



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 826

DATA: 13/02/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Cappelletti

MATERIA: Meccanica del Volo + Eserc. + Temi

Prof. Quagliotti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Politecnico di Torino

**Appunti, esercitazioni svolte  
e temi d'esame**

# **MECCANICA DEL VOLO**



Corso tenuto dalla Prof. F. Quagliotti  
A.A. 2013-2014  
1° Anno Laurea Magistrale  
Ing. Aerospaziale

**Appunti di Cippo Matteo**

# ARGOMENTI TRATTATI

## **CAPITOLO 1 – SISTEMI DI RIFERIMENTO**

- Equazioni della dinamica del corpo rigido
- Angoli di Eulero
- Matrici di trasformazione
- Derivate degli angoli di Eulero
- Sistema ECEF
- Sistema NED
- Wind axes
- Body axes
- Sistema ECI

## **CAPITOLO 2 – EQUAZIONI LINEARIZZATE**

- Teoria delle piccole perturbazioni
- Definizione di derivata aerodinamica
- Metodo di Bryan
- Derivate aerodinamiche piano longitudinale
- Derivate aerodinamiche piano latero-direzionale
- Trasformazione di derivate aerodinamiche tra sistemi di riferimento
- Equazioni adimensionali

## **CAPITOLO 3 – EQUILIBRIO, STABILITA' e CONTROLLO**

- Piano longitudinale
  - Equilibrio longitudinale
  - Stabilità statica longitudinale
  - Rigidezza in beccheggio e punto neutro
  - Equilibrio configurazione canard
  - Calcolo di  $C_{L0}$  e  $C_{L\alpha}$  riferiti alla direzione di portanza nulla
  - Calcolo di  $C_{m0}$  e  $C_{m\alpha}$  rispetto alla direzione di portanza nulla
  - Calcolo del margine statico
  - Rigidezza in beccheggio per la configurazione completa
  - Controllabilità longitudinale
  - Momenti di cerniera superfici mobili
  - Manovrabilità longitudinale e punto di manovra
- Piano latero-direzionale
  - Stabilità statica direzionale
  - Stabilità statica laterale
  - Controllabilità direzionale
  - Controllabilità laterale
  - Effetti accoppiati da controlli:  $\delta a$  e  $\delta r$

- Efficacia del comando di alettoni
- Effetti accoppiati da velocità angolari:  $p$  e  $r$

#### **CAPITOLO 4 – STABILITA' DINAMICA**

- Leggi di convergenza alla condizione stabile
- Stabilità dinamica longitudinale
  - Equazione caratteristica e autovalori
  - Formulazione state-space
  - Criterio di Routh
  - Modi propri longitudinali
  - Equazioni approssimate per i modi propri
  - Influenza della posizione del baricentro sui modi propri longitudinali
- Stabilità dinamica latero-direzionale
  - Equazione caratteristica e autovalori
  - Formulazione state-space
  - Criterio di Routh
  - Modi propri latero-direzionali

#### **VOLO AD ALTE INCIDENZE**

- Vortici su forebody
- Vortici su ala a delta
- Portanza vorticosa
- Isteresi
- Wing Rock
- FVC – Forebody Vortex Control

#### **CAPITOLO 5 – MODELLO MATEMATICO PER ALTE INCIDENZE**

- Non linearità
- Nuove derivate aerodinamiche: cross-coupling derivatives, ecc
- Modello di Tobak-Schiff
  - Formulazione planare lineare
  - Risposte indiciali
  - Formulazione planare non lineare
  - Risposte funzionali
  - Moto non planare

#### **VARIE**

- Vite verticale
- La certificazione aeronautica: seminario by Ing. Cifaldi, ENAC
- Rotors and Helicopters configuration: seminario by Ing. Bianco-Mengotti, AGUSTA-WESTLAND
- Possibili domande d'esame date dalla prof.
- Tema d'esame

## **ESERCITAZIONI SVOLTE**

- Esercitazione 1: Sistemi di riferimento
- Esercitazione 2: Derivate aerodinamiche
- Esercitazione 3: Equilibrio longitudinale
- Esercitazione 4: Stabilità statica longitudinale
- Esercitazione 5: Controllo longitudinale
- Esercitazione 6: Stabilità statica latero-direzionale + valutazione effetto diedro per velivolo completo
- Esercitazione 7: Controllo latero-direzionale + valutazione yaw stiffness
- Esercitazione 8: Stabilità dinamica longitudinale
- Esercitazione 9: Stabilità dinamica latero-direzionale

# MECCANICA DEL VOLO 30/09/2013

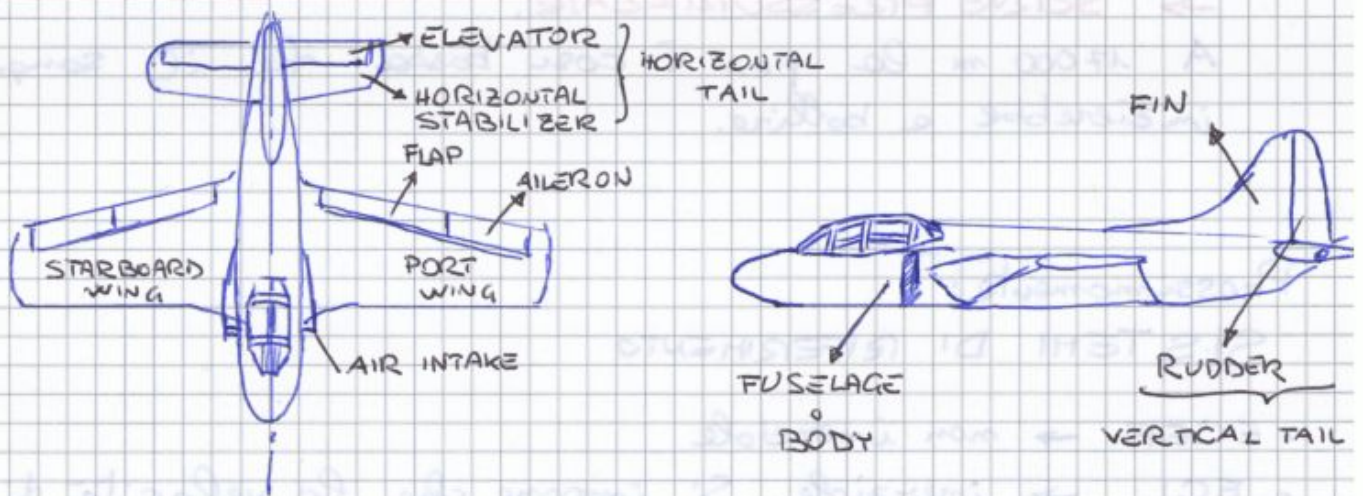
Prof. Fulvia Quagliotti

"It is easy to invent a flying machine, but more difficult to build one, to make it fly is everything"

Otto Lilienthal

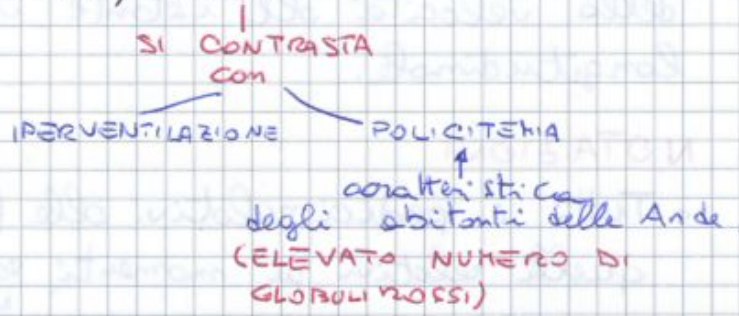
1/10/2013

## NOMENCLATURA INGLESE



Noi considereremo il volo ATMOSFERICO a velocità basse → senza effetti di COMPRESSIBILITÀ o AERODINAMICI

- Cenni di fisiologia: perché pressurizzare.
- Riscaldamento
- Descrizione dell'atmosfera...
- Respirazione IPOBARICA, IPOSSIA



▲ Definizione di 4 zone dell'atmosfera legate ai limiti fisiologici:

1) Zona indifferente: 0 - 2500 m

## CAPITOLO 1.

## SISTEMI DI RIFERIMENTO

## E EQUAZIONI DI FORZE E MOMENTI

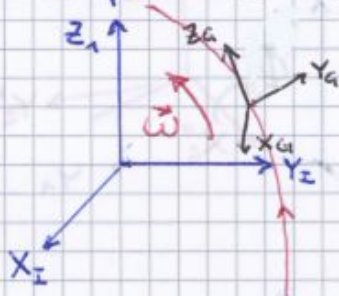
▣ DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

$$\begin{cases} \vec{F} = m \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{F_i} \\ \vec{H} = \left( \frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{F_i} \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio rispetto a un sistema inerziale.

⚠ Non hanno senso se non si indica rispetto a quale sistema sono calcolate!

Supponiamo ora di volersi riferire a un sistema **GENERICO  $F_G$  NON INERZIALE** in moto relativo rispetto a  $F_i$ .



Il generico vettore  $\vec{A}$  ha la seguente proprietà nella

**CONVERSIONE DA UNA TERNA FISSA A UNA MOBILE:**

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{F_i} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{F_G} + \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

Quindi forze e momenti rispetto a  $F_G$  si scrivono come

$$\begin{cases} \vec{F}_{F_G} = m \left[ \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{F_G} + \vec{\omega} \wedge \vec{V} \right] \\ \vec{M}_{F_G} = \left( \frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{F_G} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} \end{cases}$$

$\vec{\omega}$  = velocità angolare della terna mobile  $F_G$  rispetto a quella inerziale  $F_i$

▣ ANGOLI DI EULERO

Gli angoli di Eulero sono 3 quantità  $(\Psi, \Theta, \Phi)$  che definiscono l'orientamento relativo tra 2 sistemi di riferimento (terne cartesiane destrorse)

→ SEQUENZA DI ROTAZIONE FISSA  $(\Psi, \Theta, \Phi)$ , non è una base per uno spazio lineare.

⇒ SE NON SI RISPETTA LA SEQUENZA CAMBIA IL RISULTATO



2) Sulla riga e la colonna che si incrociano con l'elemento "1" ci saranno solo zeri.

3) Gli altri termini sono seno dell'angolo di rotazione e  $-\text{sen}(\dots)$  nella riga che segue quella con 1.

Le matrici di trasformazione sono ortogonali

$$\Rightarrow [M]^T = [M]^{-1}$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\text{sen} \Psi & 0 \\ \text{sen} \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Psi \rightarrow$  ROTAZIONE ATTORNO  
A  $Z_2$  ( $\vec{n}$ )

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \text{sen} \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix}$$

$\Theta \rightarrow$  ROTAZIONE ATTORNO  
A  $Y_2'$  ( $\vec{m}'$ )

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\text{sen} \Phi \\ 0 & \text{sen} \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

$\Phi \rightarrow$  ROTAZIONE ATTORNO  
A  $X_2'' \equiv X_1$  ( $\vec{i}$ )

Perciò:

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = [\Psi] \begin{bmatrix} e' \\ m' \\ n' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} e' \\ m' \\ n' \end{bmatrix} = [\Theta] \begin{bmatrix} e'' \\ m'' \\ n'' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} e'' \\ m'' \\ n'' \end{bmatrix} = [\Phi] \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = [\Psi][\Theta][\Phi] \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = [L_{21}] \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = [\Psi][\Theta][\Phi] \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = [L_{21}] \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

$L_{21}$ : cioè DA  $F_1$  A  $F_2$

NOTA PER COSTRUIRE  $L_{21}$  DEVO PENSARE DI RUOTARE  $F_2$  SU  $F_1$ , anche se poi in realtà ruoterò  $F_1$  su  $F_2$

$$[F_2] = [L_{21}][F_1] \quad e \quad [F_1] = [L_{21}]^{-1}[F_2]$$

$$[L_{21}]^{-1} = [L_{21}]^T$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \sin \Theta \\ \dot{\psi} \cos \Theta \sin \Phi \\ \dot{\psi} \cos \Theta \cos \Phi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \cos \Phi \\ -\dot{\Theta} \sin \Phi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

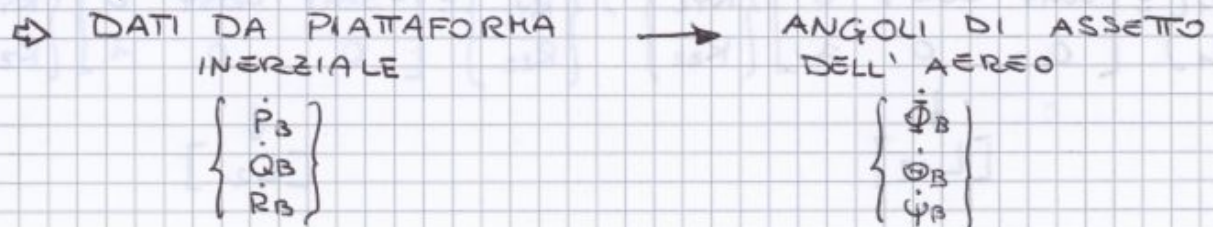
$$\rightarrow \begin{cases} \omega_{x1} = -\dot{\psi} \sin \Theta + \dot{\Phi} \\ \omega_{y1} = \dot{\psi} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Theta} \cos \Phi \\ \omega_{z1} = \dot{\psi} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Theta} \sin \Phi \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{Bmatrix} = [\bar{L}]^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{L}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}$$

Trasformazione inversa  $\Delta$   $[\bar{L}]$  non è ortogonale!

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = [\bar{L}] \begin{Bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{Bmatrix} \quad [\bar{L}] = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} & \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} \end{bmatrix}$$

Una sua applicazione sarà la trasformazione dalle componenti di velocità in assi corpo a quelle in assi NED.



$\Delta$   $[\bar{L}]$  contiene  $\cos \Theta$  e denominatore

$\rightarrow$  se  $\Theta$  (pitch  $\rightarrow$  angolo di beccheggio) va a  $90^\circ$  il modello matematico cade!

$\rightarrow$  Va bene solo per angoli di beccheggio non elevati.

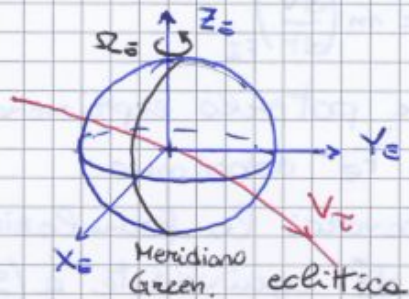
Per trattare quei casi ci sono metodi alternativi

$\rightarrow$  METODO DEI QUATERNIONI

$\rightarrow$  METODO DEI COSENI DIRETTORI

# SISTEMI DI RIFERIMENTO

## 1) ECEF - Earth Centered Earth Fixed frame



- ORIGINE: centro della terra
- $Z_E$ : da polo sud a polo nord
- $X_E$ : da 0 a intersezione tra meridiano di Greenwich e piano equatoriale
- $Y_E$ : completa la terna levogira.

**NON È UN SISTEMA INERZIALE perché:**

a) **RUOTA IN MODO SOLIDALE ALLA TERRA** attorno all'asse terrestre con  $\Omega_E = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$

b) **RIVOLUZIONE INTORNO AL SOLE**

$V_T \rightarrow$  velocità tangenziale  $\vec{V}_T = \vec{\Omega}_R \wedge \vec{R}$   
 $\Omega_R = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$

• Velocità aereo rispetto della terra

$$\vec{V}_E = \begin{Bmatrix} V_{X_E} \\ V_{Y_E} \\ V_{Z_E} \end{Bmatrix}_{FE}$$

$$\vec{\Omega}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_E \end{Bmatrix}_{FE}$$

Angoli caratteristici:

- $\lambda$  LATITUDINE: distanza angolare di un punto sulla terra misurata a partire dall'equatore lungo il merid. che lo interseca
- $\tau$  LONGITUDINE: distanza angolare misurata lungo l'equatore tra il meridiano di Greenwich e il meridiano che intercetta il punto dato

$$\rightarrow \mathbb{T} \ddot{\mathbf{r}}_E = m \left\{ \left( \frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{FE} + 2 \vec{\Omega}_E \wedge \vec{V}_E \right\}$$

↓

$$\{F_E\} = \{X\}_{FE} + m \{g\}_{FE} = \{X\}_{FE} + m [L_{EV}] \{g\}_{FV}$$

↑  
FORZE AERODINAMICHE E PROPULSIVE  
SI SEPARANO DA QUELLE GRAVITAZIONALI

$$\{g\}_{FV} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{Bmatrix}_{FV}$$

Il vettore  $\vec{g}$  è sempre orientato secondo la verticale locale, cioè la direzione per il punto dato e il centro della terra.

→  $\{g\}$  si esprime sempre in sistema NED, in quanto  $Z_v$  punta sempre il centro della terra.

$$\{X\}_{FE} = \{F_E\} - m [L_{EV}] \{g\}_{FV}$$

$$= m \left( \{\dot{V}_E\}_{FE} + 2 [\tilde{\Omega}_{\Omega E}] \cdot \{V_E\}_{FE} - [L_{EV}] \{g\}_{FV} \right)$$

$$\bar{[\Psi]} = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau & 0 \\ \sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{[\Theta]} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & 0 & -\cos \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ +\cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{bmatrix}$$

$$\cos(-90-\lambda) = -\sin \lambda, \quad \sin(-90-\lambda) = -\cos \lambda$$

$$\bar{[L_{EV}]} = \bar{[\Psi]} \bar{[\Theta]} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos \tau & -\sin \tau & -\cos \lambda \cos \tau \\ -\sin \lambda \sin \tau & \cos \tau & -\cos \lambda \sin \tau \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{bmatrix}$$

Così come  $\{\vec{g}\}$  è espresso in  $\{\vec{g}\}_{FV}$ ,  $\Omega_E$  è espresso come  $\{\Omega_E\}_{FE} \rightarrow$  ci serve  $\bar{[L_{EV}]}^{-1}$  per poterla esprimere come  $\{\vec{\Omega}_E\}_{FV}$

$$\bar{[L_{EV}]}^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos \tau & -\sin \lambda \sin \tau & \cos \lambda \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 \\ -\cos \lambda \cos \tau & -\cos \lambda \sin \tau & -\sin \lambda \end{bmatrix}$$

$$\{\vec{\Omega}_E\}_{FV} = \bar{[L_{EV}]}^{-1} \{\Omega_E\}_{FE} = \bar{[L_{EV}]}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_E \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega_E \sin \lambda \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{\omega}_v\} = \begin{Bmatrix} P_v \\ Q_v \\ R_v \end{Bmatrix} = \bar{[L_{EV}]}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\lambda} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\tau} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -\dot{\tau} \sin \lambda \end{Bmatrix}$$

MI SERVE PER AVERE LA VELOCITÀ DELL'AEREO RISPETTO ALLA VARIAZIONE DELLE COORDINATE LAT-LONG.

PERCHÉ  $\tau = 0$ ?

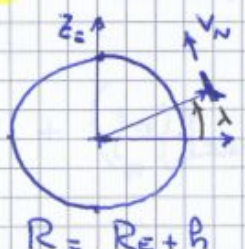
Perché portandolo da  $F_2$  per arrivare a  $F_1$  si ha

$$F_2 \xrightarrow{\Psi} F_2' \xrightarrow{\Theta} F_2'' \xrightarrow{\Phi} F_1$$

$$\vec{\omega}_v = \Psi \dot{n} + \Theta \dot{m}' + \Phi \dot{l} \quad , \text{stesso discorso di prima}$$

$$\{\vec{\omega}_v\}_{FV} = \begin{Bmatrix} \Omega_E \cos \lambda \\ 0 \\ -\Omega_E \sin \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\tau} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -\dot{\tau} \sin \lambda \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_v \\ Q_v \\ R_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\tau} \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -\dot{\tau} \sin \lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \dot{\tau} = \frac{P_v}{\cos \lambda} = \frac{V_E}{R \cos \lambda} \\ \dot{\lambda} = -Q_v = \frac{V_W}{R} \end{cases}$$



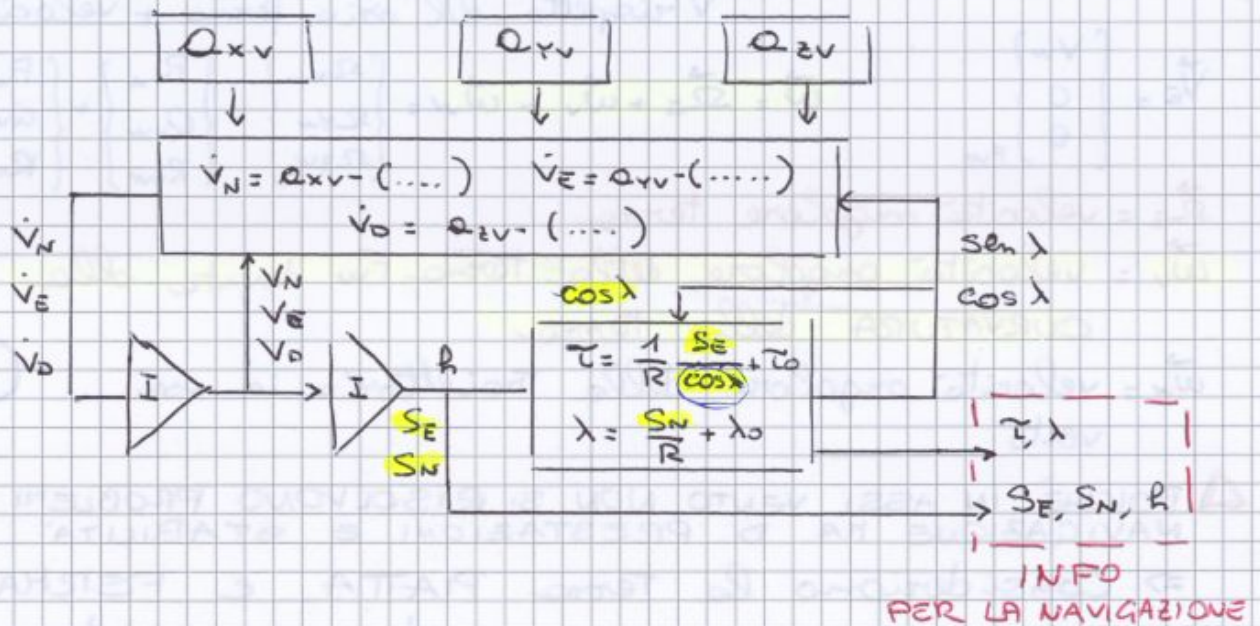
VOLANDO VERSO NORD È COME SE LA TERNA RUOTASSE (ANZI RUOTA) ATTORNO A  $Y_V$  IN VERSO-



VOLANDO VERSO EST LA TERNA NED RUOTA ATTORNO A  $X_V$

Tutto il termine lunghissimo nella parentesi { }  
 ci dà le accelerazioni  $\{a_{xv}, a_{yv}, a_{zv}\}^T$ , CHE  
 SONO MISURATE A BORDO DALLA PIATTAFORMA  
 INERZIALE.

Con un loop di calcolo si può calcolare  $V_N, V_E, V_D$   
 e quindi poi spazio percorso lungo nord, est e  
 verso l'alto e ottenere le coordinate LAT-LONG.  
 del velivolo



### SEMPLIFICAZIONE

Assumendo quota costante  $\rightarrow (V_D = 0)$  e traiettoria  
 equatoriale  $\rightarrow (V_N = 0, \lambda = 0)$

$$\begin{cases} a_{xv} = 0 \\ a_{yv} = \dot{V}_E \\ a_{zv} = 2R\dot{\omega}_E + R\dot{\omega}_E^2 + \frac{V_E^2}{R} - g = a_{zv} - g \end{cases}$$

CORIOLIS      TRASPORTO      CENTRIFUGA

Coriolis si trascura, così come gli effetti di  
 trasporto: la loro entità è  $\sim 2\% g$  per

$$V_E = \frac{1}{10} V_D = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{gR} \approx \frac{1}{10} \cdot 7800 \text{ m/s} \approx 780 \text{ m/s}$$

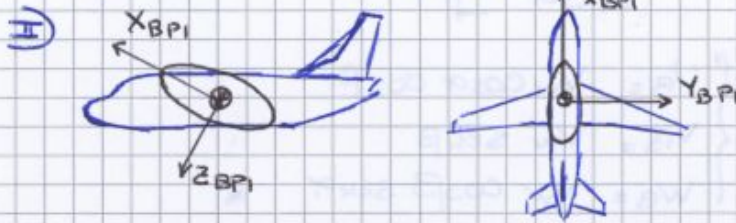
- $\rightarrow$  1) LA TERRA SI PUÒ ASSUMERE PIATTA ( $R_E \rightarrow \infty$ )
  - 2) " " " " " FERMA NELLO SPAZIO ( $R_E \rightarrow 0$ )
- per quanto riguarda il calcolo delle prestazioni e  
 le analisi di stabilità.

**⚠ ASSUNZIONE NON VALIDA X NAVIGAZIONE A LUNGO RAGGIO!**

# 4) BODY AXES

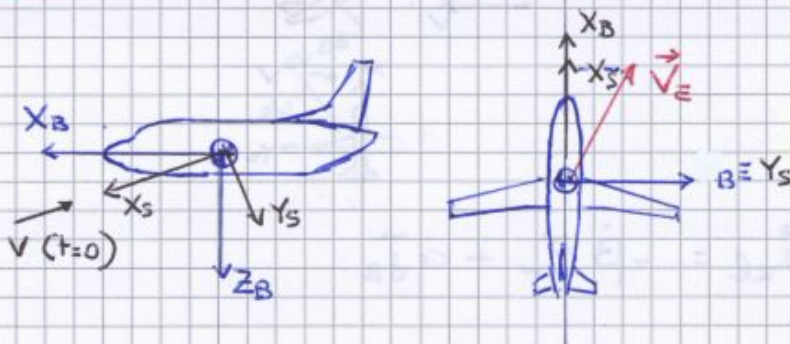
Ci sono 3 tipi di assi corpo, tutti SOLIDALI ALL'AEREO

- I) GENERICI
- II) ASSI PRINCIPALI D'INERZIA
- III) ASSI DI STABILITÀ



- ORIGINE: BARICENTRO
- $X_{BP1}$ : ASSE maggiore ELLISSOIDE INERZIA
- $Z_{BP1}$ : ASSE minore ELLISSOIDE INERZIA
- $Y_{BP1}$ : rende terra levogira

## III) ASSI DI STABILITÀ



- ORIGINE: BARICENTRO
- $X_s$ : direzione data da PROIEZIONE SUL PIANO LONGITUDINALE DELLA VELOCITÀ  $V_E$  ALL'ISTANTE INIZIALE
- $Y_s \equiv Y_B$
- $Z_s$ : ortogonale a  $X_s$  dal dorso al ventre

II) ASSI CORPO GENERICI  $\rightarrow$  dati da CONFIGURAZIONE DELL'AEREO

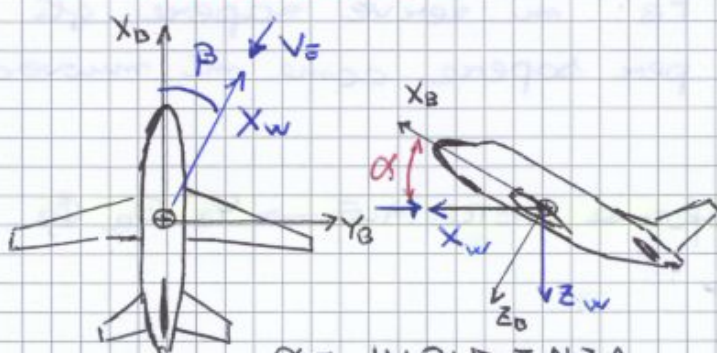
- $X_B$ : nel piano di simmetria, da prua a poppa lungo ASSE FUSOLIERA
- $Y_B$ : da dx a dx lungo apertura alare
- $Z_B$ : ortogonale a  $X_B$  nel piano di simmetria

$$\vec{V}_E = \begin{Bmatrix} U_B \\ V_B \\ W_B \end{Bmatrix}_{FB}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_E + \vec{\omega}_v + \vec{\omega}_B = \begin{Bmatrix} \Omega_{XB} \\ \Omega_{YB} \\ \Omega_{ZB} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_{vB} \\ Q_{vB} \\ R_{vB} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_B \\ Q_B \\ R_B \end{Bmatrix}$$

## ● TRASFORMAZIONI BODY AXES - WIND AXES

■ **IMPORTANTE!** ■



VOGLIO RUOTARE  $F_w$  SU  $F_B$  PER AVERE  $[L_{WB}]$

$$\begin{cases} \Psi = -\beta \\ \Theta = \alpha \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

$\alpha$  = INCIDENZA (angle of attack)

$\beta$  = SIDESLIP

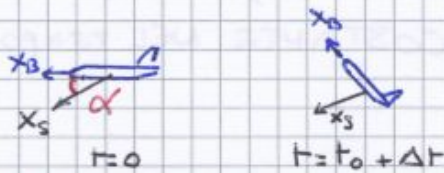
### • Trasformazione BODY - STABILITY

$$\vec{V}_E = \begin{Bmatrix} U_S \\ V_S \\ W_S \end{Bmatrix}_{F_S}$$

$$\vec{V}_E(t=0) = \begin{Bmatrix} U_{S0} \\ V_{S0} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{S0} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

↑  
VOLO  
SIMMETRICO

Per def. l'asse  $X_S$  è diretto come la proiezione di  $\vec{V}_E(t=0)$



$$[L_{SB}] = [C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$X_S$  È FISSO UNA VOLTA DEFINITO

### ■ EQUAZIONI FORZE IN BODY AXES

IMPORTANTE

$$\vec{F} = m \left[ \left( \frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{F_B} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_E \right]$$

$$\vec{\omega} = \cancel{\vec{\omega}_E} + \cancel{\vec{\omega}_V} + \vec{\omega}_B$$

SE TERRA FERMA  
E PIATTA

$$\vec{F} = m \left[ \left( \frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{F_B} + \vec{\omega}_B \wedge \vec{V}_E \right] = \{X\}_{F_B} + m [L_{VB}]^{-1} \{g\}_{F_V}$$

$$\{X\}_{F_B} = m \left[ \{V_E\}_{F_B} + [\tilde{\Sigma}_{\omega_B}]_{F_B} \cdot \{V_E\}_{F_B} - [L_{VB}]^{-1} \{g\}_{F_V} \right]$$

$$[L_{VB}]^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & -\sin \Theta_B \\ \dots & \dots & \sin \Phi_B \cos \Theta_B \\ \dots & \dots & \cos \Phi_B \cos \Theta_B \end{bmatrix}$$

basta avere l'ultima colonna perché  $\{g\}_{F_V}$  ha solo l'ultima componente

$$\begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{Bmatrix} = m \left[ \begin{Bmatrix} \dot{U}_B \\ \dot{V}_B \\ \dot{W}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -R_B & Q_B \\ R_B & 0 & -P_B \\ -Q_B & P_B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_B \\ V_B \\ W_B \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \dots & \dots & -\sin \Theta_B \\ \dots & \dots & \sin \Phi_B \cos \Theta_B \\ \dots & \dots & \cos \Phi_B \cos \Theta_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{Bmatrix} \right]$$

$$\begin{cases} X_B = m \left[ \dot{U}_B - R_B V_B + Q_B W_B + g \sin \Theta_B \right] \\ Y_B = m \left[ \dot{V}_B + R_B U_B - P_B W_B - g \sin \Phi_B \cos \Theta_B \right] \\ W_B = m \left[ \dot{W}_B - Q_B U_B + P_B V_B - g \cos \Phi_B \cos \Theta_B \right] \end{cases}$$

### ■ EQUAZIONI MOMENTI in BODY AXES

$$\vec{M} = \left( \frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{F_I} = \left( \frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{F_G} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}$$

$$\{H\}_{F_G} = [I]_{F_G} \{\vec{\omega}\} \quad \text{assumendo } \vec{\omega} = -\vec{\omega}_{F_G}$$



## COPPIA GIROSCOPICA BECCHEGGIO

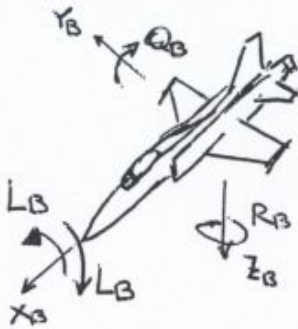
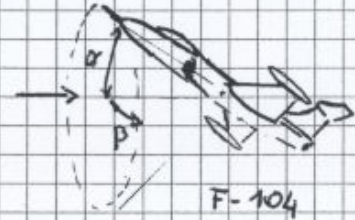
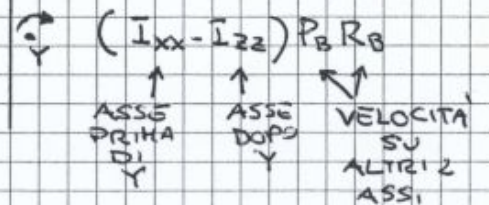
$$(I_{xx} - I_{zz}) P_B R_B$$

Se ho un corpo inerzialmente  
SLENDER ( $\rightarrow$  molto lungo e  
con una bassa apertura alare)

si ha  $I_{zz} \uparrow$  e  $I_{xx} \downarrow$  e in presenza di certi valori  
di  $P_B$  e  $R_B$  possono verificarsi elevate coppie di  
beccheggio e di imbardata che portano a una  
divergenza in  $\alpha$  e  $\beta$

$\rightarrow$  CONING MOTION, rollio attorno  
al vettore velocità

Come riconoscerlo:



## COPPIA GIROSCOPICA ROLLIO

- Velocità  $Q_B \rightarrow$  sistema con  $H = I_{yy} Q_B$   
se inizia una  $R_B$

$$\rightarrow L_B = I_{yy} Q_B R_B$$

[ QUELLO DELLA ROTAZIONE  
INIZIALE "CHIUDE"  
SULL'ALTRO ]

oppure

- Velocità  $R_B \rightarrow H = I_{zz} R_B$

se inizia una  $Q_B$

$$\rightarrow L_B = -I_{zz} R_B Q_B$$

$$\Rightarrow (I_{zz} - I_{yy}) Q_B R_B \quad \dots \text{ il segno non quadra ma va bene uguale ...}$$

$$\rightarrow \vec{F} = m \left\{ \left( \frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{FE} + 2\vec{\Omega}_E \wedge \vec{V}_E + \vec{\Omega}_E \wedge (\vec{\Omega}_E \wedge \vec{r}) \right\}$$

In forma compatta

$$\{F\} = \{X\}_{FE} + m\{g\}_{FE} \Rightarrow \{X\}_{FE} = \{F\} - m \cdot [L_{EV}] \{g\}_{FV}$$

$$\begin{Bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} \dot{V}_{XE} \\ \dot{V}_{YE} \\ \dot{V}_{ZE} \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_E & 0 \\ \Omega_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{XE} \\ V_{YE} \\ V_{ZE} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_E & 0 \\ -\Omega_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_E & 0 \\ \Omega_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[ [L_{EV}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{Bmatrix} - [L_{EV}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{Bmatrix} \right]$$



$\vec{R}$  diretto su direzione centro della terra ma verso opposto  $\rightarrow \{R\}_{FV}$  è + comodo, è come  $\{g\}_{FV}$

$$\rightarrow \{X\}_{FE} = m \left[ \{ \dot{V}_E \}_{FE} + 2 [\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{FE} \cdot \{V_E\}_{FE} + \underbrace{[\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{FE} \cdot [\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{FE}}_{\text{centrifughe}} \cdot [L_{EV}] \{R\}_{FV} - [L_{EV}] \{g\}_{FV} \right]$$

Solitamente si trascura l'accelerazione centripeta della terra

I prodotti di sole grandezze steady se ne vanno.

$$\rightarrow \Delta X_B = m \left[ u_B - R_{B0} v_B - V_{B0} r_B + Q_{B0} w_B + W_{B0} q_B + \Theta_B g \cos(\Theta_{B0}) \right]$$

Analogamente per i momenti (es. M)

• Quadrati delle grandezze:

$$M_B = I_{yy} q_B + (I_{xx} - I_{zz}) P_B R_B + I_{xz} (P_B^2 - R_B^2)$$

$$P_B^2 = (P_{B0} + p_B)^2 = \cancel{P_{B0}^2} + 2p_B P_{B0} + \cancel{p_B^2}$$

STEADY

QUADRATO DI PICCOLA PERT.  
→ TRASCURABILE

$$\rightarrow \Delta M_B = I_{yy} q_B + (I_{xx} - I_{zz})(P_{B0} r_B + R_{B0} p_B) - 2I_{xz}(P_{B0} p_B - R_{B0} r_B)$$

### ▶ IPTESI DI VOLO SIMMETRICO

=  
DISACCOPPIAMENTO DI LONG e LAT.-DIR

$$V_{B0} = 0 \quad \Phi_{B0} = 0 \quad \Psi_{B0} = 0 \quad P_{B0} = 0 \quad Q_{B0} = 0 \quad R_{B0} = 0$$

→ Lungo x, z (LONG) non ci sono + grandezze relative al piano latero-direzionale

→ Lungo y non ci sono grandezze relative al piano longitudinale

⇒ POSSIAMO CONSIDERARE INDIPENDENTI I MOTI SU LONG. e LAT.-DIR.

⚠ NON SI POSSONO DISACCOPPIARE PIANO LATERALE e DIREZIONALE: il rollio causa anche un'imbardata! [vedi capitolo 3]

Si ha perciò:

$$\Delta X_B = m (u_B + W_{B0} q_B + g \Theta_B \cos(\Theta_{B0}))$$

$$\Delta M_B = I_{yy} q_B$$

Ci si potrà poi SEMPRE IN ASSI DI STABILITÀ

$$\rightarrow W_{B0} = 0$$

## Ipotesi 1: DIPENDENZA LINEARE

Una generica azione  $F$  all'istante  $t$  sarà:

$$F(t) = F(0) + \int_0^t w(t-\tau) \frac{dp}{d\tau} d\tau$$

$w$  = funzione che dà il PESO della variazione del parametro  $p$

$\frac{dp}{d\tau}$  = VARIAZIONE DEL PARAMETRO

$$\Delta F(t) = F(t) - F(0) = \int_0^t w(t-\tau) \frac{dp}{d\tau} d\tau \quad \text{PERTURBAZ.}$$

## Ipotesi 2: PICCOLE PERTURBAZIONI

La perturbazione  $\Delta F(t)$  è funzione del valore del parametro a quell'istante e la sua time history si limita a  $\Delta t = t - \tau$

$$F(t) = f[p(t-\tau)]$$

esprimendo la variazione dell'azione in serie di Taylor overestata al 1° ordine

$$\Delta F(t) = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \Delta p + \frac{\partial F}{\partial \dot{p}} \cdot \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{p}} \cdot \ddot{p} + \dots = F_p \cdot p + F_{\dot{p}} \cdot \dot{p} + F_{\ddot{p}} \cdot \ddot{p}$$

$F_p, F_{\dot{p}}, F_{\ddot{p}} \rightarrow$  DERIVATE AERODINAMICHE DI STABILITÀ  $\rightarrow$  PEDICE: es.  $C_{L\alpha} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$

## DERIVATE in assi di STABILITÀ

Forze e momenti sono funzioni delle variabili di stato e delle loro variazioni

	LONG	LAT-DIR.
STATO	$u, w, \theta, q$	$v, p, r$
CONTROLLO	$\delta_e, \Delta T$	$\delta_r, \delta_a$

$$\rightarrow \left. \begin{matrix} \Delta X_s \\ \Delta Z_s \\ \Delta M_s \end{matrix} \right\} = f(u_s(t), w_s(t), \theta_s(t), q_s(t), \delta_e(t), \Delta T) \quad \text{LONG}$$

$$\left. \begin{matrix} \Delta Y_s \\ \Delta L_s \\ \Delta N_s \end{matrix} \right\} = f(v_s(t), p_s(t), r_s(t), \delta_r(t), \delta_a(t))$$

## Derivate aerodinamiche PIANO LONG

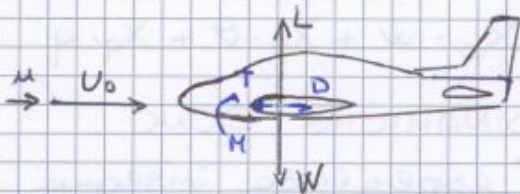
VARIABILI DI STATO/ CONTROLLO	$u$	$w$	$\dot{w}$	$q$	$\delta_e$
	$X_u$	$X_w$	/	/	/
DERIVATE	$Z_u$	$Z_w$	$Z_{\dot{w}}$	$Z_q$	$Z_{\delta_e}$
	$M_u$	$M_w$	$M_{\dot{w}}$	$M_q$	$M_{\delta_e}$

$$\vec{J} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} U_0 + u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Il calcolo delle derivate aerodinamiche è trattato numericamente in ESERCITAZIONE 2.

### DERIVATE IN $u$



$$V = \sqrt{U_0^2 + u^2} \approx U_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2u}{U_0}}$$

Risultante forze aerodinamiche

$$\begin{cases} X = T_e + \Delta T - (D_e - \Delta D) \\ Z = -(L_e + \Delta L) \end{cases}$$

pedice "e" → equilibrio

$$X = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_T - \frac{1}{2} \rho U^2 S C_D$$

$$X_u = \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)_{u=U_0} = \rho S U_0 C_{T_e} + \frac{1}{2} \rho S U_0^2 \left( \frac{\partial C_T}{\partial u} \right)_{u=U_0} - \rho S U_0 C_{D_e} - \frac{1}{2} \rho S U_0^2 \left( \frac{\partial C_D}{\partial u} \right)_{u=U_0}$$

È la derivata di un prodotto: si deriva  $U^2$  ma anche  $C_T$  o  $C_D$ .

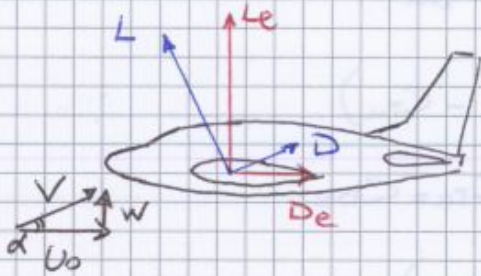
$\left( \frac{\partial C_T}{\partial u} \right)$  e  $\left( \frac{\partial C_D}{\partial u} \right)$  così espressi sono DIMENSIONALI, ma

per definizione una derivata deve essere ADIMENSIONALE!

$\left[ \frac{\Delta}{m} \right] \Rightarrow$  Deriviamo rispetto alla velocità

adimensionalizzata  $\frac{u}{U_0}$ .

## DERIVATE in $w$



Essendo in campo di validità delle piccole perturbazioni

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{w}{U_0} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{w}{U_0}}$$

$$V = \sqrt{U_0^2 + w^2} \approx U_0$$

Perturbazione  $w$  influisce poco su modulo velocità ma ne CAMBIA LA DIREZIONE

$$\begin{cases} X = \Delta T + T_e - (D_e + \Delta D) \cos \alpha + (L_e + \Delta L) \sin \alpha \\ \approx \cancel{T_e} + \Delta T - (\cancel{D_e} + \Delta D) + (L_e + \Delta L) \cdot \alpha \\ = \Delta T - \Delta D + L_e \cdot \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = -(L_e + \Delta L) \cos \alpha - (D_e + \Delta D) \sin \alpha \\ \approx -(L_e + \Delta L) - (D_e + \Delta D) \alpha \\ = -\Delta L - D_e \cdot \alpha \end{cases}$$

Trascuriamo i contributi non lineari  
 $\Delta L \cdot \alpha, \Delta D \cdot \alpha$

$$\begin{cases} X = \Delta T + L_e \alpha - \Delta D = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S (C_T + C_{L_e} \alpha - C_D) \\ Z = -\Delta L - D_e \cdot \alpha = -\frac{1}{2} \rho U_0^2 S (C_L + C_D \alpha) \end{cases}$$

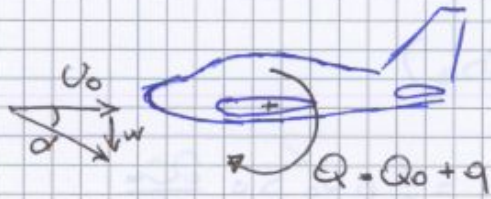
► SCRIVIAMO  $\alpha = \frac{w}{U_0} \rightarrow w = \alpha \cdot U_0$

$$\begin{aligned} X_w &= \left( \frac{\partial X}{\partial w} \right)_{U=U_0} = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S \left[ \frac{\partial (C_T + C_{L_e} \alpha - C_D)}{\partial w} \right]_{U=U_0} \\ &= \frac{1}{2} \rho U_0^2 S \left[ \frac{\partial (C_T + C_{L_e} \alpha - C_D)}{U_0 \cdot \partial \alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0} \quad \parallel \partial w = \partial \alpha \cdot U_0 \end{aligned}$$

LA DERIVATA RISPETTO A  $w$  È DIVENTATA DERIVATA RISPETTO AD  $\alpha$

$$\frac{\partial C_T}{\partial \alpha} = 0 \quad C_D = C_{D_0} + K C_L^2 \rightarrow C_{D\alpha} = 2K C_{L_e} \cdot C_{L\alpha}$$

$$\Rightarrow X_w = \frac{1}{2} \rho U_0 S (C_{L_e} - C_{D\alpha})$$

DERIVATE in  $q$ 

A causa della rotazione l'ala vede il flusso a una incidenza minore (e la coda ad un'incidenza maggiore, vedi capitolo 3)

$$Z_q = \left( \frac{\partial Z}{\partial q} \right)_{q=q_0} = -\frac{1}{2} \rho S U_0^2 \left[ \frac{\partial (C_L + C_D \cdot \alpha)}{\partial q} \right]_{q=q_0}$$

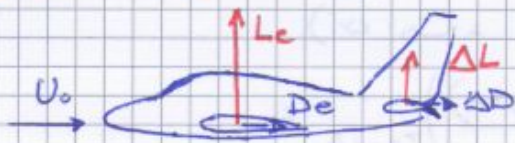
$$\hat{q} = q \cdot \frac{c}{2U_0} \rightarrow q = \hat{q} \cdot \frac{2U_0}{c}$$

$$Z_q = -\frac{1}{2} \rho S U_0^2 \frac{\partial (C_L + C_D \cdot \alpha)}{\partial \hat{q}} \cdot \frac{c}{2U_0}$$

$$\Rightarrow Z_q = -\frac{1}{4} \rho U_0 S c C_{Lq}$$

$$\Rightarrow M_q = \frac{1}{4} \rho U_0 S c^2 C_{mq}$$

TRASCURIAMO  
SEMPRE  
 $C_D \cdot \alpha$

DERIVATE in  $\delta_e$ 

$\delta_e \rightarrow$  variazione di portanza  $L$  sui piani di coda

$$Z_{\delta_e} = \left( \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \right)_{\delta_e = \delta_{e_{trim}}} = -\frac{1}{2} \rho U_0^2 S \left[ \frac{\partial (C_L + C_D \cdot \alpha)}{\partial \delta_e} \right]_{\delta_e = \delta_{e_{trim}}}$$

$$\Rightarrow Z_{\delta_e} = -\frac{1}{2} \rho U_0^2 S C_{L\delta_e}$$

$$\Rightarrow M_{\delta_e} = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S c C_{m\delta_e}$$

Tutte le derivate saranno spiegate nel dettaglio nel CAPITOLO 3.

•  $L = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S b C_e$        $L_v = \frac{1}{2} \rho U_0 S b C_{Lp}$

$C_{Lp}$ : EFFETTO DIEDRO, indice della stabilità laterale dell'aereo (CAPITOLO 3)

•  $N = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S b C_e$        $N_v = \frac{1}{2} \rho U_0 S b C_{Np}$

$C_{Np}$ : YAW STIFFNESS, indice della stabilità direzionale

DERIVATE in p

p è una velocità angolare → DIMENSIONALE, dobbiamo adimensionalizzarlo.

$\hat{p} = p \cdot \frac{b}{2U_0} \rightarrow \partial p = \partial \hat{p} \cdot \frac{2U_0}{b}$

Il parametro per adimens. nel LAT-DIR è  $\frac{b}{2}$ , semi-apertura alare

•  $Y_p = \left( \frac{\partial Y}{\partial p} \right)_{p=p_0} = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S \left( \frac{\partial C_Y}{\partial p} \right)_{p=p_0}$   
 $= \frac{1}{2} \rho U_0^2 S \frac{\partial C_Y}{\partial \hat{p}} \cdot \frac{b}{2U_0}$

⇒  $Y_p = \frac{1}{4} \rho U_0 S b C_{Yp}$

⇒  $L_p = \frac{1}{4} \rho U_0 S b^2 C_{Lp}$

⇒  $N_p = \frac{1}{4} \rho S U_0 b^2 C_{Np}$

MEMO: NOTAZIONE COEFFICIENTI

• PEDICE minuscolo → MOMENTO

• PEDICE MAIUSCOLO → FORZA

DERIVATE in r

Discorso analogo

$\hat{r} = r \cdot \frac{b}{2U_0} \rightarrow r = \hat{r} \cdot \frac{2U_0}{b} \rightarrow \partial r = \partial \hat{r} \cdot \frac{2U_0}{b}$

⇒  $Y_r = \frac{1}{4} \rho S U_0 b C_{Yr}$

⇒  $L_r = \frac{1}{4} \rho S U_0 b^2 C_{Lr}$

⇒  $N_r = \frac{1}{4} \rho S U_0 b^2 C_{Nr}$

$C_{Np}, C_{Lr}$ : CROSS-DERIVATIVES effetto incrociato tra laterale e direzionale



# TRASFORMAZIONE DI DERIVATE AERODIN.

tra due sistemi di riferimento

Molto spesso le derivate aerodinamiche sono volute in assi corpo (→ prove sperimentali in gallerie del vento, prove di volo) ma le derivate solitamente si esprimono in assi di stabilità.  
→ COME TRASFORMARLE?

• La variazione di Forze e Momenti si esprime come:

$$[\Delta F]_{F_1} = [A_1]_{F_1} [\Delta V]_{F_1} + [A_2]_{F_1} [\Delta \dot{V}]_{F_1} + [A_3]_{F_1} [\Delta \omega]_{F_1}$$

$[A_1]$ : MATRICE DERIVATE RISPETTO ALLA VELOCITA'

$[A_2]$ : MATRICE DERIVATE RISPETTO ALL'ACCELERAZIONE

$[A_3]$ : MATRICE DERIVATE RISP. ALLA VELOCITA' ANGOLARE

$$[\Delta M]_{F_1} = [B_1]_{F_1} [\Delta V]_{F_1} + [B_2]_{F_1} [\Delta \dot{V}]_{F_1} + [B_3]_{F_1} [\Delta \omega]_{F_1}$$

$F_1 \rightarrow$  BODY       $F_2 \rightarrow$  STABILITY

$$[\Delta F]_{F_2} = [L_{21}] [\Delta F]_{F_1}$$

$$[\Delta V]_{F_1} = [L_{21}]^{-1} [\Delta V]_{F_2}$$

$$[A_1]_{F_2} = [L_{21}] [A_1]_{F_1}$$

$$\rightarrow [\Delta F]_{F_2} = [L_{21}] [A_1]_{F_1} [L_{21}]^{-1} [\Delta V]_{F_2} + \dots +$$

Il concetto è: andiamo da sx a dx con le matrici!

$$[L_{21}]^{-1} [\Delta V]_{F_2} \rightarrow [\Delta V]_{F_1}$$

$$[A_1] [\Delta V]_{F_1} = [\Delta F]_{F_1}$$

$$[L_{21}] [\Delta F]_{F_1} = [\Delta F]_{F_2}$$

$$\rightarrow [L_{21}] [A_1]_{F_1} [L_{21}]^{-1} \rightsquigarrow [A_1]_{F_2}$$

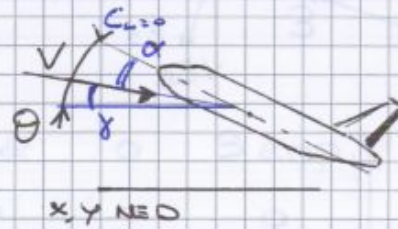
$$[A_i]_{F_2} = [L_{21}] [A_i]_{F_1} [L_{21}]^{-1} \quad 1 \leq i \leq 3$$

Le tabelle con i parametri e le equazioni adimensionalizzate sono sulle dispense della prof.

Cose utili

•  $D\theta = \hat{q}$

$\theta = \alpha + \gamma$



$\theta$  = angolo di assetto

$\alpha$  = incidenza

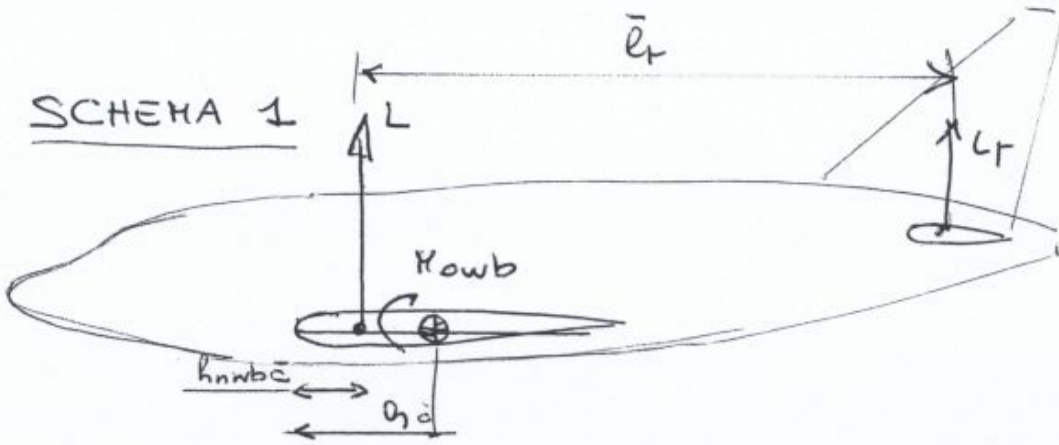
$\gamma$  = angolo di rampa

•  ~~$D\phi = \hat{p}$~~  no!  $D\phi = \frac{1}{A} (\hat{p} + \hat{r} \tan \theta_0)$

$\hat{p}$  = derivata dimensionale

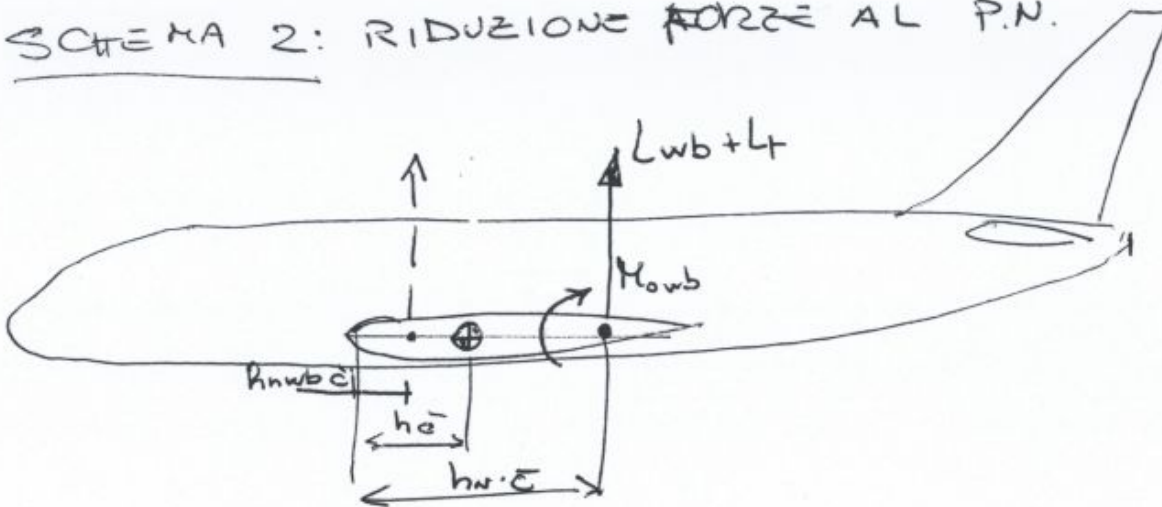
$D\hat{p}$  = derivata ADIMENSIONALE, non  ~~$\hat{p}$~~  !

SCHEMA 1



$$M = M_{owb} + (L_{wb} + L_t)(h - h_{nwbc})\bar{c} - L_t \bar{e}_t$$

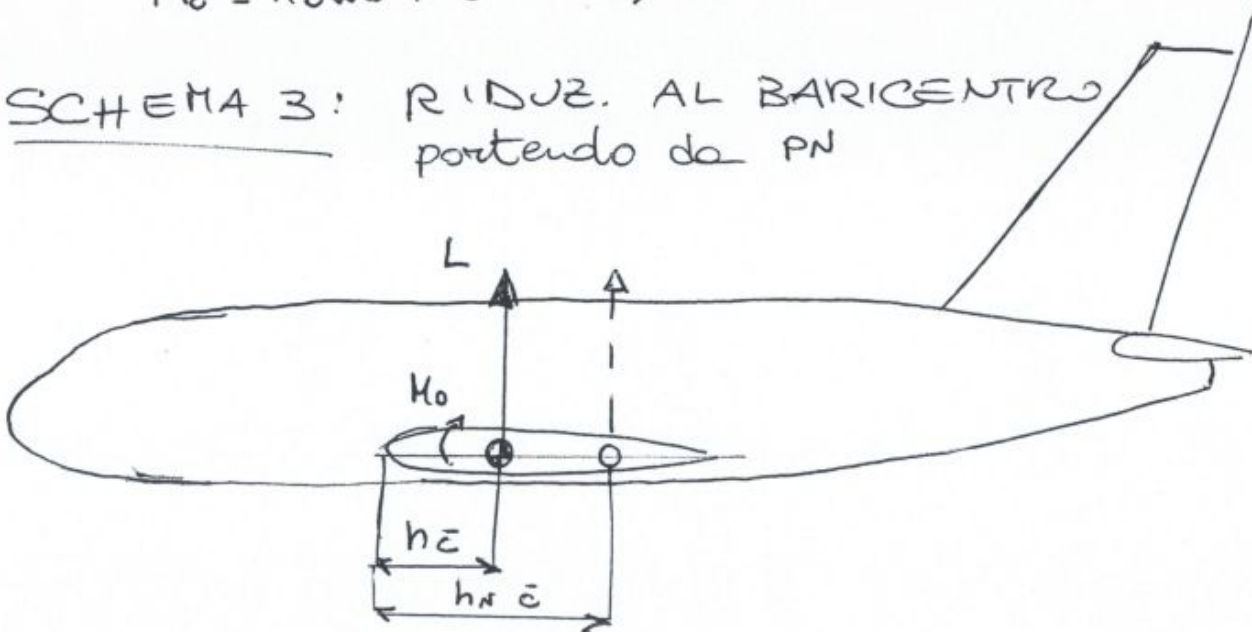
SCHEMA 2: RIDUZIONE FORZE AL P.N.



Se  $h = h_N \rightarrow M = M_0$

$$M_0 = M_{owb} + (L_{wb} + L_t)(h_N - h_{nwbc}) - L_t \bar{e}_t$$

SCHEMA 3: RIDUZ. AL BARICENTRO portendo da PN



$$M = M_0 + L(h - h_N)\bar{c}$$

- Ipotesi delle piccole perturbazioni:  $\alpha \approx \sin \alpha$
- $D_{wb} \ll L_{wb}$   $\cos \alpha \approx 1$
- $D_t \ll L_t$
- $Z_{CG1} = Z_{CG2} = 0$
- $M_{ot} \ll M_{owb}$

→ Se ho termini del tipo  $D_{wb} \cdot \sin \alpha$  li trascuro...  
 ⚠ ...ma NON PERCHÈ  $D_{wb}$  SIA TRASCURABILE!  
 Perché è moltiplicato per  $\sin \alpha$ !!!

$$\bar{F}_z = L_{wb} + L_t = L$$

$$M = M_{owb} + L_{wb}(h - h_{nwb})\bar{c} - L_t \cdot \bar{e}_t$$

Considerando che  $\bar{e}_t = \bar{e}_t - (h - h_{nwb})\bar{c}$

$$\rightarrow M = M_{owb} + L_{wb}(h - h_{nwb})\bar{c} - L_t \cdot [\bar{e}_t - (h - h_{nwb})\bar{c}]$$

$$\Rightarrow M = M_{owb} + (L_{wb} + L_t)(h - h_{nwb})\bar{c} - L_t \cdot \bar{e}_t$$

Equilibrio statico  $\begin{cases} \Sigma F = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} m_z \cdot W = L_{wb} + L_t \\ M_{owb} + (L_{wb} + L_t)(h - h_{nwb})\bar{c} = L_t \cdot \bar{e}_t \end{cases}$$

Quale portanza sui pioni di coda mi tiene il velivolo equilibrato?

$$L_{wb} = m_z W - L_t$$

$$M_{owb} + (m_z W - L_t + L_t)(h - h_{nwb})\bar{c} = L_t \cdot \bar{e}_t$$

$$\rightarrow L_t = \frac{M_{owb} + m_z W (h - h_{nwb})\bar{c}}{\bar{e}_t}$$

Condizio di equilibrio = posizione che deve assumere l'equilibratore per dare il  $L_t$  necessario a equilibrare l'aereo →  $f(m_z, W, (h - h_{nwb})\bar{c})$

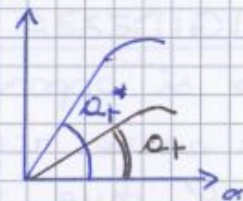
$$h = h_{nwb} + \frac{\Delta C_{L_T}}{\Delta C_L} \frac{S_T}{S} \frac{\bar{e}_T}{\bar{e}} \frac{V_T^2}{V^2}$$

$$\frac{S_T}{S} \frac{\bar{e}_T}{\bar{e}} = \bar{V}_H \rightarrow \text{volume di coda}$$

$$\frac{V_T^2}{V^2} = \eta_T \rightarrow \text{efficienza di coda}$$

$C_{L_T} = \alpha_T^* \cdot \alpha_T$  : SI SCRIVE  $C_{L_T}$  QUANDO SI INTENDONO I PIANI DI CODA LIBERI, cioè che vedono un flusso non disturbato dall'ala (cioè dal downwash)

$\alpha_T = \alpha_T^* \cdot \eta_T$  : IMPENNAGGIO ORIZZ. DISTURBATO DAL DOWNWASH



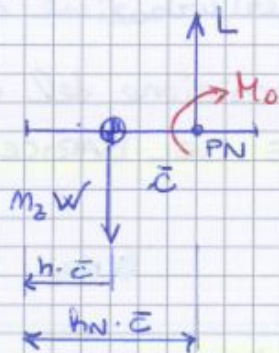
$$h_n = h_{nwb} + \frac{\alpha_T^* \cdot \Delta \alpha_T}{C_{L\alpha} \cdot \Delta \alpha} \cdot \bar{V}_H \cdot \eta_T$$

$$h_n = h_{nwb} + \frac{\alpha_T \Delta \alpha_T}{C_{L\alpha} \Delta \alpha} \bar{V}_H$$

PUNTO NEUTRO: posizione del baricentro per cui la RISULTANTE DI MOMENTO DI BECCHECCIO È INVARIANTE CON L'INCIDENZA

Assumiamo P.N. come polo di riduzione delle forze

SCHEMA 3



$$\begin{cases} L = m_2 W \\ H = M_o + L(h - h_n) \cdot \bar{e} \end{cases} \begin{cases} C_L = m_2 C_w \\ C_m = C_{m_o} + C_{L\alpha} (h - h_n) \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = C_{m\alpha} = C_{L\alpha} (h - h_n)$$

REQUISITO PER RIGIDEZZA POSITIVA:  $C_{m\alpha} < 0$

SODDISFARE REQUISITO:  $h - h_n < 0$

$$h < h_n$$

$|h - h_n| \rightarrow$  MARGINE DI STABILITÀ STATICA

Quando CG è davanti a PN il MARGINE STATICO È POSITIVO

$$C_m = C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m_o}$$

Si gioca tutto su  $\bar{V}_h$

•  $\bar{V}_h \uparrow$  con  $S_T \uparrow$  e  $\bar{e}_T \uparrow \Rightarrow$

• **Canard**

P.N. AVANZA



$h - h_N \downarrow \rightarrow$  MENO STABILE!

• **Tradizionale**

$\bar{V}_h \uparrow \Rightarrow$  PN ARRETRA

$h - h_N \uparrow \Rightarrow +$  STABILE

## CALCOLO DEI COEFF. DI PORTANZA riferiti alla direzione di portanza nulla

$$L = L_{wb} + L_T$$

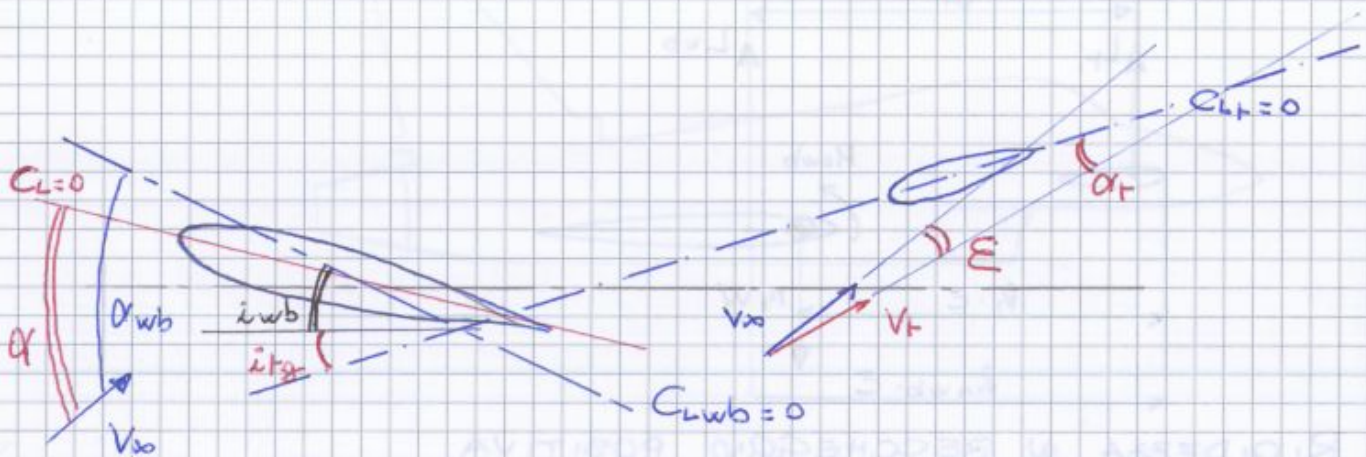
Adimensionalizzando

$$\frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S C_{Lwb}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} + \frac{\frac{1}{2} \rho V_T^2 S_T C_{L_T}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

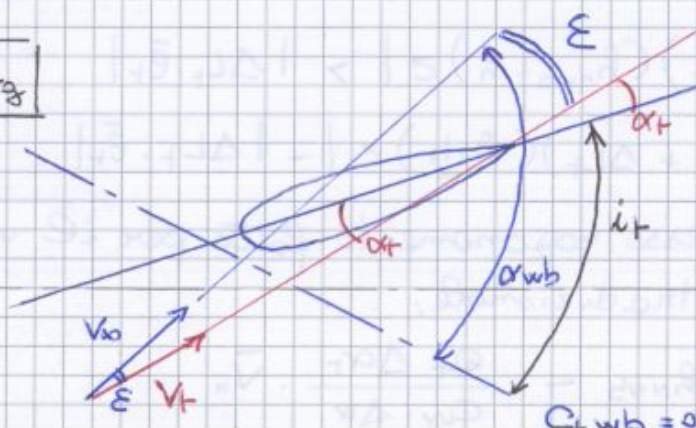
$$C_L = C_{Lwb} + C_{L_T} \frac{S_T V_T^2}{S V^2} = a_{wb} \cdot \alpha_{wb} + a_T^* \cdot \alpha_T \cdot \frac{S_T}{S} \cdot \frac{V_T^2}{V^2}$$

$$\rightarrow C_L = a_{wb} \cdot \alpha_{wb} + a_T \frac{S_T}{S} \alpha_T$$

Qual è la relazione tra  $\alpha_{wb}$  e  $\alpha_T$ ?



$$i_T = i_{wb} - i_{Tg}$$



$i_T$  come in figura è considerato NEGATIVO

$$\alpha_T = \alpha_{wb} + i_T - \epsilon$$

## ■ CALCOLO DEI COEFF. DI MOMENTO riferiti alla direzione di portanza nulla

Ora che abbiamo le espressioni di  $\alpha_t$  e  $\alpha$  in  $f(\alpha_{wb})$  possiamo meglio definire il punto neutro (che ci servirà!)

$$\begin{cases} h_N = h_{Nwb} + \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \frac{\Delta\alpha_t}{\Delta\alpha} \bar{V}_H \\ \alpha_t = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\right) + \underbrace{i_t - \varepsilon_0}_{\text{TERMINI FISSI AL VARIARE DI } \alpha} \rightarrow \Delta\alpha_t = \Delta\alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\right) \\ \alpha = \alpha_{wb} + \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \varepsilon_0) \frac{S_T}{S} \rightarrow \Delta\alpha = \Delta\alpha_{wb} \end{cases}$$

TERMINI FISSI AL VARIARE DI  $\alpha$

$$h_N = h_{Nwb} + \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \cdot \frac{\Delta\alpha_{wb}}{\Delta\alpha_{wb}} \left(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\right) \bar{V}_H$$

$$\rightarrow h_N = h_{Nwb} + \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \left(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\right) \bar{V}_H$$

$$M = M_{0wb} + (L_{wb} + L_t)(h - h_{Nwb})\bar{c} - L_t \bar{e}_t$$

$$C_m = C_{m0wb} + \left(a_{wb} \cdot \alpha_{wb} + a_t \cdot \alpha_t \frac{S_T}{S}\right)(h - h_{Nwb}) - a_t \alpha_t \frac{S_T}{S} \frac{\bar{e}_t}{\bar{c}}$$

- Ora dobbiamo sostituire  $\alpha_t = f(\alpha_{wb})$  e  $\alpha_{wb} = f(\alpha)$

$$\begin{cases} \alpha_t = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\right) + i_t - \varepsilon_0 \\ \alpha_{wb} = \alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \varepsilon_0) \frac{S_T}{S} \rightarrow \alpha_t = \left[\alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \varepsilon_0) \frac{S_T}{S}\right] \left(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\right) + i_t - \varepsilon_0 \end{cases}$$

$$C_m = C_{m0wb} + \left\{ a_{wb} \left[\alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \varepsilon_0) \frac{S_T}{S}\right] + a_t \left[\left[\alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \varepsilon_0) \frac{S_T}{S}\right] \left(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\right) + i_t - \varepsilon_0\right] \right\} \cdot (h - h_{Nwb}) - a_t \bar{V}_H \left\{ \left[\alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \varepsilon_0) \frac{S_T}{S}\right] \left(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\right) + i_t - \varepsilon_0 \right\}$$

VOGLIAMO RICONDURCI A UNA FORMA DEL TIPO

$$C_m = C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m0} \quad \text{PER CALCOLARE } C_{m\alpha} \text{ e } C_{m0}$$

▲ Effettuare 2000 sostituzioni e raccoglimenti non è una strada facile, quindi utilizzeremo i risultati calcolati in precedenza per calcolare  $C_{m\alpha}$  e  $C_{m0}$

Per equilibrare il velivolo a incidenze diverse  
SI VARIA IL  $C_{m0}$

$$C_m = \left\{ C_{L\alpha} (h - h_{nwb}) - \alpha_T \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \bar{V}_H \right\} \alpha + \left\{ C_{m0wb} - \alpha_T \bar{V}_H (i_T - \epsilon_0) \left[ 1 - \frac{\alpha_T}{C_{L\alpha}} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \frac{S_T}{S} \right] \right\}$$

→ si agisce sui parametri della 2ª parentesi

$$C_{m0} > 0$$

• solitamente  $C_{m0wb} < 0$

⇒ SERVE

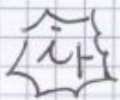
$$\alpha_T \bar{V}_H (i_T - \epsilon_0) \left[ 1 - \frac{\alpha_T}{C_{L\alpha}} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \frac{S_T}{S} \right] < 0$$

E

$$\left| \alpha_T \bar{V}_H (i_T - \epsilon_0) \left[ 1 - \frac{\alpha_T}{C_{L\alpha}} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \frac{S_T}{S} \right] \right| > |C_{m0wb}|$$

PARAMETRI DA VARIARE IN VOLO:

- $\frac{S_T}{S}$ : FISSO UNA VOLTA DEF. LA CONFIG.
- $C_{L\alpha}$ : È UNA PROPRIETÀ DELL'ALA
- $\alpha_T$ : " " DEI PIANI DI CODA



→ SI VARIA IL CALETTAMENTO DEI PIANI DI CODA  
 ↗ ruotando i piani di coda  
 ↘ variazione del profilo (→ curvatura)  
 con gli equilibratori

Metodi per calcolare PN

1) Sostituisci le espressioni degli angoli  $\Delta \alpha_T$  e  $\Delta \alpha$  come  $f(\Delta \alpha_{wb})$

2) Se  $CG \equiv PN$  → il momento è INVARIANTE rispetto ad  $\alpha$

$$C_m = C_{m0} + \underline{C_{m\alpha} \cdot \alpha} \quad \text{e} \quad C_{m\alpha} \cdot \alpha = 0$$

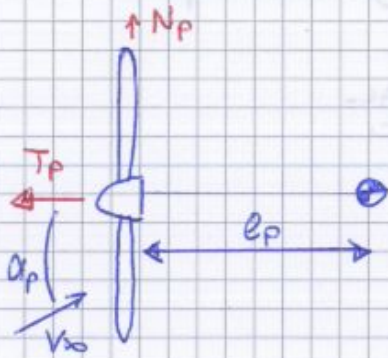
→ PRENDI L'EQ. DI  $C_{m\alpha}$ , LA UGUALI A ZERO E  
 METTI  $h = h_n$ .



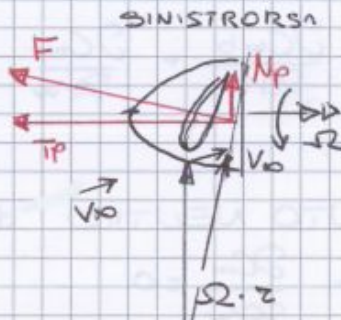
$$\rightarrow \frac{dC_{mp}}{dC_{Lw}} \Big|_{JET} = 0$$

ELICA

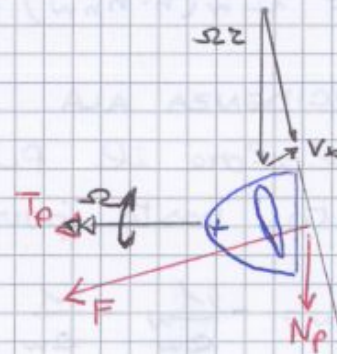
Se il piano dell'elica non è ortogonale alla velocità di volo, il disco rotante sviluppa forze:  $T_p \rightarrow \perp$  disco e  $N_p$ , nel piano del disco



Il verso di  $N_p$  dipende se l'elica è destrorsa o sinistrorsa



DESTROSA



NOTA:  $\Omega \cdot z > V_0!$

$N_p$  dà momento di BECCHEGGIO

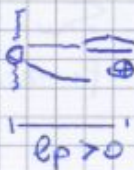
$$M_p = N_p \cdot l_p$$

$$C_{mp} = \frac{M_p}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c} = \frac{S_p}{S} \frac{l_p}{c} C_{Np}$$

$$\frac{dC_{mp}}{dC_{Lw}} = \frac{S_p}{S} \frac{c}{l_p} \frac{dC_{Np}}{dC_{Lw}}$$

IL SEGNO DIPENDE DALLA POSIZIONE DELL'ELICA RISP. AL BARICENTRO!

elica TRAGENTE



$$\frac{dC_{mp}}{dC_{Lw}} > 0 \rightarrow \text{RIDUCE STABILITÀ}$$

elica SPINGENTE

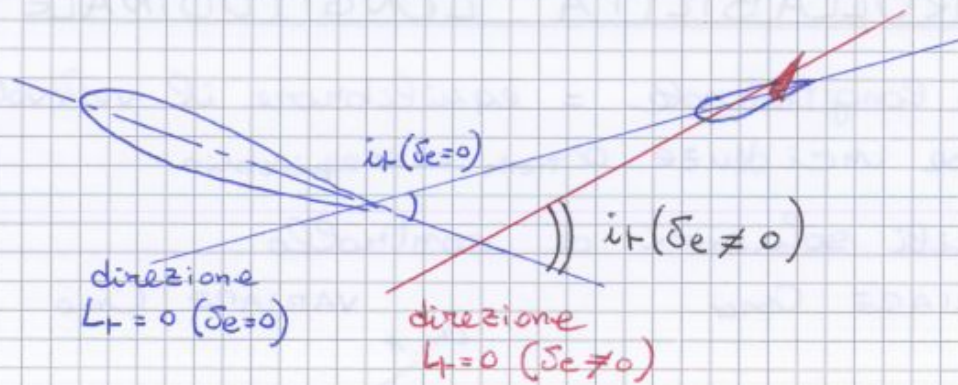


$$\frac{dC_{mp}}{dC_{Lw}} < 0 \rightarrow \text{AUMENTA STABILITÀ}$$

$$\frac{dC_m}{d\alpha} < 0$$

se  $\alpha \uparrow$  e provoca  $C_m > 0$   
 $\Rightarrow$  la configurazione dell'aereo crea un  $C_m < 0$  che riporta in equilibrio

STABILE ☺

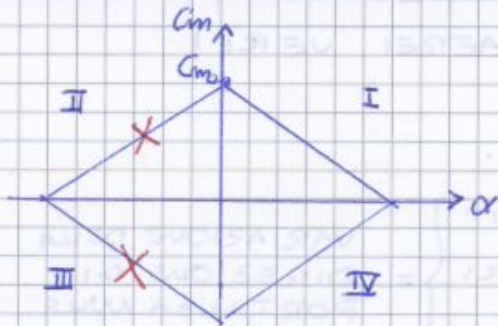


$$C_{m_0} = C_{m_{0wb}} - \rho \bar{V}_H (i_t - \epsilon_0) \left[ 1 - \frac{\rho \Gamma}{C_{L\alpha}} \frac{S_T}{S} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \right]$$

$$\delta_e < 0 \rightarrow |i_t| \uparrow \Rightarrow C_{m_0} \uparrow$$

$$\delta_e > 0 \rightarrow |i_t| \downarrow \Rightarrow C_{m_0} \downarrow$$

**MEMO** :  $i_t$  è negativo!  
 → + diventa negativo  
 (case + cresce in modulo)  
 + solo  $C_{m_0}$ !



- (I) STABILE + EQUILIBRABILE
- (IV) INSTABILE MA EQUILIBRABILE
- (II) NON EQUILIBRABILE
- (III) " "

• Contributo degli elevatori a  $L$

$$L = L_{wb} + L_t(\delta_e = 0) + \Delta L(\delta_e)$$

$$C_L = \left( C_{Lwb} + C_{L_t} \frac{S_T}{S} \frac{V_H^2}{V^2} \right) + \Delta C_L(\delta_e)$$

$$= C_{L\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_L(\delta_e)$$

**NOTAZIONE**

$C_L(\delta_e) \rightarrow C_L$  con  $\delta_e \neq 0$

$C_{L\delta_e} \rightarrow \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e}$  !

• Momento

$$M = M_0(i_t = i_{t_0}, \delta_e = 0) + L(h - h_n) \cdot \bar{c} + \Delta M(\delta_e)$$

**TERMINI DI CONTROLLO**

$$C_m = C_{m_0}(\dots) + C_{m\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_m(\delta_e)$$

**EQUAZIONI DI EQUILIBRIO con termini di controllo**

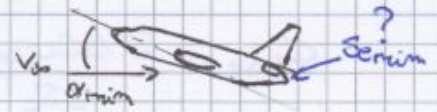
$$\begin{cases} C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_L(\delta_e) \\ C_m = C_{m_0}(i_t, \delta_e = 0) + C_{m\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_m(\delta_e) \end{cases}$$

## ■ CALCOLO DI $\delta_{trim}$ e $\alpha_{trim}$

Si vuole che il velivolo voli in equilibrio a una certa  $\alpha_{trim}$ : quale  $\delta_{trim}$  dell'equilibratore?

→ ?  $\delta_{trim}$  per valore  $\alpha$  e un  $\alpha_{trim}$  FISSATO

### EQUILIBRIO



$$(1) \quad C_{L_{trim}} = C_{L\alpha} \cdot \alpha_{trim} + C_{L\delta} \cdot \delta_{trim}$$

$$(2) \quad C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha_{trim} + C_{m\delta} \cdot \delta_{trim} = 0$$

$$C_{L_{trim}} = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

$$(1) \rightarrow \alpha_{trim} = \frac{C_{L_{trim}} - C_{L\delta} \cdot \delta_{trim}}{C_{L\alpha}}$$

Sostituiamo in (2):

$$0 = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \frac{C_{L_{trim}} - C_{L\delta} \cdot \delta_{trim}}{C_{L\alpha}} + C_{m\delta} \cdot \delta_{trim}$$

$$0 = C_{m0} C_{L\alpha} + C_{m\alpha} C_{L_{trim}} - C_{m\alpha} C_{L\delta} \delta_{trim} + C_{m\delta} C_{L\alpha} \delta_{trim}$$

$$\delta_{trim} = - \frac{C_{m0} C_{L\alpha} + C_{m\alpha} C_{L_{trim}}}{C_{m\delta} C_{L\alpha} - C_{m\alpha} C_{L\delta}}$$

$$\Delta = C_{m\delta} C_{L\alpha} - C_{m\alpha} C_{L\delta}$$

Facendo un po' di calcoli emerge che  $\delta_{trim}$  (e quindi poi anche  $\alpha_{trim}$ ) dipendono dal MARGINE DI STABILITÀ ⇒ dalla posizione del baricentro

$$\Delta = C_{L\alpha} \left[ -ae \bar{V}_H + C_{L\delta} \frac{S_f}{S} (h - h_{nwb}) \right] - C_{L\alpha} (h - h_N) C_{L\delta}$$

$$= C_{L\alpha} \left\{ -ae \bar{V}_H + C_{L\delta} \left[ \cancel{h - h_{nwb}} - \cancel{h} + h_N \right] \right\}$$

$$= C_{L\alpha} \left\{ -ae \bar{V}_H + C_{L\delta} (h_N - h_{nwb}) \right\}$$

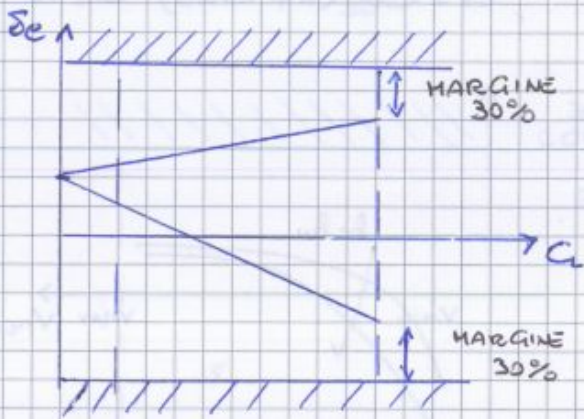
**Δ NON DIPENDE DAL BARICENTRO!**

$$\delta_{trim} = - \frac{C_{m0} C_{L\alpha} + C_{L\alpha} (h - h_N) C_{L_{trim}}}{C_{L\alpha} \left\{ -ae \bar{V}_H + C_{L\delta} (h_N - h_{nwb}) \right\}} = - \frac{\cancel{C_{L\alpha}} [C_{m0} + C_{L_{trim}} (h - h_N)]}{\cancel{C_{L\alpha}} \left\{ -ae \bar{V}_H + C_{L\delta} (h_N - h_{nwb}) \right\}}$$

$$\rightarrow \delta_{trim} = - \frac{C_{m0} + C_{L_{trim}} (h - h_N)}{C_{L\delta} (h_N - h_{nwb}) - ae \bar{V}_H}$$

Se  $\delta_{trim}$  dipende da MARGINE STATICO A NUMERATORE

• MARGINE PER MANOVRE A  $n_z \neq 1$



Si tiene una parte della deflessione dell'equilibratore per manovre a  $n_z \neq 1$ .  
Perché?

→ Perché in MANOVRA

$$\Delta C_m = C_{m\alpha} \cdot \Delta \alpha + C_{m\delta_e} \cdot \delta_e + C_{mq} \cdot \hat{q}$$

↓  
Per equilibrare il velivolo in manovra MI SERVE UNA DEFLESSIONE MAGGIORE RISPETTO AL CASO con  $n_z = 1$  poiché  $\hat{q} = 0!$   
In manovra c'è anche  $C_{mq} \cdot \hat{q}!$

• EFFETTO SUOLO → ATTERRAGGIO

RIDUZIONE DEL DOWNWASH,  $E \downarrow \rightarrow$  P.N. ARRETRA

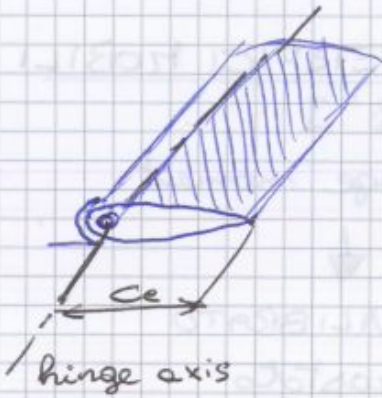
AEREO + STABILE

MA MENO CONTROLLABILE!!

PERICOLO!

arrivo a fondo corsa, sono ← SATURAZIONE  
a  $C_{Lmax}$  e il comando è inefficace!

## VALUTAZIONE MOMENTO DI CERNIERA



**SUPERFICIE**: quella compresa tra bordo di fuga e asse di cerniera

**CORDA**: da asse cerniera a bordo fuga

$$H_c = \frac{1}{2} \rho V_r^2 \cdot S_e \cdot c_e \cdot C_{Hc}$$

$$C_{Hc} = b_0 + b_1 \alpha_r + b_2 \delta_e + b_3 \delta_r$$

$b_0$ : contributo che si ha al momento di cerniera con  $\alpha_r, \delta_e, \delta_r = 0$

$$b_1: C_{Hc} = f(\alpha_r)$$

$$\rightarrow b_1 = \frac{\partial C_{Hc}}{\partial \alpha_r}$$

$$b_2: C_{Hc} = f(\delta_e)$$

$$\rightarrow b_2 = \frac{\partial C_{Hc}}{\partial \delta_e}$$

$$b_3: C_{Hc} = f(\delta_r)$$

$$\rightarrow b_3 = \frac{\partial C_{Hc}}{\partial \delta_r}$$

$$C_{Hc} = 0 \Leftrightarrow \delta_{r(\text{free})} = -\frac{1}{b_3} (b_0 + b_1 \alpha_r + b_2 \delta_e)$$

↳ deflessione dell'equilibratore tale che  $C_{Hc} = 0$

→ Allineato al flusso automaticamente

Deflessione TRIM TAB per cui  $C_{Hc} = 0$

$$\delta_{r(\text{trim})} = -\frac{1}{b_3} (b_0 + b_1 \alpha_r + b_2 \delta_{e(\text{trim})})$$

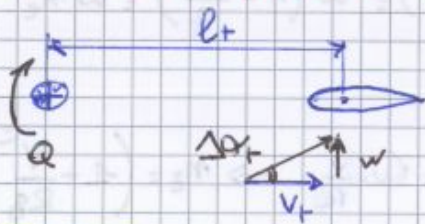
Ogni elemento dell'aereo dà un contributo DIVERSO a  $C_{Lq}$  e  $C_{mq}$  perché vede una velocità  $w$  diversa a seconda della sua DISTANZA DAL CG.

$$C_{Lq} = C_{Lq}(\text{fuselage}) + C_{Lq}(\text{wing}) + C_{Lq}(\text{tail})$$

$$C_{mq} = C_{mq} \quad \text{''} \quad + C_{mq} \quad \text{''} \quad + C_{mq}(\text{tail})$$



IL CONTRIBUTO + RILEVANTE È QUELLO DEI PIANI DI CODA, perché stando a una distanza maggiore dal CG vediamo una VELOCITÀ TANGENZIALE + ALTA



$$w = Q \cdot l_f$$

$$\Delta \alpha_f = \alpha_{\text{crit}} \frac{w}{V_f} \approx \frac{Q \cdot l_f}{V_f}$$

$$\Delta \alpha_f = \frac{Q \cdot l_f}{V}$$

← Considerando piccole perturb. e trascurando il downwash  $V_f = V$

▣  $\Delta L_f$ : INCREMENTO DI PORTANZA DOVUTO A  $\Delta \alpha_f$   
 il contributo dell'ala è trascurabile poiché vede basse velocità indotte  $w$ .

$$\Delta L = \Delta L_f = \frac{1}{2} \rho V_f^2 S_f \alpha_f^* \cdot \Delta \alpha_f$$

$$\Delta C_{L_f} = \alpha_f \frac{S_f}{S} \Delta \alpha_f \quad Q = \hat{q} \frac{2V}{c}$$

$$= \alpha_f \frac{S_f}{S} \frac{Q \cdot l_f}{V} = \alpha_f \frac{S_f}{S} \cdot \hat{q} \frac{2V}{c} \frac{l_f}{V}$$

•  $\frac{S_f l_f}{S c} = V_H$  NB. NON  $\bar{V}_H$ , ma  $V_H$  perché qui c'è  $l_f$  e non  $\bar{l}_f$ .

$$\rightarrow \Delta C_{L_f} = 2 \alpha_f V_H \hat{q} \rightarrow \boxed{C_{Lq} = 2 \alpha_f V_H}$$

▣  $\Delta M$ : INCREMENTO DI MOMENTO DOVUTO A  $\Delta \alpha_f$

$$\Delta M = \Delta M_f = -\frac{1}{2} \rho V_f^2 S_f l_f \alpha_f^* \cdot \Delta \alpha_f$$

$$\Delta M_f = -\Delta L_f \cdot l_f$$

$$\Delta C_{M_f} = -\alpha_f V_H \Delta \alpha_f$$

$$= -\alpha_f V_H \frac{Q l_f}{V} = -\alpha_f V_H \hat{q} \frac{2V}{c} \cdot \frac{l_f}{V}$$

Ricaviamo  $\Delta\alpha$  dalla (2) e poi la sostituiamo in (1)

$$\Delta\alpha = \frac{-C_{mq} \cdot [N] - C_{mse} \cdot \Delta\delta_e}{C_{m\alpha}} \quad [N] = \frac{(n_z - 1) g \bar{c}}{2V^2}$$

$$\rightarrow (n_z - 1) C_{we} = C_{L\alpha} \cdot \frac{-C_{mq} \cdot [N] - C_{mse} \cdot \Delta\delta_e}{C_{m\alpha}} + C_{L\delta_e} \cdot \Delta\delta_e + C_{eq} \cdot [N]$$

$$(n_z - 1) C_{we} C_{m\alpha} = -C_{L\alpha} C_{mq} \cdot [N] - C_{L\alpha} C_{mse} \Delta\delta_e + C_{L\delta_e} C_{m\alpha} \Delta\delta_e + C_{eq} C_{m\alpha} [N]$$

$$\Delta\delta_e [C_{L\delta_e} C_{m\alpha} - C_{L\alpha} C_{mse}]$$

$$(n_z - 1) C_{we} C_{m\alpha} + C_{L\alpha} C_{mq} (n_z - 1) \frac{g \bar{c}}{2V^2} - C_{eq} C_{m\alpha} \frac{(n_z - 1) g \bar{c}}{2V^2} = \Delta\delta_e [ \dots ]$$

$$(n_z - 1) \left[ C_{we} C_{m\alpha} + C_{L\alpha} C_{mq} \frac{g \bar{c}}{2V^2} - C_{eq} C_{m\alpha} \frac{g \bar{c}}{2V^2} \right] = \Delta\delta_e [ \dots ]$$

$$\rightarrow \frac{\Delta\delta_e}{(n_z - 1)} = - \frac{C_{we} C_{m\alpha} + \frac{g \bar{c}}{2V^2} (C_{L\alpha} C_{mq} - C_{eq} C_{m\alpha})}{[C_{L\alpha} C_{mse} - C_{m\alpha} C_{L\delta_e}]}$$

INTRODUCIAMO  $\mu$ , la massa adimensionale

$$\mu = \frac{m}{\frac{1}{2} \rho S c} = \frac{W}{g \frac{1}{2} \rho S c} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S C_{we}}{g \frac{1}{2} \rho S c} = C_{we} \cdot \frac{V^2}{g c} \rightarrow \frac{g \bar{c}}{V^2} = \frac{C_{we}}{\mu}$$

$$\frac{\Delta\delta_e}{(n_z - 1)} = - \frac{C_{we} C_{L\alpha} (h - h_N) + \frac{C_{we}}{2\mu} (C_{L\alpha} C_{mq} - C_{L\alpha} C_{eq} (h - h_N))}{[C_{L\alpha} C_{mse} - C_{m\alpha} C_{L\delta_e}]}$$

$$= - \frac{C_{we} C_{L\alpha} \left[ (h - h_N) + \frac{C_{mq}}{2\mu} - \frac{C_{eq}}{2\mu} (h - h_N) \right]}{[ \dots ]}$$

$$[ \dots ] = - \frac{C_{we} C_{L\alpha} (2\mu - C_{eq})}{2\mu (C_{L\alpha} C_{mse} - C_{m\alpha} C_{L\delta_e})} \left\{ (h - h_N) + \frac{C_{mq}}{2\mu - C_{eq}} \right\}$$

Se un velivolo è in volo rettilineo a velocità  $V$  fissata con l'equazione  $\delta_{trim} = \frac{\Delta\delta_e}{\Delta}$  si calcola il  $\delta_e$  per equilibrarlo.

SE LO STESSO AEREO ALLA STESSA  $V$  PERCORRE UNA TRAIETTORIA CURVA A  $n_z \neq 1$  LA RELAZIONE SOPRA TROVATA CI DICE QUAL È LA VARIAZIONE DELL'ANGOLO DI EQUILIBRATORE RISPETTO AL CASO PRECEDENTE in funzione delle variazioni di  $n_z$  da 1.

# EQUILIBRIO, STABILITÀ e CONTROLLO: PIANO LATERO-DIREZIONALE

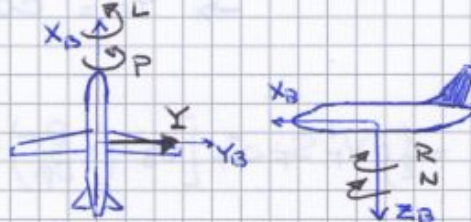
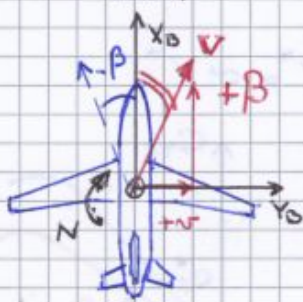
Come visto al capitolo 2 il piano laterale e quello direzionale NON POSSONO ESSERE DISACCOPIATI:

la presenza di un angolo di SIDESLIP  $\beta$  o di BANK  $\Phi$  induce sia momento di ROLLO sia momento di imbardata

## STABILITÀ STATICA DIREZIONALE = YAW STIFFNESS

= CAPACITÀ DELL'AEREO, SE PERTURBATO CON UN ANGOLO DI SIDESLIP  $\beta$ , DI RITORNARE IN VOLO SIMMETRICO GENERANDO UN MOMENTO DI IMBARDATA  $N$  CHE ALLINEI L'ASSE CORPO  $X_B$  CON LA DIREZIONE DEL

VENTO.



$$\beta = \arcsin \frac{v}{V} \approx \frac{v}{V}$$

$Y = \text{lateral force}$

$L = \text{rolling moment}$   
 $N = \text{yawing moment}$

$P = \text{velocità angolare attorno } X$   
 $R = \text{ " " " } Z$

Se una raffica laterale mi porta a valore in derapata deve generarsi SPONTANEAMENTE un momento  $N$

$$\beta > 0 \xrightarrow{\text{SERVE}} N > 0$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial \beta} = C_{n\beta} > 0$$

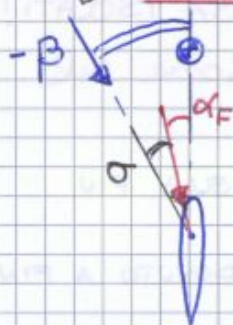
YAW STIFFNESS

EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \sum Y = 0 \\ \sum L = 0 \\ \sum N = 0 \end{cases} \begin{cases} P = 0 \\ R = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Gruppo da fusoliera:  $C_{n\beta} < 0$   
 $\Rightarrow$  SERVE UN ELEMENTO DI CONFIGURAZIONE CHE DIA UN ALTO CONTRIBUTO POSITIVO IN MODO CHE  $C_{n\beta} > 0$

$\Rightarrow$  LA DERIVA ( $\sigma$ )



La deriva vede un flusso ad incidenza  $\alpha_f < \beta$ , poiché è un flusso disturbato dal gruppo wing-body.

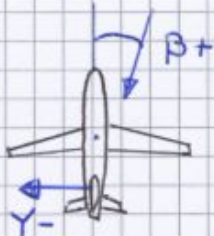
$\Rightarrow \sigma = \text{ANGOLO DI SIDEWASH}$ , positivo se dipende da  $v > 0$  ( $v$  relativa non dell'aereo) analogo al downwash



PER USARE LA STESSA CONVENZIONE AVREMMO DOVUTO SCRIVERE  $C_L = C_{L(wb)} + C_{L(F)}$  con  $C_{L(F)} = \alpha_F^* \cdot \alpha_F \cdot \frac{S_F}{S} \frac{V_F^2}{V^2}$

$$C_{Y(F)} = \alpha_F \frac{S_F}{S} \left[ \sigma_0 - \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) \cdot \beta \right]$$

$$C_{Y_{\beta}(F)} = - \alpha_F \frac{S_F}{S} \underbrace{\left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right)}_{>0} < 0 \rightarrow \frac{\partial C_{Y(F)}}{\partial \beta} < 0$$



$$C_{Y_{\beta}(F)} < 0 = \beta > 0 \text{ causa } Y_{(F)} < 0$$

Δ CON QUESTE DERIVATE NON BISOGNA RAGIONARE

"Se  $\beta$  cresce allora  $Y$  decresce"! NO !!! (anche perché  $Y$  in modulo cresce)

BISOGNA GUARDARE IL RAPPORTO TRA I SEGNI!

$Y$  è nel verso negativo per un  $\beta$  positivo. STOP!

$$N_{(F)} = Y_{(F)} \cdot l_F$$

Adimensionalizzando: LUNGHEZZA DI RIFERIMENTO PER ADIMENS. I MOMENTI NEL LAT.-DIR. è  $b \rightarrow$  apertura alare

$$\frac{N_{(F)}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b} = \frac{Y_{(F)} \cdot l_F}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b}$$

$$C_{n(F)} = C_{Y(F)} \cdot \frac{l_F}{b} = \alpha_F \left[ \sigma_0 - \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) \beta \right] \frac{S_F}{S} \cdot \frac{l_F}{b}$$

$$\frac{S_F}{S} \cdot \frac{l_F}{b} = V_v \text{ volume di coda verticale (analogo di } V_H)$$

$$\rightarrow C_{n(F)} = \alpha_F \left[ \sigma_0 - \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) \beta \right] V_v$$

Contributo della deriva alla YAW STIFFNESS:

$$C_{m_{\beta}(F)} = - \alpha_F V_v \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right)$$

$$|C_{m_{\beta}(F)}| > |C_{m_{\beta}(wb)}|$$

→ PER RENDERE POSITIVO  $C_{m_{\beta}(F)}$  BISOGNA AVERE  $V_v < 0$  e cioè  $l_F < 0 \Rightarrow$  DERIVA DIETRO AL BARICENTRO

# STABILITÀ STATICA LATERALE

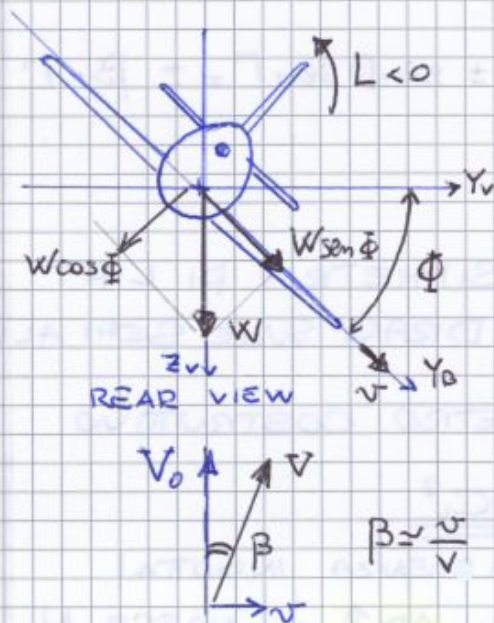
Un velivolo correttamente dimensionato dal punto di vista aeromeccanico deve possedere opportuni valori di RIGIDEZZA IN BECCHEGGIO  $C_{m\alpha}$  e IN IMBARDATA  $C_{n\beta}$  tali da generare coppie funzioni di  $\alpha$  e  $\beta$  che riportino l'aereo in equilibrio se questo è stato perturbato  
**PER DEFINIZIONE** la stabilità statica laterale sarebbe la capacità del velivolo, se perturbato con un bank angle  $\Phi$ , di generare un momento di ROLLIO  $L$  che lo riportati in equilibrio

... **MA UNA PERTURBAZIONE IN  $\Phi$  NON IMPLICA LA NASCITA DI ALCUNA AZIONE AERODINAMICA!**

**$\Rightarrow$  NON SI PUÒ DEFINIRE UNA ROLL STIFFNESS  $\frac{\partial L}{\partial \Phi}$ !**

A causa della simmetria del velivolo non si genera alcuna azione aerodinamica!

**$\Rightarrow$  LA STABILITÀ LATERALE SI DEFINISCE TRAMITE UNA PERTURBAZIONE  $\beta$**



La forza  $W \sin \Phi$  (non essendo equilibrata dall'altro lato) TRASCINA LATERALMENTE L'AEREO SUL PIANO ALARE

**$\rightarrow$  CAUSA UNA VELOCITÀ  $v$**

che COMBINATA con  $V$

**ANGOLO DI SIDESLIP  $\beta$**  indotto

Se  $\beta > 0$  deve generarsi un momento di rollio  $L < 0$  tale da riportare il velivolo in volo piano!

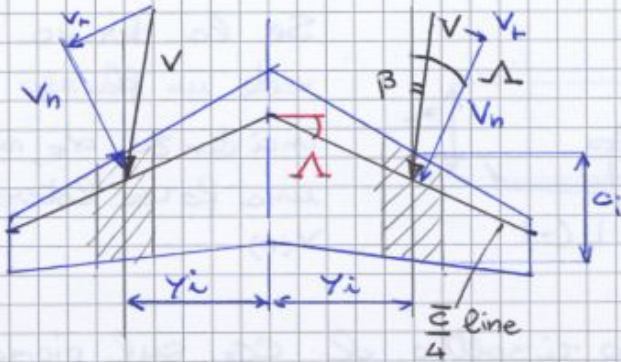
$\beta > 0 \rightarrow L < 0$

**$C_{e\beta} = \frac{\partial C_e}{\partial \beta} < 0$  EFFETTO DIEDRO**

L'effetto diedro  $C_{e\beta} < 0$  dipende da 4 parametri:

- 1) ANGOLO DIEDRO  $\rightarrow$  wing dihedral angle
- 2) ANGOLO DI FRECCIA  $\rightarrow$  wing sweep angle
- 3) DERIVA  $\rightarrow$  vertical tail
- 4) ALA ALTA/ALA BASSA  $\rightarrow$  wing-fuselage relative displacement

## 2) ANGOLO DI FRECCIA



La portanza generata dipende dalla velocità NORMALE all'ala ( $V_n$  della linea dei quarti anteriori)

→ SULLE SEMIALI SI SVILUPPA LIFT DIVERSA POICHE' A CAUSA DI  $\beta$  IL FLUSSO SENTE UNA FRECCIA DIVERSA DAI 2 LATI

$$\begin{cases} V_{ndx} = V \cos(\alpha - \beta) \\ V_{nsx} = V \cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$V_{ndx} > V_{nsx} \Rightarrow \frac{1}{2} \rho V_{ndx}^2 > \frac{1}{2} \rho V_{nsx}^2$$

Per  $\alpha > 0$

$$\begin{cases} \beta > 0 \rightarrow L < 0 \Rightarrow C_{lp} < 0 \\ \beta > 0 \rightarrow N > 0 \Rightarrow C_{mp} > 0 \end{cases}$$

LIFT  $dx >$  LIFT  $sx \rightarrow$  MOMENTO ROLLIO  $L < 0$   
 DRAG  $dx >$  DRAG  $sx \rightarrow$  MOMENTO INBARDATA  $N > 0$

$\alpha > 0$  FRECCIA POSITIVA STABILIZZA SIA PIANO LATERALE SIA PIANO DIREZIONALE

Studiamo ora la dipendenza analitica tra  $C_{lp}$  e  $\alpha$ :

MOMENTO DI ROLLIO DATO DA  $i$ -esima COPPIA DI ELEMENTI DI ALA DI LARGHEZZA  $dy_i$  e CORDA  $c_i$

$$\begin{aligned} L_i &= -[F_{idx} - F_{isx}] \cdot y_i & F_i &= \text{forza verticale} \\ &= -\frac{1}{2} \rho C_{Li} c_i dy_i V^2 [\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta)] \cdot y_i & & (\text{NON } L \text{ perche' } L \text{ e' gia' mom. rollio}) \\ &= -\frac{1}{2} \rho C_{Li} c_i dy_i V^2 [-\sin 2\alpha \cdot \sin(-2\beta)] \cdot y_i & & * \end{aligned}$$

Se la perturbazione è piccola  $\sin(-2\beta) \approx -2\beta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_i &= +\frac{1}{2} \rho C_{Li} c_i dy_i V^2 \cdot (-\sin 2\alpha) \cdot +2\beta \cdot y_i \\ &= -\rho C_{Li} c_i dy_i \cdot y_i V^2 \sin 2\alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

$$L_{\beta i} = f(\beta, C_L, \alpha) = -\rho V^2 C_{Li} c_i y_i dy_i \cdot \sin 2\alpha$$

⇒ STABILITÀ LATERALE È  $\propto \sin 2\alpha$

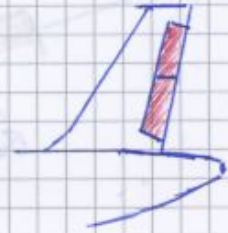
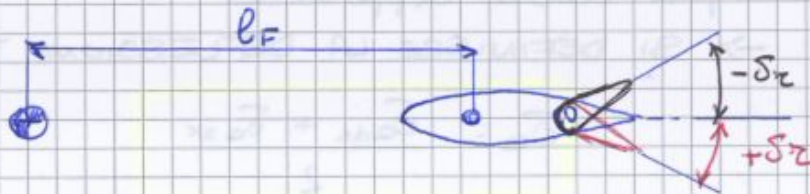
$$* \sin(-2\beta) = -\sin 2\beta ; -\sin 2\alpha - \sin 2\beta = +\sin 2\alpha \sin 2\beta$$

# CONTROLLABILITÀ DIREZIONALE

Il controllo direzionale si opera con la deflessione  $\delta_z$  del timone di coda, cioè la parte mobile della deriva e si usa per:

- 1) TRIUMFARE VELIVOLO IN CASO DI  $\beta \neq 0$
- 2) EQUILIBRARE IL VELIVOLO IN CASO DI TRAZIONE ASIMMETRICA
- 3) CONTRASTARE EFFETTI GIROSCOPICI DATI DA ELICHE
- 4) CONTRASTARE LA COPPIA IMBARDANTE INVERSA DATA DAGLI ALETONI

... e ovviamente per cambiare rotta!



$+\delta_z$ , verso sx  $\rightarrow$  GENERA FORZA  $Y(+)$   $\rightarrow$  diretta a dx  
 $-\delta_z$ , verso dx  $\rightarrow$  " " " "  $Y(-)$

$$Y(\delta_z) = \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F a_z^* \delta_z$$

$$C_Y(\delta_z) = \frac{Y(\delta_z)}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = \frac{S_F V_F^2 a_z^* \delta_z}{S V} = a_z \frac{S_F}{S} \delta_z$$



$$N(\delta_z) = Y(\delta_z) \cdot l_F$$

$$C_{n\delta_z} = C_Y(\delta_z) \cdot \frac{l_F}{b} = a_z \frac{S_F}{S} \frac{l_F}{b} \delta_z = a_z V_v \delta_z$$

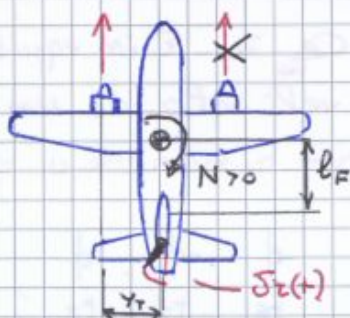
$$C_{Y\delta_z} = a_z \frac{S_F}{S} > 0$$

$$C_{n\delta_z} = V_v a_z < 0$$

poiché  $l_F < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_Y = C_{Y\beta} \cdot \beta + C_{Y\delta_z} \cdot \delta_z \\ C_n = C_{n\beta} \cdot \beta + C_{n\delta_z} \cdot \delta_z \end{cases}$$

◆ Trazione asimmetrica = PIANTATA DI UN MOTORE



PERDITA DI UN MOTORE CAUSA UN MOMENTO IMBARDANTE  $N = T \cdot Y_T$

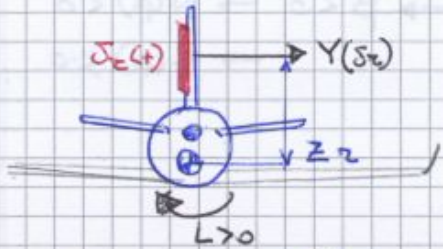
$$\Rightarrow \delta_z(+): Y_{\delta_z}(+)$$

Bilanciamo il momento di yaw

$$Y(\delta_z) \cdot l_F = T \cdot Y_T$$

# EFFETTI ACCOPPIATI su piano latero-direz

## EFFETTI da deflessione TIMONE



DEFLESSIONE TIMONE

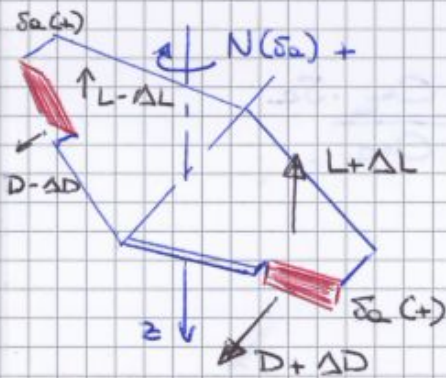
→ EFFETTO SECONDARIO: MOMENTO ROLLIO

$$L(\delta_z) = Y(\delta_z) \cdot z_z$$

$$\delta_z(t) \rightarrow Y(\delta_z) + \Rightarrow L_{70} \rightarrow \boxed{C_{\delta z} > 0}$$

$$L(\delta_z) = \frac{1}{2} \rho V^2 S_b C_{\delta z} \cdot \delta_z$$

## EFFETTI ACCOPPIATI da deflessione ALETTONI



DEFLESSIONE ALETTONI

⇒ differenza di Lift su semiali

↳ EFFETTO PRIMARIO: MOM. ROLLIO

↳ EFFETTO SECONDARIO:

MOMENTO IMBARDANTE dato da differenza di DRAG

$$\delta_a > 0 \Rightarrow N > 0 \rightarrow \boxed{C_{m\delta a} > 0}$$

$$N(\delta_a) = \frac{1}{2} \rho V^2 b S C_{m\delta a} \cdot \delta_a$$

## EFFICACIA DEL COMANDO DI ALETTONI

Gli effetti accoppiati portano a una **PERDITA DI CONTROLLABILITÀ SUL PIANO LATERALE**

⇒ PERDITA DI EFFICACIA DEGLI ALETTONI

Diamo un comando  $\delta_a$ :

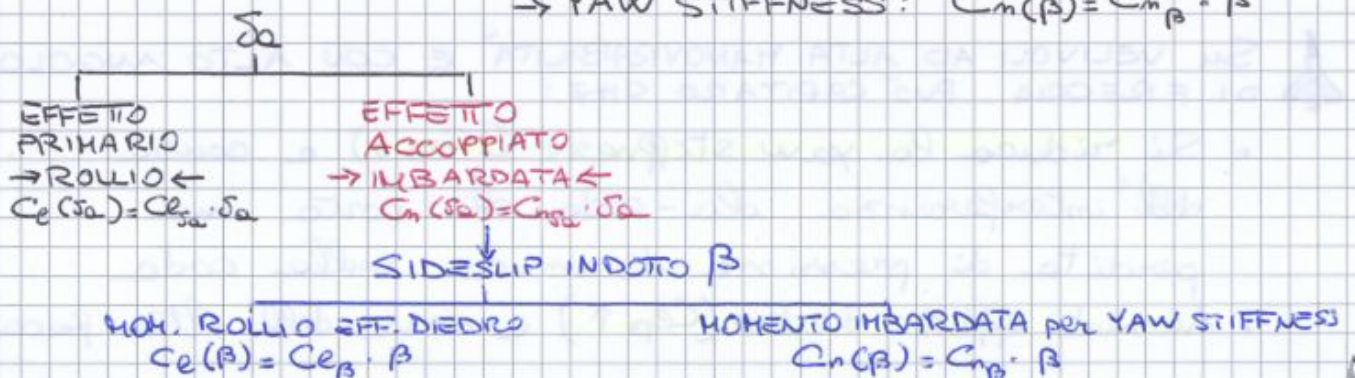
RISPOSTA AEREO :  $L : C_{l(\delta_a)} = C_{l\delta_a} \cdot \delta_a$

$N : C_{n(\delta_a)} = C_{n\delta_a} \cdot \delta_a$

$\Delta N$  genera un  $\beta \neq 0 \rightarrow$  SIDESLIP INDOTTO

→ Rollio da effetto diedro  $C_{\ell(\beta)} = C_{\ell\beta} \cdot \beta$

→ YAW STIFFNESS:  $C_{n(\beta)} = C_{n\beta} \cdot \beta$



$$\frac{C_{e\beta} \cdot C_{n\dot{\delta}_a}}{C_{m\dot{\delta}_a} \cdot C_{e\dot{\delta}_a}} > 1 \Rightarrow C_{e\dot{\delta}_a}^{eff} < 0 !!$$

## REVERSAL of ROLL CONTROL

ovvero inversione del comando di rollio!  
 Ho un momento di rollio opposto a quello che ho comandato!

Come si può EVITARE L'INVERSIONE DEL COMANDO?

### 1) RIDUZIONE DI $C_{n\dot{\delta}_a}$

► Deflessione diversa sui 2 alettori: quello deflesso verso il basso ha  $\delta_{a\downarrow} < \delta_{a\uparrow} \Rightarrow$  diminuisco  $\Delta Lift \Rightarrow \Delta D \downarrow$  e riduco  $N(\delta_a)$

► "FRISE" ailerons.

Bordo d'uscita sagomato per dare una maggiore DRAG all'alettore deflesso verso l'alto  $\Rightarrow$  Compensa il  $\Delta D$  dato da  $\Delta Lift$  sull'altra semiala con + resistenza d'attrito / di forma.



$\Delta D \uparrow$ : resistenza FORMA



$\Delta D \uparrow$ : resistenza indotta

### 2) OPERARE UNA DEFLESSIONE DEL TIMONE $\delta_r$ CHE PORTI $\beta = 0$ .

⚡ Con  $\beta = 0$  RENDEREMMO INEFFETTIVO L'EFFETTO DIEDRO, CHE È QUELLO CHE MI DANNEGGIA IL COMANDO DI ALETTONS!

$$\begin{cases} C_l = C_{e\dot{\delta}_a} \cdot \dot{\delta}_a \\ 0 = C_{n\dot{\delta}_r} \cdot \dot{\delta}_r + C_{n\dot{\delta}_a} \cdot \dot{\delta}_a \end{cases}$$

Qual è la deflessione  $\delta_r$  per avere  $\beta = 0$ ?

$$\delta_r = - \frac{C_{n\dot{\delta}_a}}{C_{n\dot{\delta}_r}} \cdot \dot{\delta}_a$$

QUESTO È  $\delta_r = f(\dot{\delta}_a)$ : IL PILOTA DIFFICILMENTE POTREBBE GESTIRLO CON PRECISIONE (me non è detto...)

"BASTA" IMPLEMENTARLO SUL FLIGHT CONTROL SYSTEM (FCS) e il gioco è fatto! 😊

... ma in campo **POST-STALLO** (vedi alte incidenze)

+  $\Delta\alpha$  causa  $-\Delta C_L$  e viceversa!

→ Il momento che nasce non va a smorzare  $p$  ma dà origine a una **ROTAZIONE AUTOSOSTENUTA!**

**LINEARE**

$C_{ep} \rightarrow$  **ROLL DAMPER**

$$|C_{ep} < 0|$$

**POST-LINEARE**

$$|C_{ep} > 0|$$

$$C_e(p) = C_{ep} \cdot \hat{p}$$

Alta incidenza + rotazione auto sostenuta = **CADUTA IN VITE!**

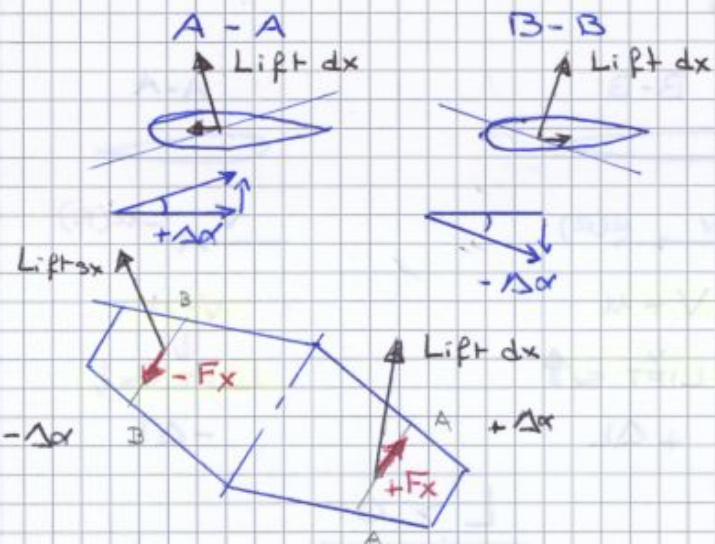
MOMENTO DI IMBARDATA  $N(p)$

2 contributi:

1) **AUMENTO DI DRAG** indotta sulla semiala dove si ha  $\Delta\alpha(+)$  →  $\Delta L(+)$   
 $N(p) > 0$



2) **CONTRIBUTO DOVUTO A VARIAZIONE DELLA DIREZIONE DELLA PORTANZA**



La portanza sviluppata da un profilo è sempre  $\perp$  alla velocità sentita!

Scomponendo la portanza secondo gli assi si nota che c'è una componente  $+F_x dx$  e  $-F_x sx$

$$N(p) < 0$$

$$|C_{mp} < 0|$$

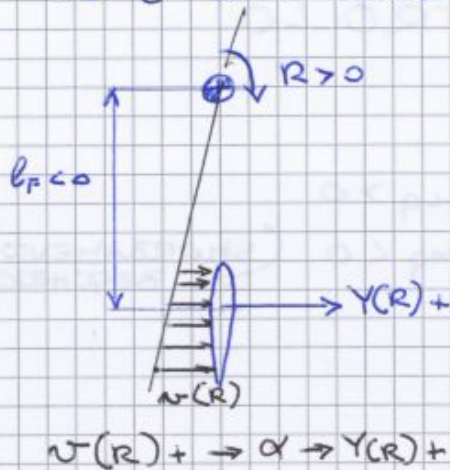
Quindi come sarà il segno di  $N(p)$ ?

→ Sarà  **$N(p) < 0$**  perché **PREVALE L'EFFETTO DELLA LIFT.**

$$N(p) = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{np} \cdot \hat{p} = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{np} \cdot p \cdot \frac{b}{2V} = \frac{1}{4} \rho V b^2 S C_{np} \cdot p$$

## MOMENTO DI IMBARDATA $N(R)$

IL contributo + rilevante è quello dovuto alla deriva, ed è ovviamente legato alla forza  $Y(R)$  indotta.



$$N(R) = Y(R) \cdot l_F < 0$$

$$C_n(R) = C_y(R) \cdot \frac{l_F}{b}$$

$$= 2\alpha_F \underbrace{V_v}_{<0} \cdot \frac{|l_F|}{b}$$

$$C_{m_z} = 2\alpha_F V_v \frac{|l_F|}{b}$$

$$C_{m_z} < 0$$

Tutti questi sono i PRINCIPALI effetti accoppiati, ma ci sono tutti gli effetti accoppiati secondari

es: CONSIDERARE I PIANI DI CODA

es.2: Velocità angolare  $P$  induce  $Y(P)$  in coda, ma a sua volta  $Y(P)$  porta ad un  $L > 0$ , che va a sovrapporsi a  $L(P) < 0$  dato dalle ali.

es.3: Velocità angolare  $R$  induce  $Y(R)$  su deriva... che però ha un braccio  $z_F$  rispetto a CG!  
 $\rightarrow L_F(R)!$



## CAPITOLO 4.

# STABILITÀ DINAMICA

• **Stabilità statica:** capacità del sistema di ritornare in equilibrio dopo una perturbazione

▲ **Stabilità DINAMICA:** capacità del sistema di ritornare in equilibrio **ENTRO UN OPPORTUNO INTERVALLO DI TEMPO** E CON UNA **OPPORTUNA LEGGE TEMPORALE** (time history)

↓  
 COME il velivolo  
 ritorna in equilibrio

▲ **LA STABILITÀ STATICA È NECESSARIA, ma non sufficiente, per avere STABILITÀ DINAMICA**

■ Parametri fondamentali per la stabilità dinamica

→ PULSAZIONE  $\omega$

→ SMORZAMENTO  $\zeta$

Sistema dinamico del 2° ordine:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

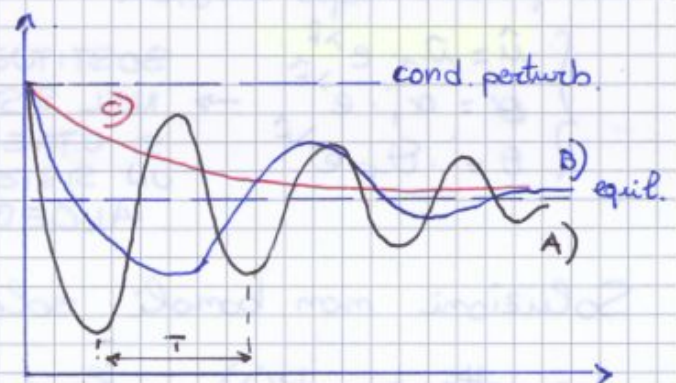
$C_{mq}$   
 ↑  
 c: coeff. SMORZAMENTO  
 K: coeff. RIGIDEZZA  
 ↓  
 $C_{mq}, C_{m\dot{\alpha}}, \dots$

Perturbando il velivolo dalla sua condizione iniziale avremo una risposta:

A) SUBCRITICA A BASSO SMORZAMENTO: OSCILLATORIA  
 breve periodo, frequenza naturale elevata  
 $\zeta_A < 1$

B) SUBCRITICA A MEDIO SMORZAMENTO:  $\zeta_A < \zeta_B < 1$ , bassa frequenza oscillatoria

C) SUPERCRITICA AD ALTO SMORZAMENTO:  
 NON OSCILLATORIA → risposta aperiodica  
 $\zeta_C > 1$



## Formulazione STATE - SPACE

→ modello matematico linearizzato risolto rispetto alle **ACCELERAZIONI**

$$\begin{cases} D\hat{u} = \\ D\alpha = \\ D\hat{q} = \\ D\theta = \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} \\ \hat{u} \\ \alpha \\ \hat{q} \\ \theta \end{cases} = \begin{cases} \bar{A} \\ \bar{B} \end{cases} \begin{cases} \hat{x} \\ \hat{u} \end{cases} + \begin{cases} \bar{C} \\ \bar{D} \end{cases} \begin{cases} \hat{u} \\ \alpha \end{cases}$$

MATRICE DI STATO
MATRICE DI CONTROLLO

$$\{\hat{x}\} = \{\hat{u}, \alpha, \hat{q}, \theta\}^T \quad \{\hat{u}\} = \{\Delta C_T, \delta e\}^T = 0$$

→  $\{\dot{\hat{x}}\} = [A]\{\hat{x}\} \quad \textcircled{*}$  ↑  
free flight

Soluzione generale:  $\{\hat{x}\} = [E] \cdot \{e^{\lambda t}\}$

$[E]$  = matrice degli AUTOVETTORI

$$E = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \hat{q}_3 & \hat{q}_4 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix}$$

Andiamo a SOSTITUIRE LA

SOLUZIONE GENERALE NEL SISTEMA DI ODE:

derivando  $\{\hat{x}\} \rightarrow \{\dot{\hat{x}}\} = \lambda [E] \{e^{\lambda t}\}$

$\textcircled{*} \rightarrow \lambda [E] \{e^{\lambda t}\} = [A][E] \{e^{\lambda t}\}$

$$\lambda [E] - [A][E] = 0 \rightarrow (\lambda [I] - [A])[E] = 0$$

Soluzioni non banali:

Imponi:  $\det(\lambda [I] - [A]) = 0$

→  $P(\lambda) = 0 \rightarrow A_1 \lambda^4 + B_1 \lambda^3 + C_1 \lambda^2 + D_1 \lambda + E_1 = 0$

Piano long → POLINOMIO CARATT. 4° GRADO

$$\begin{cases} \hat{u} = \hat{u}_1 e^{\lambda_1 t} + \hat{u}_2 e^{\lambda_2 t} + \hat{u}_3 e^{\lambda_3 t} + \hat{u}_4 e^{\lambda_4 t} \\ \alpha = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} + \alpha_4 e^{\lambda_4 t} \\ \hat{q} = \hat{q}_1 e^{\lambda_1 t} + \hat{q}_2 e^{\lambda_2 t} + \hat{q}_3 e^{\lambda_3 t} + \hat{q}_4 e^{\lambda_4 t} \\ \theta = \theta_1 e^{\lambda_1 t} + \theta_2 e^{\lambda_2 t} + \theta_3 e^{\lambda_3 t} + \theta_4 e^{\lambda_4 t} \end{cases}$$

I coefficienti  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  sono funzione delle derivate aerodinamiche (vedi esercitazione 2)

**⚠** Siamo ancora in campo lineare, cioè: per un  $\alpha \rightarrow$  un solo  $C_L$ .

CONDIZIONE CRITICA:  $\Delta > 0$  e  $C_1 > 0$

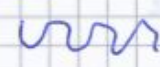
- Caso  $\Delta = 0$  dà 2 radici reali o complesse di segno opposto:  $\lambda = \pm \sigma$  oppure  $\lambda = \pm i\sigma$

Sostituendole nel polinomio caratteristico (sostituiamo solo  $\sigma$ )

$$\begin{cases} a) A_1 \sigma^4 + B_1 \sigma^3 + C_1 \sigma^2 + D_1 \sigma + \bar{E}_1 = 0 \\ b) A_1 \sigma^4 - B_1 \sigma^3 + C_1 \sigma^2 - D_1 \sigma + \bar{E}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b) 2A_1 \sigma^4 + 2C_1 \sigma^2 + 2\bar{E}_1 = 0 \\ b-a) 2B_1 \sigma^3 + 2D_1 \sigma = 0 \end{cases} \rightarrow \sigma(B_1 \sigma + D_1) = 0 \begin{cases} \sigma = 0 \\ \sigma^2 = -\frac{D_1}{B_1} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = -\frac{D_1}{B_1}$$

►  $D_1$  e  $B_1$  CONCORDI  $\rightarrow \sigma^2 < 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sigma$   
 (male)  $\leftarrow$  NON SMOZZATO!  $\leftarrow$   OSCILLATORIO

►  $D_1$  e  $B_1$  DISCORDI  $\Rightarrow \sigma^2 > 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sigma$

⇨ EVOLUZIONE APERIODICA DIVERGENTE (peggio!)

- $\bar{E}_1 = 0$  STABILITÀ NEUTRA

$\bar{E}_1 < 0 \Leftrightarrow$  RIGIDEZZA DEL SISTEMA

$\bar{E}_1 > 0$  è un requisito per avere il sistema dinamicamente stabile

$$\bar{E}_1 = C_{we} \left[ \underbrace{C_{mu}(C_{L\alpha} + C_{D\alpha})}_{< 0} - \underbrace{C_{m\alpha}}_{< 0} (C_{L\alpha} + 2C_{D\alpha}) \right] > 0$$

$\Delta$  È necessario che  $C_{m\alpha} < 0$  per avere stabilità dinamica ... MA NON BASTA!!

Perché se abbiamo  $|C_{mu}(C_{L\alpha} + C_{D\alpha})| > |C_{m\alpha}(C_{L\alpha} + 2C_{D\alpha})|$   
 $\rightarrow \bar{E}_1 < 0$  E L'AEREO È DINAMICAMENTE INSTABILE!!!

Ecco xk non basta la stabilità statica!

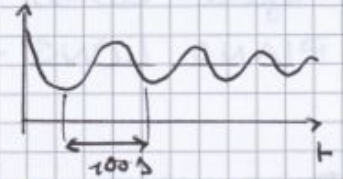


I 2 modi propri longitudinali sono:

- **FUGOIDE**: lungo periodo ( $\rightarrow$  bassa frequenza), poco smorzato, tempo di dimezzamento lungo

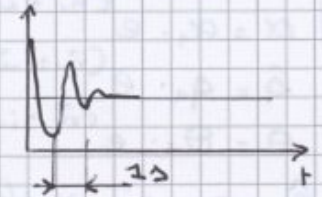
$$T_{ph} \approx 10 \div 100 \text{ s} \quad t_{1/2} \approx 10 \div 100 \text{ s}$$

(I tempi dipendono dalla dimensione dell'aereo)



- ▲ **SHORT PERIOD**: corto periodo ( $\rightarrow$  alta freq.), molto smorzato,  $t_{1/2}$  di decimi di secondo

$$T_{sp} \approx 1 \text{ s} \quad t_{1/2sp} \approx \frac{1}{10} \text{ s}$$



Riferendosi al sistema di 2° ordine

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\omega} &= \sqrt{\hat{m}_{1,2}^2 + \hat{\omega}_{1,2}^2} \\ \zeta &= -\frac{\hat{m}_{1,2}}{\hat{\omega}} \end{aligned} \right.$$

**PULSAZIONE PROPRIA** (o naturale) DEL SISTEMA (non smorzato)

**FATTORE DI SMORZAMENTO** (è adimensionale già di suo)

⚠ La pulsazione propria maggiore si serve DIMENS!

$$\omega_{ph/sp} = \frac{2V}{c} \sqrt{\hat{m}_{1,2}^2 + \hat{\omega}_{1,2}^2} \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

**OCCHIO A NON CONFONDERE**  $\hat{\omega}_{sp/ph}$  con  $\hat{\omega}_{1,2}$  !

Come si capisce quale modo è fugoide e quale sp?

$\rightarrow$  Basta vedere i periodi!

Se  $\begin{matrix} T_1 > T_2 \\ \hat{\omega}_{\text{modo 1}} < \hat{\omega}_{\text{modo 2}} \end{matrix} \Rightarrow$  IL MODO 1 SARÀ IL FUGOIDE!

Il polinomio caratteristico si può riscrivere evidenziando i 2 modi:

$$(\lambda^2 + 2\zeta_{ph} \hat{\omega}_{ph} \lambda + \hat{\omega}_{ph}^2)(\lambda^2 + 2\zeta_{sp} \hat{\omega}_{sp} \lambda + \hat{\omega}_{sp}^2) = 0$$

## EQUAZIONI APPROSSIMATE FUGOIDE

Dall'analisi degli autovettori è già emerso che possiamo **ritenere  $\alpha \approx 0$**   $\rightarrow \hat{x}_{ph} = \{\hat{u}_1, \theta_1\}$

viene a cadere l'eq. del momento di beccheggio

$$\rightarrow \begin{cases} (2\mu \cdot D - C_{T_u} + C_{D_u}) \hat{u} + C_{w_e} \cdot \theta = 0 \\ (2C_{L_e} + C_{L_u}) \hat{u} - 2\mu D \theta = 0 \end{cases}$$

Eq. della dinamica assi stabilita, ...

Supponendo **soluzioni armoniche e sostituendole nel sistema** [questo non è state-space!]

$$\begin{cases} \hat{u} = \hat{u}_1 \cdot e^{\lambda t} \\ \theta = \theta_1 \cdot e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$[\lambda] \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\det([\lambda]) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\mu \cdot \lambda - C_{T_u} + C_{D_u} & + C_{w_e} \\ 2C_{L_e} + C_{L_u} & - 2\mu \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow -4\mu^2 \lambda^2 + (C_{T_u} + C_{D_u}) 2\mu \lambda - 2C_{L_e} C_{w_e} - C_{L_u} C_{w_e} = 0$$

Trascuriamo effetti di compressibilità,  $C_{L_e} = C_{w_e}$

$$4\mu^2 \lambda^2 - 2C_{T_u} \mu \lambda - 2C_{L_e}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{2\mu C_{T_u}}{4\mu^2} \lambda + \frac{2C_{L_e}^2}{4\mu^2} = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - \frac{C_{T_u}}{2\mu} \lambda + \frac{C_{L_e}^2}{2\mu^2} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\zeta_{PH} \hat{\omega}_{PH} \lambda + \hat{\omega}_{PH}^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\zeta_{PH} \hat{\omega}_{PH} = -\frac{C_{T_u}}{2\mu} \\ \hat{\omega}_{PH}^2 = \frac{C_{L_e}^2}{2\mu^2} \end{cases}$$

L'eq. di 2° grado si risolve:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\zeta_{PH} \hat{\omega}_{PH} \pm \sqrt{4\zeta_{PH}^2 \hat{\omega}_{PH}^2 - 4\hat{\omega}_{PH}^2}}{2}$$

$$= \frac{-\zeta_{PH} \hat{\omega}_{PH} \pm \hat{\omega}_{PH} \sqrt{\zeta_{PH}^2 - 1}}{\hat{\omega}_{PH}}$$

- se  $\zeta_{PH}^2 > 1 \rightarrow$  SOLUZIONI REALI  $\Rightarrow$  APERIODICO
- se  $\zeta_{PH}^2 < 1 \rightarrow$  " COMPLESSE CONIUGATE  $\Rightarrow$  OSCILLATORIO

# FUGOIDE: Approssimazione di Lonchesteer

## TRASCURIAMO EFFETTI DISSIPATIVI

vediamo il fugoide come una continua trasformazione di energia potenziale in cinetica e viceversa  
 NO SMORZZAMENTO = CONSERVAZIONE ENERGIA!



$\theta = \alpha + \gamma$  fugoide  $\alpha \approx 0$

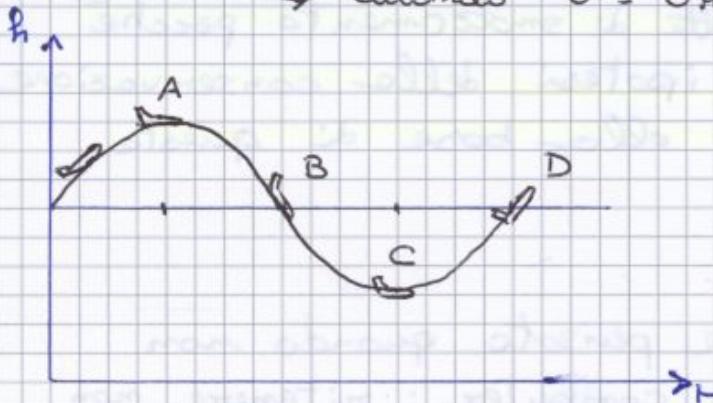
$\theta \approx \gamma$

$V = V \cos \gamma \approx V$

$\hat{u}_1$  e  $\theta$  sono in quadratura di fase

→ SFASATI DI 90°,  $\theta$  è in ritardo di 90° risp  $\hat{u}_1$

→ Quando  $\theta = \theta_{MAX} \rightarrow M_1 = u_{min} \dots$



A  $\begin{cases} M_1 = u_{min} \\ \theta_1 = \gamma_1 = 0 \end{cases}$   
 MAX  $E_p$   
 min  $E_k$

B  $\begin{cases} u_1 = 0 \\ \theta_1 = \theta_{MAX} \end{cases}$

C  $\begin{cases} u_1 = u_{MAX} \\ \theta_1 = 0 \end{cases}$   
 MAX  $E_k$   
 min  $E_p$

D  $\begin{cases} u_1 = 0 \\ \theta_1 = \theta_{MAX} \end{cases}$

⚠  $u$  = velocità di perturbazione!

CONSERVAZIONE ENERGIA TRA A e B

$\frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + m g h \rightarrow V_B^2 = V_A^2 + 2 g h$

Come si esprime la LIFT in B?

$L_B = \frac{1}{2} \rho V_B^2 S C_{L_e} = \frac{1}{2} \rho V_A^2 S C_{L_e} + \frac{1}{2} \rho \cdot 2 g h S C_{L_e}$

$L = \frac{1}{2} \rho V_A^2 S C_{L_e} + C_{L_e} \rho S g h$

costante per piccole variazioni di quota

→  $L = W + k \cdot h$

LA PORTANZA CAMBIA LINEARMENTE CON LA QUOTA DURANTE L'EVOLVERSI DEL MOTO.

→ FUGOIDE → OSCILLAZIONI DI PORTANZA

## EQUAZIONI APPROSSIMATE SHORT PERIOD

Possiamo ritenere  $\hat{u} = 0 \rightarrow$  viene a cadere l'eq. lungo asse  $x \rightarrow$  variabili stato  $\alpha, \vartheta$

$$\downarrow z: \begin{cases} (2\mu D + C_{\alpha} \cdot D + C_{\alpha} \cdot C_{\alpha})\alpha - 2\mu D\vartheta = 0 \\ \rightarrow y: \begin{cases} -(C_{m\alpha} + C_{m\alpha} \cdot D)\alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\vartheta} D)\vartheta = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Soluzioni armoniche e si sostituiscono nel sistema, si ricava  $[\lambda]$ , si fa  $\det[\lambda] = 0$   
[...]

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_2 e^{\lambda t} \\ \vartheta = \vartheta_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\lambda^2 + \frac{\hat{I}_y \cdot C_{\alpha}}{2\mu \hat{I}_y} \lambda - \frac{C_{m\vartheta} \cdot C_{\alpha} + 2\mu C_{m\alpha}}{2\mu \hat{I}_y} = 0$$

$$\begin{cases} 2\zeta_{sp} \hat{\omega}_{sp} = \frac{\hat{I}_y C_{\alpha} - 2\mu (C_{m\vartheta} + C_{m\alpha})}{2\mu \hat{I}_y} \\ \hat{\omega}_{sp}^2 = - \frac{C_{m\vartheta} C_{\alpha} + 2\mu C_{m\alpha}}{2\mu \hat{I}_y} \end{cases} \quad (*)$$

$$\lambda_{3,4} = -\zeta_{sp} \hat{\omega}_{sp} \pm \hat{\omega}_{sp} \sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1}$$

$$\hat{m}_1 = -\zeta_{sp} \hat{\omega}_{sp} \quad \hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_{sp} \sqrt{|\zeta_{sp}^2 - 1|}$$

$\zeta_{sp}^2 > 1$ : SOL. REALI  $\rightarrow$  APERIODICO  
 $\zeta_{sp}^2 < 1$ : SOL. COMPLEX  $\rightarrow$  OSCILLATORIO

Per il modo oscillatorio, riprendendo (\*):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{sp} = \sqrt{-\frac{2\mu C_{m\alpha} + C_{m\vartheta} C_{\alpha}}{2\mu \hat{I}_y}} = \sqrt{-\frac{C_{m\alpha}}{\hat{I}_y} - \frac{C_{m\vartheta} C_{\alpha}}{2\mu \hat{I}_y}} \\ \zeta_{sp} = \frac{\hat{I}_y \cdot C_{\alpha} - 2\mu (C_{m\vartheta} + C_{m\alpha})}{2 \left[ -2\mu \hat{I}_y (2\mu C_{m\alpha} + C_{m\vartheta} C_{\alpha}) \right]^{1/2}} \end{cases}$$

▲  $\hat{\omega}_{sp}$ : Considerando che  $C_{m\alpha} = C_{\alpha} (h_m - h_N)$

$$-\frac{C_{m\vartheta}}{2\mu - C_{\alpha}} = h_m - h_N$$

trascurando  $C_{\alpha}$  si può esprimere la PULSAZIONE IN FUNZIONE DEL MARGINE DI MANOVRA

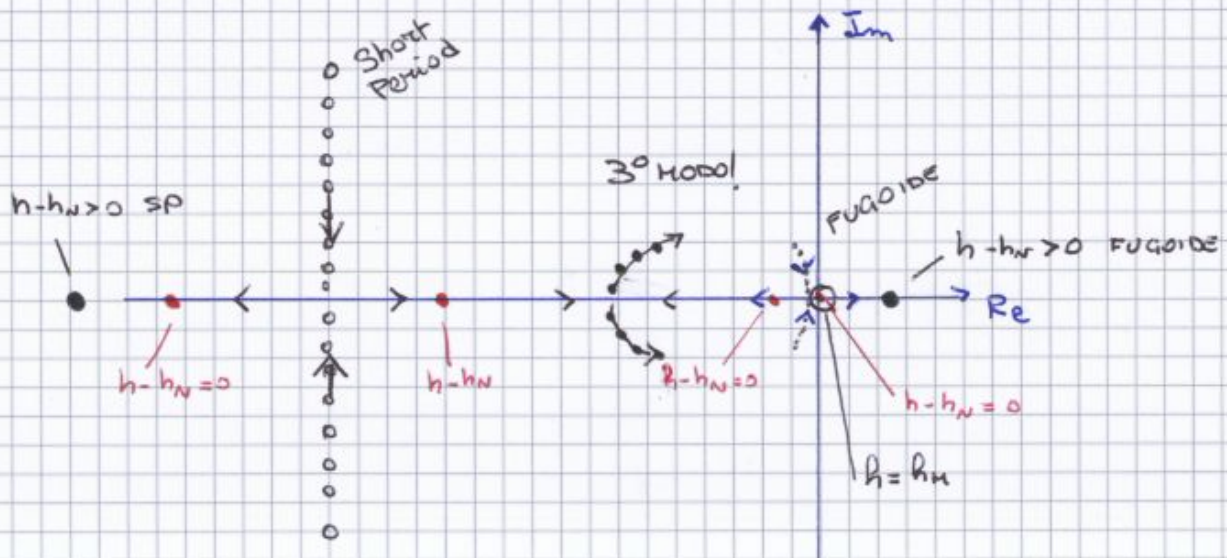
Memo: se  $h = h_m$  il velivolo entra spontaneamente in una rickiamata NON COMANDATA

## CORTO PERIODO

L'effetto del ca si può già vedere dalle equazioni approssimate.

- $(h-h_N) \downarrow$  :  $\hat{\omega}_2 \downarrow$ ,  $\hat{n}_2 \approx \text{costante}$
- $h \approx h_N$  : 2 soluzioni reali, smorzate aperiodiche ma poiché lo short period è + lontano dallo zero del fugoide esso rimarrà STABILE ANCHE PER  $(h-h_N) > 0$
- CRITICO :  $\lambda = 0$  quando  $h = h_{crit} \approx h_m$ .  $\rightarrow$  cioè per  $\hat{\omega}_{sp} = 0$   
 Se  $h > h_m \rightarrow$  modo di PULL UP!  
 Manovra spontanea

**⚠ SHORT PERIOD E FUGOIDE AVENGONO CONTEMPORANEAMENTE, NON SONO 2 COSE SLEGATE!**



LE FRECCHE VANNO CON IL CALARE DI  $h-h_N$  DA negativo o positivo

Per  $h > h_N$  fugoide e short period si incontrano nel 3° modo.

$h - h_N > 0 \rightarrow$  3 MODI  $\begin{cases} \rightarrow$  APERIODICO INSTABILE  
 $\rightarrow$  APERIODICO SMORZATO  
 $\rightarrow$  OSCILLATORIO SMORZATO



In STATE-SPACE le equazioni si scrivono in modo GENERALE, tirando in ballo anche  $\hat{p}$ ,  $\Psi$ , oltre a  $\beta$ ,  $\hat{z}$ ,  $\phi$ !  
 ⚠ CI SONO GLI EFFETTI ACCOPPIATI!

$$D\phi = \frac{\hat{p}}{A} + \frac{\hat{z}}{A} \tan \Theta_0$$

$$\{\hat{x}\} = \{\beta, \hat{p}, \hat{z}, \phi, \Psi\}^T$$

$$\{\dot{\hat{x}}\} = [A] \cdot \{\hat{x}\} + [B] \cdot \{U\} = 0$$

$\{U\} = \{\delta a, \delta z\}$  vettore di controllo

[...] Free motion,  $\Theta_0 = 0, \dots$   $[\lambda] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \phi \\ \hat{z} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \det[\lambda I] = 0, \varphi(\lambda^n) = 0 \rightarrow \lambda_i$

Soluzione generale  $\{\hat{x}\} = [E] \{e^{\lambda F}\}$  STATE SPACE  
 oppure

$$\det(\lambda I I - [A]) = 0$$

$\varphi(\lambda^n) = 0$  Polinomio caratteristico

$$\begin{cases} \beta = \beta_1 e^{\lambda_1 F} + \beta_2 e^{\lambda_2 F} + \dots + \beta_5 e^{\lambda_5 F} \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

### POLINOMIO DEL 5° ORDINE

$$A_2 \lambda^5 + B_2 \lambda^4 + C_2 \lambda^3 + D_2 \lambda^2 + E_2 \lambda$$

Soluzioni:

- $\lambda = 0 \rightarrow$  Heading mode  $\rightarrow$  SI TRASCURA SEMPRE!

Criterio di Routh

$$\begin{cases} A_2 > 0 \\ B_2 > 0 \\ D_2 > 0 \\ E_2 > 0 \\ \Delta = B_2 C_2 D_2 - A_2 D_2^2 - B_2^2 E_2 > 0 \end{cases}$$

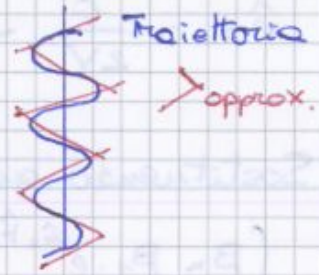
Abbiamo soluzioni STABILI  
 $\rightarrow$  soluz. complesse coniugate con parte  $Re < 0$   
 • Reali negative o periodiche  
 SE

Ci saranno:

- 2 SOLUZ. APERIODICHE
- 2 " OSCILLATORIA
- (una sol.  $\lambda = 0$ )

$$\begin{cases} \lambda_1 = \hat{m}_1 \\ \lambda_2 = \hat{m}_2 \\ \lambda_{3,4} = \hat{m}_3 \pm i \hat{\omega}_3 \end{cases}$$

Il Dutch Roll è un cosimo!  
 L'unica approx è che  $\beta = -\psi$

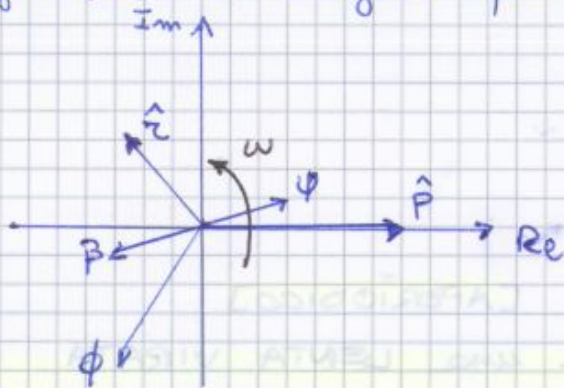


$$\begin{cases} \hat{\omega}_d = \sqrt{\hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2} \\ \zeta_d = -\frac{\hat{n}_3}{\hat{\omega}_d} \end{cases}$$

L'equaz. caratteristica si risolve come:

$$(\lambda - \hat{n}_1)(\lambda - \hat{n}_2)(\lambda^2 - 2\zeta_d \hat{\omega}_d \lambda + \hat{\omega}_d^2) = 0$$

Diagramma di Argand per il DUTCH ROLL



$\hat{p}$  è il vettore di riferimento posto = 1.

⚠ Andare a studiosi le virgole ⚠

Analisi dei modi

1) SPIRAL

- $C_{r\beta}$ ,  $C_{rp}$ ,  $C_{rz}$  sono trascurabili (per il modo spirale)

► Equazioni approx [pag. 273]

- Eq. caract. 1° ordine:

$$2\mu (C_{e\beta} C_{mp} - C_{mp} C_{ep}) \lambda_1 + C_{we} (C_{e\beta} C_{mz} - C_{mp} C_{ez}) = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{C_{we}}{2\mu} \frac{C_{e\beta} C_{mz} - C_{mp} C_{ez}}{C_{e\beta} C_{mp} - C_{mp} C_{ep}}$$

- $C_{e\beta} C_{mz} > 0$
- $C_{mp} C_{ep} < 0$
- $C_{e\beta} C_{mp} > 0$
- $C_{mp} C_{ez} > 0$

SPIRAL MODE È STABILE SE  $\lambda_1 < 0$

# VOLO AD ELEVATE INCIDENZE

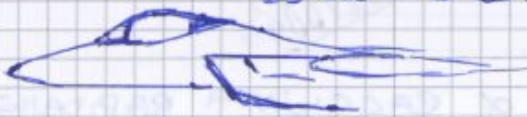
→ Aerei da combattimento, shuttle, ...

Elevate incidenze → FENOMENI CHE CON LE PICCOLE PERTURBAZIONI AVEVAMO TRASCURATO

- FORZE e MOMENTI AERODINAMICI NON HANNO PIÙ UN ANDAMENTO LINEARE

$C_{L\alpha}$  non è + costante, ma è  $f(\alpha)$ !

Forebody: parte di fusoliera ANTERIORE al bordo d'attacco.



⚠ Non confondere una rampa a  $70^\circ$  con un angolo di incidenza elevato!



ANGOLO DI ASSETTO

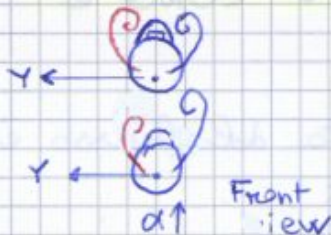
$$\theta = \gamma + \alpha$$

Fig. 2: Andamenti di  $C_{m\alpha}$  [MEMO: x stabilità  $C_{m\beta} > 0$ ]



Configurazione delta.

- DISTACCO DI STRATO LIMITE E RIAVOLGIMENTO SU SE STESSO VORTICI



Per  $\alpha \uparrow$  i VORTICI SONO ASIMMETRICI!

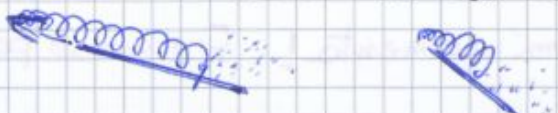
⇒ NUOVI EFFETTI ACCOPPIATI TRA PIANO LONGITUDINALE e DIREZIONALE

VORTICE: ha una velocità assiale

Se  $\alpha \uparrow$  la  $V_{assiale}$  scende. Sotto un certo valore il vortice SCOMPARE → "vortex breakdown"

Posizione del punto di break down:

$\alpha \uparrow \Rightarrow$  SI SPOSTA PROGRESSIVAMENTE DAL BORDO DI FUGA A QUELLO DI ATTACCO



# MECCANICA DEL VOLO 3/12/2013

... continua manovre ad alta incidenza

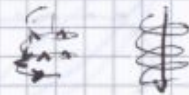
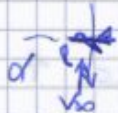
→ COBRA: se la frequenza è alta si può fare anche senza thrust vectoring sfruttando l'isteresi dei vortici

→ HERBST:  $\beta$  cresce progressivamente  
CAMBIO DI DIREZIONE RAPIDO con minima perdita di quota

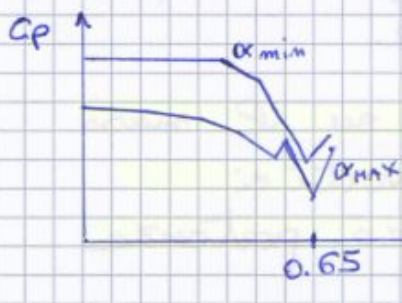
\* cobra serve per rollentare rapidamente e portarsi in coda al nemico

→ Perdita di quota rapida

→ Helicopter gun manovre: discesa verticale con  $\alpha = 90^\circ$  e traiettoria spirale



## Andamento del $C_p$ con $\alpha$ su di $\alpha \Delta$



$\alpha_{max}$ :  $C_p$  + negativo

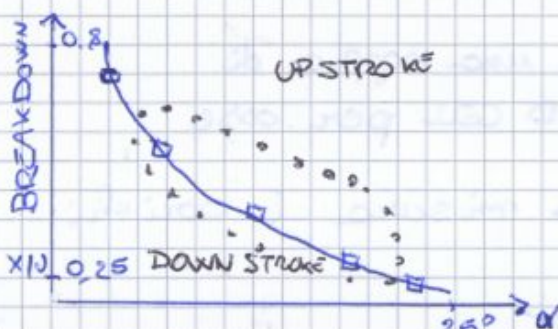


$\beta \neq 0$   
Da un lato fa aumentare  $v$  dall'altro la riduce

$v$  + bassa  $\rightarrow$  vortice va in breakdown

## • Pubblicazione.

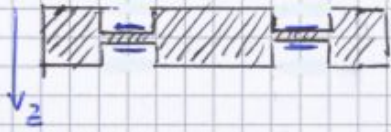
L'aggiunta della fusoliera all'ala a delta aggiunge 2 vortici che danno maggiore velocità assiale ai vortici sull'ala [li energizzano] e ne posticipano il breakdown.



## □ MISURAZIONE STATICA

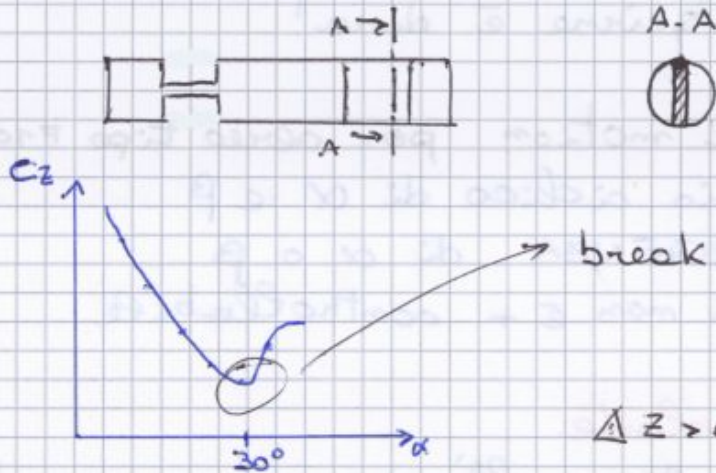
- Misurazione con una oscillazione di  $\pm 3^\circ$  con  $f = 5\text{Hz}$  attorno ad  $\alpha = 20^\circ$

Misurazioni dinamiche: serve una giusta deformabilità delle celle di carico.



Cilindretto con materiale esportato.  
Sulle lome ci sono estensimetri

Misura momento di rollio: cilindro con lome poste a  $90^\circ$



- Accoppiamento tra vortici causa una forte NON LINEARITA'.

## WING ROCK

È un'oscillazione in rollio con ampiezza che aumenta progressivamente fino a un valore limite.

Alti  $\Phi$ , causano anche Lift diversa sulle  $z$  di  $i$  e quindi innescano anche dei MODI DIREZIONALI che però ora trascuriamo.

⚠ WING ROCK  $\neq$  DUTCH ROLL ⚠

- Wing rock degrada le handling qualities del velivolo.

O si controlla il wing rock con il FCS oppure si limita l'incidenza di quel velivolo!

Wing rock dipende da  $\alpha$  e dai vortici d'lori ( $\leadsto$  non lineare)

- Aerei veloci e agili (jet da combattimento) devono avere una stabilità RIDOTTA o essere INTRINSECAMENTE INSTABILI!  
Il velivolo non deve tendere a opporsi al comando come negli aerei da trasporto!

Quali derivate aerodinamiche fanno entrare il velivolo in wing rock?

- **CROSS COUPLING derivatives**  $\rightarrow$   $C_{\phi\alpha}$  NON LINEARE  
Qual è la derivata che varia non linearmente?

$C_{\phi\dot{\alpha}}$  variazione del momento di rollio al variare della velocità di rollio  
• **NON LINEARE PER ALTE  $\alpha$ !**

$C_{\phi\dot{\alpha}} < 0$  per avere la stabilità.

... ma se  $C_{\phi\dot{\alpha}} > 0 \rightarrow$  **INSTABILITÀ DELLO SMORZAMENTO DEL ROLLIO**

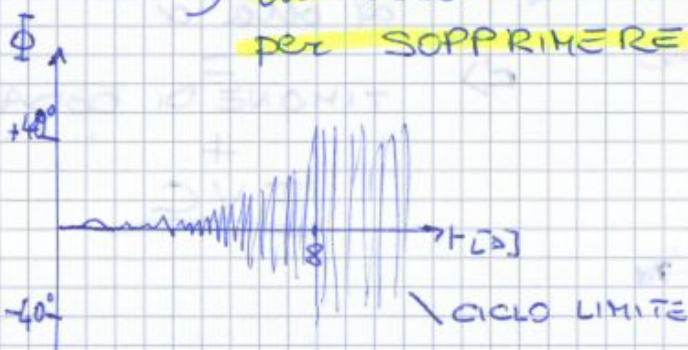
MOTO CONICO:  $\beta$  dipende poi anche da  $\dot{\alpha}$  e da  $\alpha$ .

- $C_{\phi\dot{\alpha}} < 0$  : STABILITÀ DINAMICA IN ROLLIO
- $C_{\phi\dot{\alpha}} < 0$  e  $C_{\phi\dot{\alpha}} > 0$  non lineare  $\rightarrow$  **CICLO LIMITE**

$$C_{\phi\dot{\alpha}} < 0 + C_{\phi\dot{\alpha}} > 0 = \text{WING ROCK}$$

... se il velivolo esiste già cosa possiamo fare?

- 1) Cambiare la sezione del forebody (non facile!)
- 2) **Utilizzare i vortici del forebody per SOPPRIMERE IL WING ROCK**



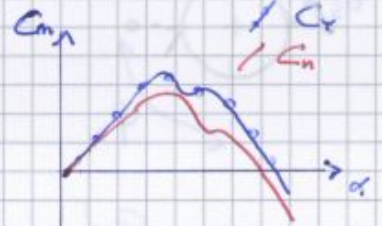
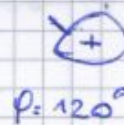
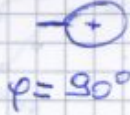
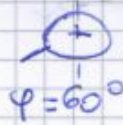
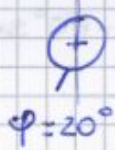
In 8 secondi orario al ciclo limite

## Benefit del FVC

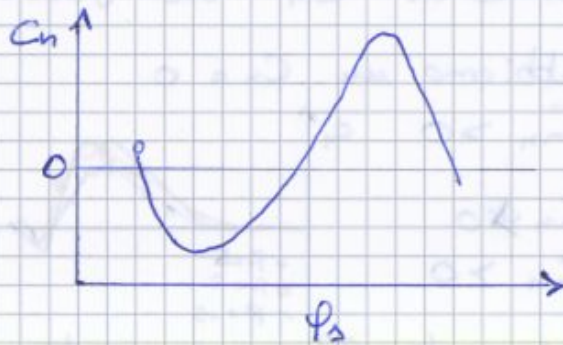
- Controllo robusto di imbardata ad alto  $\alpha$
- Sistema attivo di aumento della stabilità direzionale
- Aumentore yaw damping e roll damping

I vortici si stabilizzano se si usa un forebody chinmed (tipo F-35).

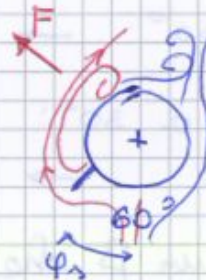
- Studio su F-18: mettiamo un'aletta sulla circonfer. del forebody e studiamo cosa succede a  $C_y$  e  $C_m$  cambiando la posizione dell'aletta. [visto da dietro]



STRAKES



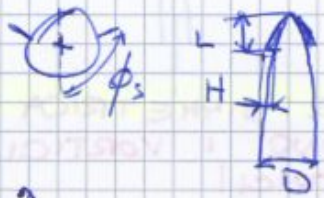
per  $\alpha = 50^\circ$



L'effetto in questo grafico è x un'aletta FISSA.

Ruotando l'aletta posso generare un momento imbardante! E ottenere perciò un CONTROLLO DIREZIONALE

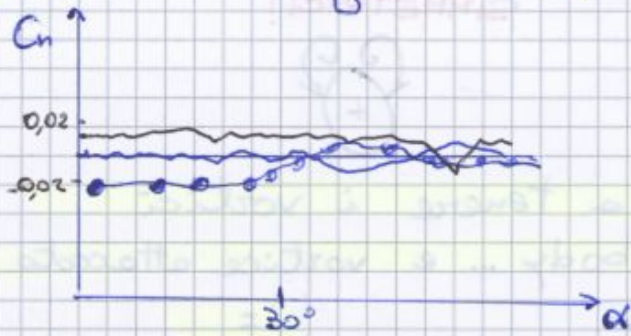
# FOREBODY CON STRAKES $\alpha \approx 105^\circ$ ACCOPPIATE



DIMENSIONE delle STRAKES?

$L = 1,5D$   
 $H = 0,1D$

→ sono piccole!  
 Non hanno certo la dimensione di un conard!

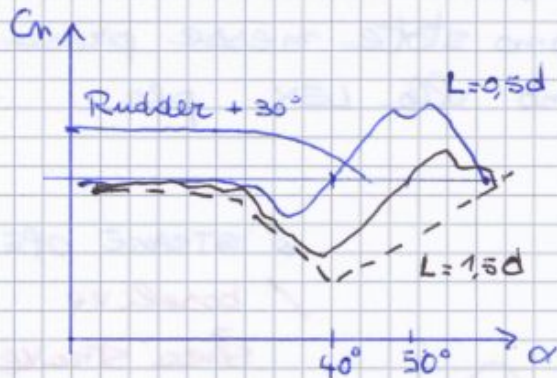


$C_n = 0$  anche per  $\beta = \pm 5^\circ$

sia per velivolo sia per il solo forebody con le strakes

Per  $\alpha > 30^\circ$  il timone e la deriva non sono + efficaci... e allora COME SI OTTIENE UN CONTROLLO IN IMBARDATA per alte incidenze?!

⇒ DEFLETTENDO GLI STRAKES!!!



Prova con solo strake dx

$L = 1,5d$  è quello che dà il risultato migliore xk non cambia segno il  $C_n$

VOGLIO CHE LA STRAKE SU QUEL LATO MI DIA  $C_n$  IN UNA SOLA DIREZ. AL VARIARE DELL'INCIDENZA!

F/A-18 HARV

- VELIVOLO ATTREZZATO PER IL VOLO AD ALTA INCIDENZA
- STRAKES MOBILI SUL RADOME

⚠ Tutti i dati sono ottenuti da PROVE DI VOLO!



• Per  $\alpha > 20^\circ$  ci sono vortici di forebody mentre sul modello in galleria del vento c'erano per  $\alpha > 30^\circ$

I valori di  $C_n$  SONO SIMMETRICI per la deflessione di quella di dx o di quella di sx da sé.



# FOREBODY JET BLOWING

→ PNEUMATIC FVC = SOFFIATURA SUL FOREBODY

ENERGIZZA IL VORTICE

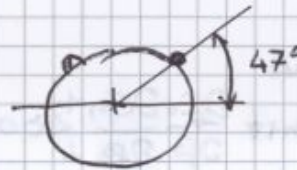
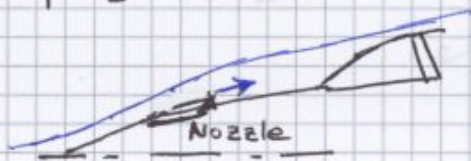
E NE POSTICIPA IL DISTACCO

1)  $C_M = \frac{\dot{m} v_j}{\rho_{\infty} S} \rightarrow C_M$   
 ↑  $\dot{m}$  velocità getto  
 portata aria

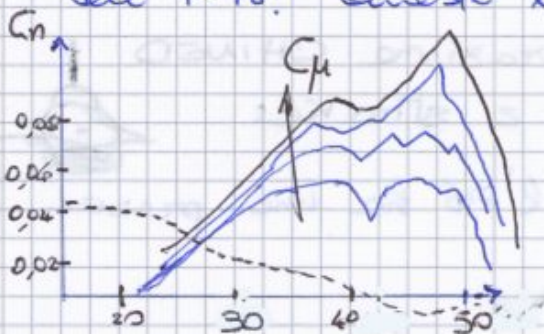
MOMENTUM  
BLOWING  
COEFFICIENT  $C_M$

2) MASS FLOW RATIO =  $\frac{\dot{m}}{\rho_{\infty} S v_{\infty}}$

F-5



L'efficacia del timone degrada ben prima di quello dell'F-18! Questo xk l'F-18 ha la doppia deriva.

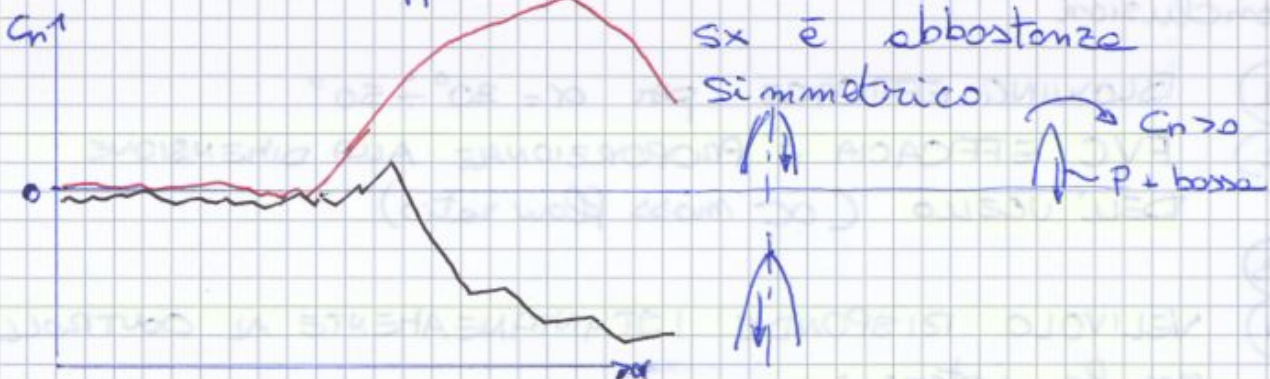


$C_n$  VARIA AL VARIARE

DEL  $C_M \rightarrow$  valore della portata di FLUIDO!

Rudder  $\delta r = 30^\circ$

Effetti della soffiatura: solo a dx o solo a sx è abbastanza

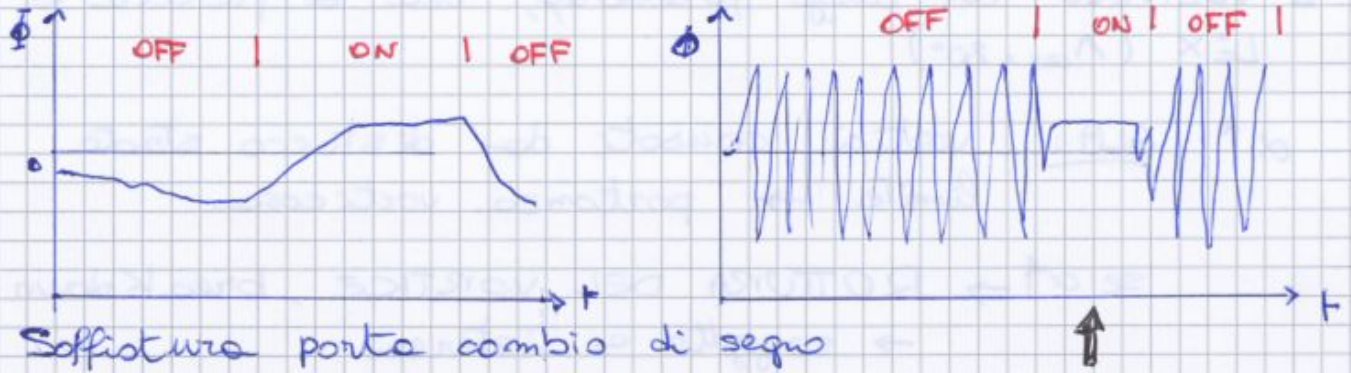


Strakes + BLOWING =  $\{best!\}$

Soffiatura con diverse intensità non influisce sul  $C_m$  (GRAZIE A DIO!)

## WING ROCK su F/A-18 + BLOWING

? Come stabilizzare / sopprimere il fenomeno?



Su F18 la soffiatura sul forebody stabilizza i vortici sulle ali. **SOPPRIMENDO IL WING ROCK!**

Soffiando solo da destra, solo da sinistra o insieme, il **WING ROCK SI ATTENUA!! YUPPI!!**

## NOSE TIP STRAKES

→ alternativa al mettere le strakes sul radome

→ OGIVA ELLITTICA

→ STRAKES SUL PITOT BOOM



→ JAS GRIPEN

## CHINED FOREBODY → F22 / F35

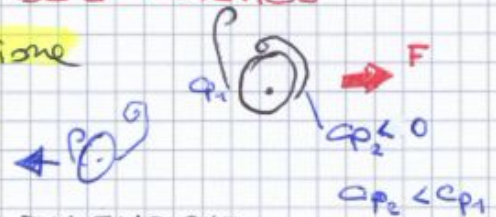


## Conclusioni FVC

- ◆ STRAKES MOBILI: deflessione
- ◆ NOSE TIP CHE GIRA
- SOFFIATURA: ugello circolare / fessura
- **CONTROLLO LA SEPARAZIONE DEL VORTICE**

→ **RITARDARE** separazione

→ **FORZARE** separazione



EFFICACIA  $\Leftrightarrow$  DIREZIONE SOFFIO, DIMENSIONI UGELLO

## MECCANICA DEL VOLO 11/12/13 IL MIO COMPLEANNO!! ☺

## CAPITOLO 5 : Modello matematico per alta incidenza

Manovre rapide, alta incidenza  $\rightarrow$  mondo in crisi  
il modello matematico visto nella prima parte del corso

- ▶ AZIONI AERODINAMICHE NON PIÙ LINEARI
- ▶ C'È ACCOPPIAMENTO TRA PIANO LONG. e LAT.-DIR.
- Breakdown dei vortici è SOGGETTO A ISTERESI.

A suo tempo, modello di Bryson  $\rightarrow$  c'era un SET di derivate.

Ora servono + derivate! CROSS DERIVATIVES  
ANCHE TRA PIANO LONG. e GLI ALTRI DUE.  $\rightarrow$  CROSS COUPLING DERIVATIVES

✦ Si è proceduto in modo EMPIRICO: prima le prove di volo e poi se ne è estratto un modello. Es: F-16 esisteva già e poi hanno fatto questi studi

Le derivate aerodinamiche si ottengono analiticamente o sperimentalmente in galleria del vento

... PROVE STATICHE PERÒ NON DANNO CERTE INFO!

es. Derivate rispetto alla variazione nel tempo degli angoli aerodinamici  $\rightarrow \dot{\alpha}, \dot{\beta}$

$$\alpha = \frac{\dot{z}}{V_0} \quad \beta = \frac{\dot{y}}{V_0}$$

$\Rightarrow$  Prove ad hoc!

Derivate:

- DIRETTE
- CROSS DERIVATIVES  $C_{Y\dot{\alpha}}, C_{Y\dot{\beta}}, C_{Z\dot{\alpha}}, C_{Z\dot{\beta}}$
- CROSS COUPLING DERIVATIVES:  $C_{Y\dot{\beta}}, C_{Z\dot{\alpha}}, C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \dots$
- ACCELERATION " :  $C_{L\ddot{\alpha}}, C_{D\ddot{\alpha}}, C_{Y\ddot{\alpha}}, C_{Z\ddot{\alpha}}, C_{m\ddot{\alpha}}, C_{n\ddot{\alpha}}$
- SPEED DERIVATIVES

[Incontreremo xk noi consideriamo volo a bassi M]

VOLO AD ALTA INCIDENZA = bassi Mach

$$\begin{cases} m\dot{U} + mgW = X + X_G - X_p \\ m\dot{W} - mgU = Z + Z_G \\ I_y \dot{q} = M \end{cases}$$

X: azione aerodinamica lungo x  
(non si chiama DRAG perché siamo in assi corpo)

$$X_G = mg \sin \theta$$

Ipotesi per utilizzare queste equazioni:

- 1) VELIVOLO È UN CORPO RIGIDO  
→ trascuriamo compressibilità e effetti aerodlastici
- 2) ISTANTE INIZIALE  $t_0$   
 $t < t_0 \rightarrow$  VOLO STAZIONARIO  
 $t = t_0 \rightarrow$  ENTRA IN MANOVRA
- 3) Da quando inizia la manovra  $\rightarrow t > t_0$   
 $|V_0| = \text{cost.}$
- 4) Non si considera l'asse X per la manovra
- 5) Altitudine non varia così tanto  
 $\rightarrow p = \text{cost} \Rightarrow M, Re = \text{cost}$  per  $t > t_0$

PER ORA assumiamo MOTO PIANO → PIANI DISACCOPIATI

$$\begin{cases} V = p = z = 0 \\ C_x = C_e = C_n = 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} V = p = z = 0 \\ C_x = C_e = C_n = 0 \end{cases}} \right\} \text{per il longitudinale}$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \gamma(t) q(t) + \frac{g}{V_0} \cos \theta(t) + \frac{\rho S V_0}{2m} C_z(t) \\ \dot{q}(t) = \frac{1}{2} \frac{\rho V_0^2 S c}{I_y} C_m(t) \end{cases}$$

Vettore di stato  $\begin{Bmatrix} \hat{\alpha} \\ q \\ \theta \end{Bmatrix}$

$\hat{\alpha} = \sin \alpha$   
PER TOBAG-SCHAIF

$$\hat{\alpha} = \frac{W}{V_0} = \sin \alpha \quad \gamma = \frac{U}{V_0} = \cos \alpha$$

Quale sarà il comportamento del velivolo al tempo  $t = t_0 + \Delta t$ ?

**⚠ QUI NON SI È LINEARIZZATO!**

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \sin \alpha \\ \gamma &= \cos \alpha \end{aligned}$$

$\gamma$  qui non è l'angolo di rampa!

Analogamente  $C_{mq}(\hat{\alpha}(\xi), q(\xi), t, \tau)$   
 Discontinuità di  $\hat{\alpha}$  e  $q$  quando  $\tau = \xi$ .

Noi consideriamo l'effetto della time history solo MOLTO VICINO A  $\tau$ : e noi basta sapere il SEGNO della variazione di incidenza (non l'intero time-history di  $\alpha$ ).

$$\rightarrow C_m(t) = C_m(t_0) + \int_{t_0}^t C_{m\alpha}[\hat{\alpha}(\xi), q(\xi), t, \tau] \frac{d\hat{\alpha}(\tau)}{d\tau} d\tau + \dots$$

$\xi$  è IMMEDIATAMENTE PRIMA DI  $\tau$

### Assunzioni semplificative

- (1)  $C_{m\alpha}$  e  $C_{mq}$  devono essere CONTINUE e sono funzioni che per OGNI  $\Delta\hat{\alpha}$  e  $\Delta q$  devono avere UN SOLO VALORE di  $C_{m\alpha}$ ,  $C_{mq}$ .
- (2) Non si considerano funzioni con discontinuità.
- (3)  $\xi = \tau$ , espansione di Taylor al 1° ordine  
 $\hat{\alpha}(\xi) \approx \alpha(\tau) + \dot{\alpha}(\tau)(\tau - \xi)$   
 $q(\xi) \approx q(\tau) + \dot{q}(\tau)(\tau - \xi)$   
 $\Rightarrow$  IL VALORE DI  $C_m(t)$  È INFLUENZATO DA  $\hat{\alpha}$  e  $q$  APPENA PRIMA DI  $\tau$ .
- (4)  $C_{m\alpha}$  e  $C_{mq}$  NON SONO INFLUENZATI DA  $\dot{\alpha}(\tau)$  e  $\dot{q}(\tau)$   
 $\rightarrow$  SI TRASCURANO LE ISTERESI  
 $\rightarrow$  vediamo qual è l'ondamento di  $\hat{\alpha}$  ( $\uparrow$  e  $\downarrow$ ) e poi ne prendiamo il valore in  $\tau$ .
- (5) Variazioni di moto abbastanza lente.  
 $\hat{\alpha}(\xi), q(\xi) \approx \text{cost}$  per  $\xi < \tau$   
 CIOÈ  $\hat{\alpha}$  e  $q$  variano in funzione di  $t - \tau$  come nella formulazione LINEARE

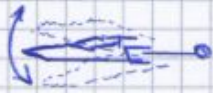
$\rightarrow$  trattazione semplificata non lineare

$$C_m(t) = C_m(t_0) + \int_{t_0}^t C_{m\alpha}(t - \tau, \hat{\alpha}(\tau), q(\tau)) \frac{d\hat{\alpha}(\tau)}{d\tau} d\tau + \dots +$$

$$+ \frac{L}{V_0} \int_{t_0}^t C_{mq}(t - \tau, \hat{\alpha}(\tau), q(\tau)) \frac{dq(\tau)}{d\tau} d\tau$$

DECOMPIAMO IN ARMONICHE applicate ai modi oscillatori

$C_{mq} + \gamma C_{m\dot{\alpha}}$  → COEFF. DI SMOZZAMENTO IN BECCHEGGIO  
 → si ricava facendo oscillare il modello intorno al baricentro in galleria del vento  
 (OSCILLAZIONI FORZATE)



Ultima formulazione di Tobak-Schiff  
MOTO NON PLANARE

⚠ I carichi aerodinamici sul long. sono INFLUENZATI DAL LATERO-DIREZIONALE e VICEVERSA!  
 → FOREBODY VORTEX CONTROL

vettore di stato  $\hat{X} = \{ \hat{\alpha}, \hat{\beta}, p, q, r \}$

$\hat{\beta} = \frac{v}{v_0} = \sin \beta$  NON PIÙ DIRE  ~~$\sin \beta \approx \beta$~~  !

$$C_m = H [ \hat{\alpha}(\xi), \hat{\beta}(\xi), p(\xi), q(\xi), r(\xi) ]$$

SEMPLIFICAZIONE!  $p \approx 0, q \approx 0, r \approx 0$

↓  
 NON SI APPLICA A COSE TIPO COBRA MANEUVER

$$C_m(t) = C_m(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + \frac{pe}{v_0} C_{m_p}(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + \frac{qe}{v_0} C_{m_q}(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + \frac{ze}{v_0} C_{m_z}(\dots) + \frac{\hat{\alpha}e}{v_0} C_{m_{\dot{\alpha}}}(\dots) + \frac{\hat{\beta}e}{v_0} C_{m_{\dot{\beta}}}(\dots)$$

Ciosex termine è una derivata di stabilità.

MEMO: se l'incidenza è alta  $p, q, r$  sono intorno al vettore velocità



ANCORA SEMPLIFICAZIONI se traiettoria è rettilinea

$$\begin{cases} \dot{q} \approx \frac{\dot{\alpha}}{\gamma} + p \frac{\hat{\beta}}{\gamma} \\ \dot{r} \approx -\frac{\hat{\beta}}{\gamma} + p \frac{\hat{\alpha}}{\gamma} \end{cases}$$

Con  $\alpha$  e  $\beta$  piccoli il CONING MOTION è una semplice manovra di rollio!

$$C_{K\dot{\phi}} = C_{K\dot{\psi}}!$$

Qual è la grande novità del modello di Tobak-Schiff? → **Ha messo in relazione il modello matematico con le prove sperimentali disponibili.**

- PROVE STATICHE
- OSCILLAZIONI
- BILANCIA ROTANTE

12  $T_x, T_y, T_z \rightsquigarrow$  THRUST VECTORING

$\vec{e}_x \cdot (\bar{I}_z - \bar{I}_y) \dot{\varphi} z \Rightarrow$  COPPIE GIROSCOPICHE

$\pm I_e \dot{\varphi} \dot{\varphi} z \rightarrow$  dovuti a velocità angolari eccoppide

# TOBAK-SCHIFF

Tabak!



Procediamo passo a passo

## STEP ONE

### VOLO PLANARE

- volo simmetrico
- velivolo corpo rigido
- istante  $t_0 \rightarrow t < t_0$  volo stazionario
- $t = t_0$  inizia manovra
- $\rightarrow$  no effetto time-history

- Manovra  $|\bar{V}| = \text{cost}$
- Moto piano

$$\begin{Bmatrix} \hat{\alpha} \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \hat{\alpha} = \sin \alpha$$

## FORMULAZIONE LINEARE

- Assumiamo che  $\hat{\alpha}$  e  $q$  variano per INCREMENTI DISCRETI  $\Delta \hat{\alpha}$  e  $\Delta q$

$$\Delta C_m = \frac{\Delta C_m(t-\tau)}{\Delta \hat{\alpha}} \Delta \hat{\alpha} + \frac{\Delta C_m(t-\tau)}{\Delta \left(\frac{q}{v_0}\right)} \Delta \left(\frac{q}{v_0}\right)$$



Prima di  $\tau$  il nullo

Da  $\tau$  in poi UN INCREMENTO  $\Delta \hat{\alpha} \xrightarrow{\text{porta}} \tau \cdot C_m$ , *incom. finito*

Il Sistema lineare, NON DIPENDE DA  $\hat{\alpha}(\tau)$

o da  $\hat{\alpha}(t)$  per  $t < \tau \rightarrow$  NO TIME HISTORY

$$\lim_{\Delta \hat{\alpha} \rightarrow 0} \frac{\Delta C_m(t-\tau)}{\Delta \hat{\alpha}} = C_{m\hat{\alpha}}(t-\tau) \quad \lim_{\Delta \left(\frac{q}{v_0}\right) \rightarrow 0} \frac{\Delta C_m(t-\tau)}{\Delta \left(\frac{q}{v_0}\right)} = C_{mq}(t-\tau)$$

RISPOSTE INDICIALI  
DEL MOMENTO  
DI BECCHEGGIO

Def Indiciali: "

Se vuoi la storia tra  $t_0$  e  $t$  integri e sommi i vari incrementi finiti

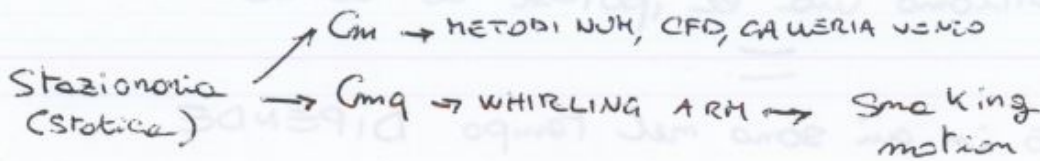
$$C_m(t) = C_m(t_0) + \int_{t_0}^t C_{m\hat{\alpha}}(t-\tau) \frac{d\hat{\alpha}(\tau)}{d\tau} d\tau + \dots + \frac{c}{v_0} \int_{t_0}^t C_{mq}(t-\tau) \frac{dq(\tau)}{d\tau} d\tau$$



$$\rightarrow C_m(t) = C_m(\infty, \hat{\alpha}(t), 0) + q(t) \frac{e}{v_0} C_{mq}(\infty, \hat{\alpha}(t), 0) + \dot{\hat{\alpha}} \frac{e}{v_0} C_{m\dot{\alpha}}(\hat{\alpha}(t))$$

$\infty$ : steady state

NON STAZIONARIA!



$\alpha = \text{cost}$   
 $q \neq 0$

Dinamica  $C_{m\dot{\alpha}}$ ! OSCILLAZIONI VERTICALI  $\rightarrow$  Plunge motion



$\theta = 0$   
 $\dot{\alpha} \neq 0$

$$\begin{cases} \hat{\alpha}(t) = \gamma q \\ q(t) = \dot{\alpha} \end{cases}$$

$$C_m(t) = C_m(\infty, \hat{\alpha}(t), 0) + q(t) \frac{e}{v_0} [C_{mq}(\infty, \hat{\alpha}(t), 0) + \gamma C_{m\dot{\alpha}}(\hat{\alpha}(t))]$$

$C_{mq} + \gamma C_{m\dot{\alpha}}$  coeff. di smorzamento in beccheggio

STEP THREE MOTO NON PLANARE

PIANI ACCOPPIATI  
 FVC

$$\hat{X} = \{ \hat{\alpha}, \hat{\beta}, p, q, r \}$$

VOLO PIANO  $C_m(t) = f(\tau, \tau, \hat{\alpha}(\xi), q(\xi), \dots)$

ORA  $C_m(t) = H[\hat{\alpha}(\xi), \hat{\beta}(\xi), p(\xi), q(\xi), r(\xi)]$

Semplif.  $p \approx 0, q \approx 0, r \approx 0 \rightarrow f(\hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t), \infty)$

$$C_m(t) = C_m(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + p \frac{e}{v_0} C_{mp}(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + q \frac{e}{v_0} C_{mq}(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + r \frac{e}{v_0} C_{mr}(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + \dot{\hat{\alpha}} \frac{e}{v_0} C_{m\dot{\alpha}}(\dots) + \dot{\hat{\beta}} \frac{e}{v_0} \dots$$

Ancora sempl. per traiettoria rettilinea:

$$\begin{cases} q = \frac{\dot{\hat{\alpha}}}{\gamma} + p \frac{\hat{\beta}}{\gamma} \\ r = -\frac{\dot{\hat{\beta}}}{\gamma} + p \frac{\hat{\alpha}}{\gamma} \end{cases}$$

Ciascun termine può essere ASSOCIATO A UN TIPO DI MOTO RIPRODUCIBILE IN GALLERIA DEL VENTO

- 1) Stazionario per data  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$
- 2)  $\frac{\rho l}{V_0}$ , incremento di  $C_k$  in funzione del CONING RATE  $\dot{\Phi} e/V_0$
- 3) MOTO OSCILLATORIO IN BECCHEGGIO  $C_{kq} + \gamma C_{k\dot{\alpha}}$
- 4) Cross-Coupling term  $C_{kz} - \gamma C_{k\dot{\beta}}$

Il generico coefficiente  $C_k$  si può esprimere così:

$$C_k(t) = C_k(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + \frac{1}{\gamma} \rho \frac{l}{V_0} [\gamma C_{kp}(\infty, \hat{\alpha}(t), \hat{\beta}(t)) + \hat{\beta} C_{kq} + \hat{\alpha} C_{kz}] + \frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\alpha}} \frac{l}{V_0} [C_{kq} + \gamma C_{k\dot{\alpha}}] - \frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\beta}} \frac{l}{V_0} [C_{kz} - \gamma C_{k\dot{\beta}}]$$

I)  $C_k$  Stazionario

II)  $\frac{1}{\gamma} \rho \frac{l}{V_0} [\gamma C_{kp} + \hat{\beta} C_{kq} + \hat{\alpha} C_{kz}]$  CONING

III)  $\frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\alpha}} \frac{l}{V_0} [C_{kq} + \gamma C_{k\dot{\alpha}}]$  SHOREMENO

IV)  $-\frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\beta}} \frac{l}{V_0} [C_{kz} - \gamma C_{k\dot{\beta}}]$  CROSS

Se  $\alpha, \beta$  sono piccoli i parametri di stabilità coincidono con le derivate di stabilità trovate con il modello di Bryan.

TOBAK-SCHIFF → messo in relazione il modello matematico con le PROVE DISPONIBILI

STATIONARY

OSCILLAZIONI PORTATE

BILANCIA PORTATE

Se  $\alpha$  piccola  $\dot{\phi} \approx p$ , se no sono 2 cose diverse  
[ Voluzione derivate in  $\dot{\phi}$  ]

## PROVE DI VITE IN GALLERIA VERTICALE NASA LANGLEY

Il modello viene lanciato a mano tangenzialmente al cilindro della galleria. Il modello è legato a un cavo per non devastarlo contro le pareti!



- Video camere filmano il comportamento
- Il modello può essere anche radio comandato

"Aerodynamic modeling of post-stall and spin dynamics of large transport aircraft"  
Georgia Tech, 2007

- Certificazione secondo standard ICAO permette a un aereo di andare da un paese all'altro senza autorizzazioni specifiche

Non accade così per aerei sperimentali e PROTOTIPI, che NON SONO (ancora) CERTIFICATI!  
Lì ogni stato rilascerà permessi di volo x effettuare prove...

Reg. EC 216/2008 : un regolamento europeo è SUPERIORE a qualsiasi legge nazionale



**EASA**

▲ AERONAVIGABILITÀ : Reg. 748/2012

- Da logica di controllo puntuale A CERTIFICAZIONE  
- **Sistema QUALITÀ**

↳ imprese SUB-FORNITRICI del costruttore  
→ I COSTRUTTORI DELLE SOTTOPARTI  
SI FANNO CERTIFICARE

→ O garantisce x loro il costruttore (ISO 9000, ...)  
oppure la singola impresa si fa certificare (Part 21)

⚠ REQUISITI TECNICI TROPPO RESTRITTIVI RISCHIANO DI BLOCCARE TUTTO IL SISTEMA

es. Certi requisiti inglesi di omi facevano prescrivere di mettere 3 lampadine x vedere lo stato di retrazione del carrello

→ era + un codice di costruzione

⇒ PORTA ALLA MORTE LE IMPRESE

Oggi si dà + LIBERTÀ e FLESSIBILITÀ : "fore in modo che il pilota abbia informazioni chiare sul carrello". Poi se metti 3 luci oppure lo fai vedere su un display ecc. sono affari tuoi.

# MECCANICA DEL VOLO 8/01/2014

ROTORS and HELICOPTERS Configurations  
 by Ing. Riccardo Bianco-Mengotti, Agusta Westland

## ROTORE PRINCIPALE

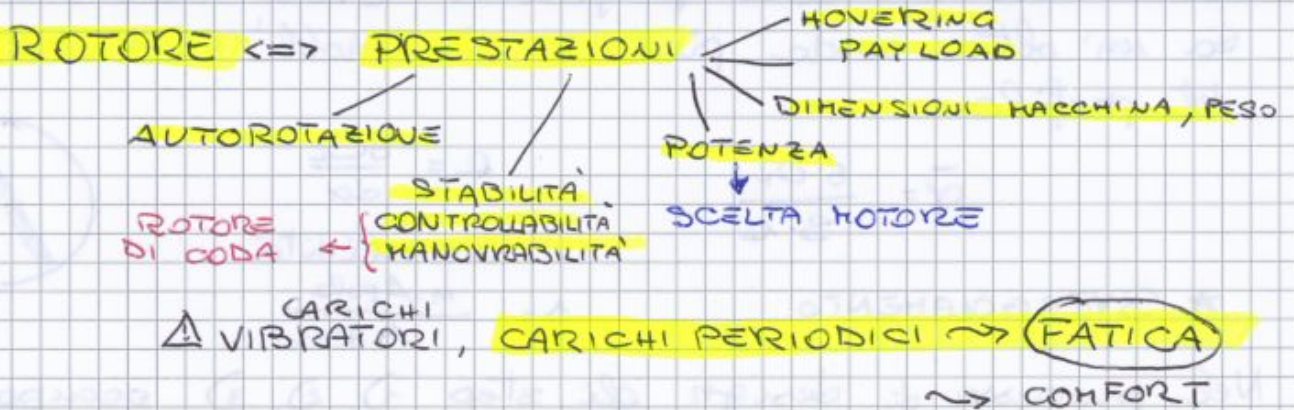
→ acceleratore portata d'aria verso il basso

= TRAZIONE

"Cio che è buono per l'hovering non è buono x il volo orizzontale e vice-versa" → COMPROMESSI

• Design del MAIN ROTOR → INFLUENZANO TUTTA LA MACCHINA

Fase preliminare → GRANDI CONSEGUENZE  
 → POCHE INFORMAZIONI



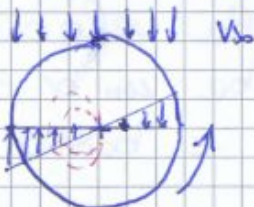
## 1) DEFINIZIONE DEL DIAMETRO

Diámetro enorme = GOOD HOVERING ↑  
 BAD FORWARD FLIGHT ↓

→ Bisogna progettare il motore + piccolo possibile compatibilmente con la potenza richiesta in hovering

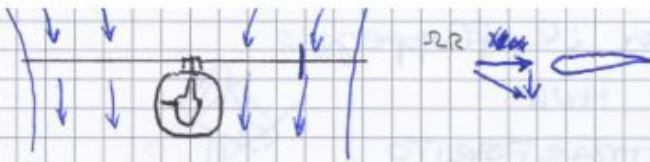
• VINCOLI GEOMETRICI → COMPATTEZZA  
 es. Elicotteri navali tipo AW101

2) VELOCITÀ DI TIP ⇔ VELOCITÀ ROTAZIONE  
 + è alta - la trazione viene data da corda della pala o apertura



$\Omega_R \uparrow$  = BENE x IL VOLO AVANZATO

Problema: RUMORE!  
 mmm



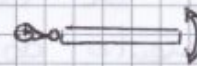
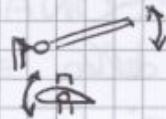
## 5) FORNA DELLA PALA

- Ridurre effetti 3DIMENTENSIONALI → vortici estremità
- ridurre il vortice che vedrà la pala successiva

## SOLUZIONI COSTRUTTIVE

### MOZZO ARTICOLATO, 3 cerniere

- FLAPPEGGIO
- PASSO
- RITARDO



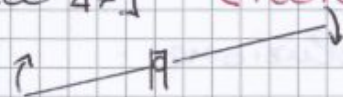
Cerniere → annullare parzialmente i momenti che le pale scoricherebbero sul mozzo

Un giunto SFERICO trasferirebbe solo coppia al mozzo alle pale e basta, sarebbe l'ideale

### ROTORE ad altolena [Bell 47] (Teetering)

- FLAPPEGGIO "simmetrico"

Cerniera direttamente su albero



### HINGELESS

Resta solo la cerniera di variazione di passo

### BEARINGLESS

Tolgo anche la cerniera × variazione il passo, ottengo la variazione tramite una torsione della base della pala.

## TEETERING

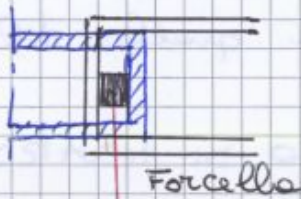


Non trasferisce momenti!

⚠ POSSO FARLO SOLO CON UN ROTORE BI PALA XK LA CERNIERA È SULL'ALBERO

\* alla fusoliera

- ROTORE ARTICOLATO CON GIUNTI ELASTOMERICI  
"Morgherita": disco con anelli a cui si acconcia la pala.



Il forcellone della pala ha uno strato di gomma tra di esso e la morgherita

MESSO IN COMPRESSIONE DA FORZA CENTRIFUGA

## ROTORE HINGELESS

- RITARDO E FLAPPEGGIO → ELEMENTO DEFORMABILE IN TITANIO

Westland LYNX

+ SMORZATORE

- Rotore rigido: trasferisce coppia alla fusoliera

ALTA MANOVRAABILITÀ  
E AGILITÀ

MBB BO-105

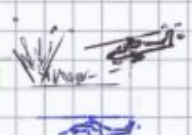
✦ ELICOTTERO ANTICARRO TEDESCO

- ⚠ ROTORE SENZA CERNIERE FA PASSARE ANCHE TANTE VIBRAZIONI → non necessariamente l'HINGELESS è la soluzione ottimale

- CERNIERE ELASTICHE

→ SÌ: MILITARI

NO: civili



## ROTORE BEARINGLESS

- ↓ possono anche i carichi vibratorii
- ↓ aerodinamicamente la radice della pala non va
- ↓ elementi che si deformano ciclicamente → ALTA FATICA

↑ COMMERCIALE: meno pezzi di ricambio

MILITARE: + manovrabile xk è + rigida

↑ materiali compositi: sentono meno la fatica

## ▶ ROTORI COASSIALI → KAMOV

Uno degli alberi deve essere CAVO!

2 PIATTI OSCILANTI!

DRAG bestiale xK è un mozzo enorme!

Sikorsky ci ha provato però con rotori rigidi! ☹

Costruendo anche il mozzo ... ma non è

comunque la pompata che pensavano i russi

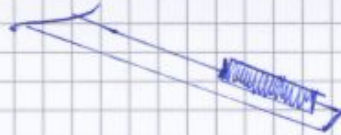
## ▶ INTERMESHING


Elicotteri per lavoro aereo

Non c'è una cerniera di passo ma c'è un

ATTUATORE ELETTRO-MECCANICO CHE AZIONA

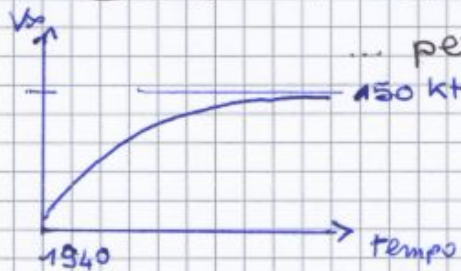
UN ALITONE



 ALTISSIMA FORZA CENTRIFUGA!

RICERCA: SERVE UNA NUOVA FORMULA...

... perché? PER LA VELOCITÀ.

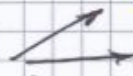


Da quando è stato introdotto il motore a turbina

la velocità di crociera è attestata intorno a 150 kt.

FENOMENI TRANSONICI su pala avanzante

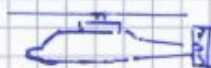
VELOCITÀ



STALLO su pala retrocedente

ROLLIO portato da asimmetria flussi!

Prototipi vortici




TRAZIONE → eliche

PORTANZA → ALI

Evoluzioni della forma dell'elicottero senza discostarsi troppo

⇒ TILT ROTOR

 un sacco di problemi!



# MECCANICA DEL VOLO 7/01/2014

## RIPASSO e PROBABILI DOMANDE D'ESAME

### ■ INTRODUZIONE AL VOLO ATMOSFERICO

- 1) È vero che diminuisce la % di  $O_2$  salendo con la quota?   
 ✓ Sì! Entro i 50 km di quota passa da 21% a ~ 17% → diminuzione debole
- 2) Perché bisogna pressurizzare nel volo atmosferico?   
 ✓ - Nel volo atmosferico, entro i 20 km, non diminuisce sensibilmente la % di  $O_2$  ma la sua **PRESSIONE PARZIALE** → problemi di scambio  $O_2 \leftrightarrow CO_2$  negli alveoli polmonari
- 3) Andamento Temperatura / pressione in atmosfera ISA,   
 ✓ composizione strati atmosfera.
- 4) Le 4 zone del volo (in relazione a fisiologia umana)   
 ✓ I) INDIFFERENTE II) COMPLETA COMPENSAZIONE III) INCOMPLETA COMP. IV) MORTALE

### ■ CAP. 1

#### 5) Equazioni della dinamica del corpo rigido

$$\vec{F} = m \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{F_I}$$

$$\vec{M} = \left( \frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{F_I}$$

⚠ INDICARE SEMPRE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO, SE NO LE EQUAZIONI NON HANNO SENSO!!!

#### 6) Eq. della dinamica per sistema NON INERZIALE $F_A$

✓  $F_A$  si muove con velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto a  $F_I$

→

#### 7) Definizione ANGOLI DI EULERO: cosa / come / dove ✓

#### 8) Algoritmo di trasformazione da un sistema a

✓ un altro → usare quello in cui un asse è già coincidente (se si vuole)

Proprietà delle matrici

#### 9) Definire la matrice $[L_{21}]$ ✓

$$[L_{21}] = [\Psi][\Theta][\Phi] \quad \text{NON A MEMORIA}$$

#### 10) Derivate degli angoli di Eulero ■

• Spiegare \*K si può ritenere la terra ferma e piatta.

22) SISTEMA ASSI VENTO

23) EQ. FORZE WIND AXES •

24) Sistema BODY AXES

25) Assi STABILITÀ

$X_s$  è la proiezione del vettore velocità  $\vec{V}_E$  del baricentro del velivolo sul piano longitudinale all'istante iniziale

26) Trasp. ASSI VENTO - ASSI CORPO

Rotazione di  $F_w$  su  $F_a$   $\psi = -\beta$

△ Rotazione di  $F_a$  su  $F_w$   $\psi = \beta$

27) Trasp. NED-ASSI CORPO

$\left\{ \begin{matrix} \psi_B \\ \theta_B \\ \phi_B \end{matrix} \right\}$  • Come si rilevano a bordo

28) Eq. MOMENTI ASSI CORPO •

• Dire che il velivolo ha un piano di simmetria

→  $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$

• COPPIE GIROSCOPICHE

29) Descrizione SUN-CENTERED

30) DESCRIZIONE SCHEMI DI CALCOLO

31) Linearizzazione delle equazioni → deve dare lei ✓

## ■ CAP. 2 - TEORIA PICCOLE PERTURBAZIONI

32) Assunzioni varie

33) Disaccoppiamento di piano LONG. e LAT-DIR. e EQUAZIONI! :)

34) Definizione di DERIVATA AERODINAMICA e derivate in assi stabilità

↳ PARAMETRI DI STATO

$$\left\{ \begin{matrix} u_s \\ w_s \\ \theta \\ q \\ z_e \\ \Delta T \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} v_s \\ p_s \\ r_s \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} \end{matrix} \right\}$$

35) Metodo di Bryon

- Trascuriamo termini di ordine superiore

45) Calcolo  $C_m$

46) Diagramma  $C_m - \alpha$

47) Calcolo del punto neutro, ora che  $C_m$  è esplicito

48) Contributo ROTORI e momento di beccheggio

49) CONTROLLO LONGITUDINALE

50) Eq. di  $\alpha_{trim}$  e  $\delta_{trim}$

Δ Ricevare che  $\delta_{trim}$  dipende da  $h$  ma  
a numeratore e non a denominatore

51) Condizione limite anteriore del baricentro

⚡ Non diventa + controllabile il velivolo  
oltre il limite MAX del  $\theta$  per una data  
escursione dell'equilibratore

→ LIMITE DI CONTROLLABILITÀ

52) Momento di cerniera, trim TAB, ...

53) MANOVRABILITÀ e  $n_z \neq 1$

Ricevare  $\frac{\Delta \delta_e}{(n_z - 1)}$

54) Punto di manovra e comandi bloccati.

55) Forze / momenti piano LATERO-DIREZ.

56) STABILITÀ DIREZIONALE

$B > 0 \Rightarrow$  serve  $N > 0 \rightarrow C_{n\beta} > 0$

+ vari contributi...

57) Contributo sistema propulsivo e momento imbarcato.

58) STABILITÀ LATERALE

Non c'è nessun elemento di configurazione  
che lo rende stabile sul piano laterale...  
si origina una  $v \rightarrow \beta \dots$

59) Controllo direzionale.

$C_y = \dots$   $C_n = \dots$

60) Controllo laterale

61) EFFETTI DI ACCOPPIAMENTO (ce ne sono migliaia)

62) Efficacia del comando di dettoni

→ SCHEMINO con i vari effetti accoppiati

$$C_{\delta_{sa}, \text{eff}} = C_{\delta_{sa}} \cdot \left( 1 - \dots \right)$$

DISCUSSIONE DEI SEGNI

del timone anche per incidenze elevate.

83) Commentare un diagramma dato.



84) STRAKES ✓

#### ■ ALA A DELTA

85) Vortex breakdown ✓

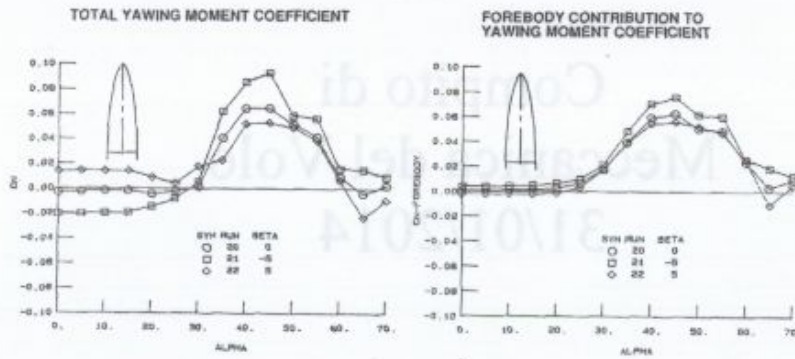
86) Isteresi ✓

87) Andamento qualitativo su apertura d'area del Cp?

88) Wing Rock

Distanza verticale del cuore del vortice dell'ala, rollio auto sostenuto.

### 15. Commentare i diagrammi relativi al Forebody Vortex Control



### 16. Discutere il break down dei vortici su ali a delta

**Politecnico di Torino**  
**I Facoltà di Ingegneria**  
**Anno Accademico 2013-2014**

**Corso di MECCANICA DEL VOLO**

**ESERCITAZIONE 1**

**Esercizio #1**

Dati due velivoli H e K, le terne assi corpo relative  $F_{B|H}$  ed  $F_{B|K}$  hanno un orientamento rispetto alla terna inerziale definito dai tre angoli di Eulero classici:

$$E_{HI} = (\Phi_{HI} \quad \Theta_{HI} \quad \Psi_{HI}) = (60^\circ \quad -45^\circ \quad 30^\circ)$$

$$E_{KI} = (\Phi_{KI} \quad \Theta_{KI} \quad \Psi_{KI}) = (-15^\circ \quad 25^\circ \quad 10^\circ)$$

Determinare l'orientamento del velivolo H rispetto al velivolo K in termini di angoli di Eulero  $\Phi_{HK}$ ,  $\Theta_{HK}$ ,  $\Psi_{HK}$ , che definiscono l'orientamento della terna  $F_{B|H}$  rispetto alla terna  $F_{B|K}$ .

**Esercizio #2**

Dato un velivolo caratterizzato dai seguenti momenti di inerzia nel sistema di riferimento assi corpo generici  $F_B$ :

$$\begin{aligned} J_X &= 948 \text{ slug ft}^2 \\ J_Y &= 1346 \text{ slug ft}^2 \\ J_Z &= 1967 \text{ slug ft}^2 \\ J_{XZ} &= -25 \text{ slug ft}^2 \end{aligned}$$

determinare i momenti principali d'inerzia del velivolo e calcolare la matrice di rotazione che permette il passaggio dalla terna assi corpo generici alla terna assi principali d'inerzia  $F_{PI}$ .

**Esercizio #3**

Date le equazioni delle forze nel sistema di riferimento assi verticali locali:

$$\begin{cases} X_V = m \left\{ \dot{V}_N + 2\Omega_E V_E \sin \lambda + \Omega_E^2 R \sin \lambda \cos \lambda + \dot{t} V_E \sin \lambda - \dot{\lambda} V_D \right\} \\ Y_V = m \left\{ \dot{V}_E + 2\Omega_E (V_N \sin \lambda + V_D \cos \lambda) - \dot{t} V_N \sin \lambda - \dot{t} V_D \cos \lambda \right\} \\ Z_V = m \left\{ \dot{V}_D + 2\Omega_E V_E \cos \lambda + \Omega_E^2 R \cos^2 \lambda + \dot{\lambda} V_N + \dot{t} V_E \cos \lambda - g \right\} \end{cases}$$

- semplificare le equazioni nel caso di traiettoria di volo lungo l'Equatore a quota costante;
- ottenuta l'espressione dell'accelerazione lungo z (nelle ipotesi precedentemente proposte), valutarne l'andamento al variare della velocità  $V_E$ ;
- valutare il contributo delle varie componenti della accelerazione lungo z. In particolare, individuare tali valori per una quota  $h = 15000 \text{ m}$  ed una velocità  $V_E = 75 \text{ m/s}$ .

Moltiplicando perciò le due matrici:

$$[\bar{L}_{HI}] = [\bar{L}_{KI}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8068 & -0,5898 & 0,0353 \\ -0,0503 & -0,1280 & -0,9905 \\ 0,5887 & +0,7974 & -0,1330 \end{bmatrix} = [\bar{L}_{HK}]$$

Uguagliando adesso gli elementi numerici con quelli letterali di  $[\bar{L}_{HK}]$ :

$$l_{31}: -\sin \Theta_{HK} = 0,5887 \rightarrow \Theta_{HK} = -36,0648^\circ$$

$$l_{21}: \sin \Psi_{HK} \cos \Theta_{HK} = -0,0503 \rightarrow \Psi_{HK} = -3,5676^\circ$$

$$l_{33}: \cos \Phi_{HK} \cos \Theta_{HK} = -0,1330 \rightarrow \Phi_{HK} = 99,4701^\circ$$

2) Per collocare la matrice principale d'inerzia occorre prima di tutto **DIAGONALIZZARE** la matrice d'inerzia riferita agli assi corpo generici

$$[\bar{J}]_{FB} = \begin{bmatrix} J_{xB} & 0 & -J_{xBzB} \\ 0 & J_{yB} & 0 \\ -J_{xBzB} & 0 & J_{zB} \end{bmatrix}$$

$[\bar{J}]_{FB}$  è diagonalizzabile se esiste una matrice invertibile (cioè la matrice di rotazione tra le tre assi corpo generici  $F_B$  e quelle assi principali d'inerzia  $F_{PI}$ )  $[L_{PIB}]$

$[L_{PIB}]$  è ortogonale  $\Rightarrow [L_{PIB}]^{-1} = [L_{PIB}]^T$

$$[L_{PIB}]^{-1} [\bar{J}]_{FB} [L_{PIB}] = [\bar{J}]_{PI} = \begin{bmatrix} J_{x_{PI}} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_{PI}} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_{PI}} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i dati in  $[\bar{J}]_{FB}$

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 948 & 0 & 25 \\ 0 & 1346 & 0 \\ 25 & 0 & 1967 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} =$$

③ Alle equazioni delle forze nel sistema assi NED applichiamo le seguenti semplificazioni:

- ROTTA EQUATORIALE:  $V_N = 0$ ,  $\lambda = 0$
- QUOTA COSTANTE:  $V_D = 0$

Dividendo tutto per  $m$  si ottengono le accelerazioni semplificate in assi NED:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_{yN} = \dot{V}_E \\ a_{zN} = 2\Omega_E V_E + \Omega_E^2 R + \frac{V_E^2}{R} - g = a_{zN1} - g \end{cases}$$

• Voluzione dell'andamento di  $a_{zN}$  al variare di  $V_E \rightarrow$  vedi DIAGRAMMA 1.1

• Calcolo dei vortici contribuiti a quota  $h = 15000$  m e  $V_E = 75$  m/s.

$$\Omega_E = \text{velocità di rotazione terrestre} = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$R_E = \text{raggio terrestre} = 6371 \text{ km}$$

### Componenti di accelerazione

• CORIOLIS:  $2\Omega_E V_E = 0,0109 \text{ m/s}^2$

• ACC. DI TRASPORTO:  $\Omega_E^2 R = 0,03377 \text{ m/s}^2$ , con  $R = R_E + h$

• ACC. CENTRIFUGA:  $\frac{V_E^2}{R} = 0,00088 \text{ m/s}^2$



*Politecnico di Torino*  
*I Facoltà di Ingegneria*  
*Anno Accademico 2013-2014*

**Corso di MECCANICA del VOLO**

**ESERCITAZIONE 2**

Dato un velivolo ad elica i cui dati sono riportati nella tabella in allegato, calcolare le seguenti derivate aerodinamiche espresse in assi stabilità:

$$X_u, Z_u, X_w, Z_w, Z_{\dot{w}}, Z_q$$

$$L_v, N_v, L_p, N_p, L_r, N_r$$

supponendo le seguenti condizioni di volo:

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 5000 \text{ ft} \\ U_0 = 105 \text{ kts} \\ M = 500 \text{ Kg (massa velivolo)} \\ T_{sl} = 15^\circ\text{C} \\ \rho_{sl} = 1,225 \text{ Kg/m}^3 \end{array} \right.$$

MATTEO CAMPO 2205364

## ESERCITAZIONE 2

Calcolare le derivate aerodinamiche  $X_u, Z_u, X_w, Z_w, Z_{\dot{u}}, Z_{\dot{w}}, L_v, N_v, L_p, N_p, L_r, N_r$

$$U_0 = 105 \text{ Kts} = 54,02 \text{ m/s}$$

$$h = 5000 \text{ ft} = 1524 \text{ m}$$

$$p = p_{sl} \cdot e^{-h/H}, \text{ con } H = 9061 \text{ m} \rightarrow p = 1,225 \cdot e^{-1524/9061} = 1,035 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

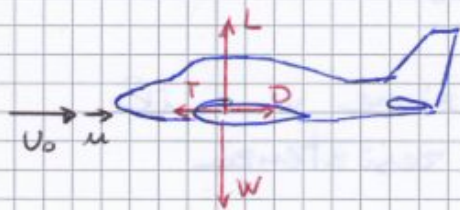
$$S = 160 \text{ ft}^2 = 14,86 \text{ m}^2$$

$$c = 5,25 \text{ ft} = 1,60 \text{ m}$$

$$b = 33,75 \text{ ft} = 10,29 \text{ m}$$

Dato la bassa velocità di volo si trascurano gli effetti aerelastici e quelli di compressibilità.

### DERIVATE in $u$



Equazioni di risultante

$$\begin{cases} X = T_e + \Delta T - (D_e + \Delta D) \\ Z = -(L_e + \Delta L) \end{cases}$$

$$X = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_T - \frac{1}{2} \rho U^2 S C_D$$

$$X_u = \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)_{u=U_0} = \rho S U_0 C_{Te} + \frac{1}{2} \rho S U_0^2 \left( \frac{\partial C_T}{\partial u} \right)_{u=U_0} - \rho S U_0 C_{De} - \frac{1}{2} \rho S U_0^2 \left( \frac{\partial C_D}{\partial u} \right)_{u=U_0}$$

I termini  $\left( \frac{\partial C_T}{\partial u} \right)$  e  $\left( \frac{\partial C_D}{\partial u} \right)$  così come sono indicati sono dimensionali  $\left[ \frac{1}{\text{m}} \right]$ , ma per definizione una derivata deve essere adimensionale.

Deriviamo quindi rispetto alla velocità adimensionalizzata:

$$\rightarrow \frac{\partial C_T}{\partial \left( \frac{u}{U_0} \right)} = U_0 \cdot \frac{\partial C_T}{\partial u}, \quad \frac{\partial C_D}{\partial \left( \frac{u}{U_0} \right)} = U_0 \cdot \frac{\partial C_D}{\partial u}$$

$$X_u = \frac{1}{2} \rho S U_0 \left( \cancel{2C_{Te}} + C_{Tu} - \cancel{2C_{De}} - C_{Du} \right)$$

In equilibrio  $C_{Te} = C_{De}$ , inoltre trascuriamo  $C_{Du}$ , che è un effetto di compressibilità.

$$\rightarrow X_u = \frac{1}{2} \rho S U_0 C_{Tu} = \frac{1}{2} \cdot 1,035 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 14,86 \text{ m}^2 \cdot 54,02 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (-0,024) = -34,93 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$\rightarrow X_w = \frac{1}{2} \rho U_0 S (C_{L\alpha} - C_{D\alpha})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1,035 \cdot 54,02 \cdot 14,86 (0,2186 - 0,0817) = 56,87 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2 = 0,0235 + 0,047 \cdot (0,2186)^2 = 0,0257$$

$$C_{D\alpha} = 2K C_L C_{L\alpha} = 2 \cdot 0,047 \cdot 0,2186 \cdot 3,98 = 0,0817$$

$$K = \frac{1}{e\pi\lambda}$$

$$\lambda = \frac{b^2}{S} = 7,11$$

$$K = \frac{1}{0,95 \cdot \pi \cdot 7,11} = 0,047$$

$$\rightarrow Z_w = -\frac{1}{2} \rho U_0 S (C_{L\alpha} + C_{D\alpha}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 1,035 \cdot 54,02 \cdot 14,86 (3,98 + 0,0257) = -1664 \text{ kg/s}$$

### DERIVATE in $\dot{w}$

$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$   $[\dot{w}] = \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$  e non uscirebbe una derivata adimensionale derivando rispetto a  $\dot{w}$

La derivata in  $\dot{w}$  si riconduce a quella in  $\dot{\alpha}$ , così come  $w$  si riconduce a quella in  $\alpha$

$$Z = -\Delta L - D_c \cdot \alpha = -\frac{1}{2} \rho U_0^2 S (C_L + C_D \cdot \alpha)$$

$$Z_{\dot{w}} = \left( \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \right)_{U=U_0} \approx -\frac{1}{2} \rho S U_0^2 \left( \frac{\partial (C_L + C_D \cdot \alpha)}{\partial \dot{w}} \right)_{U=U_0} =$$

$$= -\frac{1}{2} \rho S U_0^2 \left( \frac{\partial (C_L + C_D \cdot \alpha)}{\partial \dot{\alpha} \cdot \frac{U_0}{c}} \right)_{\alpha=\alpha_0} \quad \partial \dot{w} = \partial \dot{\alpha} \cdot U_0$$

$$\approx -\frac{1}{2} \rho U_0 S \frac{\partial C_L}{\partial \dot{\alpha}}$$

Introduciamo un tempo adimensionalizzato per rendere adimensionale la derivata:

$$\hat{t} = t \frac{2V}{c} \rightarrow t = \hat{t} \cdot \frac{c}{2U_0}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{t}} \cdot \frac{2U_0}{c} = \dot{\hat{\alpha}}$$

$$\rightarrow Z_{\dot{w}} = -\frac{1}{2} \rho U_0 S \frac{c}{2U_0} C_{L\dot{\alpha}}$$

$$\Rightarrow Z_{\dot{w}} = -\frac{1}{4} \rho S c C_{L\dot{\alpha}}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot 1,035 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 14,86 \text{ m}^2 \cdot 1,60 \text{ m} \cdot 1,56 = -9,60 \text{ Kg}$$

### DERIVATE in $p$

$$\hat{p} = p \cdot \frac{b}{2U_0} \rightarrow p = \hat{p} \frac{2U_0}{b}$$

$$\bullet L = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S b C_e$$

$$L_p = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S b \left( \frac{\partial C_e}{\partial p} \right)_{p=p_0} = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S b \frac{\partial C_e}{\partial \hat{p}} \cdot \frac{b}{2U_0}$$

$$\rightarrow L_p = \frac{1}{4} \rho U_0 S b^2 C_{e_p} = \frac{1}{4} \cdot 1,035 \cdot 54,02 \cdot 14,86 \cdot (10,23)^2 \cdot (-0,300)$$

$$= -10\,996,5 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

$$\bullet N = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S b C_n$$

$$N_p = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S b \left( \frac{\partial C_n}{\partial p} \right)_{p=p_0} = \frac{1}{4} \rho U_0 S b^2 C_{n_p} = -153,95 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

### DERIVATE in $\tau$

$$\hat{\tau} = \tau \frac{b}{2U_0} \rightarrow \tau = \hat{\tau} \frac{2U_0}{b}$$

$$L_\tau = \frac{1}{4} \rho U_0 S b^2 C_{e_\tau} = \dots \cdot 0,143 = 3188,98 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

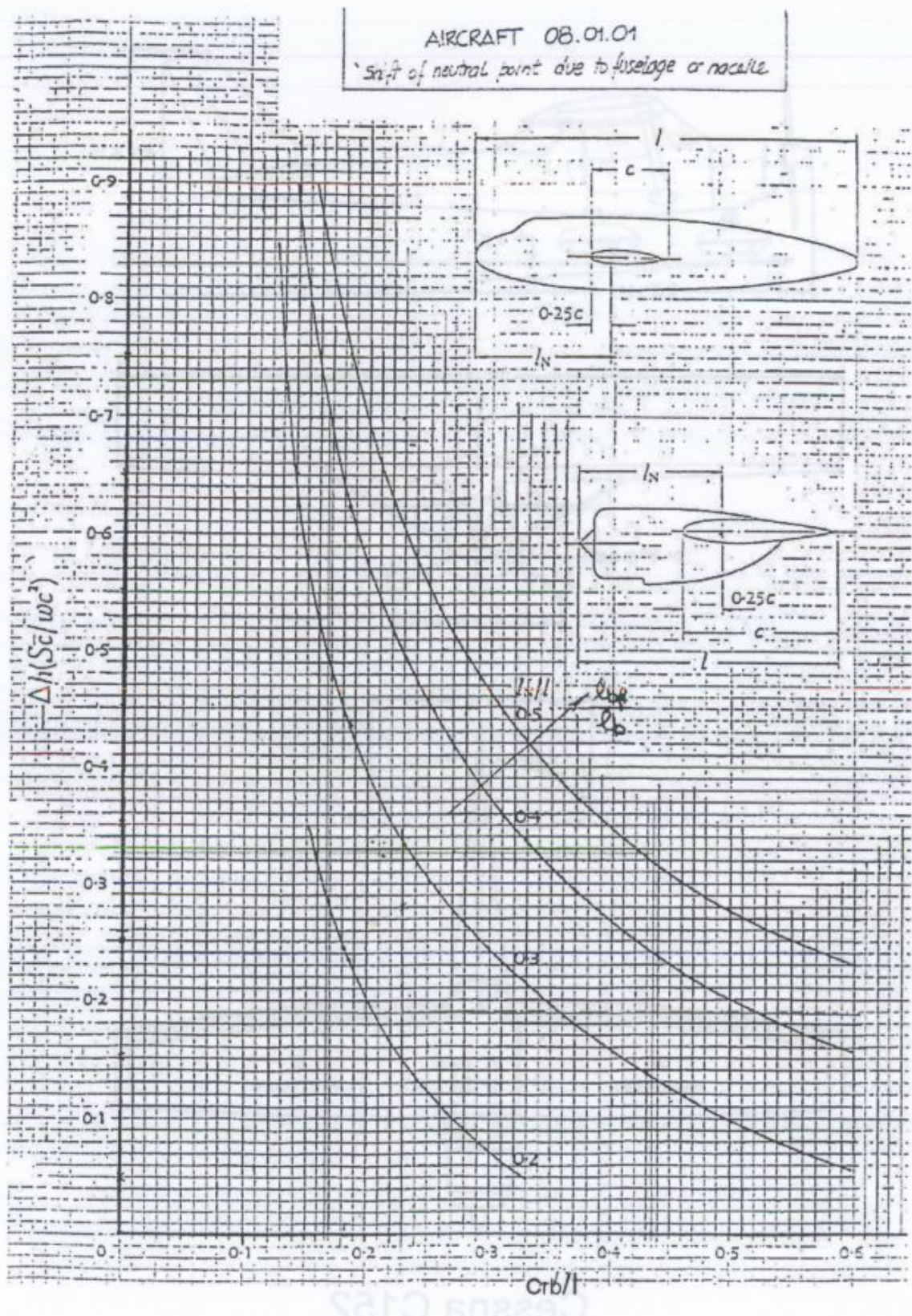
$$N_\tau = \frac{1}{4} \rho U_0 S b^2 C_{n_\tau} = \dots \cdot -0,164 = -3606,85 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

ALA			
Apertura alare	b	[ft]	33.75
Corda media aerodinamica	c	[ft]	5.25
Superficie alare	S	[ft <sup>2</sup> ]	160.22
Fuoco (ala isolata)	$h_{nw}$	[-]	0.25
Coeff. momento (ala isolata)	$C_{m0w}$	[-]	-0.119
Coefficiente angolare di portanza	$a_w$	[rad <sup>-1</sup> ]	3.195
Calettamento ala – fusoliera	$i_{wb}$	[deg]	3.3
IMPENNAGGIO ORIZZONTALE			
Apertura alare	$b_t$	[ft]	10.0
Corda media aerodinamica	$c_t$	[ft]	3.14
Superficie alare	$S_t$	[ft <sup>2</sup> ]	33.02
Fuoco (ala isolata)	$h_{nt}$	[-]	0.25
Calettamento	$i_t$	[deg]	-3.3
Coefficiente angolare di portanza	$a_t$	[rad <sup>-1</sup> ]	4.79
FUSOLIERA			
Lunghezza	$l_b$	[ft]	24.08
Superficie in pianta	$S_b$	[ft <sup>2</sup> ]	38.60
Superficie in pianta (da prua a ¼ cmaer)	$S_{bf}$	[ft <sup>2</sup> ]	16.25
VELIVOLO COMPLETO			
Peso	W	[lbs]	1102.31
Momento inerzia rispetto asse X	$J_x$	[slug ft <sup>2</sup> ]	610.45
Momento inerzia rispetto asse Y	$J_y$	[slug ft <sup>2</sup> ]	866.7
Momento inerzia rispetto asse Z	$J_z$	[slug ft <sup>2</sup> ]	1266.59
Momento inerzia centrifugo	$J_{xz}$	[slug ft <sup>2</sup> ]	0
CONDIZIONI DI VOLO			
Velocità	V	[ft/s]	177.22
Quota	h	[ft]	5000
Downwash	$\epsilon$	[deg]	$0.0 + 0.2 \alpha_{wb}$

$$h = 0,3$$

$$i_t = i_{wb} - i_{tq} = -6,6^\circ$$

$$\eta_t \cong 1 \rightarrow \alpha_t^* = \alpha_t$$



## AIRCRAFT 08.01.01

### SHIFT OF NEUTRAL POINT DUE TO FUSELAGE OR NACELLE

(Issued June, 1946)  
(Reprinted June, 1955)

#### NOTATION

- $S$  = gross wing area (ft.<sup>2</sup>)
- $b$  = wing span (ft.)
- $\bar{c}$  = standard mean wing chord,  $S/b$  (ft.)
- $c$  = local wing chord at centre line of fuselage or nacelle (ft.)
- $l$  = length of fuselage or nacelle; if the nacelle does not extend to the trailing edge,  $l$  is to be taken from nose of nacelle to trailing edge of wing (see diagram) (ft.)
- $l_x$  = distance of local quarter chord point from nose of fuselage or nacelle (ft.)
- $w$  = maximum width of fuselage or nacelle (ft.)
- $-\Delta h$  = forward shift of neutral point due to fuselage or nacelle as a fraction of  $\bar{c}$

#### NOTES

$-\Delta h (S\bar{c}/wc^2)$  is plotted against  $c/l$  for various values of  $l_x/l$ .

The neutral point is defined as that point in the plane of symmetry for which there is no change in pitching moment coefficient with angle of incidence. The average value of the shift of this point due to the presence of a body is given as a function of the size and position of the body relative to the wing. The shift is however also dependent on other parameters, the most important being the fullness of the body forward of the wing and the slope of the wing lift curve. An increase in these tends to shift the neutral point forward as compared with the normal case. Further, the values tend to be about 5% higher for low-wing and the same amount lower for high-wing arrangements. Sweep has little influence. The data do not apply if the wing is clear of the body.

Due to the extraneous parameters discussed above and others such as downwash and wing setting, the value of  $\Delta h$  given by the curves may be inaccurate by  $\pm 0.018$ , or more in extreme cases. For a more accurate estimate the method of the second reference may be used.

Where the body width decreases rapidly along the chord, which will be the case with most nacelles, an additional de-stabilising moment arises. This effect has been taken into account by measuring the nacelle length to the wing trailing edge (see diagram).

Due to lack of information on the interference effect between fuselage and nacelles, it is suggested that the separate values should be added.

#### DERIVATIONS

WARREN, C. H. E. A method of estimating the forward shift of neutral point due to body shapes, deduced from wind tunnel results. R.A.E. Report No. Aero. 1960, 1944.

MULTHOFF, H. Zur Aerodynamik des Flugzeugrumpfes, *Luftfahrtforschung*, Vol. 18, 1941.

#### EXAMPLE

Find the shift of the neutral point of a wing of a twin-engined aeroplane with the following characteristics:—

Fuselage:  $l_x/l = 0.35$ ,  $c/l = 0.26$  and  $(S\bar{c}/wc^2) = 12$ .

Nacelles:  $l_x/l = 0.52$ ,  $c/l = 0.6$  and  $(S\bar{c}/wc^2) = 18.5$ .

For the fuselage, from diagram,  $-\Delta h = 0.37/12 = 0.031$ .

For one nacelle, from diagram,  $-\Delta h = 0.25/18.5 = 0.014$ .

The total forward shift of the neutral point is therefore

$$-\Delta h = 0.031 + 2 \times 0.014 = 0.06$$

**TABELLA CONVERSIONE MISURE DA DISEGNO**

Come si può notare il trittico del velivolo non indica in che scala è riportato il disegno. Ricaviamo una scala di conversione delle misure dal disegno alla realtà confrontando una grandezza reale nota con la corrispondente grandezza misurata sul disegno. Apertura alare  $b = 33,75$  ft. Su disegno  $b = 132$  mm = 0,433 ft.

scala 1: 77,944

	[mm] disegno	[ft] disegno	[m] reali	[ft] reali
c locale mezzeria	17	0,056	1,325	4,347
$l_N \equiv l_{BF}$	26	0,085	2,027	6,649
w	14	0,046	1,091	3,580
$\bar{l}_t$	51	0,167	3,975	13,042

**DATI VELIVOLO (FORNITI e CALCOLATI aggiungere a dati di es.3)**

WING BODY					
S	160,22	[ft <sup>2</sup> ]	$a_{wb}$	3,195	[rad <sup>-1</sup> ]
$\bar{c}$	5,25	[ft]	$CL_\alpha$	3,9847	[rad <sup>-1</sup> ]
b	33,75	[ft]	$Cm_\alpha$	-1,6471	[rad <sup>-1</sup> ]
$V_H$ segnato	0,5120	-	$Cm_{ow}$	-0,119	-
$i_{tg}$	-3,3	[deg]	$Cm_{owb}$	-0,1286	-
$i_{wb}$	3,3	[deg]	$Cm_0$	0,1075	-
$i_t$	-0,1152	[rad]	$\bar{l}_t$	13,042	[ft]
$h_{nw}$	0,2500	-	h	0,3	-
$h_{nwb}$	0,2210	-	$h_n$	0,7133	-
HORIZONTAL TAIL			VERTICAL TAIL		
$S_t$	33,02	[ft <sup>2</sup> ]	$S_{F\text{CALCOLO}}$	13,820	[ft <sup>2</sup> ]
$a_t$	4,79	[rad <sup>-1</sup> ]	$l_f$	-20,01	[ft]
$\eta_t$	1	-	$V_V$	-0,051	-
$\epsilon_0$	0	[deg]	$a^*_r$	2,791	[rad <sup>-1</sup> ]
$\partial\epsilon/\partial\alpha$	0,2	[deg]	$\eta_v$	0,97	-
$\tau$	0,55	-			
$CL_{\delta e}$	0,5429	[rad <sup>-1</sup> ]			
$Cm_{\delta e (h=0,3)}$	-1,3059	[rad <sup>-1</sup> ]			



Sostituendo l'espressione di  $L_{wb}$  nella (2):

$$0 = M_{owb} + (m_z W - L_T + L_T)(h - h_{nwb})\bar{c} - L_T \bar{c}_T$$

$$\Rightarrow L_T = \frac{M_{owb} + m_z W (h - h_{nwb}) \bar{c}}{\bar{c}_T}$$

#### 4) DETERMINARE GLI EFFETTI DELL'AGGIUNTA DELLA FUSOLIERA ALL'ALA ISOLATA IN TERMINI DI SPOSTAMENTO DEL CENTRO AERODINAMICO e DI VARIAZIONE DEL $C_{m_0}$ .

Per valutare questi effetti seguendo le indicazioni dei datasheet si è dovuta effettuare una serie di misurazioni sul disegno in allegato, trovare una scala e ricavare le grandezze relative al velivolo reale (vedi TABELLA 1)

- Voluzione di  $-\Delta h_{nwb}$  (c'è forward shift del centro aerod.)  
Per ricavare  $\Delta h$  dal grafico 1 si è dovuto calcolare i seguenti rapporti (necessari per interpolare le curve):

$$\frac{l_N}{l} = \frac{6,649 \text{ ft}}{24,08 \text{ ft}} = 0,276$$

$$\frac{c}{l} = \frac{4,347 \text{ ft}}{24,08 \text{ ft}} = 0,180$$

$$\frac{S \cdot \bar{c}}{w c^2} = \frac{160,22 \text{ ft}^2 \cdot 5,25 \text{ ft}}{3,580 \text{ ft} \cdot (4,347 \text{ ft})^2} = 12,43$$

$l_N \equiv l_{BF}$ : distanza tra punta della fusoliera e linea di quarti anteriori

$l$ : lunghezza fusoliera  
 $c$ : corda locale in mezzocorda (corda in mezzocorda aereo)

$w$ : lunghezza max fusoliera

Entrando nel grafico in ascissa con  $\frac{c}{l}$  e scegliendo la curva per  $\frac{l_N}{l}$  calcolato si legge:

$$-\Delta h \left( \frac{S \bar{c}}{w c^2} \right) = 0,37 \rightarrow -\Delta h = \frac{0,37}{12,43} = -0,029$$

Cioè, il punto di applicazione della portanza  $L_{wb}$  si sposta in avanti rispetto al punto focale dell'ala

$$h_{nwb} = h_{nw} - \Delta h = 0,25 - 0,029 = 0,221$$

6) Tracciare curva  $C_L = f(\alpha_{wb})$  e  $C_L = f(\alpha_{wb})$

### VELIVOLO COMPLETO

$$C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha_{wb} + C_{L0} \rightarrow \text{diagramma 3.1}$$

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lr} \frac{S_r V_r^2}{S V^2} = a_{wb} \cdot \alpha_{wb} + a_r \frac{S_r}{S} \alpha_r$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \cdot \alpha_{wb} \\ \alpha_r = \alpha_w - i_r - \varepsilon \end{cases} \rightarrow \alpha_r = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) + i_r - \varepsilon_0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow C_L &= a_{wb} \alpha_{wb} + a_r \frac{S_r}{S} \left[ \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) + i_r - \varepsilon_0 \right] \\ &= a_{wb} \alpha_{wb} \left[ 1 + \frac{a_r}{a_{wb}} \frac{S_r}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \right] + a_r \frac{S_r}{S} (i_r - \varepsilon_0) \end{aligned}$$

$$i_r = i_{wb} - i_{rg} = 3,3^\circ - (-3,3^\circ) = 6,6^\circ = 0,1152 \text{ rad}$$

### GRUPPO WING BODY

$$C_L = a_{wb} \cdot \alpha_{wb} \rightarrow \text{diagramma}$$

• Ricavare  $\alpha$  velivolo completo per  $\alpha_{wb} = 3^\circ \rightarrow 0,0523 \text{ rad}$

$$\begin{cases} C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha \\ C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha_{wb} + C_{L0} \end{cases} \rightarrow C_{L\alpha} \cdot \alpha = C_{L\alpha} \cdot \alpha_{wb} + C_{L0} = C_{L\alpha} \cdot \alpha_{wb} + a_r \frac{S_r}{S} (i_r - \varepsilon_0)$$

$$\rightarrow \alpha = \alpha_{wb} + \frac{a_r}{C_{L\alpha}} \frac{S_r}{S} (i_r - \varepsilon_0)$$

$$\alpha = 0,0523 + \frac{4,79}{3,9847} \frac{33,02}{160,22} (-0,1152 - 0) = 0,0237 \text{ rad} = 1,361^\circ$$

\* assumiamo  $\eta_r \approx 1 \rightarrow a_r \approx a_r^*$

Calcolo di  $C_{L\alpha}$  e  $C_{L0}$

$$\bullet C_{L\alpha} = a_{wb} + a_r \frac{S_r}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) = 3,9847 \text{ rad}^{-1}$$

$$\bullet C_{L0} = a_r \frac{S_r}{S} (i_r - \varepsilon_0) = -0,1137 \text{ rad}^{-1}$$

**Politecnico di Torino**  
**I Facoltà di Ingegneria**  
**Anno Accademico 2013-2014**

**Corso di MECCANICA DEL VOLO**

**ESERCITAZIONE 4**

Con riferimento al velivolo di cui all'esercitazione 3 si svolgono i seguenti punti:

- 1) calcolare e diagrammare il coefficiente di momento di beccheggio in funzione dell'incidenza  $\alpha$ , evidenziando il termine invariante con l'incidenza e la rigidezza in beccheggio;
- 2) calcolare il contributo del sistema propulsivo al coefficiente di momento di beccheggio del velivolo completo;
- 3) calcolare l'incidenza di trim in relazione ai dati ottenuti al punto (1);
- 4) determinare la coordinata del punto neutro  $h_n$ ;
- 5) diagrammare il coefficiente di momento di beccheggio in funzione dell'incidenza  $\alpha$  per diverse posizioni del baricentro:  $h = 0.4 \div 0.8$  e sovrapporvi la curva di stabilità neutra;
- 6) valutare il modo di equilibrare il velivolo nell'intervallo di incidenza

$$(\alpha_{trim})_{min} = 1^\circ \div (\alpha_{trim})_{max} = 10^\circ$$

a parità di rigidezza in beccheggio;

<b>ELICA</b>			
Distanza dal piano dell'elica al c.a. dell'ala	$x_P$	[ft]	5.5
Angolo di incidenza tra l'asse di trazione e la corrente indisturbata	$\alpha_T$	[deg]	4
Diametro dell'elica	$d_P$	[ft]	5.75
Potenza del propulsore	$P$	[hp]	110
Calettamento	$\beta$	[deg]	20
Larghezza media della pala	$\bar{b}_P$	[ft]	0.656
Larghezza della pala al 30% di $R_P$	$(b_P)_{30\%}$	[ft]	0.755
Larghezza della pala al 60% di $R_P$	$(b_P)_{60\%}$	[ft]	0.689
Larghezza della pala al 90% di $R_P$	$(b_P)_{90\%}$	[ft]	0.427

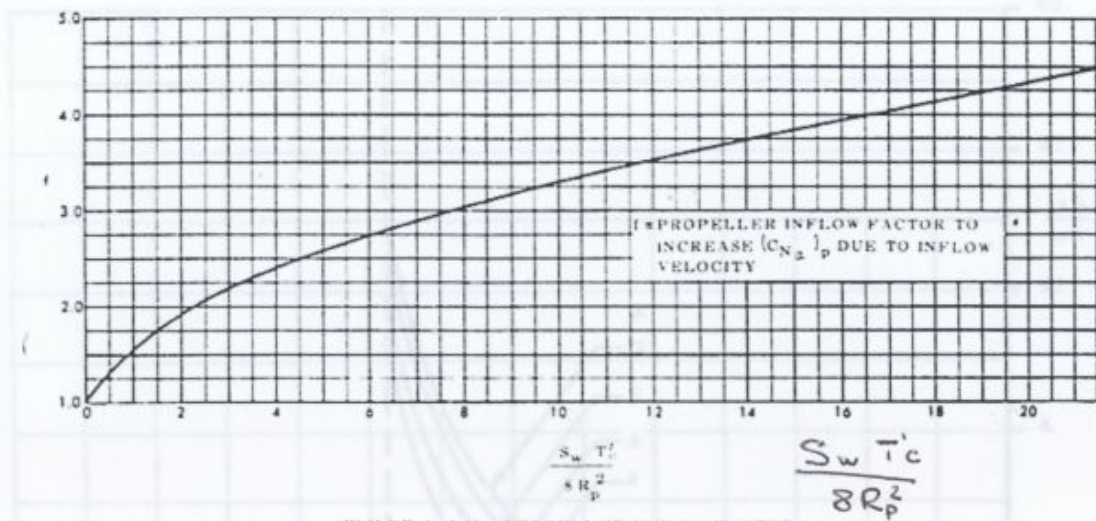


FIGURE 16(11) PROPPELLER INFLOW FACTOR

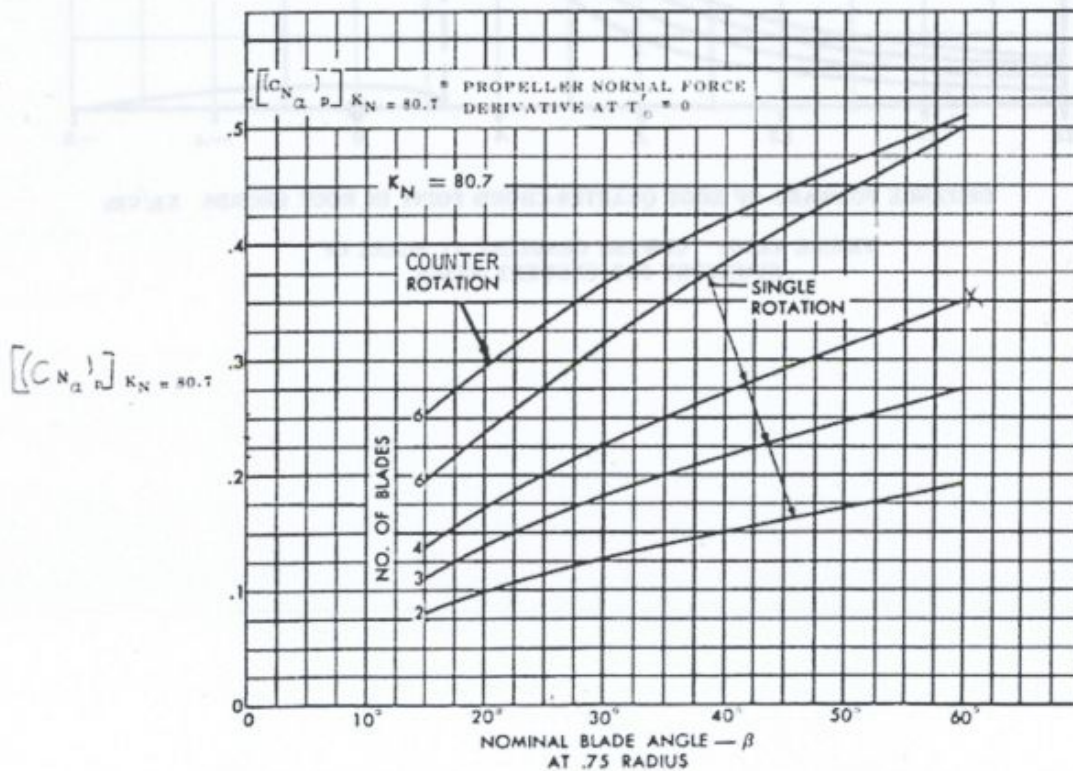


FIGURE 16(12) PROPPELLER NORMAL FORCE PARAMETER

MATTEO CAPPO → 209364

## ESERCITAZIONE 4

1) Calcolare  $C_m = C_m(\alpha)$ 

$$M = M_{owb} + (L_{wb} + L_t)(h - h_{nwb})\bar{\epsilon} - L_t\bar{\epsilon}_t$$

A dimensionalizzando

$$C_m = C_{mowb} + \left( a_{wb}\alpha_{wb} + a_t \frac{S_t}{S} \alpha_t \right) (h - h_{nwb}) - a_t \alpha_t \frac{S_t}{S} \frac{\bar{\epsilon}_t}{\bar{\epsilon}}$$

Considerando che  $\alpha_t = \alpha_{wb} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) + i_t - \epsilon_0$

e che  $\alpha_{wb} = \alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \epsilon_0) \frac{S_t}{S}$

$$\rightarrow \alpha_t = \left[ \alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \epsilon_0) \frac{S_t}{S} \right] \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) + i_t - \epsilon_0$$

$$C_m = C_{mowb} + \left\{ \left( a_{wb} \left[ \alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \epsilon_0) \frac{S_t}{S} \right] + a_t \left[ \left[ \alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \epsilon_0) \frac{S_t}{S} \right] \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) + i_t - \epsilon_0 \right] \right) \cdot (h - h_{nwb}) - a_t \bar{V}_H \left\{ \left[ \alpha - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} (i_t - \epsilon_0) \frac{S_t}{S} \right] \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) + i_t - \epsilon_0 \right\} \right.$$

Sfruttando il fatto che sappiamo già che:

- $C_{m\alpha} = C_{L\alpha} (h - h_N)$
- $h_N = h_{nwb} + \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \bar{V}_H$

$$\Rightarrow C_{m\alpha} = C_{L\alpha} \left( h - h_{nwb} + \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \bar{V}_H \right)$$

$$C_{m\alpha} = C_{L\alpha} (h - h_{nwb}) - a_t \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \bar{V}_H$$

$$C_{L\alpha} = a_{wb} + a_t \frac{S_t}{S} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) =$$

$$= 3,195 + 4,79 \cdot \frac{33,02}{160,22} \cdot (1 - 0,2) = 3,9847$$

$$C_{m\alpha} = 3,9847 (0,3 - 0,221) - 4,79 (1 - 0,2) \frac{33,02}{160,22} \cdot \frac{13,042}{5,25} =$$

$$= -1,647$$

$$C_{m0} = C_{mowb} - a_t \bar{V}_H (i_t - \epsilon_0) \left[ 1 - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \frac{S_t}{S} \right]$$

$$= -0,119 - 4,79 \cdot 0,5119 (-0,1152 - 0) \left[ 1 - \frac{4,79}{3,9847} \left( 1 - 0,2 \right) \cdot \frac{33,02}{160,22} \right] =$$

$$= 0,1075$$

## 3) Calcolare incidenza di trim

$$\begin{cases} C_{L_{trim}} = C_{L_{\alpha}} \cdot \alpha_{trim} \\ 0 = C_{m_{\alpha}} \cdot \alpha_{trim} + C_{m_0} \end{cases}$$

$$\alpha_{trim} = -\frac{C_{m_0}}{C_{m_{\alpha}}} = -\frac{0,1075}{-1,647} = 0,065 \text{ rad} = 3,74^{\circ}$$

4) Determinare coordinata del punto neutro  $h_N$ 

Il punto neutro è la posizione del baricentro per cui il momento è invariante con l'incidenza,

$$\rightarrow C_{m_{\alpha}} = 0$$

$$C_{m_{\alpha}} = [C_{L_{\alpha}}(h_N - h_{Nwb}) - a_T \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) \bar{V}_H] = 0$$

$$\begin{aligned} h_N &= h_{Nwb} + \frac{a_T}{C_{L_{\alpha}}} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) \bar{V}_H \\ &= 0,221 + \frac{4,79}{3,9847} (1 - 0,2) \cdot 0,5119 = 0,7133 \end{aligned}$$

$$h - h_N = 0,3 - 0,7133 = -0,4133 < 0 \quad \text{Margine di stabilità}$$

## 5) Vedere diagramma 4.2

6) Volutare il modo di equilibrio il velivolo nell'intervallo di incidenza  $1^{\circ} \div 10^{\circ}$  e porità di  $C_{m_{\alpha}}$ .

→ Bisogna operare una variazione di  $C_{m_0}$ , e quindi di  $i_T$ , che è l'unico parametro di  $C_{m_0}$  che possa essere variato durante il volo.

$$C_{m_0} = C_{m_{0wb}} - a_T \bar{V}_H (i_T - \epsilon_0) \left[1 - \frac{a_T}{C_{L_{\alpha}}} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) \frac{S_T}{S}\right]$$

$$\text{EQUILIBRIO: } 0 = C_{m_{\alpha}} \cdot \alpha_{trim} + C_{m_0}$$

$$C_{m_0} = -C_{m_{\alpha}} \cdot \alpha_{trim}$$

$$i_T = \frac{C_{m_{\alpha}} \cdot \alpha_{trim} + C_{m_{0wb}}}{a_T \bar{V}_H \left[1 - \frac{a_T}{C_{L_{\alpha}}} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) \frac{S_T}{S}\right]}$$

Ve notato che per avere un  $C_{m_0} > 0$   $i_T$  è negativo.

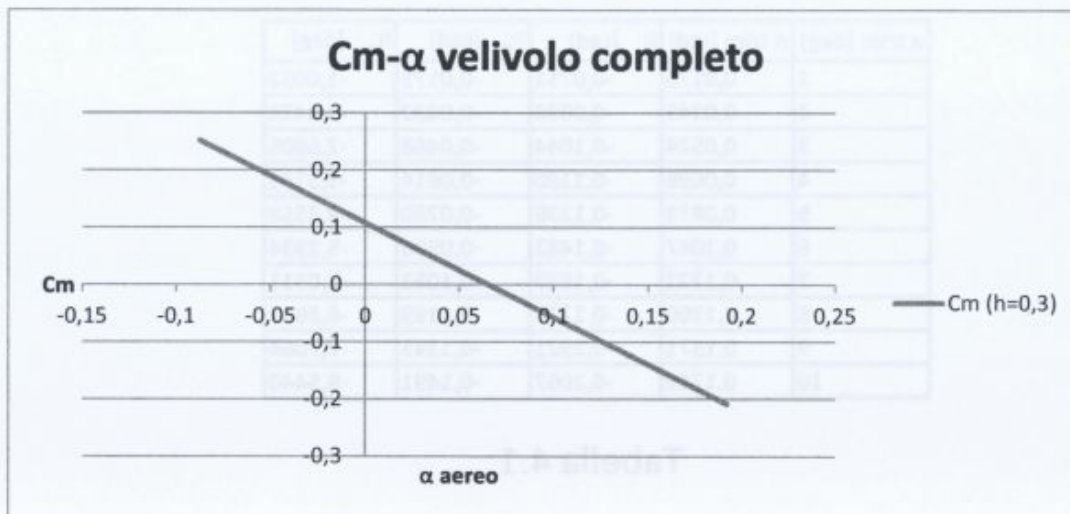


Diagramma 4.1

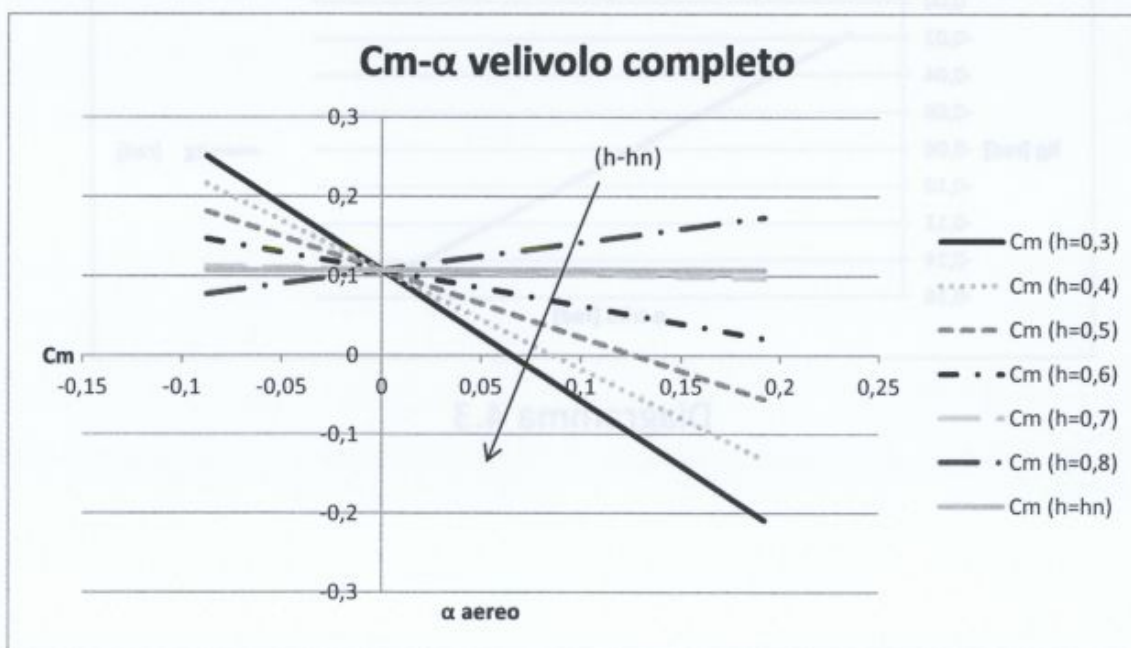


Diagramma 4.2

**Politecnico di Torino**  
**I Facoltà di Ingegneria**  
**Anno Accademico 2013-2014**

**Corso di MECCANICA DEL VOLO**

**ESERCITAZIONE 5**

Con riferimento al velivolo di cui all'esercitazione 3 si svolgano i seguenti punti:

- 1) definire e calcolare le derivate aerodinamiche di controllo  $C_{L\delta_e}$  e  $C_{m\delta_e}$ .  
(considerando  $\frac{c_e}{c_t} = 0.2$ )
- 2) valutare in termini percentuali l'influenza del termine dipendente dal margine statico sulla derivata di controllo  $C_{m\delta_e}$ , al variare della posizione del baricentro ( $h = 0.3 \div 0.8$ );
- 3) tracciare le curve  $C_L - \alpha$  ( $\delta_e = -4^\circ - \delta_e = 0^\circ - \delta_e = +4^\circ$ ) e  $C_{Ltrim} - \alpha$  sul medesimo grafico, evidenziandone le intersezioni;
- 4) individuare la correlazione fra le suddette intersezioni ed i punti caratteristici della curva  $C_m - \alpha$ ;
- 5) ricavare la relazione  $C_{Ltrim} - \delta_{e_{trim}}$  e tracciarne l'andamento qualitativo su grafico per diverse posizioni del baricentro ( $h = 0.3 \div 0.8$ );
- 6) ricavare la relazione  $V_{trim} - \delta_{e_{trim}}$  e tracciarne l'andamento su grafico per diverse posizioni del baricentro ( $h = 0.3 \div 0.8$ );
- 7) con riferimento ad un inviluppo di volo caratterizzato da  $V_{min} = 95$  km/h e  $V_{max} = 205$  km/h, determinare analiticamente e graficamente il margine statico che consente di controllare il velivolo in tutto il suo inviluppo di volo, considerando quali limiti di saturazione del comando  $\delta_{e_{max}} = 26^\circ$  e  $\delta_{e_{min}} = -24^\circ$  ed un margine per la manovra pari al 30%.



MATTEO CAPPO &gt; 209364

## ESERCITAZIONE 5

1) Calcolare derivate aerodinamiche di controllo  $C_{L_{\delta e}}$  e  $C_{m_{\delta e}}$

$$L = L_{wb} + L_t(\delta e = 0) + \Delta L(\delta e)$$

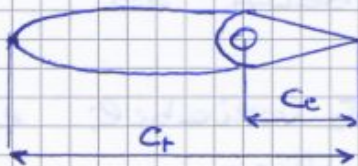
$$C_L = \left( C_{L_{wb}} + C_{L_t} \frac{S_T V_T^2}{S V^2} \right) + \Delta C_L(\delta e) = C_{L_{\alpha}} \cdot \alpha + C_{L_{\delta e}} \cdot \delta e$$

$$\Delta L(\delta e) = \frac{1}{2} \rho V_T^2 S_T a_e^* \delta e$$

$$\Delta C_L(\delta e) = \frac{\frac{1}{2} \rho V_T^2 S_T a_e^* \delta e}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = a_e^* \eta_T \frac{S_T}{S} \delta e$$

Inoltre  $a_e^* = \tau a_t^*$ , poiché il velivolo non dispone di una "all moving tail" ma l'equilibratore è una parte mobile dello stabilizzatore

$$C_{L_{\delta e}} = \tau a_t^* \frac{S_T}{S} = \tau a_t \frac{S_T}{S}$$



Dal diagramma  $\tau = f\left(\frac{c_e}{c_t}\right)$  entrando in ascissa con  $\frac{c_e}{c_t} = 0,2$  si ricava  $\tau = 0,55$

$$\rightarrow C_{L_{\delta e}} = 0,55 \cdot 4,79 \cdot 0,2061 = 0,5429$$

$$M = M_0(i_{tr} = i_{ro}, \delta e = 0) + L(h - h_{nw}) \bar{c} + \Delta M(\delta e)$$

$$\Delta M(\delta e) = -\Delta L_t(\delta e) \cdot \bar{c}_t + \Delta L_t(\delta e) (h - h_{nwb}) \bar{c}$$

$$\Delta C_{m_{\delta e}} = -\Delta C_{L_t}(\delta e) \frac{\bar{c}_t}{\bar{c}} + \Delta C_{L_t}(\delta e) (h - h_{nwb})$$

$$= -a_t \tau \frac{S_T}{S} \frac{\bar{c}_t}{\bar{c}} \delta e + a_t \tau \frac{S_T}{S} \delta e (h - h_{nwb})$$

$$= \left[ -a_t \tau \bar{V}_H + a_t \tau \frac{S_T}{S} (h - h_{nwb}) \right] \delta e$$

$$C_{m_{\delta e}} = \left[ -a_t \tau \bar{V}_H + a_t \tau \frac{S_T}{S} (h - h_{nwb}) \right]$$

$$= -4,79 \cdot 0,55 \cdot 0,5119 + 0,5429 (0,3 - 0,221) = -1,3057$$

→ 209364

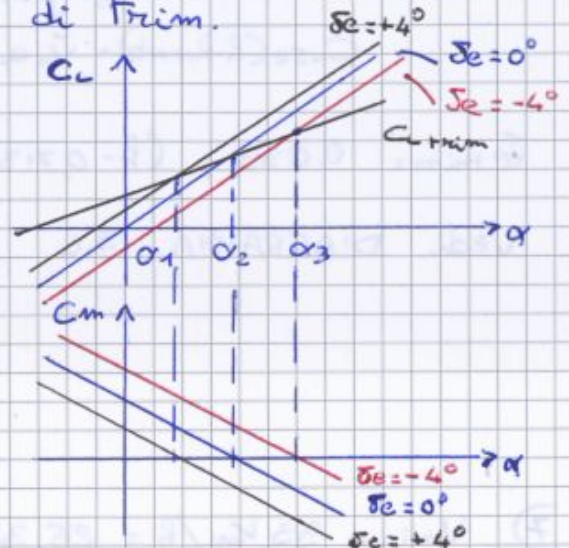
4) Vedi DIAGRAMMA 5.2

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m\delta e} \cdot \delta e$$

Osservando la figura si può notare che in corrispondenza delle intersezioni tra  $C_{trim} - \alpha$  e le curve  $C_L - \alpha$  a  $\delta e$  variabile si ha  $C_m = 0$ , ovvero proprio le condizioni di trim.

Ciò significa che per equilibrare il velivolo, per esempio a  $\alpha_3$ , dovrò deflettere gli equilibratori di  $\delta e = -4^\circ$ .

A conferma di ciò dal diagramma di  $C_m$  si può notare che per un  $\delta e = -4^\circ$  e  $\alpha_3$  si ha  $C_m = 0$ , cioè è l'equilibrio.

5) Ricavo relazione  $C_{trim} - \delta e_{trim}$ 

Dal sistema scritto al punto 3) ricaviamo dalla (1):  $\alpha_{trim} = \frac{C_{trim} - C_{L\delta e} \cdot \delta e_{trim}}{C_{L\alpha}}$

e sostituiamo in (2):

$$0 = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \frac{C_{trim} - C_{L\delta e} \cdot \delta e_{trim}}{C_{L\alpha}} + C_{m\delta e} \cdot \delta e_{trim}$$

$$\delta e_{trim} = - \frac{C_{m0} C_{L\alpha} + C_{m\alpha} \cdot C_{trim}}{C_{m\delta e} C_{L\alpha} - C_{m0} C_{L\delta e}}$$

Vedi diagramma 5.3

$$\delta e_{trim} = - \frac{C_{m0} + C_{L\alpha} (h - h_w)}{C_{L\delta e} (h_w - h_{wub}) - a e \bar{V}_h} = 0,099 + \frac{C_{L\alpha} (h - 0,7133)}{-1,081}$$

$$\Delta = C_{L\delta e} (h_w - h_{wub}) - a e \bar{V}_h = 0,5429 (0,7133 - 0,221) - 2,634 \cdot 0,5119 = -1,081$$

Come si può notare dal DIAGRAMMA 5.3 (e poi meglio dal 5.5) il  $\delta e'_{min}$  ci è dato dalla necessità di equilibrare il velivolo a  $C_{LMAX}$ , e questo impone la condizione anteriore per la posizione del baricentro.

#### ◆ LIMITE ANTERIORE

$$\delta e'_{min} = -0,2932 = - \frac{0,1075 + 0,9153(h-h_N)}{0,5429(0,7133 - 0,221) - 2,634 \cdot 0,5119}$$

$$0,3169 = -0,1075 - 0,9153(h-h_N)$$

$$(h_1 - h_N) = -0,4639 \rightarrow h_1 = -0,4639 + 0,7133 = 0,2496$$

#### ◆ LIMITE POSTERIORE

$$\delta e'_{max} = 0,3176 = - \frac{0,1075 + 0,9153(h-h_N)}{0,5429(0,7133 - 0,221) - 2,634 \cdot 0,5119}$$

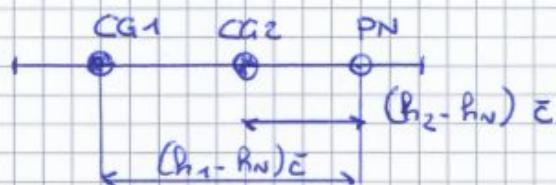
$$-0,3433 = -0,1075 - 0,9153(h-h_N)$$

$$(h_2 - h_N) = 0,2576 > 0 \rightarrow \text{INSTABILE}$$

$$\rightarrow h_2 = 0,2576 + 0,7133 = 0,9709$$

Con il baricentro in posizione  $h_2$  l'aereo è comunque equilibrabile, tuttavia è instabile

La reale posizione limite posteriore del baricentro è quella che garantisce un sufficiente margine statico al velivolo



Vedere diagramma 5.5

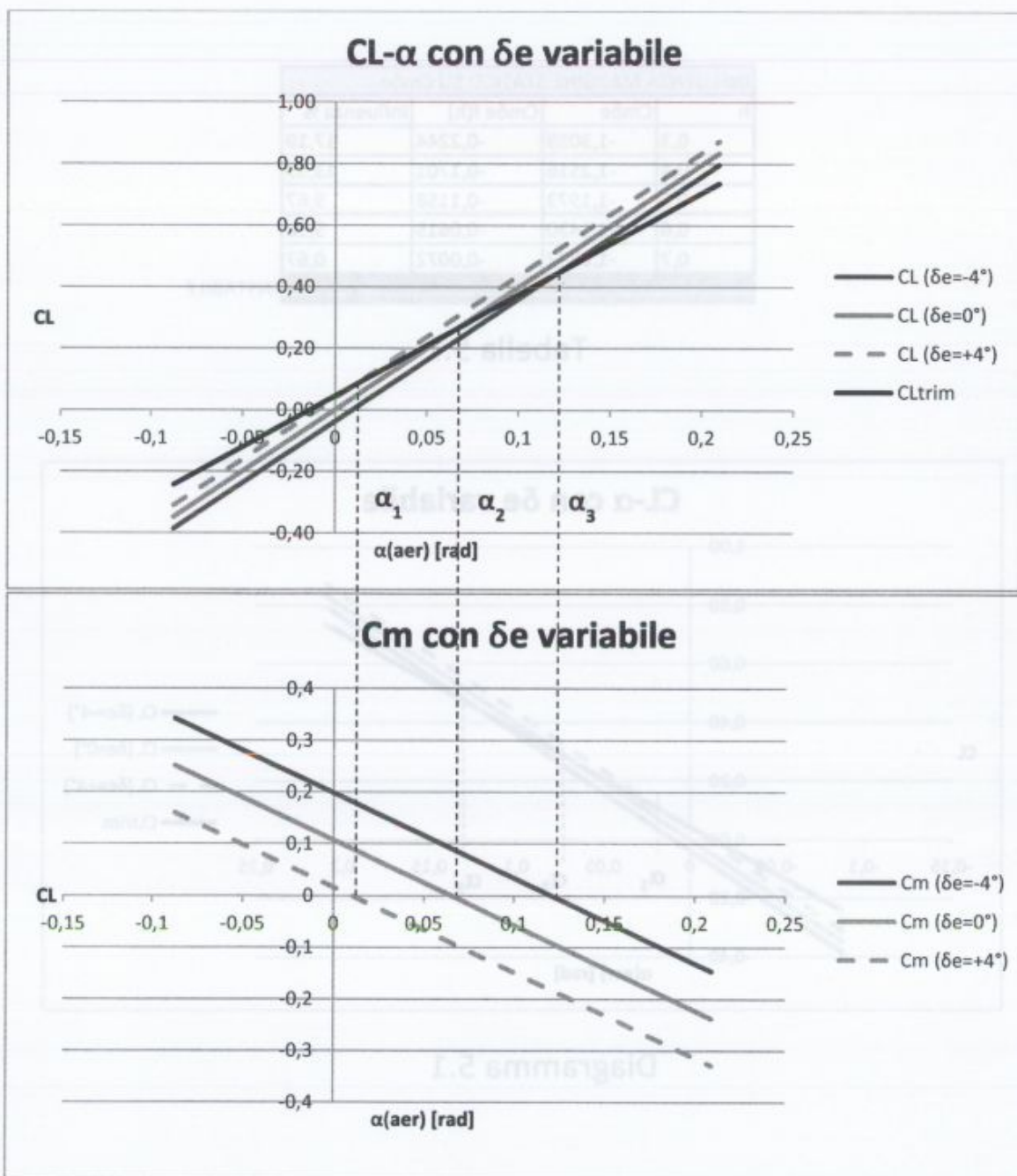


Diagramma 5.2

$$\alpha_1 = \alpha_{\text{TRIM}} \quad (\delta_e = +4^\circ)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{\text{TRIM}} \quad (\delta_e = 0^\circ)$$

$$\alpha_3 = \alpha_{\text{TRIM}} \quad (\delta_e = -4^\circ)$$

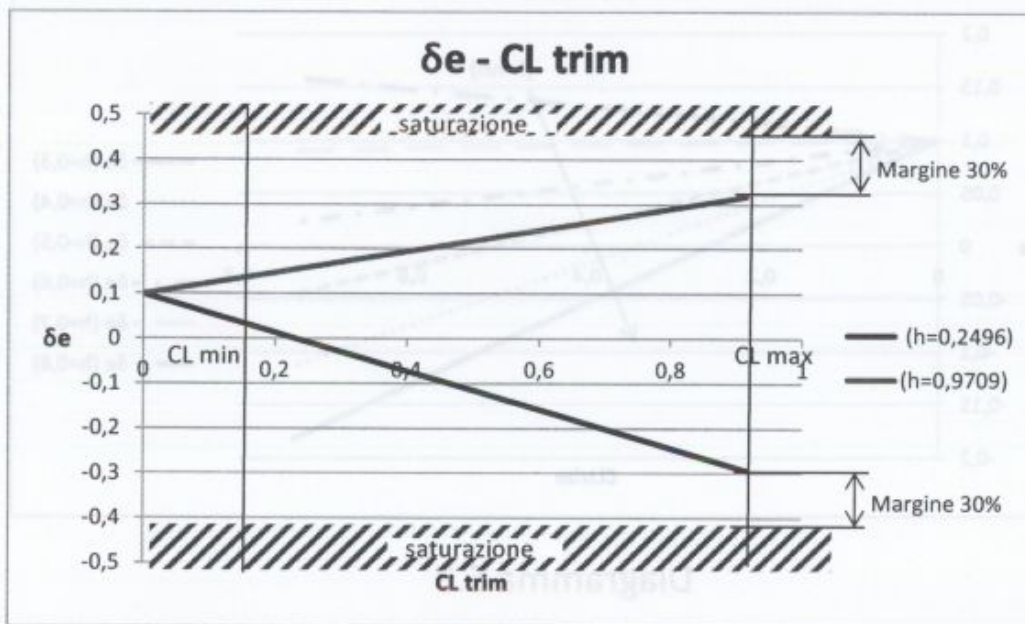
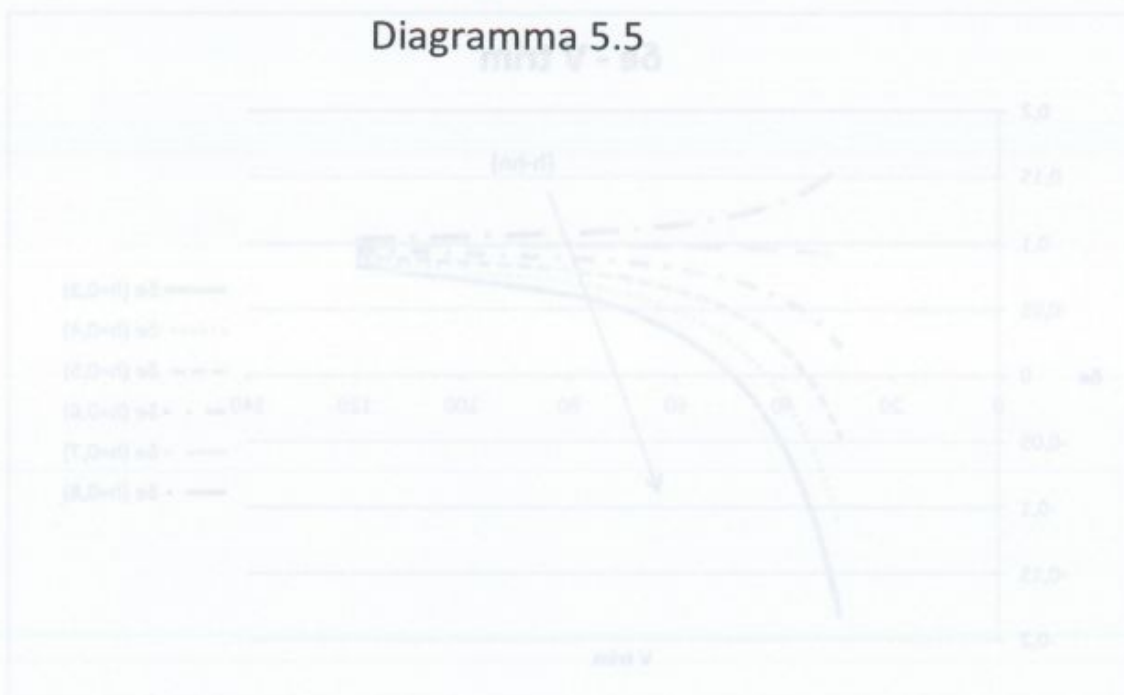


Diagramma 5.5



### Calcolo derivata $C_{l\beta}$

Roskam J., "Methods for Estimating Stability and Control Derivatives of Conventional Subsonic Airplanes"

$$C_{l\beta} = \underbrace{\left(C_{l\beta}\right)_w}_1 + \underbrace{\left(C_{l\beta}\right)_{wb}}_2 + \underbrace{\left(C_{l\beta}\right)_{ht}}_3 + \underbrace{\left(C_{l\beta}\right)_{vt}}_4$$

1) contributo ala

$$C_{l\beta}|_w = 57.3 \left\{ C_L \left[ \left( \frac{C_{l\beta}}{C_L} \right)_{\Lambda_{c/2}} K_{M\Lambda} K_f + \left( \frac{C_{l\beta}}{C_L} \right)_A \right] + \Gamma \left[ \frac{C_{l\beta}}{\Gamma} K_{M\Gamma} + \frac{\Delta C_{l\beta}}{\Gamma} \right] + \theta \tan \Lambda_{c/4} \left( \frac{\Delta C_{l\beta}}{\theta \tan \Lambda_{c/4}} \right) \right\}$$

$$\left( \frac{C_{l\beta}}{C_L} \right)_{\Lambda_{c/2}} \equiv \text{contributo freccia alare (Fig.1)}$$

$$K_{M\Lambda} \equiv \text{correzione compressibilità relativa alla freccia alare (Fig.2)}$$

$$K_f \equiv \text{fattore di correzione dovuto alla fusoliera (Fig.3)}$$

$$\left( \frac{C_{l\beta}}{C_L} \right)_A \equiv \text{contributo allungamento alare (Fig.4)}$$

$$\Gamma \equiv \text{diedro alare [deg]}$$

$$\frac{C_{l\beta}}{\Gamma} \equiv \text{contributo diedro alare (Fig.5)}$$

$$K_{M\Gamma} \equiv \text{correzione compressibilità relativa al diedro alare (Fig.6)}$$

$$\frac{\Delta C_{l\beta}}{\Gamma} \equiv \text{effetto indotto ala - fusoliera} = -0.0005 \sqrt{A} \left( \frac{d}{b} \right)^2 \quad [\text{deg}^{-2}]$$

$$\theta \equiv \text{svergolamento alare [deg]}$$

$$\Lambda_{c/4} \equiv \text{freccia alare riferita alla linea dei quarti corda [deg]}$$

$$\left( \frac{\Delta C_{l\beta}}{\theta \tan \Lambda_{c/4}} \right) \equiv \text{contributo svergolamento alare (Fig.7)}$$

↓  
L'ala del nostro aereo NON È SVERGOLATA

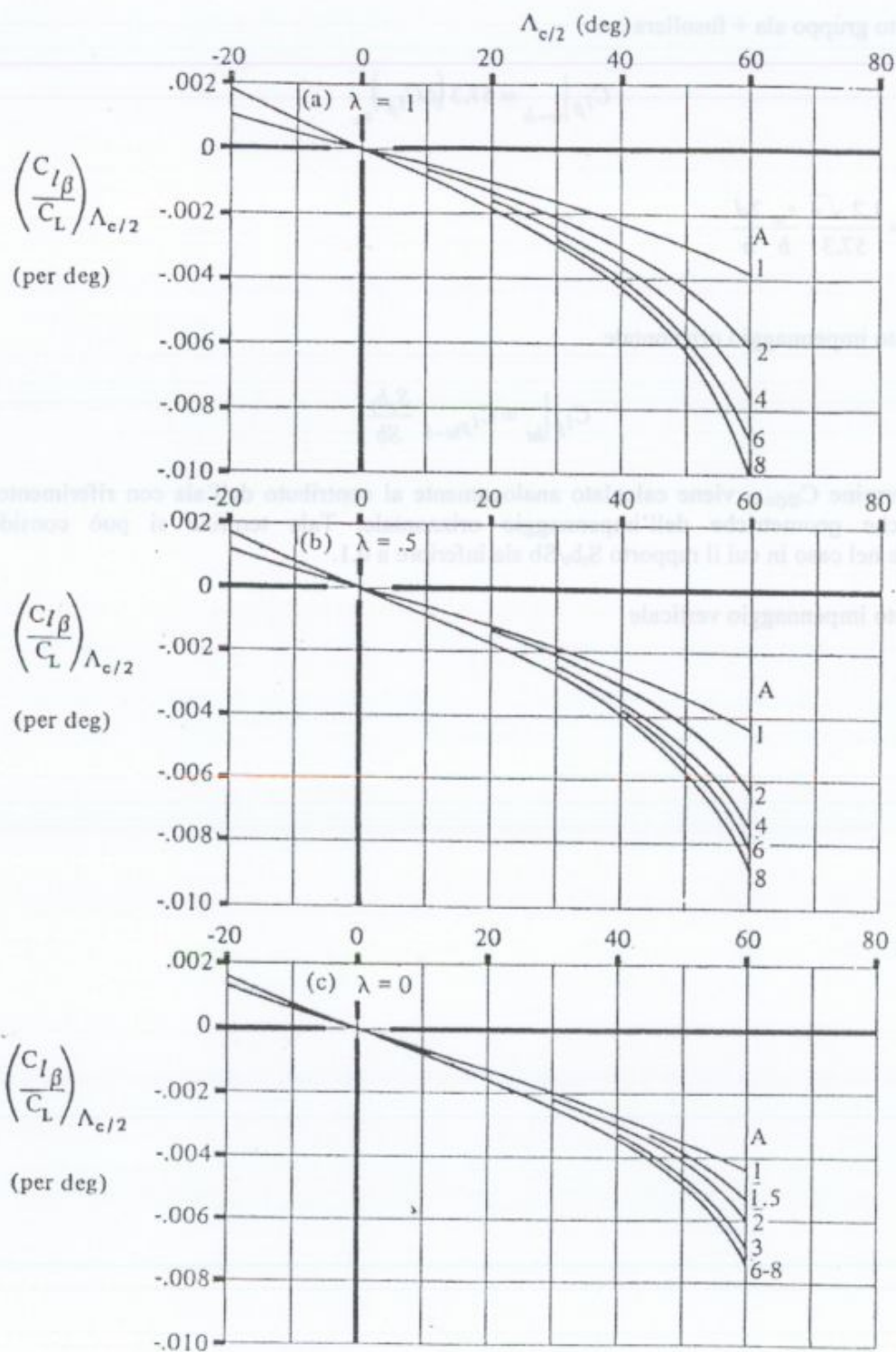


Figura 1: Contributo della freccia alare.

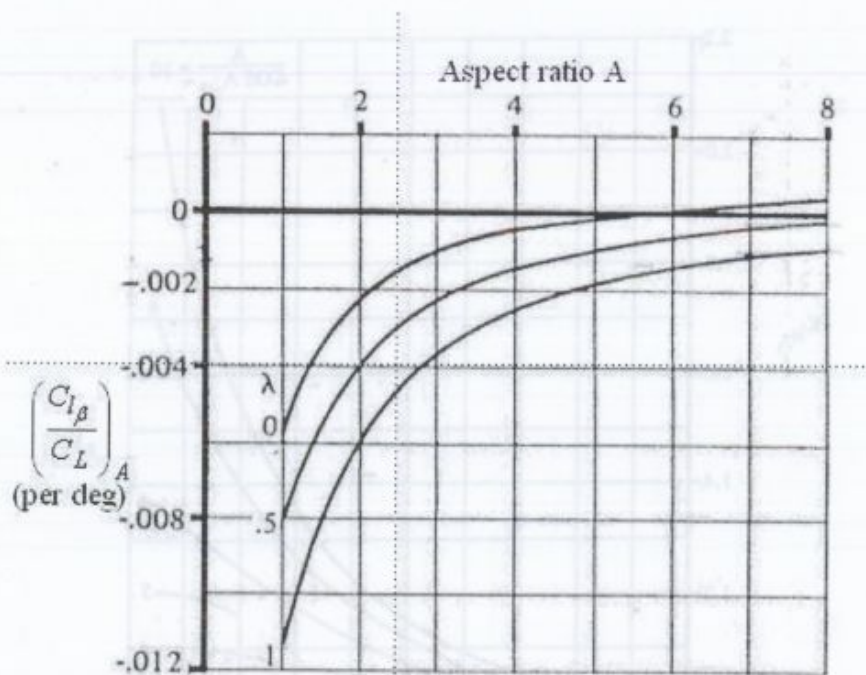


Figura 4: Contributo dell'allungamento alare.

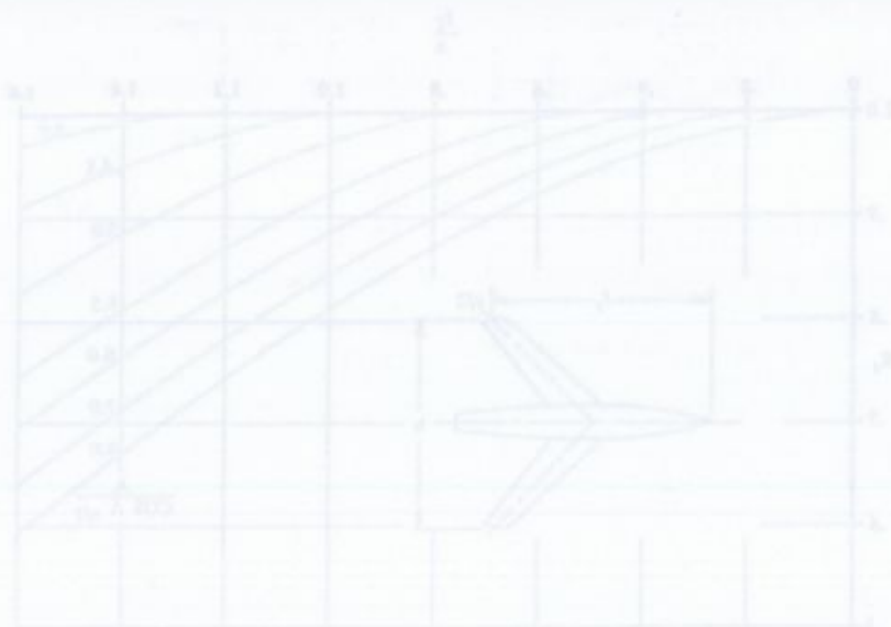


Figura 5: Variazione di correzione dovuta all'aspetto alare.



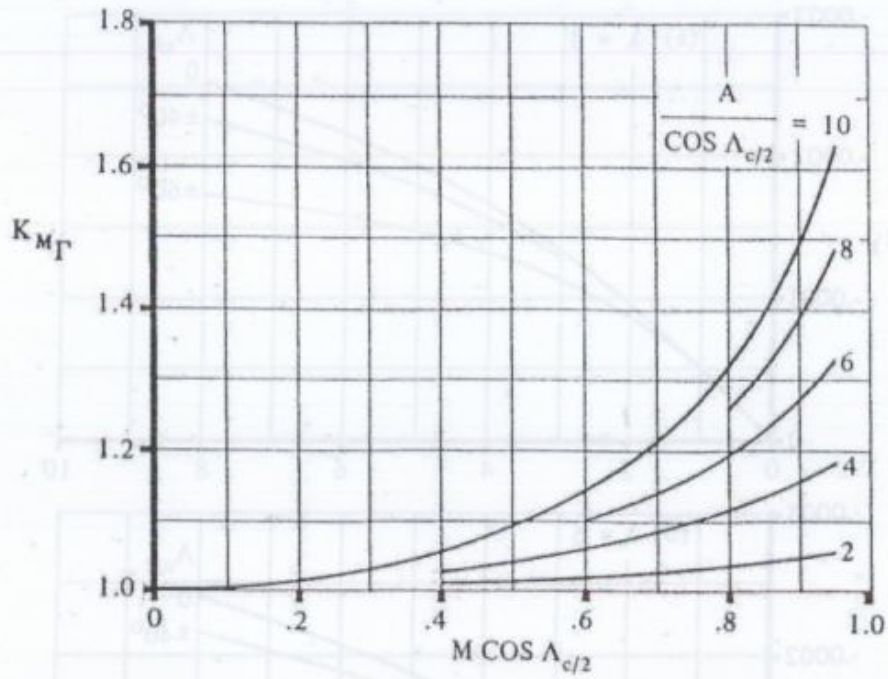


Figura 6: Correzione di compressibilità relativa al diedro alare.

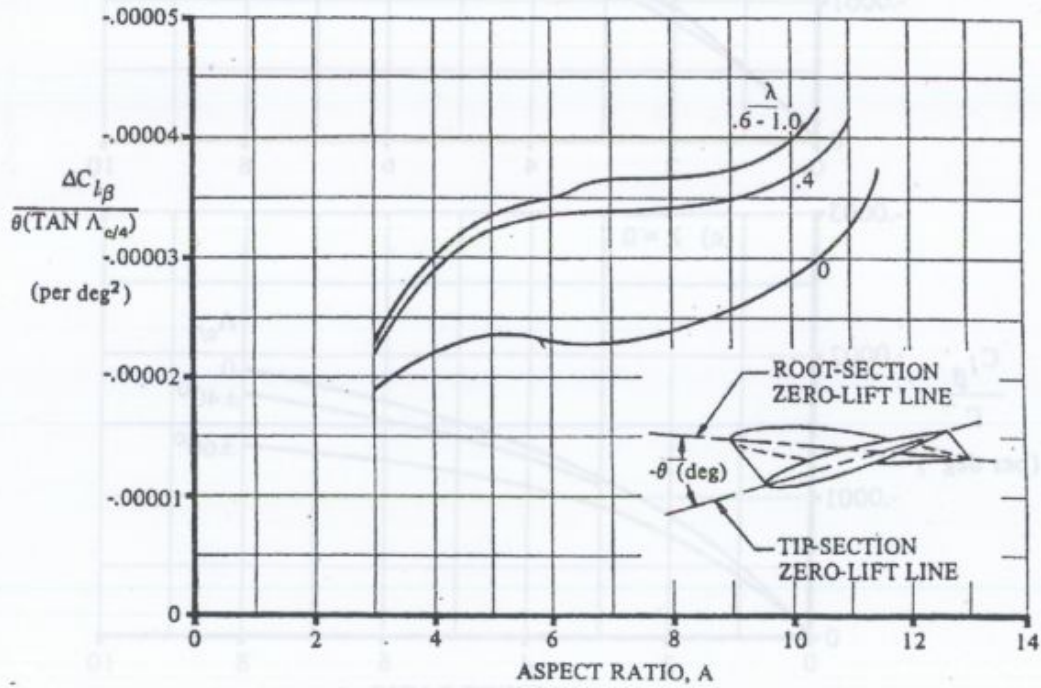


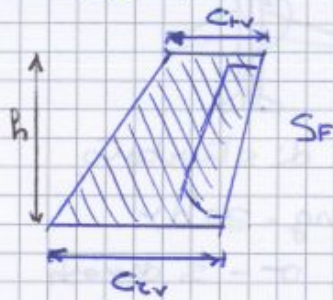
Figura 7: Contributo dello svergolamento alare.

$$C_{m\beta}(F) = -Q_F \underbrace{\left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right)}_{>0} \frac{S_F l_F}{S b} \quad \frac{S_F l_F}{S b} = V_V$$

Per avere  $C_{m\beta} > 0$  occorre che  $l_F < 0$ , cioè che la deriva sia collocata DEDRO al baricentro.

$$\rightarrow C_{m\beta} = -Q_F \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) V_V > 0$$

2) Dimensionare impennaggio verticale per avere  $C_{m\beta} = 0,128 \text{ rad}^{-1}$ .



$$C_{m\beta} = -Q_F \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) \frac{S_F l_F}{S b}$$

$$S_F = \frac{-C_{m\beta} S b}{l_F Q_F \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right)}$$

$$Q_F = Q_F^* \cdot \eta_V = 2,78 \cdot 0,997 = 2,697$$

$$S_F = \frac{-0,128 \cdot 160,22 \text{ ft}^2 \cdot 33,75 \text{ ft}}{-20,01 \text{ ft} \cdot 2,697 \cdot (1 - 0,07)} = 13,82 \text{ ft}^2 = 1,28 \text{ m}^2$$

Ora bisogna determinare l'altezza della deriva.

$$\text{Rapporto di rastremazione } \lambda_V = \frac{C_{fv}}{C_{cv}} = 0,504$$

$$S_F = (C_{cv} + C_{fv}) \cdot \frac{h}{2} = C_{cv} (1 + \lambda_V) \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2 S_F}{C_{cv} (1 + \lambda_V)} = \frac{2 \cdot 13,82 \text{ ft}^2}{4,298 \text{ ft} (1 + 0,504)} = 4,275 \text{ ft} = 1,30 \text{ m}$$

3) Calcolare derivata  $C_{ep}$  come somma dei contributi dei diversi componenti del velivolo

$$C_{ep} = (C_{ep})_w + (C_{ep})_{wb} + (C_{ep})_{ht} + (C_{ep})_{vt}$$

seguendo il metodo <sup>1.</sup> <sup>2.</sup> <sup>3.</sup> <sup>4.</sup> indicato sulla traccia

1. WING

Assumendo pancia d'ora  $\Lambda = 0^\circ$ , diedro  $\Gamma = 0^\circ$  e svergolamento  $\vartheta = 0^\circ$

## 2. WING BODY

$$(C_{e\beta})_{wb} = \frac{57,3}{57,3} \cdot \frac{1,2\sqrt{A}}{57,3} \cdot \frac{z_w}{b} \cdot \frac{2d}{b}$$

$z_w =$  distanza lungo  $z$   
tra asse fus. e corda  
d'ala

$$= \frac{1,2}{\text{rad}} \sqrt{7,11} \cdot \left( \frac{-2,162 \text{ ft}}{33,75 \text{ ft}} \right) \cdot \frac{2 \cdot 2,7 \text{ ft}}{33,75 \text{ ft}} = -0,0328 \text{ rad}^{-1}$$

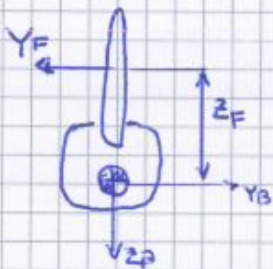
## 3. HORIZONTAL TAIL

$$(C_{e\beta})_{ht} = (C_{e\beta})_{ht-b} \cdot \frac{S_r b_r}{S_b}$$

$(C_{e\beta})_{ht-b}$  si calcola analogamente al contributo dell'ala. Se però  $\frac{S_r b_r}{S_b} < 1$  il contributo dei piani di coda è trascurabile rispetto a quello delle altre parti dell'aereo.

$$\frac{S_r b_r}{S_b} = \frac{33,02}{160,22} \cdot \frac{10}{33,75} = 0,06 < 0,1$$

## 4. VERTICAL TAIL



$$L = Y_{(F)} \cdot z_F$$

$$C_e = \frac{Y_{(F)} z_F}{\frac{1}{2} \rho v^2 S_b} = a_F \frac{S_F}{S} \left[ \sigma_0 - \left( 1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \beta \right] \frac{z_F}{b}$$

$$(C_{e\beta})_{vt} = - a_F \frac{S_F}{S} \left( 1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \frac{z_F}{b}$$

Il segno di  $z_F$  è negativo, nella formula tuttavia lo consideriamo positivo.

A essere rigorosi,  $L$  andrebbe definito come

$L = z_F \wedge Y_{(F)}$ , ma  $z_F$  essendo una lunghezza dovrebbe essere positivo in modulo!

$$(C_{e\beta})_{vt} = -2,69 \cdot \frac{13,82}{160,22} \cdot (1 - 0,07) \cdot \frac{1,97}{33,75} = -0,0125 \text{ rad}^{-1}$$

Pertanto sommando i contributi:

$$C_{e\beta} = -0,0104 \text{ rad}^{-1} - 0,0328 \text{ rad}^{-1} - 0,0125 \text{ rad}^{-1} = -0,0557 \text{ rad}^{-1}$$

- $K_f$ : fattore di correzione dovuto a fusoliera

Grafico in fig. 3

Parametri in ingresso:

$$\frac{A}{\cos \Lambda_{c/2}} = \frac{7,11}{\cos(27,88 \text{ deg})} = 8,044$$

$$l_F = l_{bf} + \frac{b}{2} \tan \Lambda_{c/2} = 5,5 \text{ ft} + \frac{33,75 \text{ ft}}{2} \tan(27,88)$$

$$= 14,43 \text{ ft}$$

$$\frac{l_F}{b} = \frac{14,43 \text{ ft}}{33,75 \text{ ft}} = 0,427$$

→ Dal grafico  $K_f = 0,95$

- Consideriamo ora il contributo dell'angolo diedro  $\Gamma = 3^\circ$ .

- $\frac{C_{e\beta}}{\Gamma}$ : contributo dell'angolo diedro, dato dal grafico in fig. 5 in funzione dell'aspect ratio  $A$  per diversi valori di  $\lambda$  e di  $\Lambda_{c/2}$

Fig. 5, interpolazione lineare poiché non c'è  $\lambda = 0,71$

$$\frac{C_{e\beta}}{\Gamma} = \left( \frac{C_{e\beta}}{\Gamma} \right)_1 + \frac{\left( \frac{C_{e\beta}}{\Gamma} \right)_2 - \left( \frac{C_{e\beta}}{\Gamma} \right)_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) \quad \begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 0,5 \end{array}$$

Entrando nel grafico con  $A = 7,11$ ,  $\Lambda_{c/2} = 27,88 \text{ deg}$

$$\frac{C_{e\beta}}{\Gamma} = -0,00022 + \frac{(-0,00023 + 0,00022)}{1 - 0,5} (0,71 - 0,5) = -2,242 \cdot 10^{-4} \text{ deg}^{-2}$$

- $K_{M\beta}$ : correzione di compressibilità relativa e diedro  $\rightarrow K_{M\beta} \cong 1$

$$\frac{\Delta C_{e\beta}}{\Gamma} = -0,0005 \sqrt{A} \left( \frac{d}{b} \right)^2 = -0,0005 \sqrt{7,11} \left( \frac{2,7 \text{ ft}}{33,75 \text{ ft}} \right)^2 = -8,532 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-2}$$

Effetto indotto da fusoliera

**Politecnico di Torino**  
**I Facoltà di Ingegneria**  
**Anno Accademico 2013-2014**

**Corso di MECCANICA DEL VOLO**

**ESERCITAZIONE 7**

Con riferimento al velivolo di cui all'esercitazione 3 e ai risultati di cui all'esercitazione 6, si svolgano i seguenti punti:

- 1) ricavare le derivate di controllo in imbardata e valutarne il segno;
- 2) diagrammare le curve  $C_n(\beta, \delta_r)$  per le seguenti deflessioni di timone:  $\delta_r = -2^\circ, 0^\circ, 4^\circ, 6^\circ$ ;
- 3) valutare la deflessione di timone necessaria a mantenere il velivolo ad angolo di derapata nullo nel caso di spinta disassata (supponendo la spinta pari a 1518 N), con disassamento rispetto all'asse longitudinale del velivolo pari a  $y$  (ved. Tabella 3);
- 4) valutare l'entità dell'angolo di derapata generato dal disassamento della spinta, nel caso in cui non sia possibile azionare il timone di direzione;
- 5) ricavare e calcolare il valore efficace del comando di alettone per ogni valore della derivata  $C_{l\beta}$  di cui all'esercitazione 6, prendendo a riferimento i valori di derivate di controllo in rollio riportati in Tabella 3;
- 6) ricavare, nota la rigidità in imbardata, il valore limite dell'effetto diedro per cui non si verifica l'inversione del comando di rollio;
- 7) ricavare la deflessione di timone necessaria ad annullare la coppia di rollio  $C_{l\beta} \cdot \beta$  espressa e diagrammata in funzione della deflessione di alettone.

**Tabella 3**

Coefficiente angolare di portanza	$a_r^*$	[rad <sup>-1</sup> ]	2.791
Disassamento asse di spinta	$y$	[ft]	0.656
Derivata di controllo	$C_{n\delta_a}$	[rad <sup>-1</sup> ]	0.036
Derivata di controllo	$C_{l\delta_a}$	[rad <sup>-1</sup> ]	-0.204
Superficie laterale fusoliera	$S_{Bs}$	[ft <sup>2</sup> ]	62.00

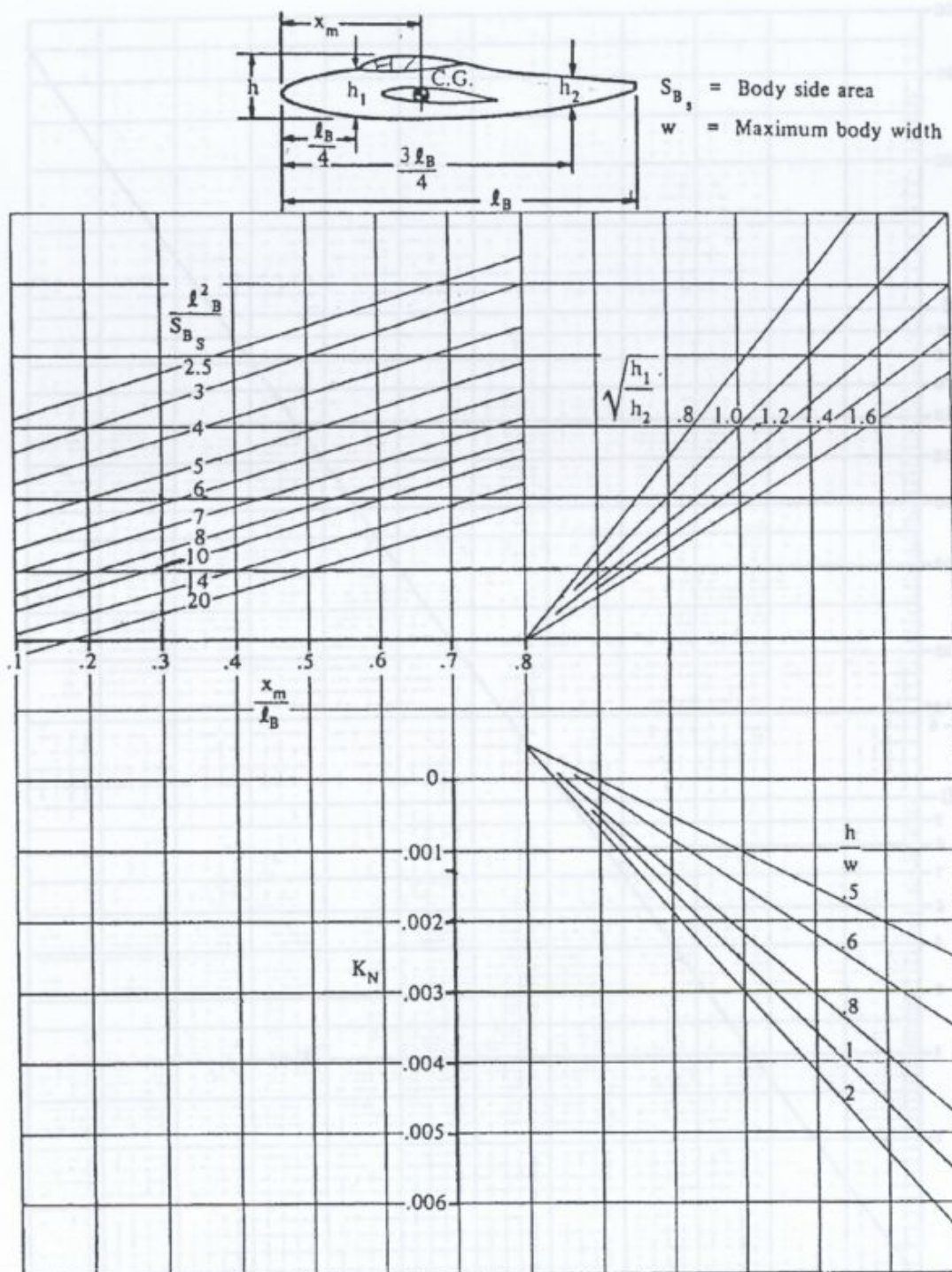


Figura 1: Fattore empirico  $K_N$  legato alla fusoliera ed all'interferenza ala-fusoliera.

MATTEO CAFFO 2209364

## ESERCITAZIONE 7

1) Ricavare le derivate di controllo in imbardata e volutarne il segno

$$N(\delta z) = Y(\delta z) \cdot l_F = \frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F a_z^* \delta z \cdot l_F$$

$$C_{n(\delta z)} = \frac{\frac{1}{2} \rho V_F^2 S_F a_z^* \delta z \cdot l_F}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b} = a_z^* \frac{V_F^2}{V^2} \delta z \frac{l_F}{b} \frac{S_F}{S}$$

$$\frac{V_F^2}{V^2} = \eta_v = 0,97$$

$$C_{n\delta z} = a_z^* \cdot \eta_v \cdot \frac{S_F}{S} \frac{l_F}{b} = 0,97 \cdot 2,791 \cdot \frac{13,82 \text{ ft}^2}{160,22 \text{ ft}^2} \cdot \frac{(-29,01) \text{ ft}}{33,75 \text{ ft}}$$

$$= -0,138 \text{ rad}^{-1}$$

$$C_{n\delta z} < 0$$

2) Diagrammare le curve  $C_m - \beta$  per diverse deflessioni del timone  $\delta z$

$$C_m = C_{m\beta} \cdot \beta + C_{m\delta z} \cdot \delta z$$

Come valore di  $C_{m\beta}$  NON si prende  $C_{m\beta} = +0,128 \text{ rad}^{-1}$ , in base a cui è stata dimensionata la deriva (vedi ESERCITAZIONE 6, punto 2).

$$C_m = 0,090 \cdot \beta - 0,138 \cdot \delta z$$

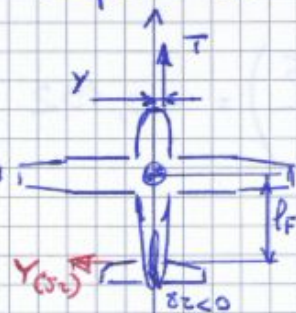
Vedi DIAGRAMMA 7.1

Vedi anche punto

2bis), dopo punto 5)

→  $C_{m\beta}$  per velivolo completo

3) Volutare  $\delta z$  necessario a mantenere l'aereo a  $\beta = 0$  in caso di disassamento della spinta rispetto ad asse longitudinale



$$Y = 0,656 \text{ ft} = 0,20 \text{ m}$$

$$T = 1518 \text{ N}$$

$$N = T \cdot Y_T < 0$$

$$Y(\delta z) \cdot l_F = T \cdot Y_T$$

2bis) VALUTAZIONE DI  $C_{n\beta}$  PER VELIVOLO COMPLETO

Per non utilizzare il  $C_{n\beta}$  fornito in esercitazione 7, si procederà ora al calcolo della yaw stiffness data dai vari componenti del velivolo:

$$C_{n\beta} = \underbrace{(C_{n\beta})_w}_{\text{WING}} + \underbrace{(C_{n\beta})_b}_{\text{BODY}} + \underbrace{(C_{n\beta})_v}_{\text{VERTICAL TAIL}}$$

## 1. WING

Contributo trascurabile per bassi angoli di incidenza.

## 2. BODY

Questo contributo viene così calcolato:

$$(C_{n\beta})_b = - \frac{180 \text{ deg}}{\pi \text{ rad}} K_N K_{Re} \frac{S_{B3}}{S} \frac{l_B}{b}$$

- $K_N$ : fattore empirico relativo alla presenza della fusoliera, ricavabile dal grafico in fig. 1

Il grafico è diviso in 4 quadranti:

- a) si entra nel primo in alto a sinistra

$$\text{con } \frac{x_m}{l_b} = \frac{7,821 \text{ ft}}{24,08 \text{ ft}} = 0,325$$

$$\frac{l_b^2}{S_{B3}} = \frac{(24,08)^2 \text{ ft}^2}{62 \text{ ft}^2} = 9,352$$

- b) Con il punto trovato si procede nel secondo quadrante (in verso orario) e si interseca la retta corrispondente al valore di  $\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$  calcolato

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{5,38 \text{ ft}}{2,58 \text{ ft}}} = 1,445$$

- c) Proseguendo in verso orario si deve intersecare nel 3° quadrante la retta relativa a

$$\frac{h}{w} = \frac{5,38 \text{ ft}}{2,43 \text{ ft}} = 2,214$$



6) Ricavare, nota la yaw stiffness, il valore limite di  $C_{\beta}$  per cui non si verifica l'inversione del comando di rollio

$$C_{\beta} = 0,090$$

$$\frac{C_{\beta} \cdot C_{nsa}}{C_{\beta} \cdot C_{sa}} = 1 \rightarrow C_{\beta} = \frac{C_{\beta} \cdot C_{sa}}{C_{nsa}}$$

LIMITE

$$C_{\beta \text{ LIMITE}} = \frac{0,090 \cdot (-0,204)}{0,036} = -0,51 \text{ rad}^{-1}$$

7) Ricavare la deflessione  $\delta_z$  necessaria ad annullare la coppia di rollio  $C_{\beta} \cdot \beta$  espressa in funzione di  $\delta_a$

$$\delta_z = -\frac{C_{nsa}}{C_{nsz}} \cdot \delta_a, \text{ ricavato da } \begin{cases} C_e = C_{sa} \cdot \delta_a \\ 0 = C_{nsz} \cdot \delta_z + C_{nsa} \cdot \delta_a \end{cases}$$

$$= -\frac{0,036}{0,138} \cdot \delta_a = 0,260 \delta_a$$

Vedi DIAGRAMMA 7.2

*Politecnico di Torino  
I Facoltà di Ingegneria  
Anno Accademico 2013-2014*

*Corso di MECCANICA DEL VOLO*

**ESERCITAZIONE 8**

Con riferimento al velivolo di cui all'esercitazione 3 e ai dati riportati all'esercitazione 2, si svolgano i seguenti punti:

- 1) scrivere l'equazione caratteristica del piano longitudinale, esplicitandone i coefficienti;
- 2) calcolare i coefficienti del polinomio caratteristico nei seguenti casi:  
A.  $C_{m\alpha} = -1.88 \text{ rad}^{-1}$   
B.  $C_{m\alpha} = 0.078 \text{ rad}^{-1}$
- 3) con riferimento ai dati di cui al punto (2) – caso (A), individuare i modi propri longitudinali, caratterizzandoli mediante periodo, tempo di dimezzamento, pulsazione naturale e smorzamento;
- 4) con riferimento ai dati di cui al punto (2) – caso (A), calcolare pulsazione naturale e smorzamento dei modi propri utilizzando i metodi approssimati;
- 5) tracciare il luogo delle radici per il piano longitudinale al variare del margine statico (considerando che il margine statico sia compreso nell'intervallo  $-0.2 \leq [h - h_n] \leq 0.2$ );
- 6) con riferimento ai dati delle esercitazioni precedenti, valutare la condizione limite di stabilità per il modo di corto periodo.

$$\lambda [\bar{E}] - [\bar{A}] [\bar{E}] = 0 \rightarrow (\lambda [\bar{I}] - \bar{A}) [\bar{E}] = 0$$

Soluzioni non banali se  $\det(\lambda [\bar{I}] - \bar{A}) = 0$

$|\lambda [\bar{I}] - \bar{A}| =$  polinomio caratteristico  $P(\lambda^n) = 0$

$$A_1 \lambda^4 + B_1 \lambda^3 + C_1 \lambda^2 + D_1 \lambda + E_1 = 0$$

I coefficienti  $A_1, \dots, E_1$  dell'equazione caratteristica sono funzioni delle derivate aerodinamiche:

$$A_1 = 2\mu \hat{I}_y \cdot (2\mu + C_{L\dot{\alpha}})$$

$$B_1 = 2\mu \hat{I}_y \cdot (C_{L\alpha} + C_{L\dot{\alpha}} - C_{Tm} + C_{Du}) - \hat{I}_y (C_{Tm} - C_{Du}) C_{L\dot{\alpha}} - 2\mu C_{mq} C_{L\dot{\alpha}} + 4\mu^2 (C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}})$$

$$C_1 = 2\mu [C_{mq} \cdot (C_{Tm} - C_{L\alpha} - C_{L\dot{\alpha}} - C_{Du}) - 2\mu C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}} (C_{Tm} - C_{Du})] + \hat{I}_y [2C_{we} \cdot (C_{we} - C_{D\alpha}) + C_{Tm} \cdot (C_{L\alpha} - C_{Du}) + C_{De} (C_{L\alpha} + C_{Du}) + C_{Lu} \cdot (C_{Le} - C_{D\alpha})] + C_{mq} \cdot C_{L\dot{\alpha}} \cdot (C_{Tm} - C_{Du})$$

$$D_1 = -2C_{we}^2 \cdot C_{m\dot{\alpha}} + 2\mu [(C_{Tm} - C_{Du}) \cdot C_{mq} - (C_{Le} - C_{D\alpha}) C_{mu} + C_{we} \cdot C_{mu}] + (C_{Tm} - C_{Du}) \cdot C_{mq} \cdot C_{L\alpha} + \dots - (C_{Le} - C_{D\alpha}) C_{mq} \cdot C_{Lu} + C_{we} (C_{mu} \cdot C_{L\dot{\alpha}} - C_{Lu} C_{m\dot{\alpha}}) + 2C_{we} C_{mq} \cdot (C_{Le} - C_{D\alpha}) + 2C_{De} \cdot C_{mq} \cdot (C_{Tm} - C_{Du})$$

$$E_1 = C_{we} [C_{mu} (C_{L\alpha} + C_{L\dot{\alpha}}) - C_{mq} (C_{Lu} + 2C_{Le})]$$

2) Calcolare i coefficienti del polinomio caratteristico

per a)  $C_{m\alpha} = -1,88 \text{ rad}^{-1}$

b)  $C_{m\alpha} = 0,078 \text{ rad}^{-1}$

$$C_{mu} = 0 \quad C_{Du} = 0 \quad C_{Lu} = 0$$

$$C_{we} = C_{Le} = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = \frac{500 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,5 \cdot 1,035 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (54,02) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot 16,88 \text{ m}^2} = 0,2182$$

$$\mu = \frac{2m}{\rho S c} = \frac{2 \cdot 500 \text{ kg}}{1,035 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 16,88 \text{ m}^2 \cdot 1,60 \text{ m}} = 40,57$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_2 &= \frac{2\pi}{\hat{\omega}_2} \cdot \frac{\bar{e}}{2V} = \frac{2\pi \cdot 1,60}{0,0033 \cdot 2 \cdot 54,02} = 28,19 \text{ s} \\ T_{2,1/2} &= -0,69 \cdot \frac{1}{\hat{n}_2} \frac{\bar{e}}{2V} = \frac{-0,69 \cdot 1,60}{-0,0005 \cdot 2 \cdot 54,02} = 20,436 \text{ s} \end{aligned} \right.$$

Dagli ordini di grandezza di periodi e tempi di dimezzamento si può riconoscere che gli autovalori  $\lambda_{1,2}$  sono associati al modo short period mentre  $\lambda_{3,4}$  al modo fugoide

$$\begin{array}{l} \text{FUGOIDE} \\ \lambda_{3,4} = \hat{n}_2 \pm i\hat{\omega}_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} T_{PH} = 28,19 \text{ s} \\ T_{PH,1/2} = 20,436 \text{ s} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Short} \\ \text{Period} \\ \lambda_{1,2} = \hat{n}_1 \pm i\hat{\omega}_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} T_{SP} = 0,958 \text{ s} \\ T_{SP,1/2} = 0,122 \text{ s} \end{array} \right.$$

Si calcolino pulsazione naturale e fattore di smorzamento per i due modi

$$\hat{\omega}_{sp} = \sqrt{\hat{m}_1^2 + \hat{\omega}_1^2} = \sqrt{0,0837^2 + 0,0971^2} = 0,1281$$

$$\omega_{sp} = \hat{\omega}_{sp} \cdot \frac{2V}{\bar{e}} = 0,1281 \cdot 2 \cdot \frac{54,02 \text{ m/s}}{1,60 \text{ m}} = 8,64 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\zeta_{sp} = -\frac{\hat{m}_1}{\hat{\omega}_1} = -\frac{-0,0837}{0,0971} = 0,861$$

$$\hat{\omega}_{PH} = \sqrt{\hat{m}_2^2 + \hat{\omega}_2^2} = \sqrt{0,0005^2 + 0,0033^2} = 3,337 \cdot 10^{-3}$$

$$\omega_{PH} = \hat{\omega}_{PH} \cdot \frac{2V}{\bar{e}} = 3,337 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \frac{54,02 \text{ m/s}}{1,60 \text{ m}} = 0,225 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\zeta_{PH} = -\frac{\hat{m}_2}{\hat{\omega}_2} = -\frac{-0,0005}{0,0033} = 0,151$$

4) Calcolare pulsazione e smorzamento dei modi propri utilizzando i metodi approssimati

$$\text{FUGOIDE } \alpha \approx 0 \rightarrow \{\hat{x}_{PH}\} = \{\hat{u}_2, \theta_2\}$$

$$\text{SHORT PERIOD } \hat{u} \approx 0 \rightarrow \{\hat{x}_{SP}\} = \{1, \theta_1\}$$

$$\lambda^2 + 2\zeta_{sp}\hat{\omega}_{sp}\lambda + \hat{\omega}_{sp}^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\zeta_{PH}\hat{\omega}_{PH}\lambda + \hat{\omega}_{PH}^2 = 0$$

6) Condizione limite di stabilità per short period

$$\lambda^2 + 2\zeta_{sp}\hat{\omega}_{sp}\lambda + \hat{\omega}_{sp}^2 = 0$$

Per la stabilità è necessario avere  $\hat{\omega}_{sp}^2 > 0$

→ dalla tralazione approssimata

$$\hat{\omega}_{sp}^2 = - \frac{2\mu C_{ma} + C_{mq} C_{L\alpha}}{2\mu I_y} > 0$$

La condizione limite è:

$$2\mu C_{ma} + C_{mq} C_{L\alpha} = 0$$

$$2\mu (h_{crit} - h_N) C_{L\alpha} + C_{mq} C_{L\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow h_{crit} = h_N - \frac{C_{mq}}{2\mu} = 0,7133 - \frac{-12,7}{2 \cdot 40,57} = 0,869$$

Considerando che  $C_{mq} < 0$  si nota fin da subito che il limite di stabilità si avrà per  $h > h_N$ .

**Politecnico di Torino**  
**Dipartimento di ingegneria Aeronautica e Spaziale**  
**Anno Accademico 2013-2014**

**Corso di MECCANICA DEL VOLO**

**ESERCITAZIONE 9**

Con riferimento al velivolo di cui all'esercitazione 3 e ai dati riportati in Tabella 5, si svolgano i seguenti punti:

- ~~1)~~ scrivere l'equazione caratteristica del piano latero-direzionale, esplicitandone i coefficienti;
- ~~2)~~ calcolare i coefficienti del polinomio caratteristico nei seguenti casi:
- A.  $C_{l\beta} = -0.062 \text{ rad}^{-1}$   
 B.  $C_{l\beta} = 0.062 \text{ rad}^{-1}$
- ~~3)~~ con riferimento ai dati di cui al punto (2) – caso (A), individuare i modi propri latero-direzionali, caratterizzandoli mediante periodo, tempo di dimezzamento, pulsazione naturale e smorzamento;
- ~~4)~~ con riferimento ai dati di cui al punto (2) – caso (A), calcolare pulsazione naturale e smorzamento dei modi propri utilizzando i metodi approssimati;
- ~~5)~~ con riferimento ai dati di cui al punto (2) – caso (A), tracciare il luogo delle radici per il piano latero-direzionale.

**Tabella 5**

<b>DERIVATE AERODINAMICHE</b>			
Derivata $C_{Y\beta}$	$C_{Y\beta}$	$[\text{rad}^{-1}]$	-0.502
Derivata $C_{n\beta}$	$C_{n\beta}$	$[\text{rad}^{-1}]$	0.128
Derivata $C_{Yp}$	$C_{Yp}$	$[\text{rad}^{-1}]$	-0.032
Derivata $C_{Yr}$	$C_{Yr}$	$[\text{rad}^{-1}]$	0.275

Sostituendole nel sistema:

$$\lambda [\bar{E}] \{e^{\lambda t}\} = [A] [\bar{E}] \{e^{\lambda t}\}$$

$$\rightarrow \lambda [\bar{E}] - [A] [\bar{E}] = 0 \rightarrow (\lambda [\bar{I}] - [A]) [\bar{E}] = 0$$

Soluzioni non banali se  $\det(\lambda [\bar{I}] - [A]) = 0$

$$\rightarrow \det(\lambda [\bar{I}] - [A]) = P(\lambda^n) \text{ POLINOMIO CARATTERISTICO} = 0$$

Per il piano latero-direzionale si ha un'equazione caratteristica del 5° grado:

$$A_2 \lambda^5 + B_2 \lambda^4 + C_2 \lambda^3 + D_2 \lambda^2 + \bar{E}_2 \lambda = 0$$

$$A_2 = 2 \mu A^3 (\hat{I}_x \hat{I}_z - \hat{I}_{xz}^2)$$

$$B_2 = A^3 C_{YB} (\hat{I}_{xz}^2 - \hat{I}_x \hat{I}_z) - 2 \mu A^2 [\hat{I}_x C_{mz} + \hat{I}_z C_{ep} + \hat{I}_{xz} (C_{ez} + C_{np})]$$

$$C_2 = A^2 [\hat{I}_{xz} (C_{YB} C_{np} - C_{Yz} C_{ep} - C_{np} C_{Yp} + C_{YB} C_{ez}) + \\ + \hat{I}_x (-C_{np} C_{Yz} + C_{YB} C_{mz}) + \hat{I}_z (-C_{ep} C_{Yp} + C_{YB} C_{ep})] + \\ + 2 \mu A (-C_{np} C_{ez} + C_{ep} C_{mz} + \hat{I}_{xz} C_{ep} + \hat{I}_x C_{np})$$

$$D_2 = 2 \mu (-C_{np} C_p + C_{ep} C_{np}) + A C_{Yp} (-C_{np} C_{ez} + C_{ep} C_{mz}) + \\ - A C_{we} (\hat{I}_{xz} C_{np} + \hat{I}_z C_{ep}) - A C_{Yz} (C_{ep} C_{np} - C_{np} C_{ep}) + \\ + A C_{Yp} (C_{ez} C_{np} - C_{mz} C_{ep})$$

$$\bar{E}_2 = C_{we} [C_{ep} C_{mz} - C_{ez} C_{np}]$$

- $\lambda = 0$  è una soluzione per la dinamica latero-direzionale e rappresenta l'Heading mode. Questa radice non verrà considerata per analisi successive.

2) Calcolare i coefficienti del polinomio caratteristico nel caso:

a)  $C_{YB} = -0,062 \text{ rad}^{-1}$

b)  $C_{YB} = 0,062 \text{ rad}^{-1}$

Bisogna notare che il termine che dimensionalizza è lo stesso del piano longitudinale

$$\omega = \hat{\omega} \frac{2V}{c} \quad n = \hat{n} \frac{2V}{c}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 = 0 \\ T_{2,1/2} = -\frac{0,69}{\hat{n}_1} \cdot \frac{c}{2V} = \frac{-0,69}{+0,0003} \cdot \frac{1,60 \text{ m}}{2 \cdot 54,02 \text{ m/s}} = -34,06 \Delta \end{array} \right.$$

il "-" davanti al tempo di dimezzamento significa che questo è in realtà un tempo di RADDOPPIO  
 → il modo 1 è instabile.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_3 = \frac{2\pi}{\hat{\omega}_3} \cdot \frac{c}{2V} = \frac{2\pi}{0,0546} \cdot \frac{1,60 \text{ m}}{2 \cdot 54,02 \text{ m/s}} = 1,70 \Delta \\ T_{3,1/2} = -\frac{0,69}{\hat{n}_2} \cdot \frac{c}{2V} = -\frac{0,09}{-0,0173} \cdot \frac{1,60 \text{ m}}{2 \cdot 54,02 \text{ m/s}} = 0,59 \Delta \end{array} \right.$$

Dall'ordine di grandezza di periodi (qualora ci fosse un periodo  $\neq 0$ ) e tempi di dimezzamento si

evince che:

$\lambda_1 \rightarrow$  MODO SPIRALE

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 0 \\ T_{1,1/2} = -34,06 \Delta \end{array} \right.$$

$\lambda_2 \rightarrow$  MODO ROLLIO

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 = 0 \\ T_{2,1/2} = 0,056 \Delta \end{array} \right.$$

$\lambda_3 \rightarrow$  DUTCH ROLL

$$\left\{ \begin{array}{l} T_3 = 1,70 \Delta \\ T_{3,1/2} = 0,59 \Delta \end{array} \right.$$

Per i modi aperiodici non esiste la pulsazione

$$\hat{\omega}_d = \sqrt{\hat{m}_d^2 + \hat{\omega}_3^2} = 0,057$$

$$\rightarrow \omega_d = \hat{\omega}_d \cdot \frac{2V}{c} = 3,87 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_d = -\frac{\hat{n}_3}{\hat{\omega}_3} = 0,316$$



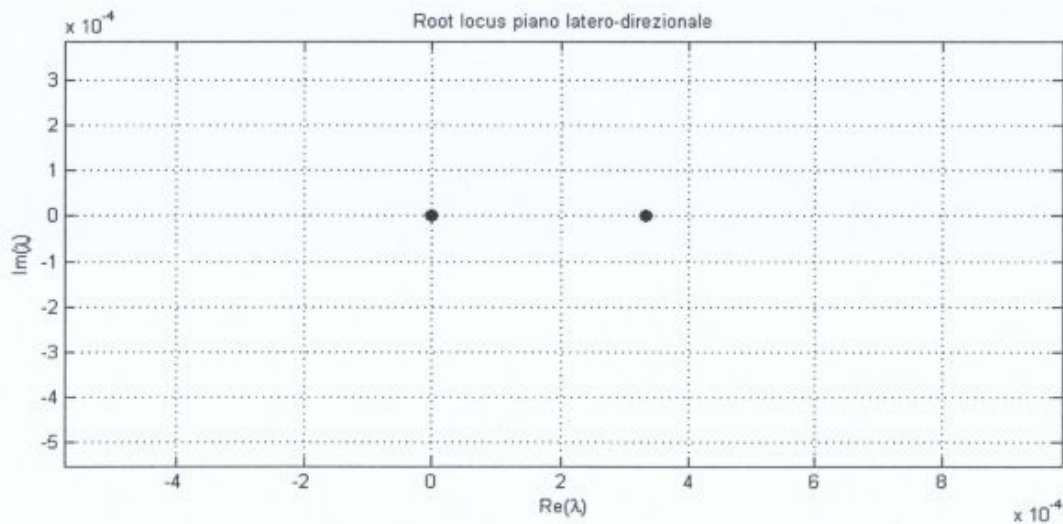
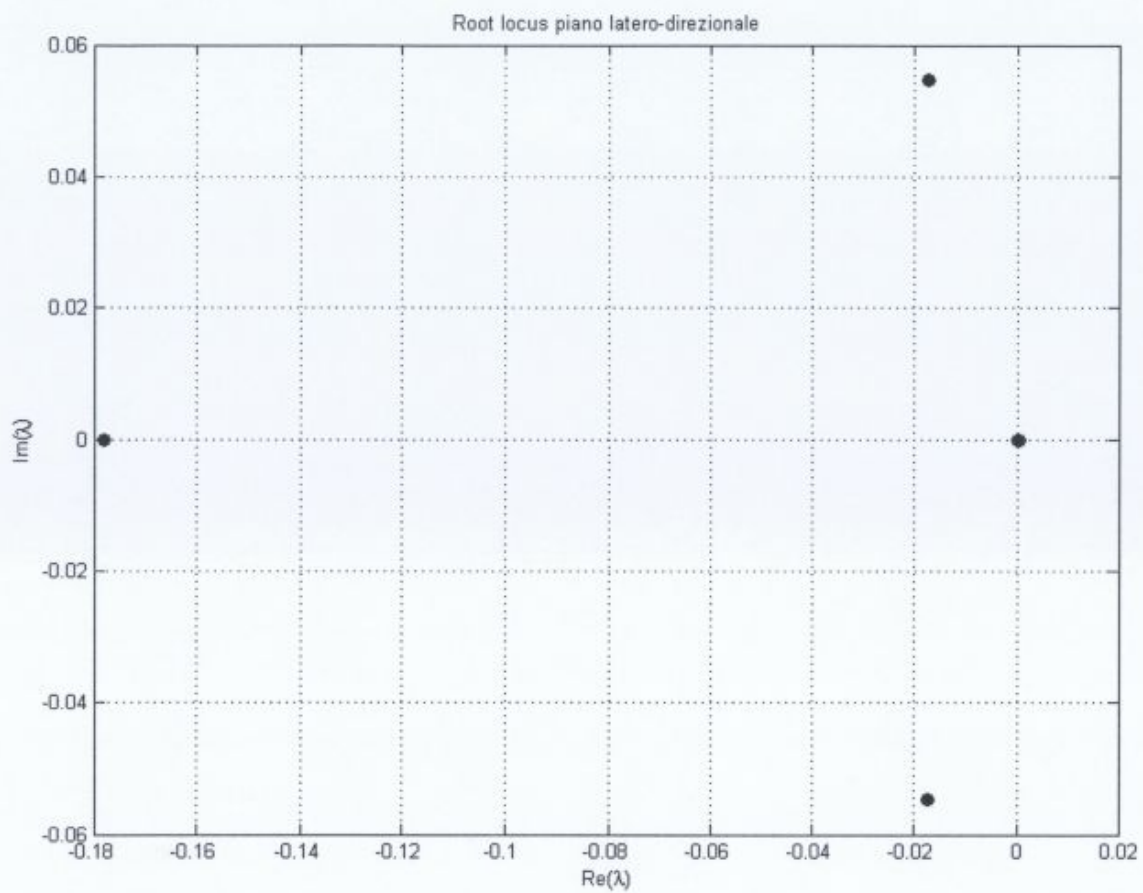


Diagramma 9.1