



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 829

DATA: 18/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Fornero

MATERIA: Fisica II + Eserc.

Prof. Rossani

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

FISICA II

ARGOMENTI DI TEORIA ED ESERCIZI SVOLTI E COMMENTATI PER ESAME

Professore: Rossani

A cura di: Boero Federico & Michele Fornero

6. ENERGIA POTENZIALE:

- Dipolo a doppio strato
- Densità di energia

7. FORZE:

- Risultante su un dipolo
- Momento risultante su un dipolo

8. TEOREMA DI AMPERE:

- Equivalenza tra circuito elettrico e lamina magnetica
- Forza integrale e differenziale

9. PRIMA LEGGE DI LAPLACE:

- Deduzione dato un filo percorso da corrente qual è il campo magnetico generato

10. PRIMA LEGGE DI MAXWELL:

- Inclusa la discussione sulla corrente di spostamento

11. LEGGE DI FARADAY & SECONDA LEGGE DI MAXWELL:

12. FORZA SU UN CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE E SECONDA LEGGE DI LAPLACE:

13. EQUAZIONE ONDE IN GENERALE:

14. EQUAZIONE ONDE ARMONICHE PIANE:

15. BILANCI DI ENERGIA ONDE:

- Onda armonica piana
- Bilancio di energia in generale

16. RIFLESSIONE RIFRAZIONE E INTERFERENZA:

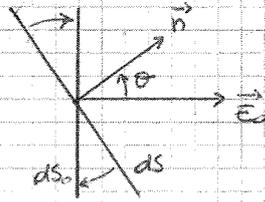
ESERCIZI:

1. TEOREMA DI GAUSS:

- Simmetria sferica
- Simmetria cilindrica
- Simmetria piana

TEORIA

1) TEOREMA DI GAUSS (elettrostatica)



Si consideri una superficie ds attraversata dalle linee di un campo elettrostatico \vec{E}_0 . Il numero delle linee che la attraversano si ricava calcolando il flusso $\phi(\vec{E}_0)$ del campo attraverso alla superficie considerata dunque:

$$d\phi(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \vec{n} \, ds \quad (1)$$

\vec{n} è il versore normale alla superficie e quindi valgono le seguenti proprietà

- Il flusso è una grandezza scalare ed \vec{n} definisce lo orientamento della superficie rispetto al campo
- Se la superficie fosse curva, \vec{n} dovrebbe essere orientato in verso opposto al raggio di curvatura
- Calcolando il prodotto scalare si ha:

$$d\phi(\vec{E}_0) = E_0 \, ds \cos\theta = E_0 \, ds \quad (2)$$

θ è l'angolo compreso tra i due vettori $ds \cos\theta = ds$ esso rappresenta la proiezione della sup. in direzione normale a quella del campo \vec{E}_0 (SUP. NORMALIZZATA)

Considerando la (2) il flusso può risultare:

- $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$: FLUSSO USCENTE $d\phi(\vec{E}_0) > 0$
- $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$: FLUSSO ENTRANTE $d\phi(\vec{E}_0) < 0$
- $\theta = 0$: MAX FLUSSO USCENTE $d\phi(\vec{E}_0) = E_0 \, ds$ essendo $\vec{E}_0 \parallel \vec{n}$
- $\theta = \pi$: MIN FLUSSO ENTRANTE $d\phi(\vec{E}_0) = -E_0 \, ds$ essendo $\vec{E}_0 \perp \vec{n}$
- $\theta = \frac{\pi}{2}$: FLUSSO NULLO $d\phi(\vec{E}_0) = 0$ essendo $\vec{E}_0 \perp \vec{n}$

Dunque il flusso complessivo $d\phi_{TOT}(\vec{E}_0)$ attraverso una superficie dipende dalla posizione della sorgente del campo rispetto alla superficie stessa.

→ ANDRÀMO TRE CASI PRINCIPALI:

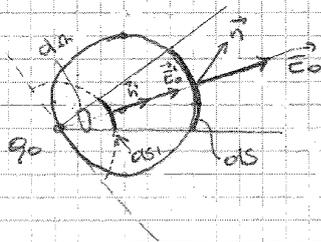
- 1) SORGENTE ESTERNA AD UNA SUPERFICIE CHIUSA:

$$d\phi(\vec{E}_0) = E_0 r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} r^2 d\Omega = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (3)$$

ed integrando questo risultato su tutto l'angolo solido 4π si ricava LA LEGGE DI GAUSS:

$$d\phi(\vec{E}_0) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{4\pi} d\Omega = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q_0 = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

3) SORGENTE SU UNA SUPERFICIE CHIUSA



Il problema è dal tutto uguale a prima cambia solo l'angolo solido considerato che in questo caso è π . Per valori superiori a tale valore angolare il flusso totale è nullo, non esistendo alcuna sup. attraversata.

$$d\phi(\vec{E}_0) = E_0 r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 d\Omega = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{2\pi} d\Omega$$

ossia:

$$d\phi(\vec{E}_0) = \frac{1}{2\epsilon_0} q_0$$

→ APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI GAUSS

Il campo elettrostatico ha simmetria radiale:

- CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA CARICA PUNTIFORME: Si consideri una sup. gaussiana sferica di raggio r che circondi la sorgente del campo:

$$\phi(\vec{E}_0) = \vec{E}_0 \cdot \vec{n} S_{\text{sfera}} = E_0 4\pi r^2 = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

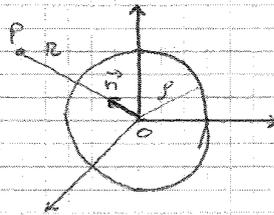
essendo $\vec{n} = \vec{u}_r \rightarrow E_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ed $\vec{E}_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

- CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE LINEARE INDEFINITA DI CARICA: dove $\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{const.}$ Le linee del campo presentano una simmetria cilindrica, la sup. gaussiana è dunque

2) EQUAZIONE DI POISSON:

L'equazione di Poisson descrive un conduttore isolato in condizioni di equilibrio elettrostatico la cui distribuzione superficiale di carica $\sigma(\xi, \eta, \xi)$ è tale da rendere equipotenziale la sua superficie

$$\vec{E} = - \text{grad } V$$



$$V = \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \xi) d\xi d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}} \quad (x-\xi)^2 = (m_x r - \xi)^2 = r^2 (m_x - \frac{\xi}{r})^2$$

Ma se scrivo il potenziale in funzione di R e cioè di P

$$V = \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \xi) d\xi d\eta d\xi}{r \left[(m_x - \frac{\xi}{r})^2 + (m_y - \frac{\eta}{r})^2 + (m_z - \frac{\xi}{r})^2 \right]^{1/2}}$$

ed anche:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R(V) = \iiint \rho(\xi, \eta, \xi) d\xi d\eta d\xi = Q$$

ma se faccio la derivata rispetto ad R di V

$$\frac{dV}{dR} = \iiint \frac{\partial}{\partial R} \frac{\rho(\xi, \eta, \xi) d\xi d\eta d\xi}{\left[(R m_x - \xi)^2 + (R m_y - \eta)^2 + (R m_z - \xi)^2 \right]^{1/2}}$$

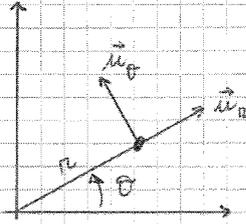
a questo punto se faccio il limite:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{dV}{dR} = - \int \frac{\rho(\xi, \eta, \xi) d\xi d\eta d\xi}{\left[()^2 + ()^2 + ()^2 \right]^{1/2}} = -\rho$$

e dunque $\nabla^2 V = -4\pi\rho$

essa è valida in generale indipendentemente dalla direzione che scelgo.

Tutto ciò si può applicare a altre cose.



$$\vec{\nabla}V = g_r \vec{u}_r + g_\theta \vec{u}_\theta$$

dove: $g_r = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \theta = \text{cost}$

$$g_\theta = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{r \Delta \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad r = \text{cost}$$

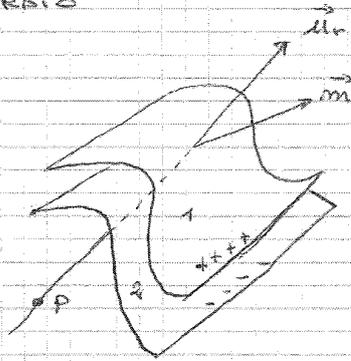
$$V = \frac{m \cos \theta}{r^2}$$

ed allora:

$$g_r = -2m \frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$g_\theta = -\frac{1}{r} m \frac{\sin \theta}{r^2} = -\frac{m \sin \theta}{r^3}$$

→ Doppio Strato



$$V = -\frac{d(m \cdot \vec{u}_r)}{r^2} = -\frac{\vec{m} \cdot M dS \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

$$= -M \frac{dS \cos \theta}{r^2} = -M d\omega$$

POTENZIALE DOVUTO AL PRIMO ELEMENTO DEL DOPPIO STRATO

M = densità di momento o di dipolo



$$dS' = dS \cos \theta$$

$$r^2 d\omega = dS \cos \theta$$

4) CONDUTTORI:

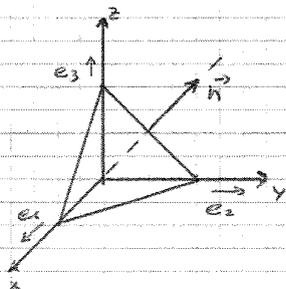
Un corpo si definisce CONDUTTORE ELETTRICO se il campo elettrico all'interno è identicamente nullo. Allora considerata una superficie qualsiasi all'interno del conduttore il flusso è sempre nullo essendo $E=0$ e quindi per il teorema di Gauss non ci sono cariche all'interno ma esse si distribuiscono sulla superficie del conduttore stesso.

La staticità di un conduttore implica l'assenza di cariche all'interno ed il non spostamento della carica.

- Il campo elettrico sulla superficie di un conduttore vale $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ed \vec{E} è lo stesso in ogni punto, se è costante la densità superficiale di carica
- E costante allora in ogni punto anche il potenziale elettrico

→ La differenza di potenziale tra due punti qualsiasi del conduttore allora è sempre zero e ciò dimostra che sulla superficie le cariche NON sono in movimento.

→ EQUAZIONI DI CONTINUITÀ:



Densità di corrente $J(\vec{n}) dS = \frac{\text{carica}}{\text{tempo}}$

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int J(\vec{n}) dS + \int J(\vec{e}_1) dS + \int J(\vec{e}_2) dS + \int J(-\vec{e}_3) dS$$

ρ : densità di carica

Ora applico il Teorema della media

$$= S \langle J(n) \rangle - S_x \langle J(e_1) \rangle - S_y \langle J(e_2) \rangle - S_z \langle J(e_3) \rangle - \frac{1}{3} S d \langle \frac{d\rho}{dt} \rangle$$

$$= S \langle J(n) \rangle - S n_x \langle J(e_1) \rangle - S n_y \langle J(e_2) \rangle - S n_z \langle J(e_3) \rangle$$

dove Sd è la distanza dell'origine con il piano inclinato. Ma volta divisa per S posso riscriverlo come

$$J(\vec{n}) = n_x J(\vec{e}_1) + n_y J(\vec{e}_2) + n_z J(\vec{e}_3) = \vec{n} \cdot \vec{J}$$

→ CORRENTI DI SPOSTAMENTO

$$\begin{cases} \partial \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + 4\pi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\int [j(\vec{n}) + j_s(\vec{n})] dS = 0$$

→ SPOSTAMENTO ELETTRICO

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi (\rho + \rho^*) = 4\pi \rho - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\operatorname{div} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi \rho$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \quad \rho: \text{densità di cariche libere}$$

Anche detta induzione elettrica, è un campo vettoriale utilizzato in elettromagnetismo per descrivere la polarizzazione elettrica di un materiale dielettrico in seguito alla applicazione di un campo elettrico. Si tratta di una generalizzazione del campo elettrico utilizzata nelle equazioni di Maxwell per descrivere l'effetto delle cariche di polarizzazione sulla configurazione spaziale e temporale del campo elettromagnetico.

ENERGIA POTENZIALE

Quando tra due o più particelle cariche entro un sistema di particelle agisce una forza elettrostatica, possiamo assegnare una energia potenziale elettrica U al sistema. Se il sistema cambia configurazione da uno stato iniziale ad uno finale, la forza elettrostatica compie lavoro sulle particelle.

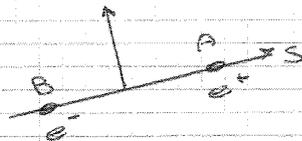
Come per gli altri campi conservativi, il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche è indipendente dal cammino

$$\Delta U = U_f - U_i = -L$$

→ SISTEMA DI CARICHE IN UN CAMPO ELETTRICO:

- DIPOLLO DOPPIO STRATO:

$$u = \int V \rho \, dV$$



$$u = \lim_{d \rightarrow 0} (e V_A - e V_B) = m \lim_{d \rightarrow 0} \frac{V_A - V_B}{d} = m \frac{dV}{ds} = m \vec{s} \cdot \vec{\nabla} V = m \cdot \vec{E}$$

FORZE

→ FORZE DI DIPOLO



$$\vec{Q} = \lim_{d \rightarrow 0} (e \vec{E}_B - e \vec{E}_A) = \lim_{d \rightarrow 0} e d \frac{t_B - t_A}{d} = m \frac{d\vec{E}}{dx} = m (\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} =$$

$$= \left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k})$$

→ MOMENTO RISULTANTE DI DIPOLO

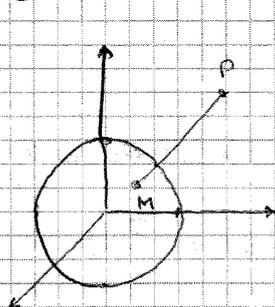
$$\vec{M} = \vec{AB} \times e \vec{E} = d \frac{\vec{AB}}{d} \times e \vec{E} = d \frac{\vec{AB}}{d} + e \vec{E} = m \vec{l} \times \vec{E} = \vec{m} \times \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{i}$$

$$-\nabla^2 \vec{H} \cdot \vec{i} = \frac{4\pi}{c} \vec{i} \text{ rot } \vec{j}$$

$$\nabla^2 H_x = -\frac{4\pi}{c} \vec{i} \text{ rot } \vec{j} \quad \text{AMPERE}$$

Quindi considero una regione dove non abbiamo correnti:



$$M = M(\xi, \eta, \zeta)$$

$$P = P(x, y, z)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\text{rot } \vec{j}(M) dV}{r^2}$$

dove la distanza r è data da $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

Manipolo l'equazione e modifico l'integrando

$$\varphi = \frac{1}{r} \quad v = \text{rot } \vec{j}$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{v}) = \varphi \text{rot } \vec{v} + \text{grad } \varphi \times \vec{v}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int \left(\text{rot} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{1}{r} \times \vec{j} \right) dV$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV$$

Attraverso il teorema di Green passa da un integrale di volume ad uno di superficie

$$\int_{\partial D} \left(j_z \frac{m_z}{r} + j_y \frac{m_y}{r} \right) dS = 0$$

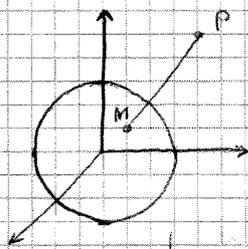
sono zero perché sulla frontiera non abbiamo correnti

↑ ∂D è la frontiera

$$H = -\frac{1}{c} \int \left(\text{grad} \frac{1}{r} \times v \right) dV$$

PRIMA LEGGE DI LAPLACE

Considero una regione P dove non abbiamo correnti:



$$M = M(\xi; \eta; \zeta)$$

$$P = P(x; y; z)$$

$$H_x = \frac{1}{c} \iiint \frac{\vec{i} \operatorname{rot} \vec{j}(M)}{MP} d\xi d\eta d\zeta$$

In generale vale:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \iiint \frac{\operatorname{rot} \vec{j}(M)}{MP} dV$$

\vec{j} è funzione delle coordinate di M

La distanza MP è data da $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

Per manipolare l'equazione e modificare l'integrale

$$\varphi = \frac{1}{r} \quad \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{j}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \vec{v}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{v} + \operatorname{grad} \varphi \times \vec{v}$$

$$H = \frac{1}{c} \iiint_D \left(\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \vec{j} \right) dV$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} j_z \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} j_y \right) \right] dV$$

Attraverso il Teorema di Green passa da un integrale di volume ad uno di superficie

$$\iiint_D \left(j_z \frac{\partial}{\partial \eta} + j_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) dS = 0$$

↳ Poiché deve contenere all'interno tutti i punti percorsi dalla corrente (escludendo i casi in cui vi siano correnti a distanza infinita) si ha $\vec{j} = 0$ in quanto non abbiamo correnti sulla frontiera

PRIMA LEGGE DI MAXWELL

→ CORRENTI DI SPOSTAMENTO

La relazione $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ che descrive la prima equazione di Maxwell, è stata stabilita con la restrizione che \vec{j} sia costante nel tempo e solenoideale. Che quest'ultima condizione sia necessaria, si ricava immediatamente prendendo la div dei due membri:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{F}(\vec{E})$$

ricordando che $\text{div } \text{rot } \vec{B} = 0$. Dunque quando la densità di corrente \vec{j} non è solenoideale, il campo da essa prodotto dovrà soddisfare un'equazione diversa da $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, che può avere comunque questa come caso particolare.

Questa generalizzazione fu ~~già~~ intuita da Maxwell:

- la densità di corrente \vec{j} soddisfa, anche nel caso più generale l'equazione di continuità $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ che si può scrivere poiché ρ è legato all'induzione elettrica \vec{D} e \vec{D} è:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}(\vec{E})$$

dunque

$$\text{div} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

dunque anche se \vec{j} non è solenoideale il vettore \vec{j} è sempre tale il vettore $\vec{j} + \vec{j}^*$ con

$$\vec{j}^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

così per generalizzare ~~la~~ $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ a correnti qualsiasi si dovrà sostituire $\vec{j} + \vec{j}^*$ a \vec{j} e ~~il risultato sarà~~

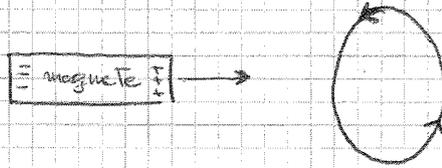
~~$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}^*)$$~~

allora:

$$dU = \int I dt > 0$$

$$-\frac{I}{c} d\phi = \mathcal{E} I \rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt}} \leftarrow \text{Legge di Faraday}$$

Viene così indotta una differenza di potenziale



$$V_B - V_A = \mathcal{E}$$

$$V_A - V_B = \int_B^A \text{grad } V \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^B \text{grad } V \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\mathbf{s}$$

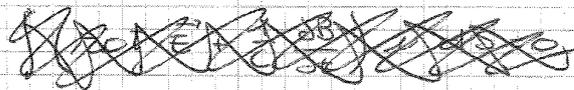
denique

$$\mathcal{E} + \int_A^B \vec{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \rightarrow \mathcal{E} = \int_B^A \vec{E} \cdot d\mathbf{s}$$

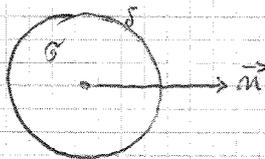
sempre per Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \left(\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, d\mathbf{s} = 0$$

L'ultimo integrale descrive la legge di induzione in forma integrale dunque:



Ora immaginando un disco con superficie quadrata σ ed avente per contorno Γ



ed applicando al primo membro il teorema di Stokes

FORZA SU UN CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE

Si può notare che se un filo conduttore percorso da corrente si trova in un campo magnetico esso, per questo fatto, è sollecitato da una forza dovuta al filo ed al campo.

→ MEZZO ANISOTROPO:

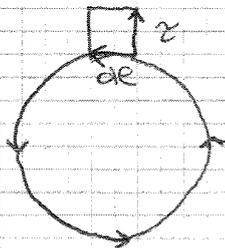
$$\vec{P}_e = \sum_{k=1}^3 \chi_{ek} E_k$$

$$\vec{F}_e = \sum_{k=1}^3 \chi_{ek} H_k$$

→ CONDUTTORE ANISOTROPO:

$$j_e = \sum_{k=1}^3 \chi_{ek} E_k$$

Consideriamo una spira percorsa da corrente I



$$U = -\frac{I}{c} \phi$$

dove ϕ è il flusso d'induzione concatenato =
= moto della spira

dl : elemento infinitesimo della
spira libero di muoversi senza
interrompere il circuito

z : traslazione infinitesima

allora:

$$dU = -\frac{I}{c} d\phi = -\frac{I}{c} \vec{B} \cdot \vec{m} \, ds$$

$$\vec{m} \, ds = z \times dl$$

$$dU = -\frac{I}{c} (z \times dl) \cdot \vec{B} = -\frac{I}{c} (dl \times \vec{B}) \cdot z = -z \cdot \vec{F}$$

$$z \cdot \vec{F} = \frac{I}{c} (dl \times \vec{B}) \cdot z$$

ed ora per $z = z_i$

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\mu}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) \leftarrow \text{FORMULA DI LORENTZ}$$

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) \leftarrow \text{FORMULA DI LORENTZ NEL VUOTO}$$

Combinando la (5;6) otteniamo:

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Otteniamo quindi che la velocità di propagazione della onda è

$$\frac{c^2}{\epsilon \mu} = v^2$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto quindi:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \leftarrow \text{Equazione per il campo elettrico}$$

Ora dalla (4)

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \frac{\mu}{c} \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (7)$$

dalla (3)

$$\text{rot rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{E} \quad (8)$$

dalle ultime due equazioni ottengo

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad \text{sostituendo come prima } v^2 = \frac{c^2}{\epsilon \mu}$$

Otteniamo

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$

Equazione onde per il campo
MAGNETICO

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp [i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp [i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

$$i \vec{k} \times \vec{H}_0 = -i \omega \vec{E}_0 \frac{\epsilon}{c}$$

$$i \vec{k} \times \vec{E}_0 = i \omega \frac{\mu}{c} \vec{H}_0$$

$$\vec{E}_0 = -\frac{c}{\epsilon \omega} \vec{k} \times \vec{H}_0$$

$$-\frac{c}{\epsilon \omega} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}_0) = \omega \frac{\mu}{c} \vec{H}_0 \quad \vec{H}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

↑
H, E, k sono normali tra di loro

Ora sviluppando il prodotto vettoriale

$$-\frac{c}{\epsilon \omega} \left[\vec{k} (\vec{H}_0 \cdot \vec{k}) - H_0 k^2 \right] = \omega \frac{\mu}{c} \vec{H}_0$$

$$\frac{c}{\epsilon \omega} H_0 k^2 = \omega \frac{\mu}{c} H_0$$

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \frac{c^2}{\epsilon \mu} = v^2 \quad \text{In un mezzo la velocità è sempre più bassa rispetto al vuoto}$$

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \frac{\epsilon}{c} \vec{E}_0$$

$$\vec{H}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{Normali fra loro}$$

$$0 = \vec{E}_0 \cdot \vec{H}_0 \rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{H}_0$$

→ BILANCIO ENERGETICO

$$1) \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\frac{\epsilon}{c} \omega \vec{E}_0$$

$$(\vec{k} \times \vec{H}_0) \times \vec{H}_0 = -\frac{\epsilon}{c} \omega \vec{E}_0 \times \vec{H}_0$$

$$\vec{H}_0 \times (\vec{k} \times \vec{H}_0) = \frac{\epsilon}{c} \omega \vec{E}_0 \times \vec{H}_0$$

$$\vec{H}_0 \times \vec{H}_0 = \frac{\epsilon}{c} \omega \vec{E}_0 \times \vec{H}_0$$

BILANCIO DI ENERGIA: GENERALE

Bilancio di energia per il campo elettromagnetico.
 Consideriamo la densità di energia elettrica e magnetica

$$w = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2)$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \left(\epsilon \vec{E}^2 \frac{\partial}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

$$\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j}$$

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} \right) + \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Perdita di energia
 del campo elettromagnetico =
 = magnetico

←
 Energia dissipata
 in calore

Definisco $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ ← che prende il nome di vettore di Poynting

Il flusso del vettore di Poynting rappresenta l'energia di un'onda elettromagnetica che nell'unità di tempo attraversa l'unità di superficie, secondo la direzione di propagazione

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j}$$

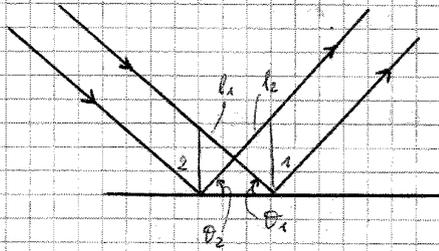
che rappresenta il bilancio di energia in forma locale infatti, la $\operatorname{div} \vec{S}$ è l'energia persa attraverso la superficie; e come già detto $\vec{E} \cdot \vec{j}$ è l'energia dissipata come calore. Nel complesso si ha:

$$-\frac{d}{dt} \int_D w \, dV + \int_{\partial D} \vec{S} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_D \vec{E} \cdot \vec{j} \, dV$$

Volume

RIFLESSIONE, RIFRAZIONE E INTERFERENZA

→ RIFLESSIONE



$\frac{c}{h}$ = coefficiente di riflessione

$$l_1 = l \sin \theta_1$$

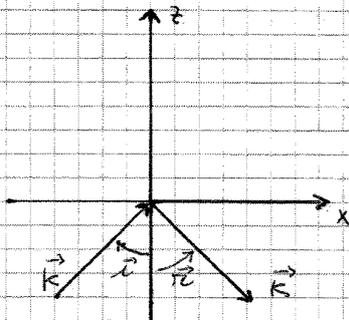
$$l_2 = l \sin \theta_2$$

$$l_1 = \frac{ct}{h} \quad l_2 = \frac{ct}{h}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = 1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione

• APPROCCIO RIGOROSO UTILIZZANDO LE ONDE: utile per trovare una dipendenza tra onde



$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r}$$

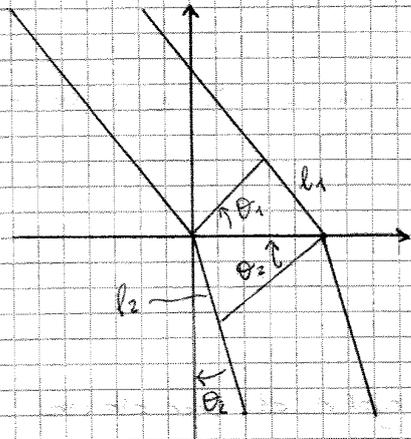
$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k \sin i \\ 0 \\ k \cos i \end{bmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k r \sin i \cos \varphi$$

$$\vec{k}' \cdot \vec{r} = k r \sin r \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \sin i = \sin r$$

→ RIFRAZIONE



$$m_1 = \frac{c}{v_1} \quad m_2 = \frac{c}{v_2}$$

$$l_1 = l \sin \theta_1$$

$$l_2 = l \sin \theta_2$$

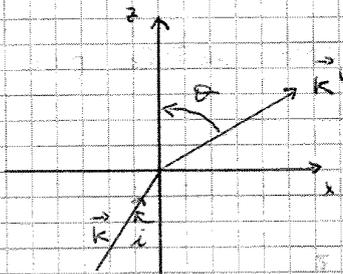
$$l_1 = \frac{ct}{m_1} \quad l_2 = \frac{ct}{m_2}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1} \rightarrow \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

Il rapporto tra i seni è uguale al rapporto inverso dello indice di rifrazione

• APPROCCIO RIGOROSO UTILIZZANDO LE ONDE

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r}$$

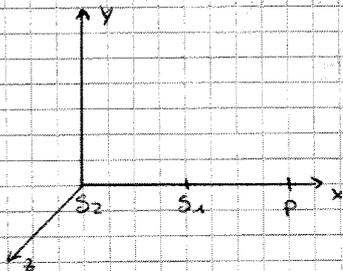


$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k \sin \alpha \\ 0 \\ k \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{r} = k r \sin \alpha \cos \varphi \\ \vec{k}' \cdot \vec{r} = k' r \sin \theta \cos \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow k \sin \alpha = k' \sin \theta$$

→ INTERFERENZA

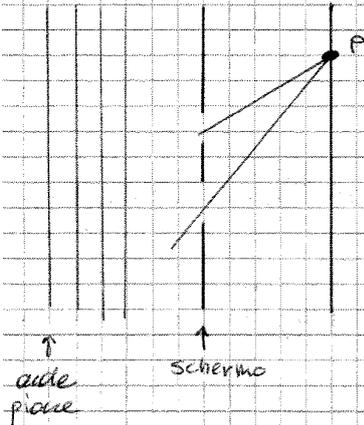


Nel punto P avrà una sovrapposizione delle onde che partono da S2 e S1

per $A_1 = A_2 = A$

$$\text{MAX } \langle S \rangle = \frac{c^2}{16\pi^2} \frac{E}{\mu} \cdot \varphi A^2 = 2 \left(\frac{A^2 c^2}{16\pi^2 \frac{\mu}{E}} + \frac{A^2 c^2}{16\pi^2 \frac{\mu}{E}} \right)$$

Si verifica con l'esperienza di Young

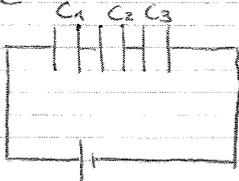


Spostando il punto P varia la distanza punto fenditura quindi uno dei massimi e dei minimi

- **DIFRAZIONE:** Una onda meccanica piana passando attraverso ad uno schermo con due fenditure da origine ad onde chiare ed onde scure e questo è dovuto alla distanza ed è il fenomeno della DIFRAZIONE

CONDENSATORI

SERIE



$$V_{TOT} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

PARALLELO

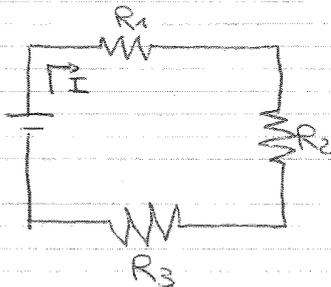


$$V_{TOT} = Q (C_1 + C_2 + C_3)$$

$$C_{eq} = (C_1 + C_2 + C_3)$$

RESISTENZE

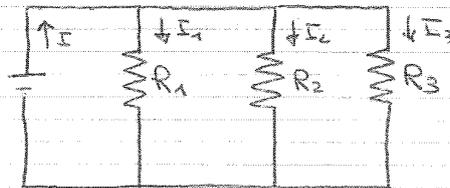
SERIE



$$V_{TOT} = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I$$

$$R_{TOT} = R_1 + R_2 + R_3$$

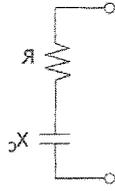
PARALLELO



$$V_{TOT} = I' \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1}} + I'' \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_2}} + I''' \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_3}}$$

$$R_{TOT} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

R-C) (serie)



TENSIONE

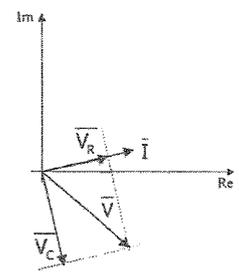
$$\bar{V} = (R - jX_c) \bar{I}$$

$$\bar{Z} = (R - jX_c)$$

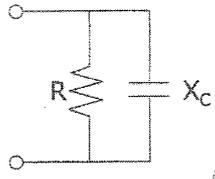
IMPEDENZA

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2}$$

$$\varphi = -\text{arctg} \frac{X_c}{R}$$



(parallelo)



SUSCETTANZA CAPACITIVA

$$\bar{I} = (G + jB_c) \bar{V}$$

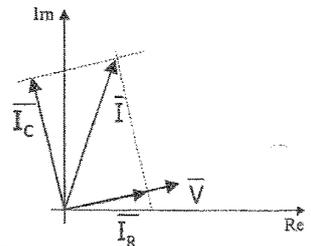
$$\bar{Y} = (G + jB_c)$$

AMMETTENZA

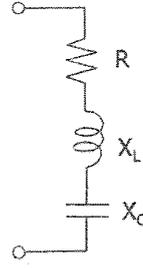
INVERSO IMPEDENZA

$$Y = \sqrt{G^2 + B_c^2}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{B_c}{G}$$



R-L-C) (serie)

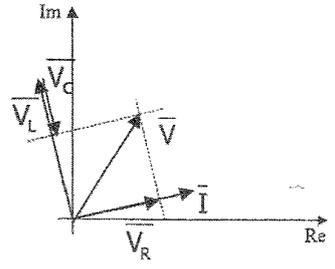


$$\bar{V} = [R + j(X_L - X_c)] \bar{I}$$

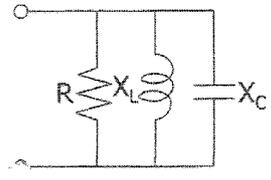
$$\bar{Z} = [R + j(X_L - X_c)]$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{X_L - X_c}{R}$$



(parallelo)

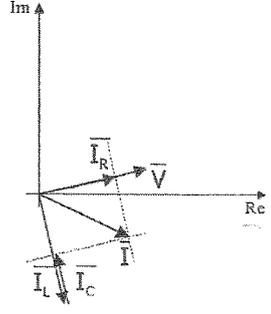


$$\bar{I} = [G + j(B_c - B_L)] \bar{V}$$

$$\bar{Y} = [G + j(B_c - B_L)]$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_c - B_L)^2}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{B_c - B_L}{G}$$



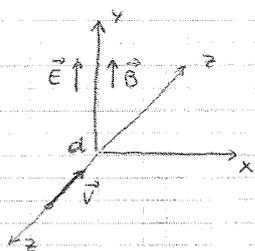
$$\dot{x} + i\dot{y} = a e^{-i\omega t}$$

ora le sommiamo

$$\dot{x} + i\dot{y} = \frac{c}{H} E_y + a e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{c}{H} E_y + a \cos \omega t \\ \dot{y} = -a \sin \omega t \end{cases}$$

→ SPETTROMETRO DI MASSA



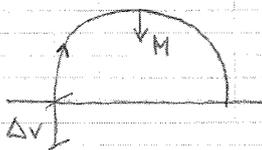
$$x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(\frac{d}{v}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{qBv}{mc} t^2 = \frac{1}{2} \frac{qB}{mc} \frac{d^2}{v}$$

Elimino v

$$\frac{y^2}{x} = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{qB}{mc}\right)^2 d^4}{\frac{1}{2} \frac{qE}{m} d^2}$$

→ METODO DELLE PARABOLE X SPETTROMETRO



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\vec{m}$$

$$a = \frac{mv^2}{r} \vec{m}$$

$$F = m \cdot a = m q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \frac{qBz}{m}$$

$$\frac{mv^2}{2} = q\Delta V$$

$$q \cdot v \cdot B = \frac{2q\Delta V}{2} = \frac{qB^2 z}{m} = \frac{2\Delta V}{2}$$

$$m = \frac{q z^2 B^2}{2\Delta V}$$

→ SPIRE IN MOTO IN UN CAMPO MAGNETICO

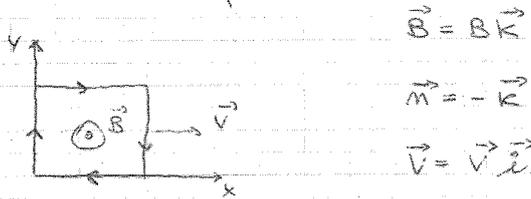
- Circuito che si deforma



$$F = \frac{BI}{c} \frac{1}{S} \cdot Sa = \frac{BIa}{c}$$

$$M = Fb \sin \alpha = \frac{BIa}{c} b \sin \alpha = \frac{I \Sigma}{c} B \sin \alpha$$

- Spira che si sposta



$$\vec{B} = B \vec{k}$$

$$\vec{m} = -\vec{k}$$

$$\vec{v} = v \vec{i}$$

$$\mathcal{E} = \int \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{e} = \left(\frac{\vec{v}}{c} \times B \right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{a} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) \cdot \vec{B} = B_z \frac{ds}{dt} / c$$

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{k} a \frac{dx}{dt} = \vec{k} \frac{ds}{dt}$$

$$d\phi = \vec{B} \cdot \vec{m} ds = -B_z ds$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} / c !$$