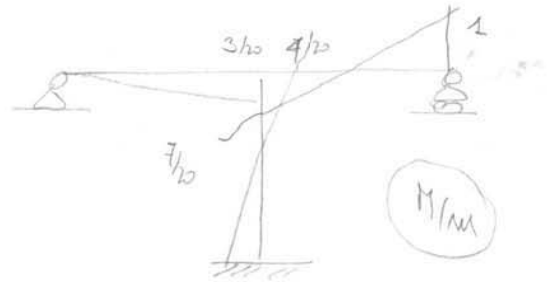
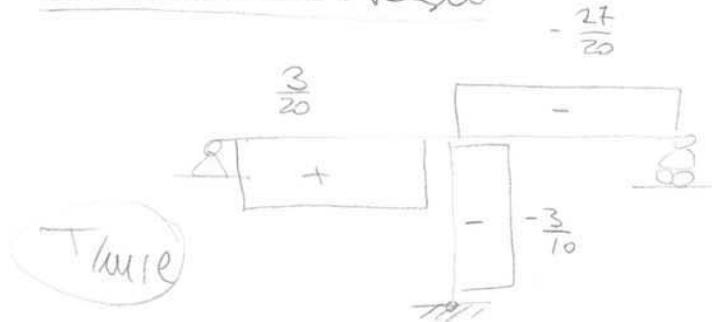
Nell'esempio $g=9, v=9$ ma $g=v$ non è una condizione NECESSARIA ma solo sufficiente per avere una struttura ISOSTATICA.

La struttura ha un IPERSTATICA ASSIEME, nelle forme ad arte rettilinee, N è indipendente da M, T ed avrà una riduzione indipendente.

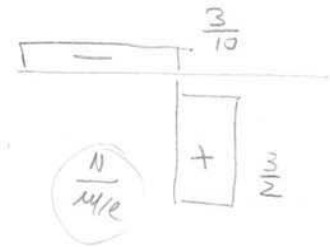
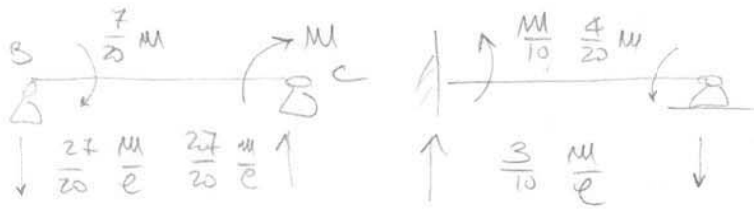
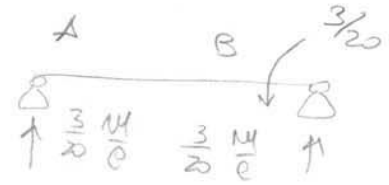
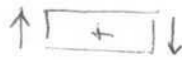
Otteniamo 2 modi di flessione:
 braccio rigido
 vertebre di 2 modi.



Per determinare i baschi



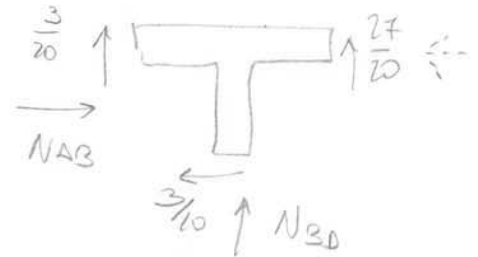
Le reazioni verticali devono equilibrare i momenti ai nodi:
 il taglio è positivo se



Sforzo normale

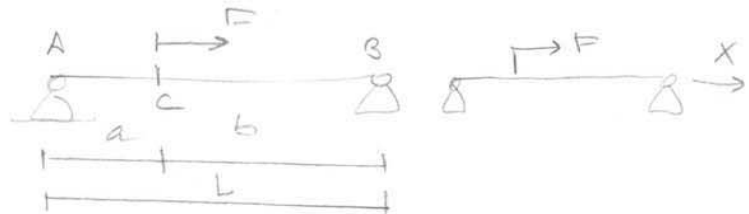
Lo determino dall'equazione ai nodi

$$N_{AB} = \frac{3}{10} \frac{M}{e} \quad N_{BD} = \frac{3}{2} \frac{M}{e}$$



IPERSTATICITA' ASSIEME

Trovo soppetta ad F in posizione "a".



Equazione di compatibilità: $M_B = 0$

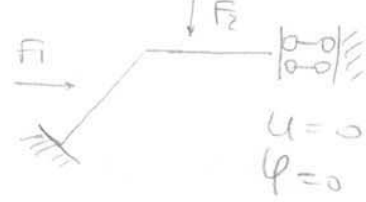
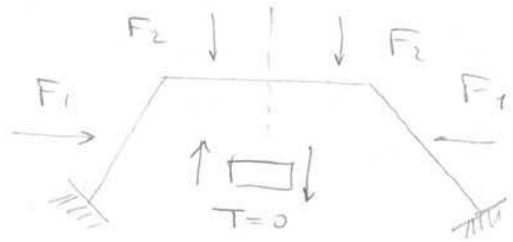
Usando i parametri del materiale e la relazione del solido di De Saint Venant:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

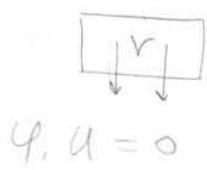
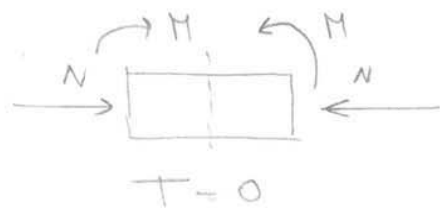
SIMMETRIA STRUTTURALE

A) SIMMETRIA ASSIALE

Se ruota metà struttura di 180° rispetto all'asse, essa si sovrappone all'altra.
(stesso di segno per forze e vincoli)



la risposta strutturale è SIMMETRICA.



→ BIPENDOLO

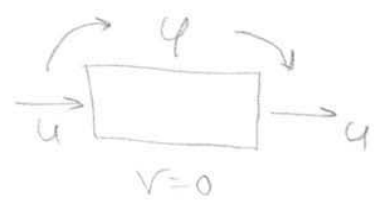
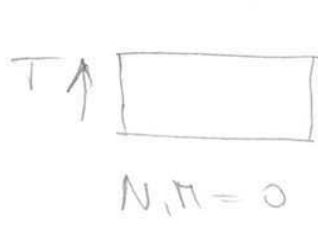
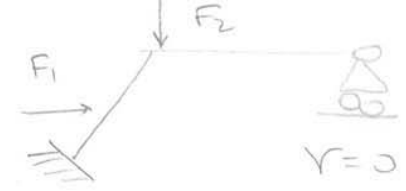
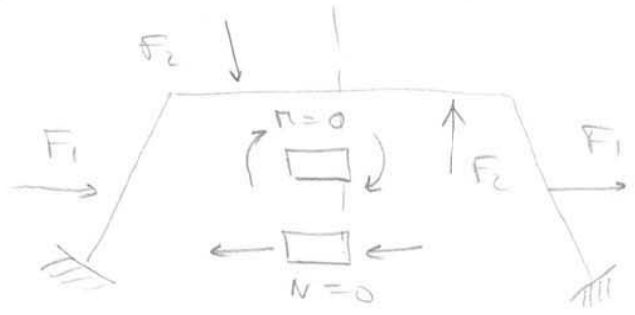
$T=0$ per soddisfare contemporaneamente SIMMETRIA ed EQUILIBRIO

$\phi, u = 0$ per soddisfare SIMMETRIA e COERENZA

Se avessi avuto una cerniera interna, anche $\pi=0$ ed avrei avuto un ARRETO.

B) ANTISIMMETRIA ASSIALE

la struttura è caricata antisimmetricamente se le sollecitazioni agenti su una delle 2 metà della struttura, è opposta alla simmetrica rispetto alle sollecit. di uguale segno nell'altra metà.



→ ARRETO

$N, \pi = 0$ per soddisfare ANTISIMMETRIA ed EQUILIBRIO

$v = 0$ per soddisfare ANTISIMMETRIA e COERENZA.

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

TRAVI AD ASSE CURVILINEO CURVA DELLE PRESSIONI

Prof. Ing. Giuseppe Andrea FERRO
Politecnico di Torino

14 ottobre 2013

TRAVI RETTILINEE E CURVE

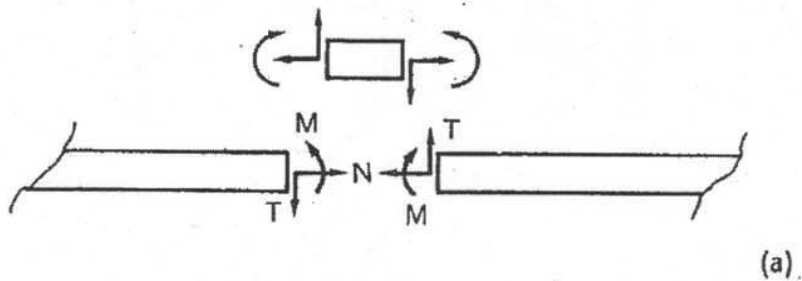
TRAVI RETTILINEE E CURVE

TRAVI RETTILINEE E CURVE

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Le convenzioni sui segni delle caratteristiche nel piano sono usualmente le seguenti:

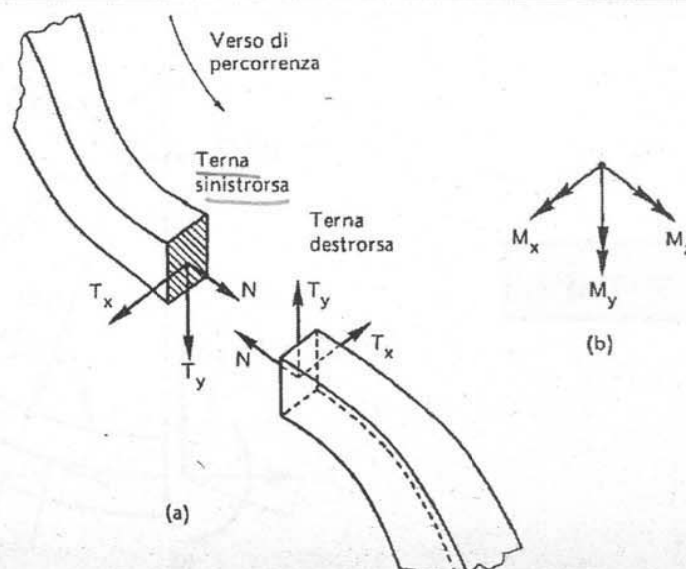
- (1) lo sforzo normale positivo quando è di trazione;
- (2) lo sforzo tagliante positivo quando tende a fare ruotare in senso orario il tronco di trave su cui agisce;
- (3) il momento flettente positivo quando tende le fibre inferiori e comprime le fibre superiori della trave. Si comprende come tali convenzioni siano del tutto arbitrarie e, tranne che per lo sforzo normale, relative all'orientazione dell'osservatore (il momento flettente) o al suo semispazio di osservazione (il taglio).



TRAVI RETTILINEE E CURVE

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

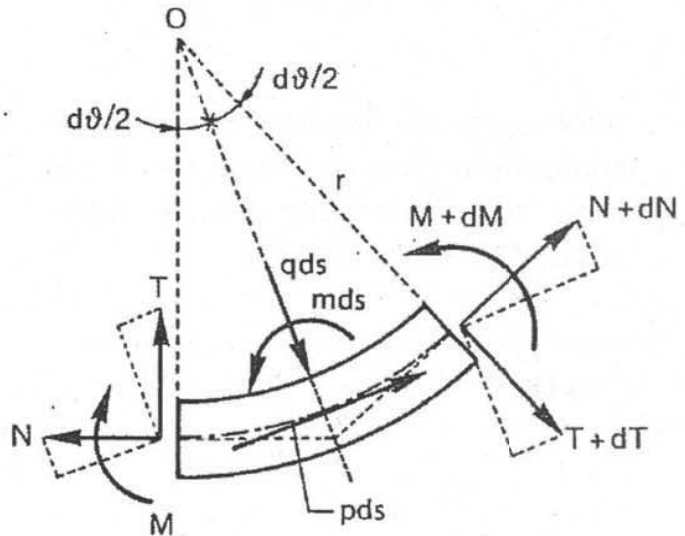
Nel caso di trave ad asse sghembo, si dovrà invece fissare un verso di percorrenza all'asse della trave e, per ciascuna sezione, una terna di riferimento intrinseca costituita dalla tangente, dalla normale e dalla binormale alla curva. Più precisamente la terna di riferimento sarà sinistrorsa, con l'asse Z orientato secondo la tangente e nel verso di percorrenza prescelto, l'asse Y orientato secondo la normale e l'asse X secondo la binormale.



TRAVI RETTILINEE E CURVE

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

L'elemento infinitesimo della trave è in genere soggetto ad un carico distribuito tangenziale $p(s)ds$, ad un carico distribuito normale $q(s)ds$ e a un momento distribuito $m(s)ds$, oltre che alle caratteristiche N, T, M , all'estremità a monte, e alle caratteristiche incrementate $N+dN, T+dT, M+dM$ all'estremità a valle.



TRAVI RETTILINEE E CURVE

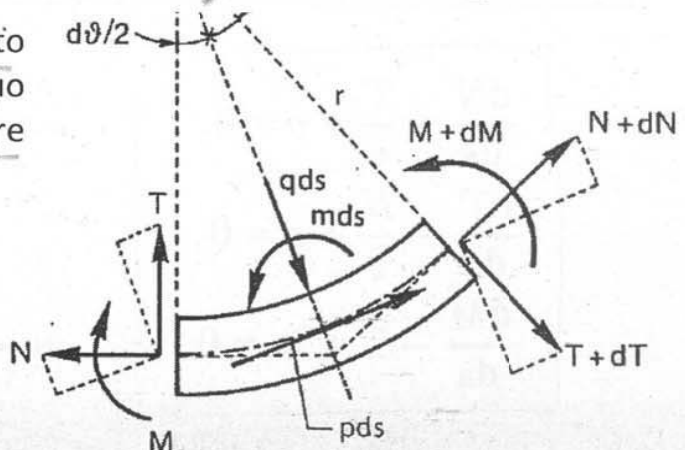
EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$d\theta/2$ rappresenta sia l'angolo compreso tra la radiale mediana e le sezioni terminali, che l'angolo compreso tra la tangente mediana e le tangenti estreme. È possibile imporre l'equilibrio alla traslazione del concio rispettivamente nelle direzioni della tangente mediana e della radiale mediana:

$$\begin{aligned} \rightarrow) \quad & p ds - N \cos \frac{d\theta}{2} + (N + dN) \cos \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0, \\ \downarrow) \quad & q ds - N \sin \frac{d\theta}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0. \end{aligned}$$

$d\theta/2$ supposto infinitesimo: è lecito confondere l'angolo stesso con il suo seno o la sua tangente, e porre $\cos d\theta/2 \sim 1$, per cui si ha:

$$\begin{cases} p ds + dN + T d\theta = 0, \\ q ds - N d\theta + dT = 0, \end{cases}$$



TRAVI RETTILINEE E CURVE

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Nel caso in cui il raggio di curvatura r non sia funzione della coordinata curvilinea s , cioè nel caso degli archi circolari e degli anelli, le equazioni precedenti possono essere presentate nella forma che segue:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\vartheta} + T + pR &= 0, \\ \frac{dT}{d\vartheta} - N + qR &= 0, \\ \frac{dM}{d\vartheta} - TR + mR &= 0,\end{aligned}$$

ove la variabile indipendente è rappresentata dalla coordinata angolare θ ed R è il raggio dell'asse circolare della trave.

Tali equazioni costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali lineari del primo ordine nelle tre funzioni incognite N, T, M .

TRAVI RETTILINEE E CURVE

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

È possibile disaccoppiare la funzione M dalle altre due e ottenere un'equazione differenziale del terzo ordine, ove compaia solo l'incognita $M(\theta)$. Dalla terza equazione si ha infatti:

$$T = m + \frac{1}{R} \frac{dM}{d\vartheta},$$

così che le altre due si trasformano come segue:

$$\begin{cases} \frac{dN}{d\vartheta} + m + \frac{1}{R} \frac{dM}{d\vartheta} + pR = 0, \\ \frac{dm}{d\vartheta} + \frac{1}{R} \frac{d^2 M}{d\vartheta^2} - N + qR = 0. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene poi:

$$N = qR + \frac{dm}{d\vartheta} + \frac{1}{R} \frac{d^2 M}{d\vartheta^2},$$

e quindi:

$$\frac{d^3 M}{d\vartheta^3} + \frac{dM}{d\vartheta} = -R^2 \left(p + \frac{dq}{d\vartheta} \right) - R \left(m + \frac{d^2 m}{d\vartheta^2} \right).$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale del terzo ordine non omogenea, che ammette il seguente integrale generale:

$$M(\vartheta) = M_0(\vartheta) + C_1 \sin \vartheta + C_2 \cos \vartheta + C_3,$$

$$M_0(\theta) = \text{integrale particolare.}$$

TRAVI RETTILINEE E CURVE

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Inoltre, derivando entrambi i membri della terza relazione e tenendo conto della seconda, si ottiene la relazione che lega il momento flettente direttamente con il carico applicato sulla trave:

$$\begin{array}{l} \frac{dN}{dz} = -p(z), \\ \frac{dT}{dz} = -q(z), \\ \frac{dM}{dz} = T. \end{array} \longrightarrow \frac{d^2 M}{dz^2} = -q(z)$$

In assenza di carichi distribuiti, sia lo sforzo normale che il taglio sono costanti, mentre il momento flettente diventa una funzione lineare della coordinata z . L'andamento delle caratteristiche va studiato nei tratti di trave compresi tra una sollecitazione concentrata e l'altra. Nei punti di applicazione delle sollecitazioni concentrate si verifica la discontinuità delle relative caratteristiche.

TRAVI RETTILINEE E CURVE

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO (EQUAZIONI STATICHE)

Le *equazioni indefinite di equilibrio* o *equazioni statiche* per la trave curva possono infine essere poste in forma matriciale:

$$\begin{array}{l} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + p = 0, \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0, \\ \frac{dM}{ds} - T + m = 0. \end{array} \quad \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$[\partial]^* \{Q\} + \{F^*\} = \{0\},$$

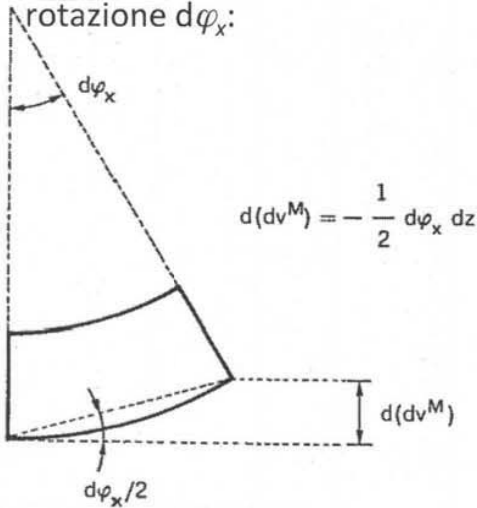
TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

TRAVI AD ASSE RETTILINEO

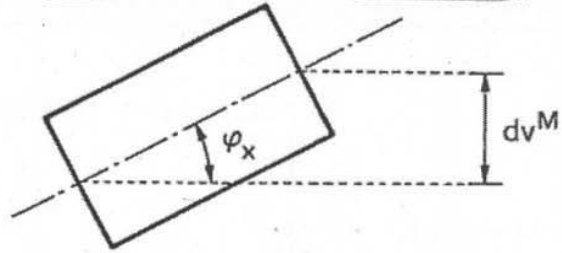
Nel caso invece del momento flettente e considerando la rotazione φ_x del concio, si ha:

$$dv^M = -\varphi_x dz,$$

avendo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore dovuti alla curvatura, cioè alla variazione di rotazione $d\varphi_x$:



(c)



$$dv^M = -\varphi_x dz$$

Sommando i due contributi significativi del taglio e del momento flettente si ottiene:

$$dv = dv^T + dv^M = \gamma_y dz - \varphi_x dz,$$

da cui deriva:

$$\frac{dv}{dz} = \gamma_y - \varphi_x.$$

TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

EQUAZIONI CINEMATICHE

Le *equazioni cinematiche* costituiscono la definizione delle componenti di deformazione in funzione degli spostamenti in senso generalizzato:

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \epsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}$$

Vettore delle caratteristiche deformative

$$\{q\} = [\partial]\{\eta\},$$

Vettore degli spostamenti generalizzati

TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

EQUAZIONI COSTITUTIVE

Le relazioni che legano le caratteristiche statiche con le caratteristiche deformative duali si possono presentare in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_x}{GA} & \frac{t_{xy}}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{xy}}{GA} & \frac{t_y}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GI_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$\{q\} = [H]^{-1}\{Q\},$

TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

TRAVI AD ASSE RETTILINEO

In forma compatta si ha:

$$\{q\} = [H]^{-1}\{Q\},$$

ove $[H]^{-1}$ rappresenta l'inversa della matrice Hessiana del potenziale elastico della trave. Vale anche la relazione inversa:

$$\{Q\} = [H]\{q\}.$$

Applicando il Teorema di Clapeyron, si ottiene il lavoro di deformazione per unità di lunghezza della trave, cioè il potenziale elastico della trave:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2}\{Q\}^T\{q\}, \quad \text{ovvero:} \quad \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2}\{Q\}^T[H]^{-1}\{Q\}, \quad \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2}\{q\}^T[H]\{q\},$$

ove si è impiegata la relazione di simmetria $[H]^T=[H]$.

Esplicitando tale relazione si ottiene:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left(t_x \frac{T_x^2}{GA} + t_y \frac{T_y^2}{GA} + 2t_{xy} \frac{T_x T_y}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{GI_t} \right),$$

TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

TRAVI AD ASSE RETTILINEO SOLLECITATA NEL PIANO

La formulazione si semplifica notevolmente nel caso di *trave ad asse rettilineo sollecitata nel piano*. Ipotizzando una sezione trasversale simmetrica rispetto all'asse Y, le caratteristiche deformative si riducono allo scorrimento γ_y in direzione Y, alla dilatazione assiale ε_z e alla curvatura χ_x .

EQUAZIONI CINEMATICHE

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & +1 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi_x \end{bmatrix},$$

EQUAZIONI STATICHE

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_v \\ N \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

EQUAZIONI COSTITUTIVE

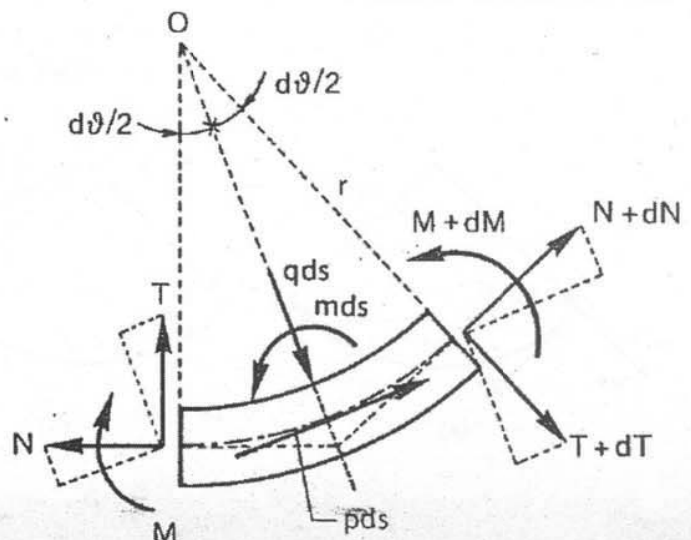
$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_y}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_v \\ N \\ M_x \end{bmatrix}.$$

TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO

Si consideri il concio di trave ad asse curvilineo. La coordinata curvilinea s è considerata crescente procedendo da sinistra verso destra, mentre l'angolo dθ è considerato positivo se antiorario. Coerentemente con le sopradette convenzioni, anche il raggio di curvatura r acquista un segno algebrico in base alla relazione:

$$ds = r d\theta.$$



TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO – EQUAZIONI CINEMATICHE

In seguito ad una rotazione relativa infinitesima $d\varphi$ delle sezioni estreme del concio elementare, l'angolo tra le stesse sezioni si può ottenere come somma ($d\varphi+d\theta$) delle rotazioni relative iniziale ed elastica. La nuova curvatura vale allora:

$$\chi_{\text{totale}} = \frac{(d\vartheta + d\varphi)}{ds},$$

così che la variazione di curvatura risulta essere:

$$\chi = \chi_{\text{totale}} - \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Inserendo le relazioni relative alla variazione d'angolo da detrarre, la dilatazione assiale aggiuntiva e la variazione di curvatura, le **equazioni cinematiche** diventano:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & +1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \{q\} = [\partial]\{\eta^*\},$$

TRAVI AD ASSE CURVILINEO

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & +1 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi_x \end{bmatrix},$$

TRAVI AD ASSE RETTILINEO

TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO – EQUAZIONI STATICHE

Dal confronto con le equazioni statiche, scritte in forma matriciale, si osserva che, a meno dei segni algebrici dei termini non differenziali, la matrice statica è la trasposta di quella cinematica:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & +1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &[\partial]^*\{Q\} + \{S^*\} = \{0\}, \\ &\{q\} = [\partial]\{\eta^*\}, \end{aligned}$$

TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

TRAVI AD ASSE CURVILINEO

Le equazioni statiche e cinematiche nel sistema di riferimento locale:

$$\left. \begin{aligned} [\partial]^* \{Q\} + \{\mathcal{F}^*\} &= \{0\}, \\ \{q\} &= [\partial] \{\eta^*\}, \end{aligned} \right\}$$

diventano:

$$\left. \begin{aligned} [\partial]^* \{Q\} + [N] \{\mathcal{F}\} &= \{0\}, \\ \{q\} &= [\partial][N] \{\eta\}. \end{aligned} \right\}$$

TEORIA TECNICA DELLA TRAVE

PROBLEMA ELASTICO PER LE TRAVI CURVE E PER GLI ARCHI

Introducendo $\{Q\} = [H] \{q\}$ e $\{q\} = [\partial][N] \{\eta\}$ nella $[\partial]^* \{Q\} + \{\mathcal{F}^*\} = \{0\}$ si ha:

$$[\partial]^* [H] [\partial][N] \{\eta\} + [N] \{\mathcal{F}\} = \{0\}.$$

Premoltiplicando entrambi i membri per $[N]^T$, si ottiene infine:

$$([N]^T [\partial]^* [H] [\partial][N]) \{\eta\} = -\{\mathcal{F}\},$$

equazione di Lamé per le travi curve e per gli archi

Il problema elastico per le travi curve e per gli archi, può essere sintetizzato:

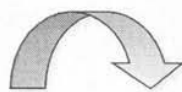
$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{L}] \{\eta\} &= -\{\mathcal{F}\}, & \text{per } 0 < s < \ell, \\ ([N]^T [H] [\partial][N]) \{\eta\} &= \{Q_0\}, & \text{per } s = 0, \ell, \\ \{\eta\} &= \{\eta_0\}, & \text{per } s = 0, \ell. \end{aligned} \right\}$$

CURVA DELLE PRESSIONI

Definizione
e tracciamento
della curva delle pressioni

CURVA DELLE PRESSIONI

Curva delle pressioni

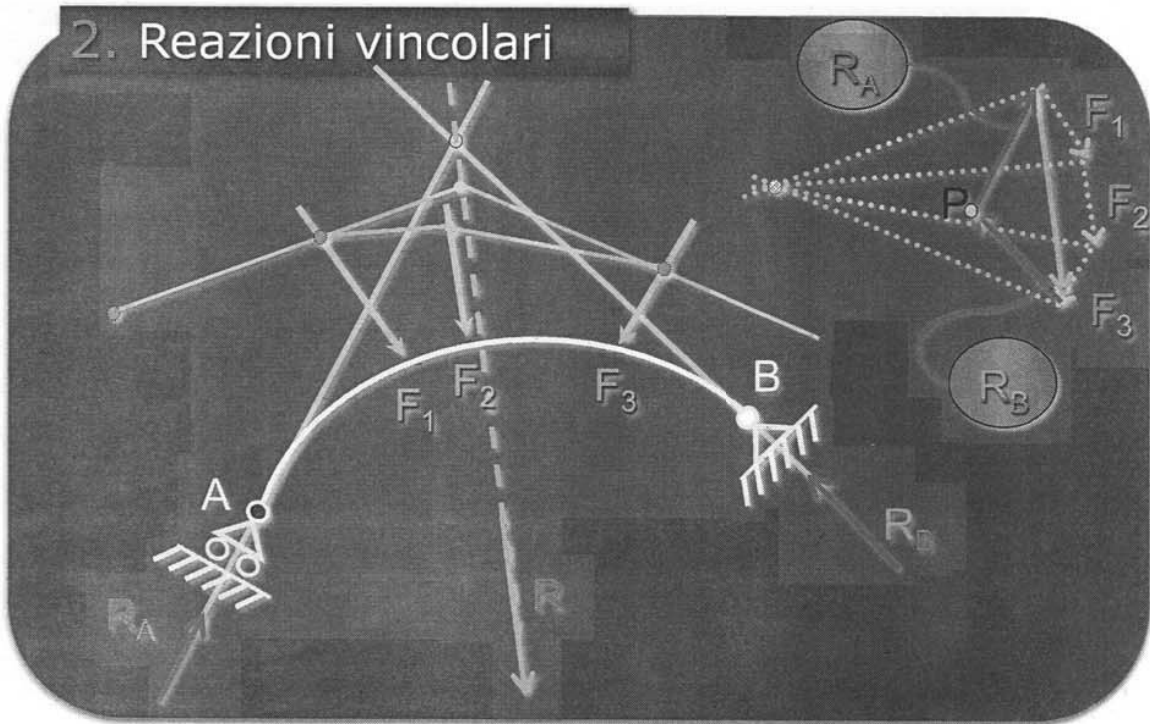


“Insieme delle rette d'azione
delle successive forze risultanti
che agiscono su una struttura”

Tali risultanti possono essere viste come
reazioni vincolari interne

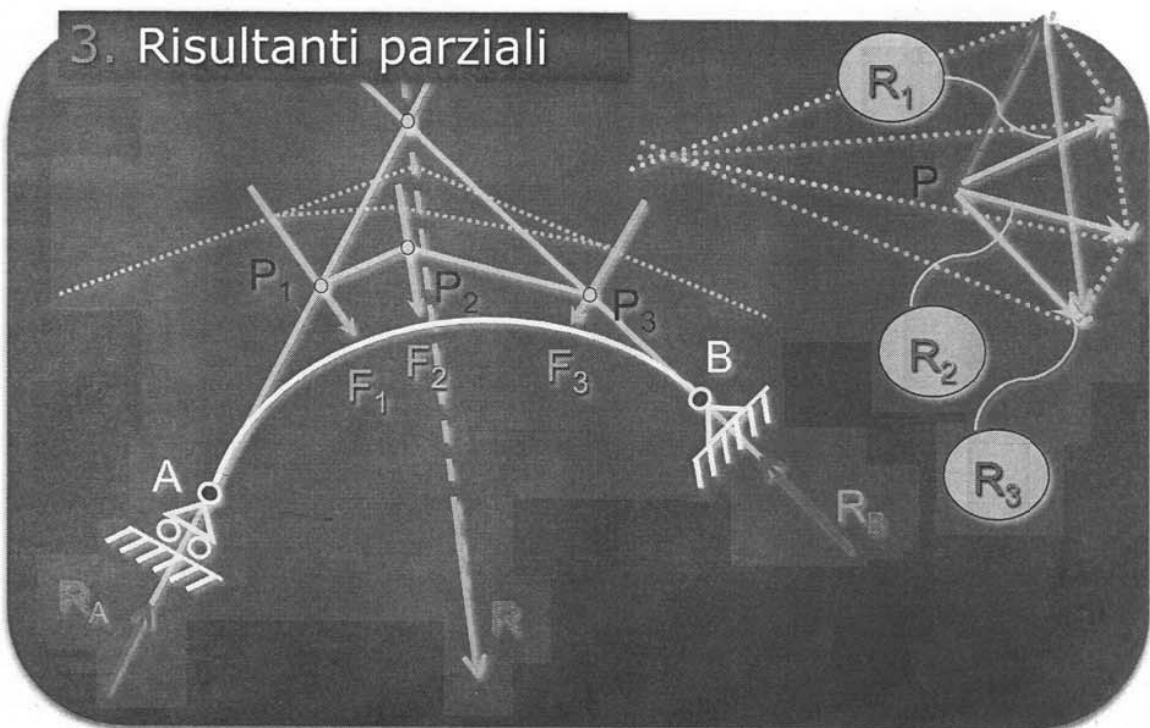
CURVA DELLE PRESSIONI

2. Reazioni vincolari



CURVA DELLE PRESSIONI

3. Risultanti parziali



CURVA DELLE PRESSIONI

$Q''R'' = q(z)dz$

Considerazioni geometriche

$Q''R'' = Q''S - R''S =$
 $= H(\tan\alpha - \tan\beta) =$
 $= -H[y'(R) - y'(Q)]$

Modulo della componente orizzontale di R_A ed R_B

CURVA DELLE PRESSIONI

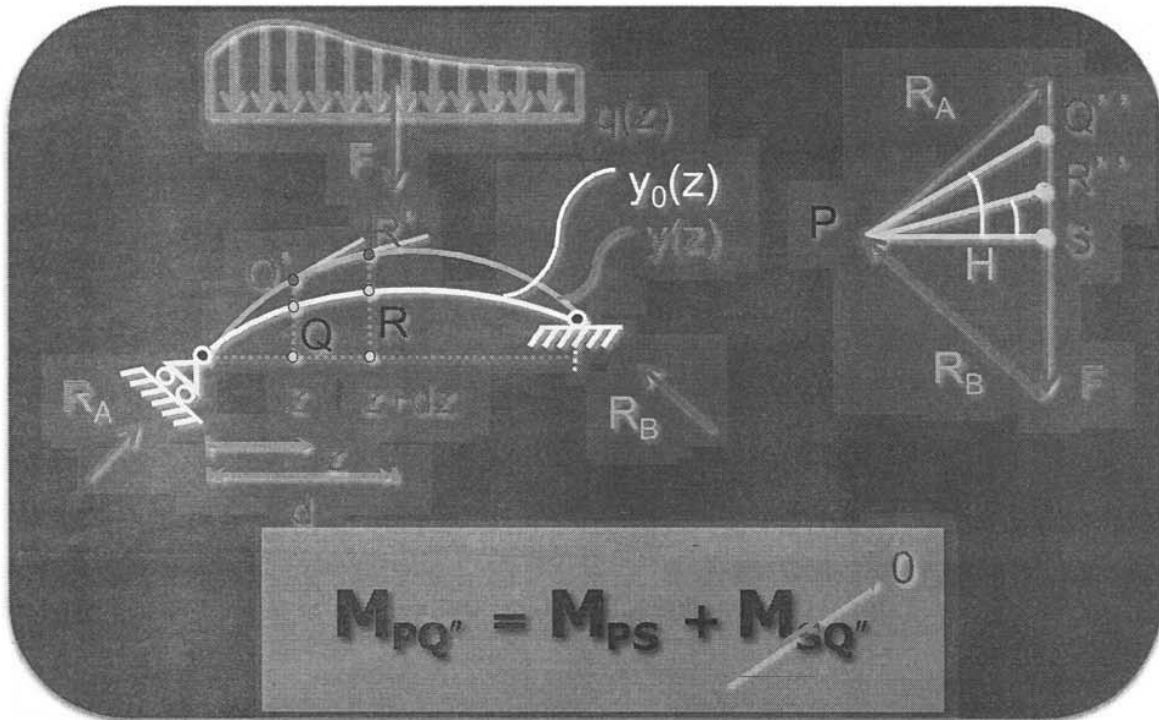
Sostituendo alla differenza il differenziale

$q(z)dz = -Hdy'$

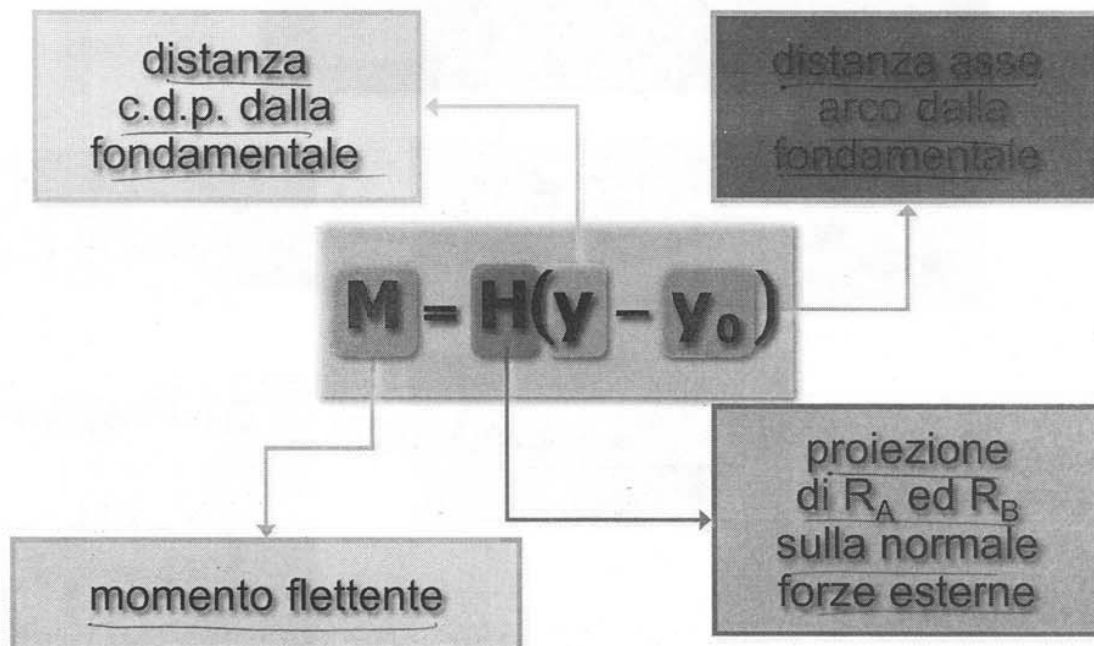
Eq. differenziale della c.d.p. per carichi distribuiti equiversi

$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{q(z)}{H}$

CURVA DELLE PRESSIONI



CURVA DELLE PRESSIONI



CURVA DELLE PRESSIONI

Se l'arco ha esattamente la forma della curva delle pressioni ($y=y_0$) \Rightarrow il momento flettente è nullo in ogni punto dell'arco



SOLO COMPRESSIONE

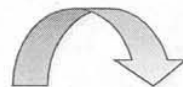
materiali

non resistenti

a trazione

CURVA DELLE PRESSIONI

Caso in cui tutte le forze agenti sull'arco sono invertite



SOLO TRAZIONE

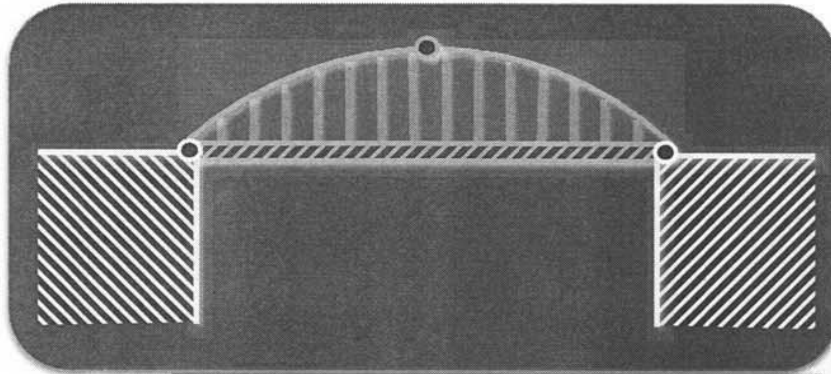
RIBALTO CA CDP
RISPETTO L'ORIZZONTALE

FUNE = C.d.p.
CATENARIA

FUNE e CATENE NON
RESISTONO A COMPRESSIONE

CURVA DELLE PRESSIONI

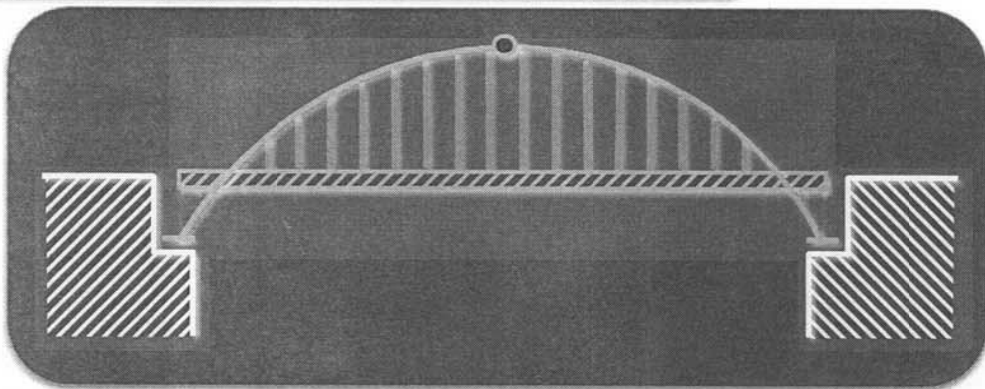
Schemi di ponti stradali



BIELLE tutte TESE

CURVA DELLE PRESSIONI

Schemi di ponti stradali

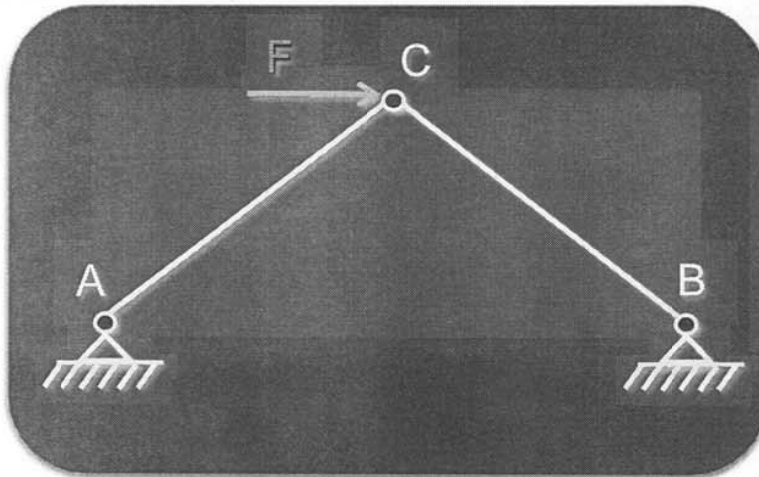


BIELLE in parte TESE in
parte COMPRESSE

CURVA DELLE PRESSIONI

Esempi applicativi

Cavalletto

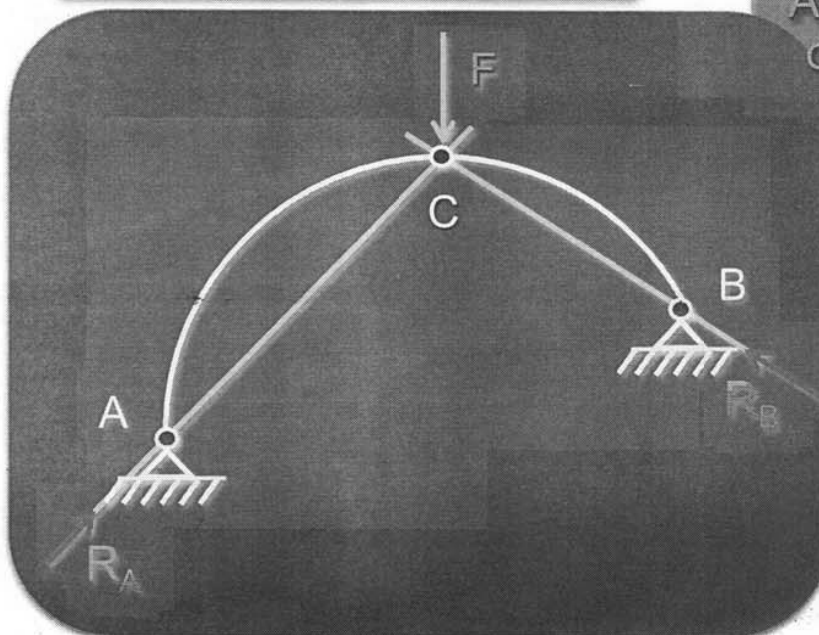


la c.d.p.
coincide
con assi
bielle

CURVA DELLE PRESSIONI

Esempi applicativi

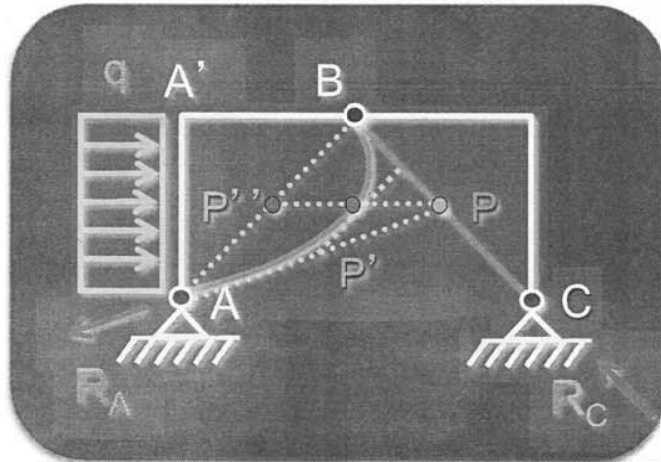
Arco a tre cerniere



la c.d.p.
coincide
con la
spezzata
ACB

CURVA DELLE PRESSIONI

Esempi applicativi



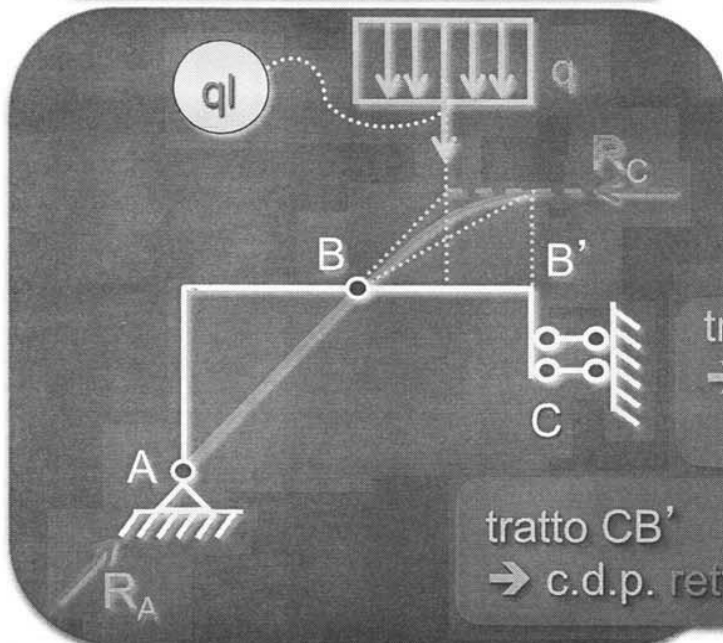
Portale a tre cerniere

tratto CA'
→ c.d.p. BC

tratto AA'
→ c.d.p. parabola asse orizzontale

CURVA DELLE PRESSIONI

Esempi applicativi



Portale zoppo

tratto AB
→ c.d.p. AB

tratto BB'
→ c.d.p. parabola asse verticale

tratto CB'
→ c.d.p. retta d'azione RC

Per le travi, le caratteristiche della sollecitazione sono le componenti delle reazioni interne che a 2 punti di trave si scambiano mutuamente: le forze scambiate nelle facce delle trave sono uniche.

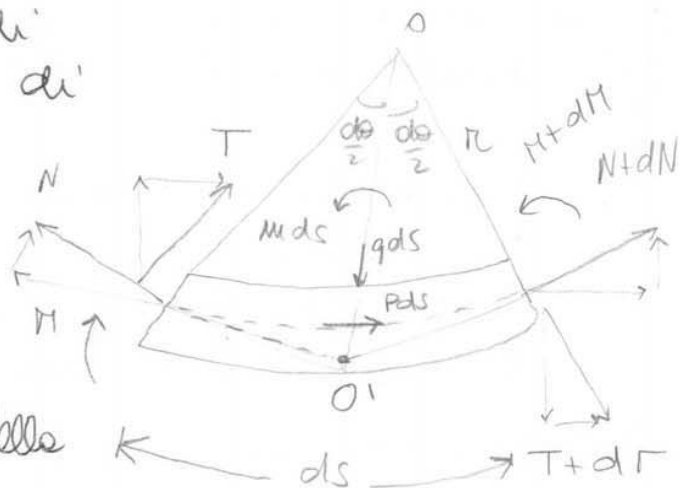
Se nella trave c'è 1 forza interna, la risultante delle forze deve passare per l'asse della trave, perché le cerniere hanno $R=0$.

- Problemi piani: 3 componenti di caratteristiche di sollecitazione (N, T, M)
- Nei problemi spaziali: 6 componenti.

TERNA SINISTROSA: quella della mano destra che ruota verso sinistra.

7) DIMOSTRAZIONE EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

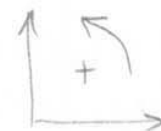
Le equazioni indefinite di equilibrio ci permettono di capire qual'è la reale variazione delle caratteristiche di sollecitazione al variare della trave.



O = centro di curvatura della trave

Considero un unico elemento: l'asse e' l'asse di simmetria orizzontale ($q ds, p ds, m ds$).

$$ds = \rho d\theta \quad \rho = \frac{ds}{d\theta}$$



Se avessi avuto un cerchio: $ds = 2\pi\rho$ CONVENZIONE

A distanza ds , le caratteristiche di sollecitazione subiscono una variazione.

Entite cui interagire tra taglio e sforzo normale:
 N non è indipendente da T

TRAVE AD ASSE RETTILINEO: $\pi \rightarrow \infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{ds} + P = 0 \\ \frac{dT}{ds} + q = 0 \\ \frac{dM}{ds} - T + m = 0 \end{array} \right. \quad ds \rightarrow dz \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dz} + P = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM}{dz} - T + m = 0 \end{array} \right.}$$

EQUAZIONI STATICHE

Sommando le equazioni in forma vettoriale

$$\begin{bmatrix} d/ds & 1/\pi & 0 \\ -1/\pi & d/ds & 0 \\ 0 & -1 & d/ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ q \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[S]^+ \{Q\} + \{F\} = \{0\}}$$

Le equazioni statiche mettano in relazione il vettore $\{Q\}$ (N, T, M) con il vettore $\{F\}$ (P, q, m).

Nel caso di travi isostatiche, il problema interno della trave è banale e facile da risolvere.

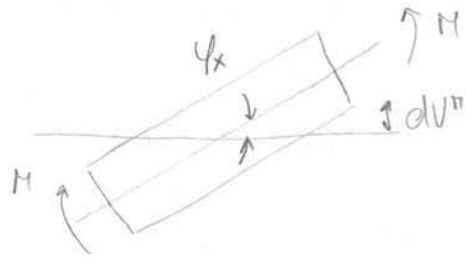
Osservazioni

- 1) la matrice non è simmetrica
- 2) $[S]^+$ operatore che lega $\{Q\}$ con $\{F\}$.

la soluzione nel problema statico lineare è unica.

3) - Flessione

Il caucio tenderebbe ad
inflexioni: considero solo
 φ_x e non gli infinitesimi
di curvatura.



$$dV^M = -\varphi_x dz$$

φ_x = rotazione antioraria, positiva
 dV^M = abbassamento negativo

$$dV = dV^T + dV^M = \delta_y dz - \varphi_x dz$$

$$\frac{dV}{dz} = \delta_y - \varphi_x$$

relazione tra abbassamento e
parametri cinematici.

$$\delta_y = \frac{dV}{dz} + \varphi_x$$

In forma matriciale: $\{Q\} = [H] \{M\}$

$\{Q\}$ vettore delle caratteristiche deformative.

2) EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\{Q\} = [H]^{-1} \{M\}$$

Ritorno dei 6 con del solido di De Saint Venant

$[H]^{-1}$ = MATRICE HESSIANA, nei problemi elastici
lineari contiene solo costanti.

• $\det(H) \neq 0$ MATRICE INVERTIBILE

• $\det(H) > 0$ MATRICE SIMMETRICA

• $[H]$ è formata da costanti perché è la
matrice delle derivate seconde

$[H]$ lega le deformazioni con le caratteristiche

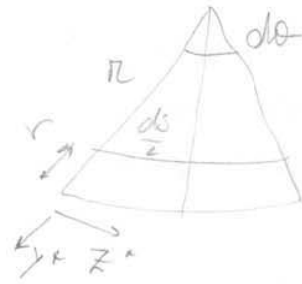
1) TRAVE PIANA AD ASSE CURVILINEO

Considero un carico di trave soggetto ad un aumento radiale (r) e un aumento angolare (φ):

$$ds = r d\theta$$

$$\omega \rightarrow \varphi \quad \frac{\omega}{r} = \varphi(r)$$

$$r \rightarrow \varepsilon \quad \frac{r}{r} = \frac{\varepsilon ds/2}{ds/2} = \varepsilon(r)$$



la curvatura totale:

$$\chi_{TOT} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \quad \approx \quad \chi = \chi_{TOT} - \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}$$

χ = variazione della curvatura

Introduco la matrice di rotazione:

$$[N] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al variare della sezione, nell'asse curvilineo, cambierà il sistema di riferimento:

$$\{F\}^* = [N] \{F\} \quad \{M\}^* = [N] \{M\}$$

le equazioni statiche e cinematiche:

$$\begin{cases} [D]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\} \\ \{q\} = [D] \{M\}^* \end{cases}$$

applico $[N] \{F\}$

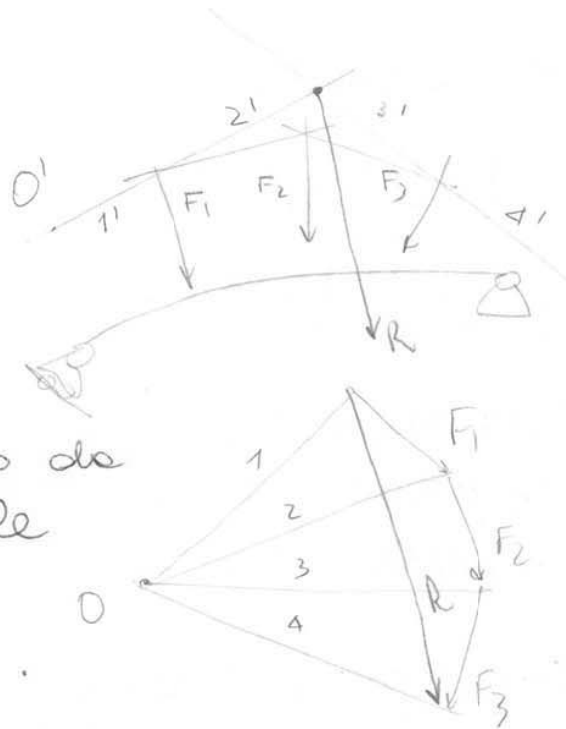
$$\begin{cases} [D]^* \{Q\} + [N] \{F\} = \{0\} \\ \{q\} = [D] [N] \{M\} \end{cases}$$

POLIGONO FUNICARE

Serve per determinare graficamente la risultante di un sistema di forze.

Il punto d'applicazione?

1. Scelgo un punto arbitrario da cui si proiettano i raggi che collegano O con i punti d'applicazione delle forze.



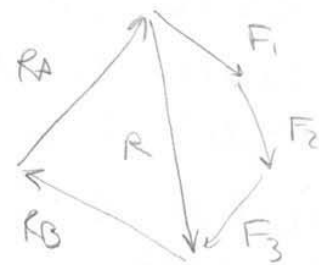
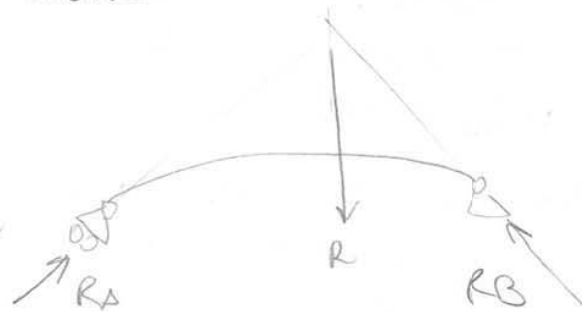
2. Noto R, rendo il problema statico e ruoto R_A, R_B .

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}$$

Problema di equilibrio.

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R} = 0$$

Problema di equilibrio.

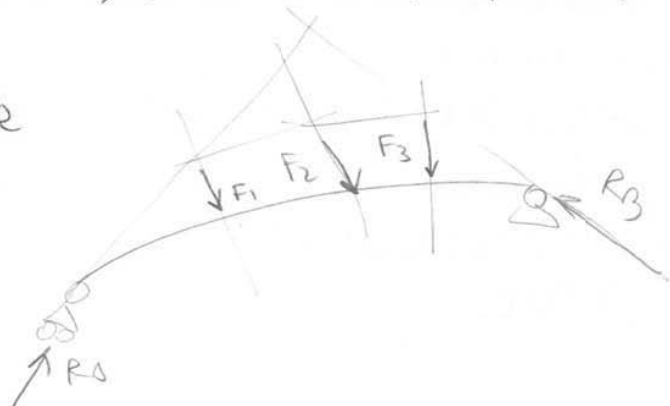


L'imponibile del passaggio di 3 forze in un punto è l'equilibrio alla rotazione.

L'imponibile delle distanze del poligono è l'equilibrio alla traslazione.

Primo verifica la rotazione, poi la traslazione.

La corda è l'inviluppo delle risultanti passanti per AB.



$$t_{\beta\alpha} = y'(Q) \quad t_{\beta\beta} = y'(R)$$

$$H(y'(Q) - y'(R)) = -H(y'(R) - y'(Q))$$

$$Q''R'' = q(z) dz = -H dy' \quad \text{con } dy' = y'(R) - y'(Q)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{q(z)}{H}}$$

CONDIZIONI AL CONTOURNO

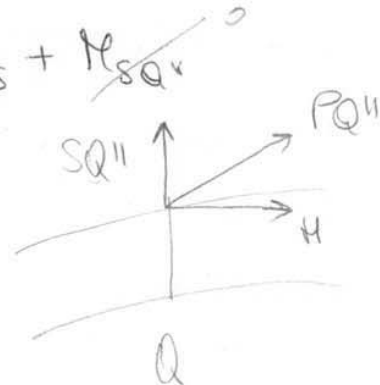
A) $z=0, y=0$

B) $z=l, y=l$

la colp, a verso di' arco costante, rappresenta il diagramma del momento flettente.

$$PQ'' = PS + SQ'' \quad \rightsquigarrow \quad M_{PQ''} = M_{PS} + M_{SQ''}$$

$M_{SQ''} = 0$ perché, se faccio momento rispetto a Q, ha braccio nullo.



H è un valore costante: quello che cambia è la derivata di $y(z)$ da $y_0(z)$.

Poi è distante la colp dalla nostra sezione e maggiore sarà il valore del momento.

$\frac{d^2y_0}{dz^2}$ = derivata seconda dell'equazione della nostra trave, che per le travi rettilinee questo termine è NULO

$$\frac{d^2M}{dz^2} = H \frac{d^2y}{dz^2} - H \frac{d^2y_0}{dz^2} = -q(z) - H \frac{d^2y_0}{dz^2}$$

EQ. DIFF
TAVOLI AD
ASPECQUILIBRO.

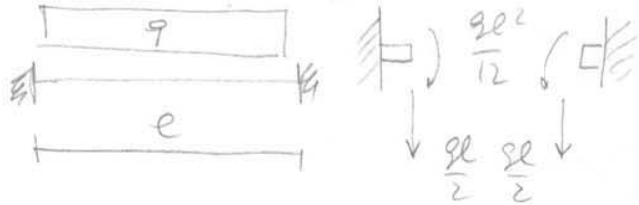
$$\boxed{\frac{d^2M}{dz^2} = -q(z) - H \frac{d^2y_0}{dz^2}}$$

Il vettore delle reazioni vincolari è dato da:

- Contributo derivante dagli spostamenti imposti;
- Contributo equilibrante ai carichi esterni agenti nella trave

ESEMPIO

$$\left[-\frac{qL^2}{12}, \frac{qL}{2}, 0, \frac{qL^2}{12}, \frac{qL}{2}, 0 \right]^T$$



ESATTE

Nel problema elastico nel corpo 3D, qual'è l'incognita?

Bisogna determinare lo spostamento di tutti i punti, ∞ -punti

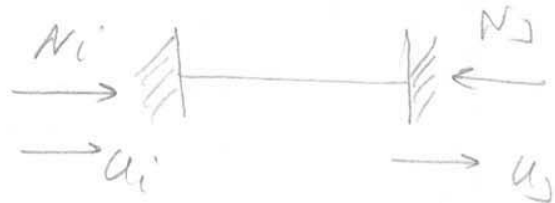
Gli elementi finiti trovano lo spostamento di n -punti (quelli di discretizzo) e tramite le funzioni di forma trovano gli spostamenti negli altri punti

• OSSERVAZIONE

I segni dentro $[K]$ non si riferiscono al segno del diagramma ma al segno del membro sotto secondo la convenzione (i, j) .

ESEMPIO

$$[K] = \left[0, 0, \frac{A}{IL}, 0, 0, -\frac{A}{IL} \right]^T$$



1- ESPANSIONE

Tornando al nostro esercizio:

$$\boxed{\{Q\} = [K] \{S\} - \{F\}}$$

L'asterisco serve per dire che siamo nel S.R. locale.

$$[K_e][N] \{ \delta_e \} = [N] (\{ Q_e \} + \{ F_e \})$$

Moltiplico per $[N]^T$

$$([N]^T [K_e] [N]) \{ \delta_e \} = [N]^T [N] (\{ Q_e \} + \{ F_e \})$$

con $[K_e^e] = [N]^T [K_e] [N]$ matrice di rigidità dell'elemento nel S.R. globale.

con $[N]^T [N] = 1$, suo inverso ortogonale

$$([N]^T [K_e] [N]) \{ \delta_e \} = \{ Q_e \} + \{ F_e \}$$

$$\boxed{[K_e^e] \{ \delta_e \} = \{ Q_e \} + \{ F_e \}}$$

Questa però è ancora riferita alla singola Node (problema 6x6): devo riferirlo al S.R. globale (u x 6).

2- ASSEMBLAGGIO

L'operazione di assemblaggio consiste in un'ESPANSIONE dei vettori $\{ \delta_e \}$, $\{ Q_e \}$, $\{ F_e \}$ dallo dimensionamento locale (6) allo dimensionamento globale (u).

u = numero parametri algebrici che identificano le condizioni deformate del "nodo di Node".

Bisogna ordinare tutti i parametri algebrici del nodo in un vettore per poter inserire gli spostamenti nodali dell'elemento generico nella giusta posizione.

$$\begin{matrix} \{ \delta^e \} = [A_e]^T \{ \delta_e \} & \{ Q^e \} = [A_e]^T \{ Q_e \} & \{ F^e \} = [A_e]^T \{ F_e \} \\ M \times 1 & M \times 6 & 6 \times 1 \end{matrix}$$

$\{ \delta_e \}$ vettore degli spostamenti locali.

$\{ \delta^e \}$ vettore degli spostamenti globali.

$[A_e]^T$ matrice di assemblaggio.