NUMERO: 832

DATA: 18/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Cane

MATERIA: Essenziale di Analisi Matematica II + Eserc. + domande

Prof. Baciotti

ANALISI MATEMATICA II

Professore: A. Bacciotti
Sito di rif. esercizi: www.didattica-online.polito.it

Ripasso: Consulenza: MAR 11:30-12:30
MER 11:30-12:30

$\mathbb{R}^n$ → È un insieme di oggetti formati da altri oggetti: $(x_1, ..., x_n)$ ogni x_i è un numero reale da 1 a n. $\mathbb{R}^n$ ha una struttura formata da vettori in cui possiamo considerarne le distanze: Ad esempio se chiamiamo $X = (x_1, ..., x_n)$ l'insieme composto da n elementi, si definisce il concetto norma come:

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

È chiaro che se abbiamo una sola componente dell'insieme $X = (x_1)$ il concetto di norma e di valore assoluto coincidono ⇒ $\|X\| = |X| = \sqrt{x_1^2}$

Concetto di intorno
Se fissiamo un punto x_0 e una distanza $r > 0$ possiamo relazionarli come segue

Per cui se $x < a$ oppure $b < x$ tutti i punti sono ESTERNI
Esistono punti che non si possono considerare ne INTERNI ne ESTERNI si definiscono PUNTI DI FRONTIERA, nel nostro caso sono i punti a e b

Sempre avendo $A \subset \mathbb{R}^n$, l'insieme dei PUNTI INTERNI che in notazione è definito $\mathring{A}$ oppure int A sicuramente $\mathring{A} \subset A$

L'INSIEME dei punti di FRONTIERA (∂A)
a e b sono da considerarsi DI FRONTIERA che l'intervallo sia APERTO o CHIUSO

Altra definizione banale è che $A \cup \partial A$ si definisce CHIUSURA DI A che si indica in notazione $\overline{A}$ oppure clos A

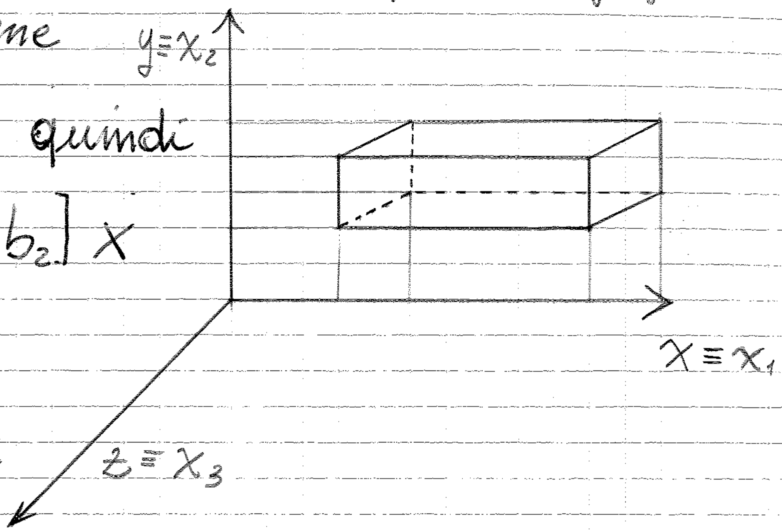
Tenendo costante $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice che

A è APERTO se $A = \mathring{A}$ (cioè se ad A $\notin$ nessun punto di frontiera)

A è CHIUSO se $A = \overline{A}$ (cioè se ad A $\in$ tutti i punti di frontiera)

Banalmente A è APERTO $\Leftrightarrow$ A^c è CHIUSO un RETTANGOLO che lo contiene

Vediamo ora il caso di $n=3$.
A è limitato se $\exists$ un parallelepipedo
che lo contiene



(x_1, x_2, x_3) quindi
$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times$
$\times [a_3, b_3]$

Ed è come dire:

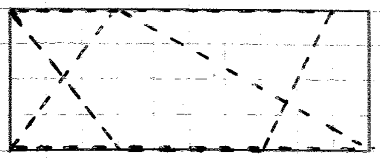
[int. asse x] x [int. asse y] x [int. asse z]

Per cui $((x_1, x_2)$ equivale a $(x, y))$

INSIEME COMPATTO

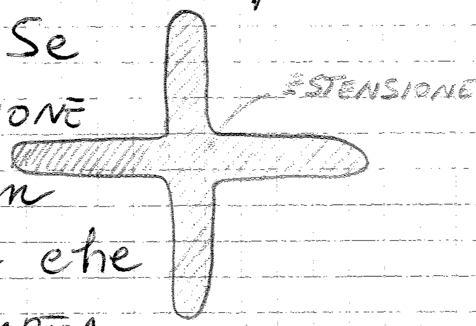
$A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$ si dice COMPATTO se è LIMITATO e CHIUSO.

Si dice inoltre che un insieme è CONVESSO, cioè che mi posso muovere all'interno dell'insieme, anche per lunghi spostamenti, ma solo in linea retta e tale segmento partente da un ipotetico punto P arriva in Q che $\in$ ancora ad A.

dal RETTANGOLO 

Per il calcolo di aree più complicate è indispensabile il CONCETTO DI LIMITE.

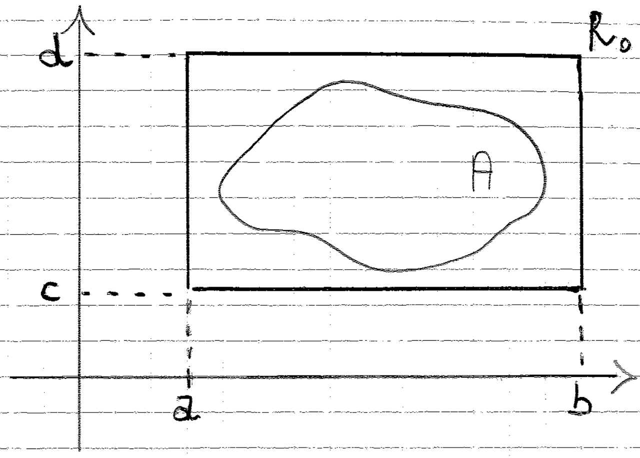
Torniamo ai nostri insiemi e consideriamo A su $\mathbb{R}^2$, esso si può definire:
UN INSIEME O UNA FIGURA PIANA con ESTENSIONE
L'ESTENSIONE è da considerare come la quantità di vernice necessaria per colorare le diverse figure. Se io MISURO L'ESTENSIONE associandoci quindi un VALORE NUMERICO ecco che sto calcolando L'AREA



Banale dire che se stessimo lavorando in $\mathbb{R}^3$, la misura dell'estensione di un SOLIDO la chiameremo VOLUME

N.B. Meglio non usare mai il termine SUPERFICIE

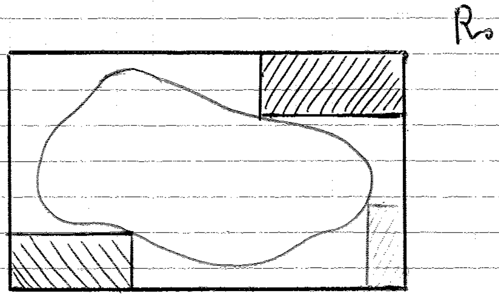
In notazione quando parlo di MISURA di una FIGURA PIANA la indico $m(A)$ (che è uno scalare)



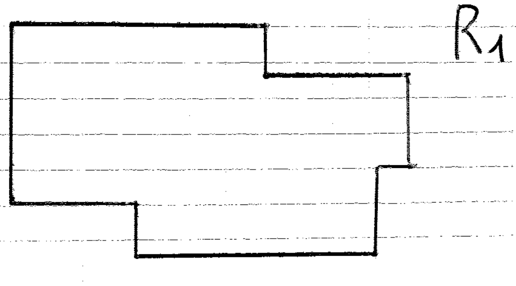
Comincio col scrivere la misura di R_0 che è comprensiva della misura di A molto molto imprecisa.

$$\Rightarrow m(R_0) = (b-a)\cdot(d-c)$$

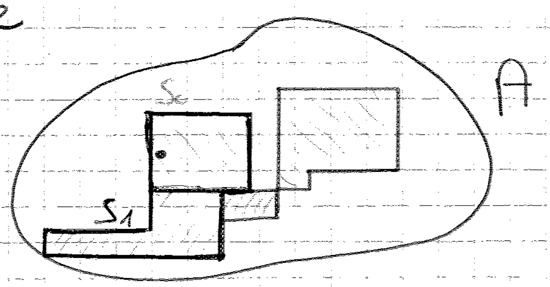
Ora comincio a eliminare altri piccoli rettangoli con i lati PARALLELI agli assi coordinati e senza che INTACCHINO IL MIO INSIEME A. Vediamo un esempio



Ecco che ottengo un insieme $R_1 \subset R_0$:



aventi le stesse caratteristiche del caso precedente



In questo avremo:

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \dots \subset A$$

Anche qui come prima posso associarci una misura:

$$m(S_0) \leq m(S_1) \leq m(S_2) \leq \dots \leq m(S_n) \leq mR_0$$

Per le solite ragioni anche questa successione CONVERGE:

$$\underbrace{m(S_n)}_{\text{CONVERGE}} \leq \underbrace{m(R_n)}_{\text{CONVERGE}}$$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

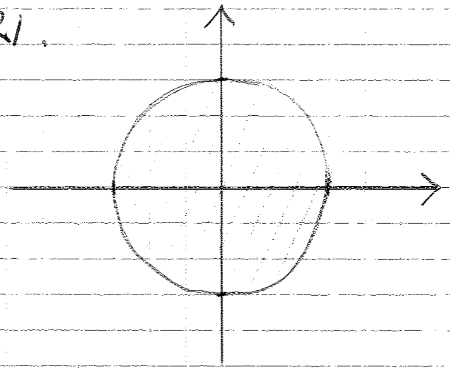
$$\Rightarrow \lim m(S_n) \leq \lim m(R_n)$$

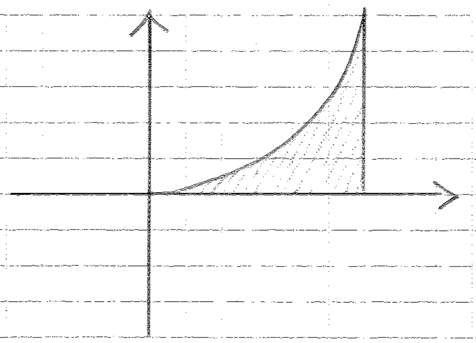
Dunque arrivo alla conclusione che A si dice MISURABILE se è possibile comunque comprenderei degli elementi di Q nell'insieme Q. Stessa cosa se provo dall'esterno IMPOSSIBILE ANCHE QUI.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m(R_n) \geq 1 \Rightarrow l_2 = 1 \\ m(S_n) = \emptyset \Rightarrow l_1 = 0 \end{array}\right\} \text{DIVERSI}$$

Per cui l'insieme NON È MISURABILE

Esistono infine FIGURE che SONO MISURABILI ma non basta affidarsi a METODI ELEMENTARI.





In questi casi è indispensabile passare al CALCOLO INTEGRALE

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DEFINITO PER FUNZIONI A 1 SOLA VARIABILE $(y = f(x))$

$$f(x) : \underbrace{[a, b]}_{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Divido il calcolo sommando prima la parte positiva (in rosso) e poi la parte negativa (in verde)

$$\Rightarrow f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ \emptyset & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ \emptyset & \text{se } f(x) > 0 \end{cases}$$

Ottengo

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

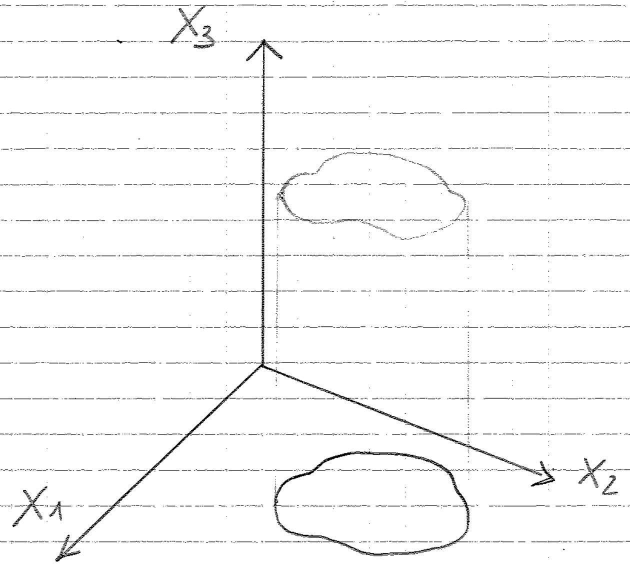
f È INTEGRABILE NEL SENSO DI RIEMAN se f^+ e f^- sono integrabili nel senso di R. e definirò l'integrale

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f^+(x)\,dx - \int_I f^-(x)\,dx$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

INTEGRALE DEFINITO DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI



Abbiamo un solido in cui x_1 e x_2 sono fissate arbitrariamente mentre x_3 è data facendo $f(x_1, x_2)$

Basta seguire lo stesso ragionamento visto prima con la variante che si tratta di utilizzare la figura più semplice SOLIDA: Il parallelepipedo.

Come visto precedentemente posso affibbiare le varie misure:

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot (b_3 - a_3) \cdot (b_2 - a_2)$$

Ora consideriamo:

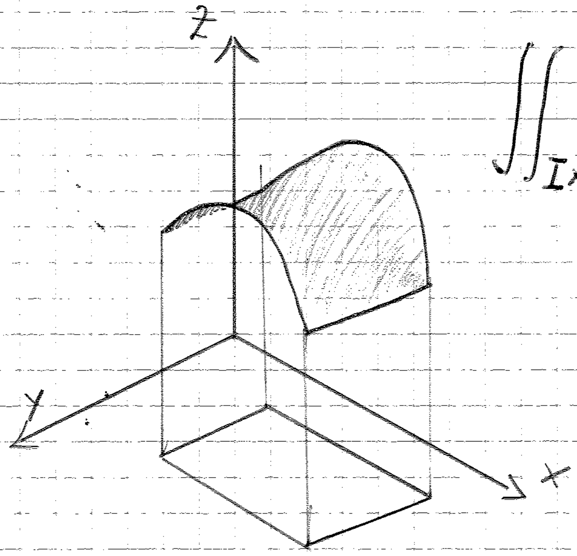
Ricordando che:

$x_3 = f(x_1, x_2)$ con $\text{dom}(f) = \underbrace{[a, b]}_{I} \times \underbrace{[c, d]}_{J}$

Vediamo nuovamente tutti i casi:

CASO $f(x_1, x_2) \geq 0$ ottengo

$$T_{f, I\times J} = \{ (x_1, x_2, x_3) : a \leq x_1 \leq b \; ; \; c \leq x_2 \leq d \; ; \; 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2) \}$$



$$\iint_{I\times J} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = m(T_{f, I, J})$$

CASO $f(x_1, x_2) \leq 0$

$$\int_{I\times J} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = -\int_{I\times J} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

CASO ARBITRARIO

Vedi caso per i RETTANGOLI

Valgono le stesse proprietà degli integrali di 1 variabile

CALCOLO PRATICO DEGLI INTEGRALI DOPPI
(metodo di riduzione)

Occupiamoci del caso più semplice in cui $A = R$ in cui:

RETTANGOLO

$x_3 = f(x_1, x_2)$ continua

$R = [a,b] \times [c,d]$

Integro RISPETTO una variabile mentre l'altra la mantengo costante

$$= \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2 = F(x_1)$$

TEOREMA $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua se

$$K = \int_a^b F(x_1)\, dx_1$$ (PROCEDIMENTO DI INTEGRAZIONE ITERATA)

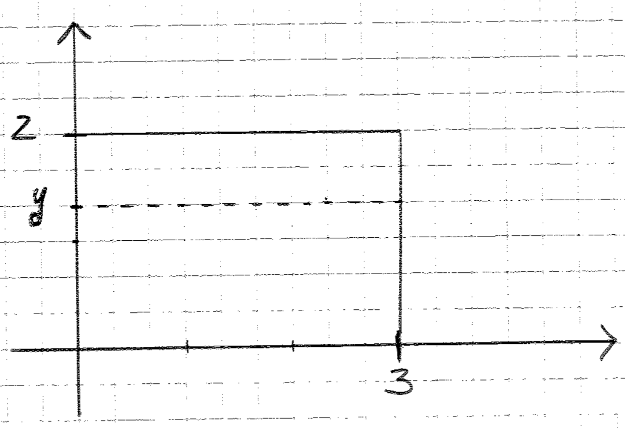
TEOREMA: Il numero K ottenuto con questo procedimento è UGUALE a:

$$\iint_R f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 y - 2y^2\right)\Big|_0^2 \, dx$$

$$= \int_0^3 (2x^2 - 8)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - 8x\right)\Big|_0^3 = 18 - 24 = -6$$

Analogamente fisso la y



$$\int_0^2 \left(\int_0^3 x^2 - 4y \, dx\right) dy \Rightarrow \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - 4xy\right)\Big|_0^3 dy$$

$$\int_0^2 (9 - 12y)\, dy \Rightarrow \int_0^2 9\, dy - \int_0^2 12y\, dy$$

$$\Rightarrow 18 - 24 = -6$$

Risultati identici percorrendo le due strade diverse!!!

Fisso x:

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1} -x+y\,dy\right)dx+\int_{-1}^{2}\left(\int_{0}^{1} x+y\,dy\right)dx$$

$$\int_{-1}^{0}\left(-xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 dx+\int_{-1}^{2}\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 dx$$

$$\int_{-1}^{0} -x+\frac{1}{2}\,dx+\int_{-1}^{2} x+\frac{1}{2}\,dx$$

$$\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= -\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+(2+1)=$$

$$= 1+3 = 4$$

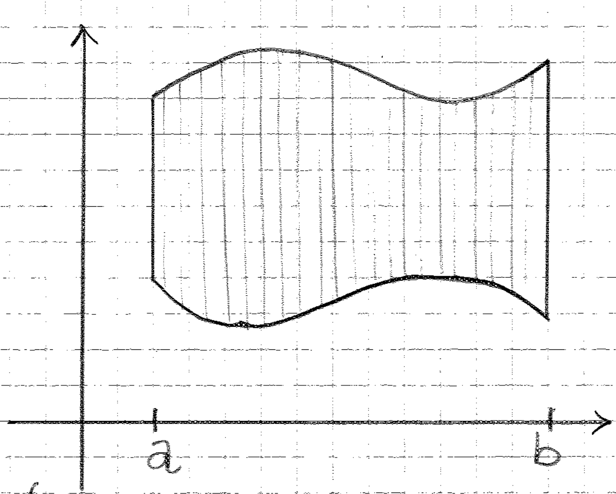
Vediamo ora un esercizio teorico che ha come protagonista una funzione in x,y che però si può solo scrivere come moltiplicazione di una funzione in x e di un funzione in y.

$$z=f(x,y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$$

$$R=[a,b]\times[c,d]$$

= mo calcolare gli integrali doppi su qualunque insieme A misurabile. Nella pratica non ci accontenteremo di insiemi rettangolari ma neanche la estenderemo a tutti gli insieme misurabili, insomma una via di mezzo.

Prima diamo due definizioni



VERTICALMENTE CONVESSO

$$A\{(x,y): a \leq x \leq b \quad \gamma(x) \leq y \leq \delta(x)\}$$

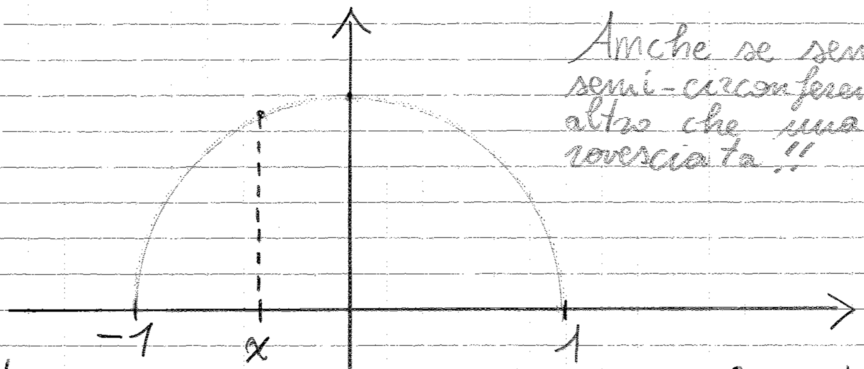
Se $f(x,y)$ è CONTINUA

$$F(x) = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,dy$$

allora $F(x)$ è CONTINUA

$$= \int_a^b \left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

La prima cosa da fare è inquadrare l'esercizio cercando di disegnare il dominio



Anche se sembra una semi-circonferenza, non è altro che una parabola rovesciata!!

Potremmo seguire entrambe le strade ma dal momento che la x è costante su tutto l'intervallo blocco la suddetta, per il momento, e faccio variare la y.

$y = 1 - x^2 = f(x)$

$$\Longrightarrow \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1-x^2} 3y + e^x \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2} y^2 + y e^x \right) \Bigg|_{0}^{1-x^2} dx$$

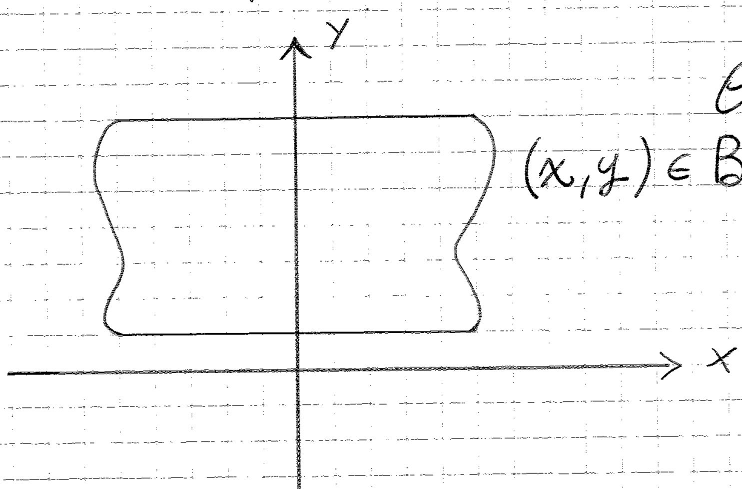
$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2} (1-x^2)^2 + (1-x^2) e^x \right) dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 306

11-10-13

Facciamo ora qualche considerazione basata sulle SIMMETRIE sia del DOMINIO sia della FUNZIONE

- Sia B orizzontalmente convessa e simmetrica rispetto all'asse y



Cioè se $(x,y) \in B \Rightarrow (-x,y) \in B$

Abbiamo inoltre anche questa proprietà: sia DISPARI applicata solo sulla prima variabile

$$f(x,y) = f(-x,y)$$

Se sussistono queste due condizioni:

1) SIMMETRICO RISP. ALL'ASSE Y E ORIZZON. CONVESSA
2) DISPARI applicata alla sola variab. x

Allora: L'integrale in queste condizioni è 0

CAMBIAMENTI DI COORDINATE

Questo stratagemma per la risoluzione degli integrali doppi equivale alla formula di SOSTITUZIONE che si utilizza negli integrali singoli: Ricordiamo tale formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad x = \varphi(t) \in C^1$$

CONTIN. & DERIVAB.

$$\Rightarrow \int_c^d f(\varphi(t)) \underbrace{\varphi'(t)dt}_{\text{SOSTITUISCE IL } dx}$$

con $\varphi(t): [c,d] \to [a,b]$

Il ruolo di $\varphi'(t)$ è quello di compensare le DEFORMAZIONI che avvengono nell'intervallo (x) di conseguenza alla SOSTITUZIONE

Per quanto riguarda le funzioni a due variabili abbiamo:

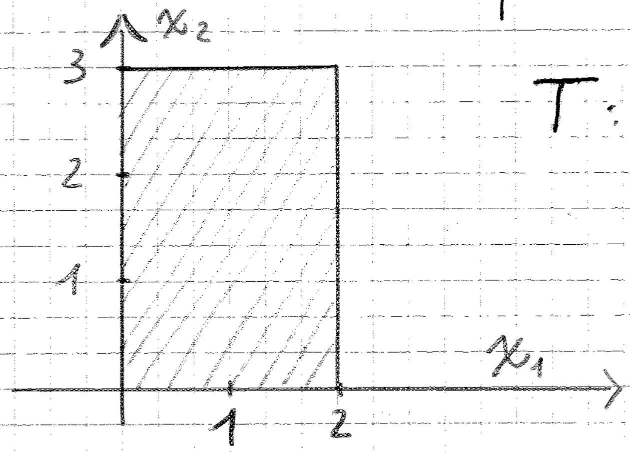
Sia $f(x_1, x_2)$ continua e sia A un insieme misurabile; quindi

$$\iint_A f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$$

Lo scopo è di eseguire una trasformazione $T: \underset{(u_1,u_2)}{\mathbb{R}^2} \to \underset{(x_1,x_2)}{\mathbb{R}^2}$ che sia CONTINUA

Cerchiamo di giustificare la formula. Si utilizza tale formula per semplificare al massimo il dominio

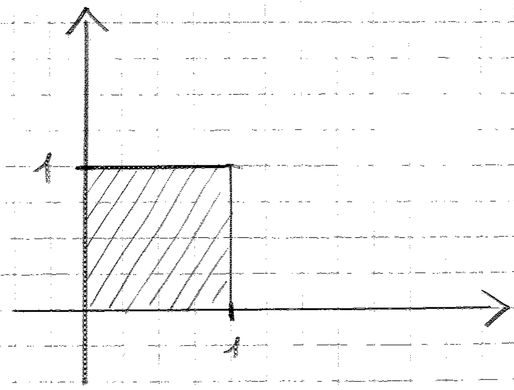
Vediamo un esempio



$$T: \begin{cases} x_1 = 2u_1 \\ x_2 = 3u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T^{-1}: \begin{cases} u_1 = \frac{x_1}{2} \\ u_2 = \frac{x_2}{3} \end{cases}$$

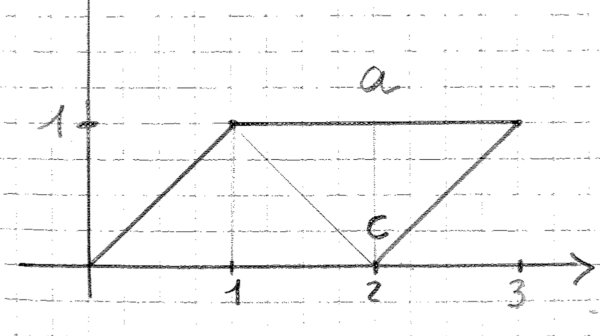
Ecco che riesco a semplificare enormemente il dominio:



$$J(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J(T) = 6$$

ALTRA SEMPLIFICAZIONE (Da ricordare)

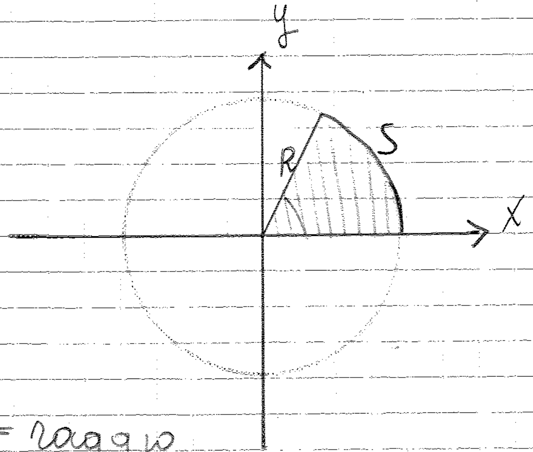


$m(a) = 2$

Oppure possiamo avere le <u>TRASLAZIONI</u>

$$T: \begin{cases} x_1 = u_1 + a_1 \\ x_2 = u_2 + a_2 \end{cases}$$

Importanti sono anche il PASSAGGIO A COORDINATE POLARI

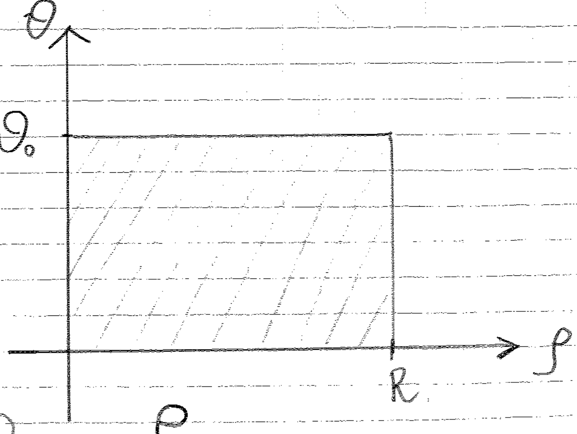


$$T \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

$$0 \leq \rho \leq R$$
$$0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$$

R = raggio

L'obbiettivo è quello di trasformare degli SPICCHI DI CERCHI in RETTANGOLI



J = (derivo rispetto a ρ e a ϑ) $(T)\vartheta_0$

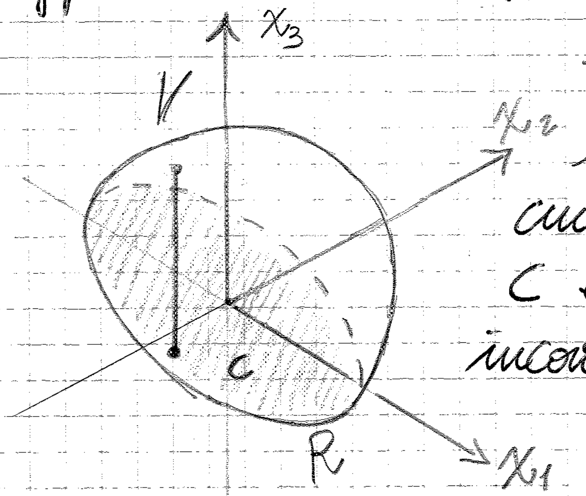
$$= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\det} \rho\cos^2\vartheta + \rho \operatorname{sen}^2\vartheta \Rightarrow \rho$

Infatti qui abbiamo due possibilità:

1) Ridurlo a 2 integrali, il primo a due variabili mentre il secondo a una variabile
2) Ridurlo a 2 integrali, il primo a una variabile mentre il secondo a due variabili.

Supponiamo una sfera:



Più precisamente una semi-sfera in cui fisso un punto su C e lo "alzo" fino ad incontrare il solido

C = Area di base
V = Volume del solido
R = raggio area di base (circonferenza)

Abbiamo:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \Rightarrow x_3 = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Ora mantengo costanti le prime due variabili e vario soltanto la terza

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \left(\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\, d\rho\right) d\vartheta$$

$$-x_1^2-x_2^2=-\rho^2\cos^2\vartheta-\rho^2\text{sen}^2\vartheta=-\rho^2(\cos^2\vartheta+\text{sen}^2\vartheta)$$

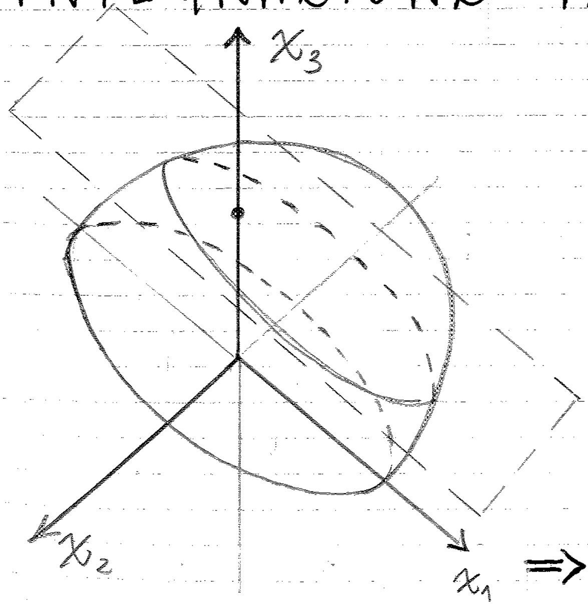
$$\Rightarrow x_1^2-x_2^2=-\rho^2$$

$$-\frac{1}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^R\cdot\vartheta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{R^3}{3}\cdot 2\pi$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^3$$ Esattamente metà volume della sfera, ora basta raddoppiare

INTEGRAZIONE PER STRATI



Ora ragiono al contrario FISSO x_3; e taglio a "STRATI" la mezza sfera

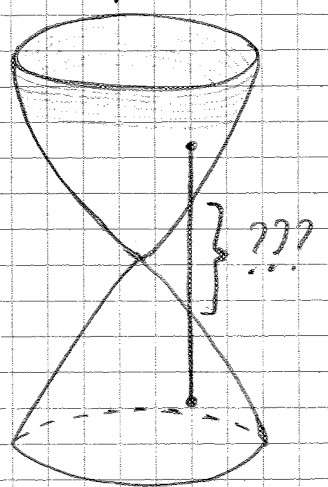
$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=R^2-x_3^2>0$$

Quindi ottengo:

È importante sapere che non tutti i soli di si fanno integrare in entrambi i modi:

Ad esempio



SI PER STRATI

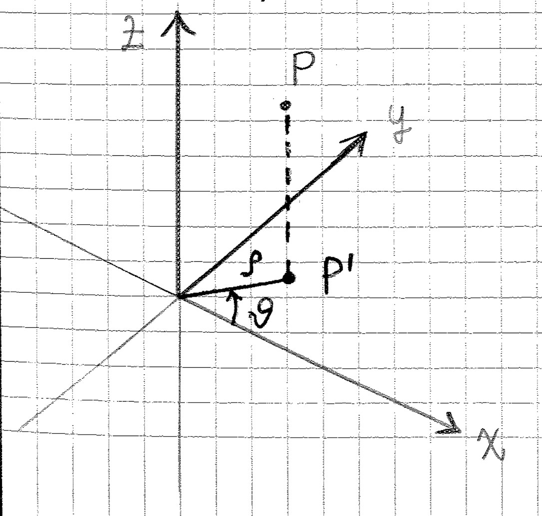
NO PER FILI

CAMBIO di COORDINATE

- coordinate cilindriche

Fisso il piano $\underbrace{x_1, x_2}_{\text{COORD. POLARI}}$, x_3

Ora ogni punto che mi serve lo proietto sul piano $x_1 - x_2$ e lo definisco in coordinate polari.



Insomma in termini di ρ e ϑ

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \vartheta \\ x_2 = \rho \operatorname{sen} \vartheta \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

In generale:

$$\iiint_V f(x_1 x_2 x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, u_3)$$
$$x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, u_3)$$
$$x_3 = \varphi_3(u_1, u_2, u_3)$$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad T: V' \to V$

Invertibile con inversa $\in C^1$

$$\iiint_{V'} f(\varphi_1(u_1 u_2 u_3), \dots)\, |\mathrm{Det}\, J_T|\, du_1 du_2 du_3$$

Teorema: Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ riferito a x_1, x_2, x_3 per definizione, supponendo che abbia MASSA UNIFORME e DENSITÀ UNITARIA il BARICENTRO è un punto di coordinate (g_1, g_2, g_3) calcolate:

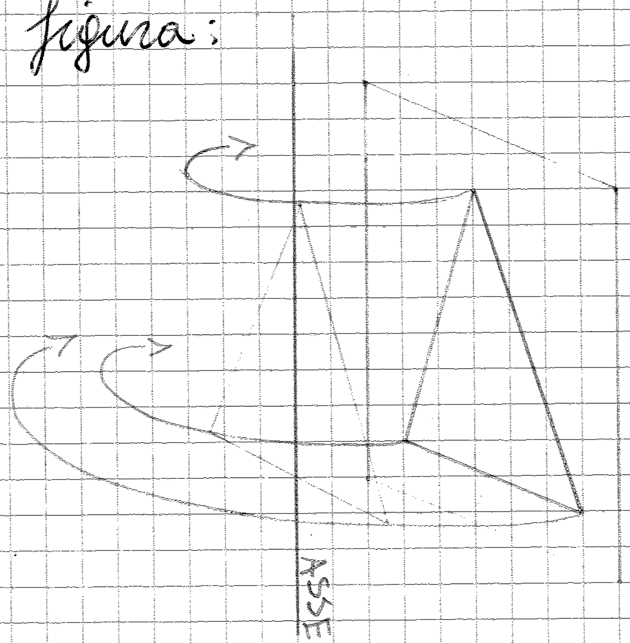
$$g_1 = \frac{\iiint_A x_1\, dx_1 dx_2 dx_3}{\iiint_A dx_1 dx_2 dx_3}$$

Analogamente per g_2 e g_3

18-10-13

I SOLIDI DI ROTAZIONE

I SOLIDI DI ROTAZIONE sono figure solide che si ottengono ruotando una figura piana attorno ad un ASSE che NON APPARTIENE a tale figura:



Suppongo di assumere l'asse x_3 come di ROTAZIONE. Quindi:

$$\iiint_V dx_1 dx_2 dx_3 = 2\pi \iint_S x_2 \, dx_2 dx_3$$

Dimostrazione (da sapere)

1) PASSIAMO IN COORD. CILINDRICHE

$$\int \left(\iint_{V'} \rho \, d\rho \, d\theta \right) dx_3$$ INVARIATO

La possiamo esprimere in coordinate:

CARTESIANE: $x^2+y^2=1$ però non forniscono in che direzione sto percorrendo questa curva.

PARAMETRICHE: $\begin{cases} x=\cos(t) \\ y=\operatorname{sen}(t) \end{cases}$ questa rappresentazione mi consente di capire istante per istante dove mi trovo (se impongo t=tempo)

CONCETTO DI CURVA PARAMETRICA in $\mathbb{R}^m$

Definiamo il concetto di CURVA PARAMETRICA come una funzione $\gamma(t)$ definita su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$.

$\gamma(t) : \underset{(\text{aperto})}{I} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Assegno ad ogni variabile $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ una funzione $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t) \dots \gamma_m(t)$ ottenendo.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$$

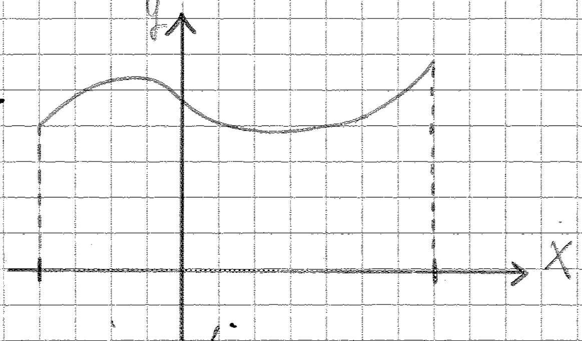
Il senso di PERCORRENZA INDOTTO SULL'IMMAGINE si dice anche SOSTEGNO

a) γ è di classe C^1
b) $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$ così sto impedendo che torni indietro

Supponiamo ora di avere:

$$f: I \to \mathbb{R} \qquad I \subset \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in I$$



Facciamo un esempio di curva con lo stesso sostegno:

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \cos(2t) \end{cases}$$

Hanno stessa PERCORRENZA solamente con VELOCITÀ DOPPIA (sempre se t = tempo)

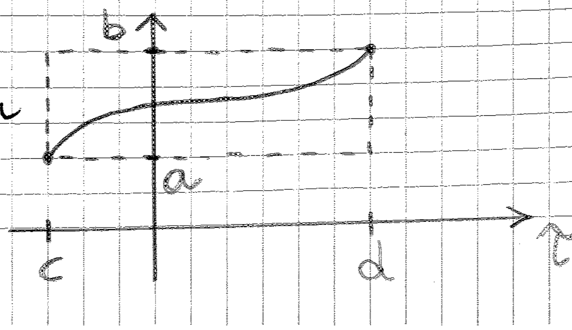
RAPPRESENTAZIONI PARAMETRICHE EQUIVALENTI

$$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

$$\delta(\tau) = \gamma(\alpha(\tau)) = (\gamma \circ \alpha)(\tau)$$

ottengo

$$\delta(\tau) = [c,d] \to \mathbb{R}^n$$



numero:

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \ldots + (\gamma_m'(t))^2} \cdot dt$$

essa è anche uguale a:

$$l_\delta = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt$$

22-10-13

Se considero una variabile $t = \alpha(\tau) : [c, d] \to [a, b]$ con $\alpha \in C^1$ e $\alpha'(\tau) \neq 0$ sostituendo ottengo

$$\delta(\tau) = \gamma(\alpha(\tau)) : [c, d] \to \mathbb{R}^m$$

Dimostro che l_γ è uguale a l_δ
(da sapere)

1) Considero $m = 2$

$$l_\delta = \int_c^d \sqrt{(\delta_1'(\tau))^2 + (\delta_2'(\tau))^2} \, d\tau$$

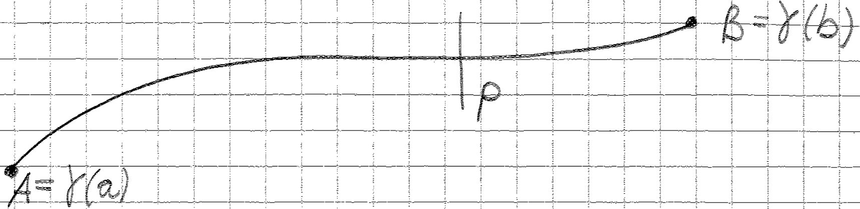
$$= \int_c^d \sqrt{((\gamma \circ \alpha)'(\tau))^2 + ((\gamma \circ \alpha)'(\tau))^2} \, d\tau$$

2) Ne faccio la derivata

$$= \int_c^d \sqrt{(\gamma_1'(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau))^2 + (\gamma_2'(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau))^2} \, d\tau$$

Noto che compare da entrambe le parti

$$S(t)=\int_a^t \sqrt{(\gamma_1(\vartheta))^2+\dots+(\gamma_n(\vartheta))^2}\,d\vartheta$$



$S(a)=0$; $S(b)=l_\gamma$ quindi $\sigma = S(t):[a,b]\to[0,l_\gamma]$ CRESCENTE

Per dimostrarlo me faccio la derivata

$S'(t)=\|\gamma'(t)\|$ ma è >0 $\Rightarrow$ STRETTAM. CRESCENTE

Trovo $f(\sigma)$

$$\boxed{f(\sigma)=(\gamma\circ S^{-1})(\sigma)}$$ da sapere

$$\Rightarrow f'(\sigma)=\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$$ = Versore! con VELOCITÀ SEMPRE UNITARIA

Per cui:

$$\frac{ds}{\cancel{dt}}=\sqrt{(\gamma_1(t))^2+\dots+(\gamma_n'(t))^2}\,dt$$

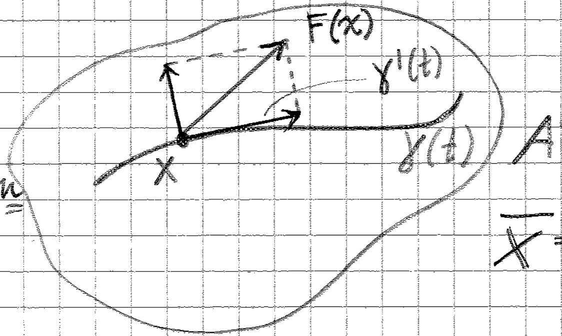
INTEGRALI DI LINEA DI UN « CAMPO VETTORIALE »

$F: A \to \mathbb{R}^m$ sempre aperto di $\mathbb{R}^m$

Abbiamo
$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots x_m) \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) \end{pmatrix}$$

Cerchiamo di rappresentarlo:

Faccio un esempio considerando $m=1$:



$\bar{x} = \gamma(\bar{t})$

$$\underbrace{F(\bar{x}) \cdot \gamma'(t)}$$

OTTENGO LO SCALARE TANGENTE ALLA CURVA, ESSO PERÒ PUÒ ESSERE QUALUNQUE COSA INFATTI DIPENDE DAL PARAMETRO PER CUI:

$$\Rightarrow F(x) \cdot \underbrace{\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}_{\text{VERSORE TANGENTE ALLA CURVA}}$$

LO CHIAMERÒ $t(\bar{t})$

$$\Rightarrow \underbrace{F(\gamma(\bar{t})) \cdot t(\bar{t})}_{\text{CAMPO SCALARE}}$$

Quindi

$$\int_a^b \left[F(\gamma(t)) \cdot t(\bar{t}) \right] \underbrace{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + \dots}}_{\|\gamma'(t)\|} \, dt$$

Vediamo un'altra situazione, in cui abbiamo un CAMPO VETTORIALE

Consideriamo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ scritto per esteso è dunque:

Se considero le $F: \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ sue DERIVATE PARZIALI nelle sue variabili è banale ricordare che otteniamo la matrice JACOBIANA vista già nei corsi precedenti.

$$\Longrightarrow J \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

NB. Se derivo una FUNZIONE SCALARE la trasformo in UN VETTORE
Se derivo una FUNZIONE VETTORIALE la trasformo in UNA MATRICE

Osservazione:

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ È banale dire che queste nozione sono estendibili a funzioni di n variabili.

1° RIGA = DERIVATA DEL FUNZ. 3 NELLA VARIABILE 2 MENO DERIVATA DELLA FUNZ. 2 NELLA VARIABILE 1.

... ...

Possiamo ad utilizzare la base canonica per definire questa matrice:

$$\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

Ora è sufficiente farne il determinante per ottenere la medesima formulazione precedente:

$$\det = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\hat{k}$$

Con una notazione ancora più compatta si può scrivere:

$$\boxed{\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F}$$

Anche qui possiamo definire la divergenza molto "compattamente":

$$\boxed{\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}}$$

Supponiamo ora di avere

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$ cioè derivabile due volte e continua nell'intervallo A, che consideriamo aperto allora:

$$\boxed{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f(x_1, x_2)) = \emptyset}$$ Sempre!

Cioè OGNI CAMPO CHE È UN GRADIENTE È IRROTAZIONALE

Dimostrazione

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

1° COMPONENTE DEL ROTORE $\quad \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = \emptyset$$

Questa è una conseguenza del teorema

$$F(x_1 \dots x_n) \overset{(\nabla)}{=} \text{grad}\, g(x_1 \dots x_n) \quad \forall (x_1 \dots x_n) \in A$$

Facciamo alcuni esempi:

1) $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$

2) $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow g(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

Infatti $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \ ; \ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \right)$

3) $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow g(x_1, x_2) = -x_1 x_2 + \overset{?}{\varphi}(x_2)$

Ma $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -x_1 + \varphi'(x_2) = x_1$

$\varphi'(x_2) = 2x_1$

ASSURDO

Perciò F in questo caso <u>non</u> <u>ammette</u> POTENZIALE

Un campo vettoriale $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice CONSERVATIVO se ammette un POTENZIALE

Le condizioni di conservatività dipendono da F ma anche da A.

Se $\exists$ almeno un POTENZIALE di F, allora F si dice <u>CAMPO CONSERVATIVO</u>

Questo significa che:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j \text{ con } i \neq j$$

CONDIZIONE NECESSARIA XCHÉ UN CAMPO SIA CONSERVATIVO

In particolare:

se $n=2$ allora $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$

se $n=3$ allora equivale a $rot(F)=0$ cioè IRROTAZIONALE

Nell'analisi esistono altre relazioni per dire che g È UN POTENZIALE di F: Introducendo infatti K come una costante reale e sapendo per la medesima relazione che g è <u>un potenziale</u> ($\nabla g(x) = F(x)$). Se aggiungo la COSTANTE K a $g(x)$ ottenendo $G(x) = g(x) + K$ esso <u>È ANCORA UN POTENZIALE</u>. Questo ci porta a dire che **se** ho un potenziale ne ho anche infiniti

Dimostrazione

VET. TANG

$$\int_\gamma F \cdot t = \int_a^b F(\gamma_1(t) \dots \gamma_m(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \nabla g(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \gamma_1'(t) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m} \gamma_m'(t) \right) dt$$

= QUESTA È SEMPLICEMENTE LA REGOLA DELLE DERIVAZIONI COMPOSTE =

$$\Longrightarrow \int_a^b \frac{d g(\gamma(t))}{dt} = g(\gamma(t))\Big|_a^b$$

$$= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

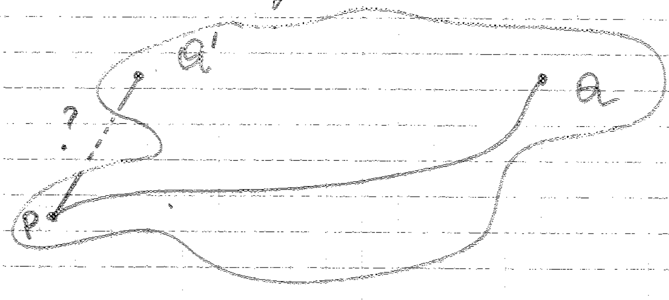
con $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$g(\gamma(t)): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c.v.d.

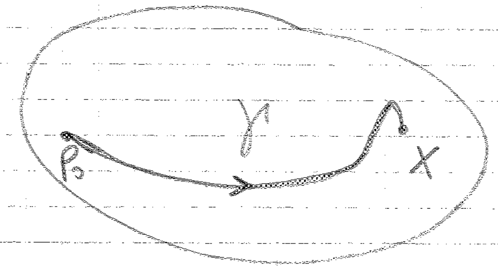
PROPRIETÀ D'INDIPENDENZA DAL CAMMINO

Consideriamo γ CHIUSA e F CONSERVATIVO per cui:

è CONNESSO se dati due punti P e Q $\in A$ presi arbitrariamente esiste una curva continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ tale che $\gamma(a) = P$; $\gamma(b) = Q$ e i punti interme di $\gamma(t) \in A$. In pratica è una "restrizione" della definizione di INSIEME CONVESSO



Dimostrazione



Se è CONNESSO x_0 potrà essere sempre collegato a P_0 con una curva γ

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot t = g(x) - g(P_0)$$

(ALLORA ANCHE CON UN'ALTRA CURVA) $= h(x) - h(P_0)$

$$\hookrightarrow \; g(x) - h(x) = g(P_0) - h(P_0) = K \quad \forall x \in A$$

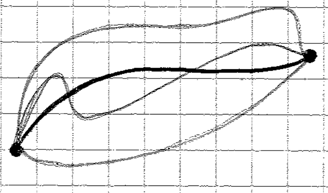
5-11-13

Ricordiamo brevemente:

CAMPO CONSERVATIVO: (cioè campi che ammettono un potenziale)

Ricordiamo che una <u>CONDIZIONE NECESSARIA</u> e SUFFICIENTE era:

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dom $F = A$ se è continuo e se A è APERTO e CONNESSO $\forall P, Q \in A$



$\int_{\gamma} F \cdot t$ è indipendente da γ ed equivale a dire che:

$$\oint_{\gamma} F \cdot t = 0 \quad \forall \gamma_{CHIUSA}$$

Tutto questo però <u>non</u> è di facile applicazione per colpa di quel $\forall$

È necessario cercare qualcosa di più applicabile:

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)}$$

$\forall x \in A \quad \forall i, j$ con $i \neq j$

con $F \in C^1$ A aperto

Uso uno stratagemma:

Prendo il campo F e aggiungo uno $\emptyset$

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

Ne calcolo il ROTORE:

$$\text{rot } \tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Oppure consideriamo:

$$G(x_1, x_2) \begin{pmatrix} f_2(x_1, x_2) \\ -f_1(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Se facessimo $F \cdot G = \emptyset$

$$(f_2 \cdot f_1 - f_2 f_1) \Rightarrow \text{ORTOGONALI}$$

Vediamo un applicazione:

$$n = 2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \emptyset \quad \forall\, x_1 x_2 \in A$$

se la assumo valida allora avremmo:

$$\iint_{\Omega \cap \Gamma} \emptyset \, dx_1 dx_2$$ cioè una CIRCUITAZIONE

Il punto delicato è quel $\forall$. La domanda è dunque: Sono sicuro che Ω_γ è contenuta in A? Non sempre!

Altra applicazione

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{2} \\ x_1/2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo:

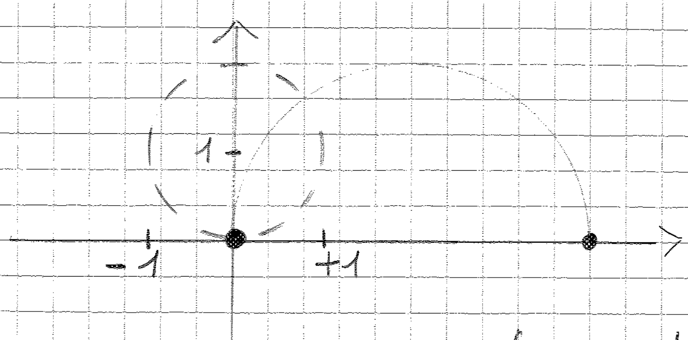
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1/2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1/2$$

Applico Green

$$\oint_{\gamma} F \cdot t = \iint_{\Omega \cup \Gamma} 1 \, dx_1 dx_2 = m(\Omega \cup \Gamma)$$

Osservazione - il cicloide



Parametrizzazione $\begin{cases} x = t - sen(t) \\ y = 1 - cos(t) \end{cases}$

8-11-13

Ricordiamo quanto visto:

In $\mathbb{R}^2$ $\quad F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$

Perché questa funzione sia conservativa bisogna avere due condizioni:

1) $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \forall x \in A \subset \mathbb{R}^2$ } COND. NECESSARIA

2) A SEMPLICEMENTE CONNESSO

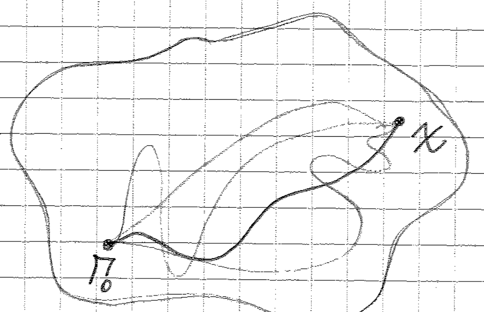
} SUFFICIENTE & NECESSARIA

I POTENZIALI sono:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1 \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = f_2$$

METODI PER IL CALCOLO DI g (potenziale)

Come già detto, per il calcolo su un campo vettoriale conservativo si ha INDIPENDENZA DAL CAMMINO



$$\int_\gamma F \cdot t = g(x)$$

↳ QUESTO È UN POTENZIALE

2° METODO

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Dom } F = \mathbb{R}^2$$

semplicemente connesso

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$$

So che $g(x,y) = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \underset{\uparrow y}{f_1} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = f_2 \leftarrow x$$

$$\boxed{g(x,y) = xy + \varphi(y)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\dots) = x + \varphi'(y)$$

APPLICO UN CONFRONTO $\quad \cancel{x} + \varphi'(y) = \cancel{x}$

$$\Longrightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = k$$

In $\mathbb{R}^3$

Si hanno gli INTEGRALI DI SUPERFICIE (o SUPERFICIALI)

Perchè due rette individuino un piano univocamente devono per forza essere LINEARMENTE INDIPENDENTI (non parallele)

Quindi:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{PER FORZA}} \text{RANGO} = 2 \quad \forall u_1, u_2 \in A$$

σ INIETTIVA = SUPERF. SEMPLICE

Per sapere come una superficie è orientata basta riferirsi al suo VETTORE NORMALE (senso di attraversamento)

$$\boxed{N(u_1, u_2) = \frac{\partial \sigma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}}$$

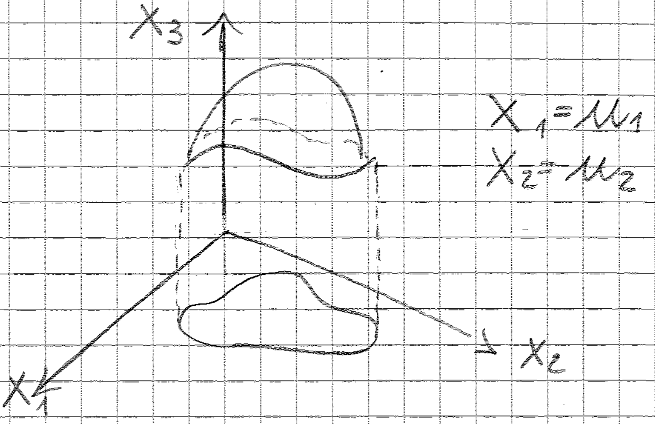
Torniamo alla nostra matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

$$I_1(x_1-\overline{x_1})+I_2(x_2-\overline{x_2})+I_3(x_3-\overline{x_3})=0$$

Osservazione 1

$x_3 = f(x_1, x_2)$



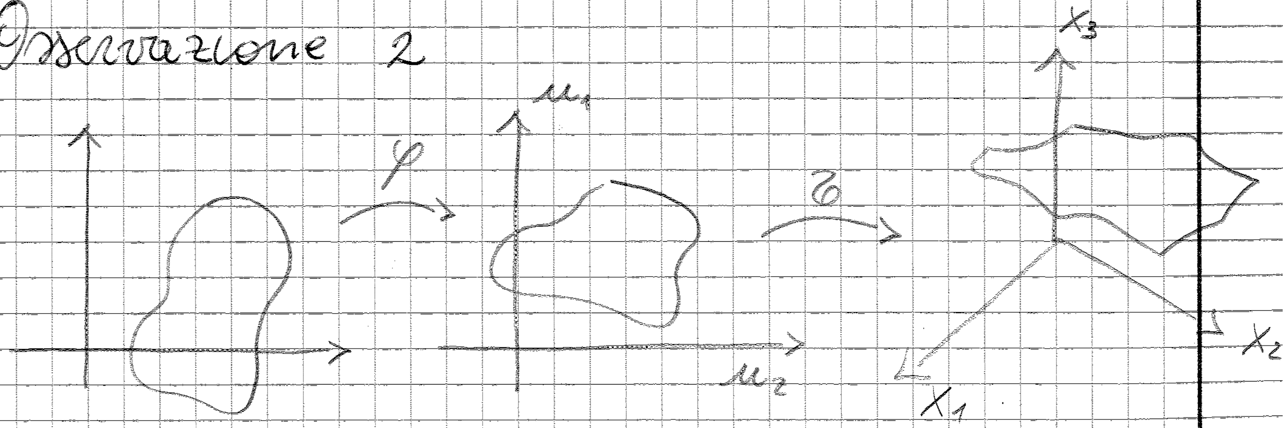
Se $f \in C_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} \end{pmatrix} = (\text{rango}) = 2$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{\partial f}{\partial u_1};\ I_2 = -\frac{\partial f}{\partial u_2}$$

$$I_3 = 1$$

Osservazione 2

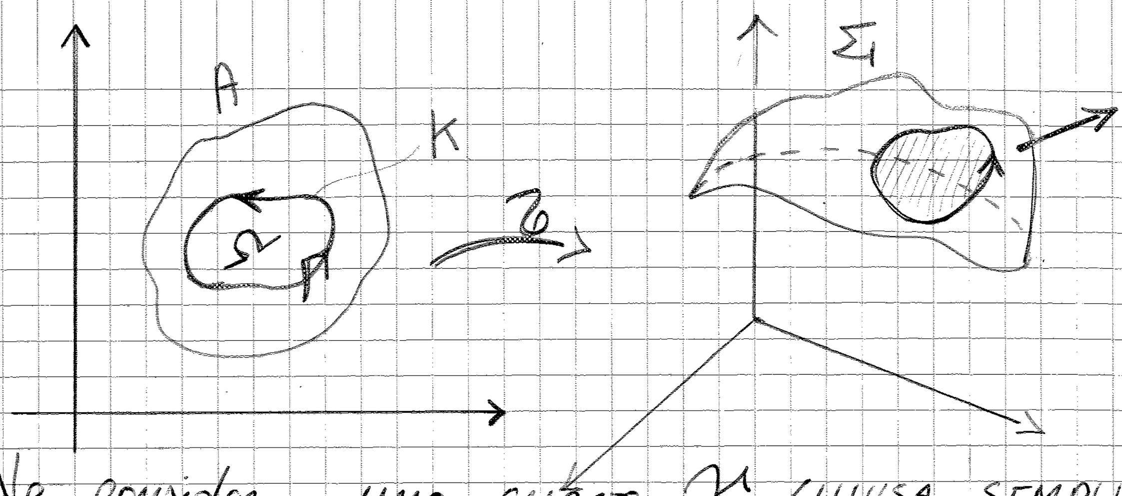


$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$B \to A$

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(v_1, v_2) \\ u_2 = \varphi_2(v_1, v_2) \end{cases}$$

$$J\varphi : \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_2} \end{pmatrix}$$



Ne considero una curva γ CHIUSA, SEMPLICE e REGOLARE A TRATTI, e orientata in senso ANTI-ORARIO. Ω è quindi tutta contenuta in A avremo dunque $\Omega \cup \Gamma = K \subset A$ (SOSTEGNO)

Chiameremo <u>la restrizione di φ su K</u> $(\varphi|_K)$ CALOTTA.

Chiameremo $(\partial\varphi)(t) = \varphi(\gamma(t))$ BORDO DELLA CALOTTA

INTEGR. DI SUPERFICIE DI UN CAMPO SCALARE

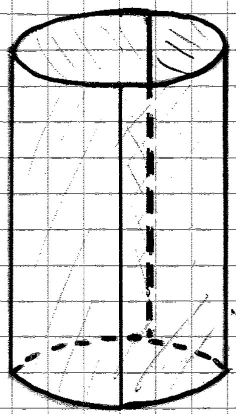
$$f : \underset{\mathbb{R}^3}{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

CONTINUO

Definizione

$$\boxed{\int_{\varphi} f \, ds = \iint_K f(\varphi(u_1, u_2)) \cdot \underbrace{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}}_{(\|N\|)} \, du_1 du_2}$$

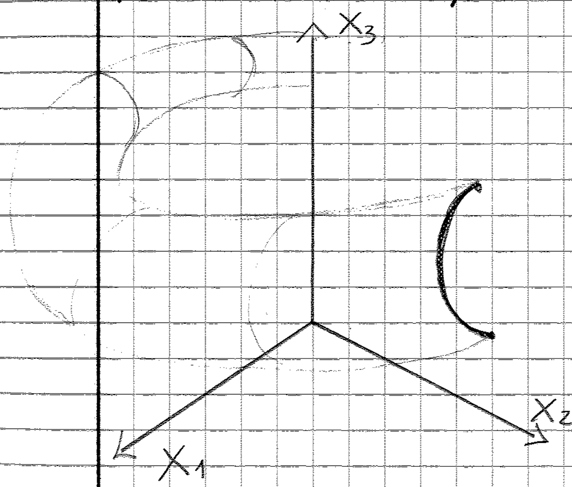
$N(u_1, u_2) = $ Vettore normale $= (I_1, I_2, I_3)$



$\Longrightarrow$

$$\int_\gamma \dots + \int_\rho \dots$$

TEOREMA DI GULDINO per le superfici di rotazione



x_3 = asse di rotazione
e $x_2 \div x_3$ semi piano in cui vado a disegnare l'oggetto che farò ruotare
$\gamma_1(t) = 0$ e $\gamma_2(t)$ e $\gamma_3(t) \geq 0$
Data $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Devo trovare il BARICENTRO DI γ cioè G nelle sue componenti (g_1, g_2, g_3)
Supponiamo sempre $\rho \equiv$ costante unitaria

$$g_1 = \frac{\int_\gamma x_1 \, ds}{\int_\gamma ds} \qquad g_2 = \frac{\int x_2 \, ds}{\int_\gamma ds}$$

$$g_3 = \dots$$

$$\iint_K F(\mathcal{C}(u_1,u_2)) \cdot N(u_1,u_2)\, du_1 du_2$$

$$= \text{FLUSSO DI } F \text{ SU } \mathcal{C}$$

Utilizzo un trucco e moltiplico e divido per la NORMA DI $\|N\|$

$$\iint_K F(\mathcal{C}(u_1,u_2)) \cdot \underbrace{\frac{N(u_1,u_2)}{\|N\|}}_{\bar{m}} \cdot \underbrace{\|N\|}_{\sqrt{I_1^2+I_2^2 \dots}} du_1 du_2$$

TEOREMA DI STOKES O DEL ROTORE

Sia V un insieme aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $F: V \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Sia inoltre $\mathcal{C}|_K$ una CALOTTA di $\mathbb{R}^3$ e sia $(\partial\mathcal{C})(t)$ il bordo della CALOTTA allora

$$\int_{\partial\bar{\mathcal{C}}} F \cdot t = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{rot}\, F \cdot \bar{m}$$

15-11-13

Riprendiamo il TEOREMA DI STOKES:

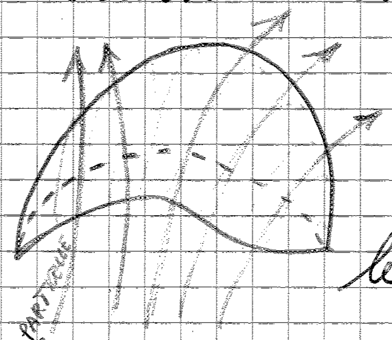
Ipotesi:

1) V aperto di $\mathbb{R}^3$
2) Ho un campo vettoriale $F: V \to \mathbb{R}^3$ di C^1
3) Si ha inoltre una CALOTTA $\mathcal{C}$ CON SOSTEGNO in V

TEOREMA DI GAUSS o DELLA DIVERGENZA

Esso è da definirsi in $\mathbb{R}^3$ e possiamo considerarlo <u>una</u> generalizzazione del Teorema di Green nello spazio.

Consideriamo una calotta $\mathcal{C}$

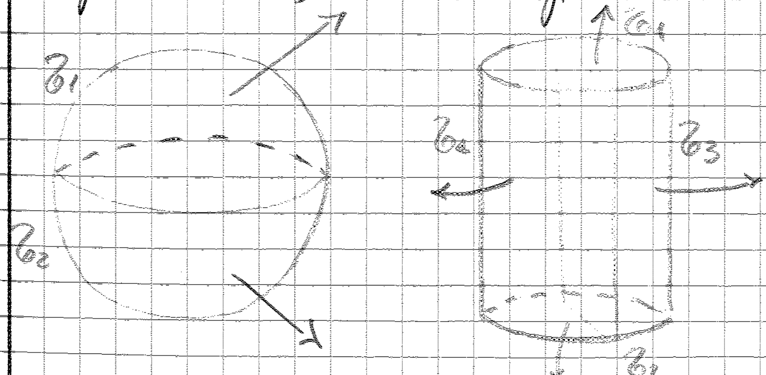


$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot n =$$

Si definisce come l'integrale doppio di

$$\iint_K F(\mathcal{C}(u_1, u_2)) \cdot N(u_1, u_2)\, du_1\, du_2$$

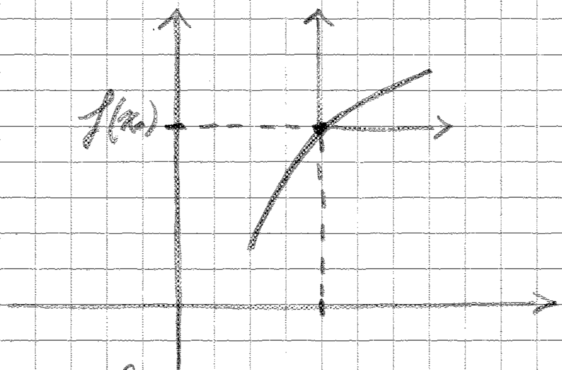
Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ una regione (aperta e connessa) e supponiamo che la frontiera di V sia l'UNIONE DI UN NUMERO FINITO DI CALOTTE CHE SI SOVRAPPONGONO SOLO PER PARTI DEI LORO BORDI $\mathcal{C}_1 \dots \mathcal{C}_m$ orientate in modo che il vettore normale di <u>tutte</u> queste superfici sia RIVOLTO VERSO L'ESTERNO di V. Sia infine F un campo vettoriale su V



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 306

Cosa vuol dire che dx_i è un DIFFERENZIALE
Vediamo il caso di 1 variabile:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si definisce così



individuo altri assi coordinati

Abbiamo che:

$$(df)(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h \qquad (\text{FUNZ LINEARE})$$

Per non abusare di notazioni scriviamo

$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE IDENTICA

Ecco che dividendo:

$$\frac{df}{dx} = f'(x_0)$$ Trovo esattamente quello che sono abituato a vedere

FUNZIONI COORDINATE

$f_1: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad (x_1 \dots x_n) \to x_i$

$$\boxed{\sum \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_i}$$