



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 825

DATA: 13/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Cappelletti

MATERIA: Gasdinamica + Eserc. + Temi

Prof. Iuso

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

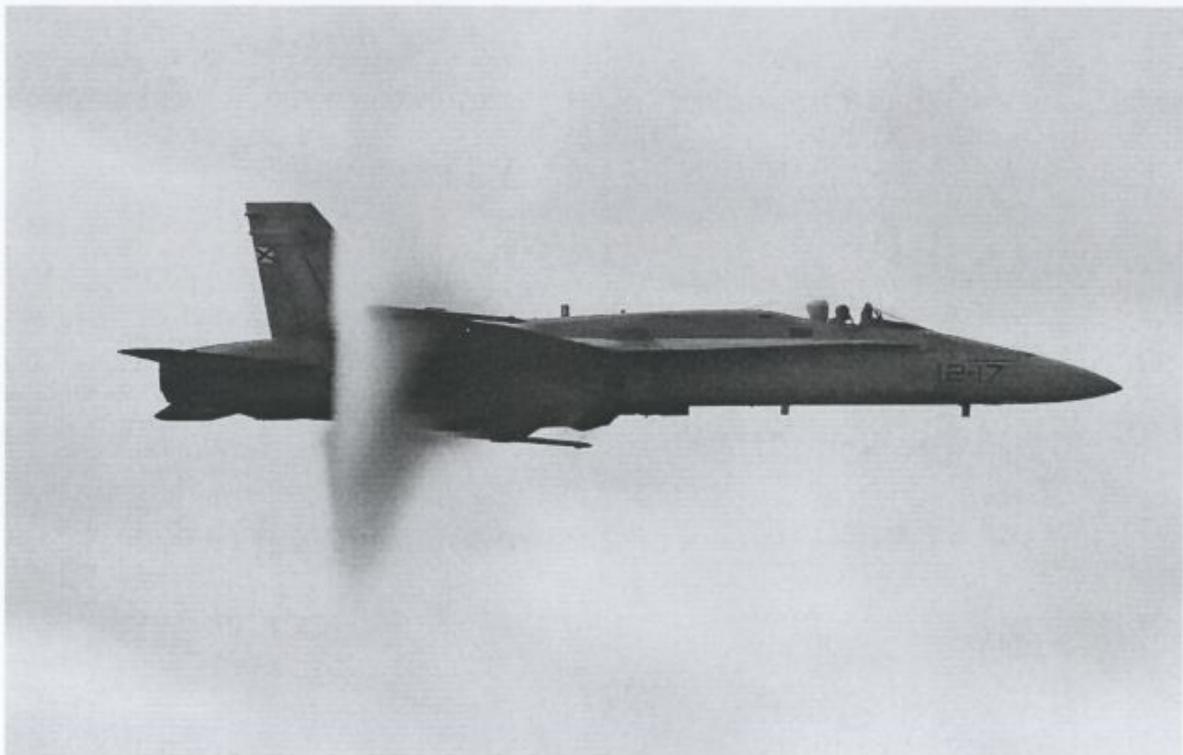
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Politecnico di Torino

**Appunti, esercizi svolti
e temi d'esame**

GASDINAMICA



Corso tenuto dal Prof. G. Iuso
A.A.2013-2014
1° Anno Laurea Magistrale
Ing. Aerospaziale

Appunti di Capo Matteo

ARGOMENTI TRATTATI

PARTE 1 – RICHIAMI DI FLUIDODINAMICA E AERODINAMICA

- Modello di gas
- Gradi di libertà energetici
- Compressibilità
- Proprietà di trasporto
- Principi della termodinamica e trasformazioni isentropiche
- Leggi di conservazione: Equazioni di Eulero
- Relazione dell'entalpia totale
- Equazione di Crocco
- Funzione potenziale

PARTE 2 – FLUSSI UNIDIMENSIONALE

- Equazioni di governo flussi 1D
- Velocità del suono
- Onde d'urto
- Urto retto
- Flusso di Rayleigh
- Flusso di Fanno
- Flussi quasi-1D : cenni

PARTE 3 – ONDE OBLIQUE SUPERSONICHE

- Urto obliquo
 - Equazioni di governo
 - Definizione di Mach normale
 - Funzione θ - β -M
 - Polare dell'urto
 - Urti staccati e curvi
 - Il cuneo
 - Il cono:urto conico
 - Riflessione e interazione di urti
 - Onde di compressione
 - Riflessione di Mach
- Onde di espansione oblique
 - Linee caratteristiche e linee di Mach
 - Funzione di Prandtl-Meyer
 - Epicicloide
 - Riflessione di onde di espansione
- Shock Expansion Theory
 - Cuneo

- Lamina piana con incidenza
- Getti 2D
- Profili

PARTE 4 – FLUSSI LINEARIZZATI

- Piccole perturbazioni
- Equazione linea rizzata del potenziale
- Subsonico linea rizzato
- Correzione di Prandtl-Glauert
- Mach critico di un profilo
- Supersonico linea rizzato
- Lamina piana con incidenza in flusso supersonico linea rizzato
- Profili alari in teoria linea rizzata
- Profilo di minima resistenza d'onda
- Ali di allungamento finito
- Ottimizzazioni per il flusso transonico
- Corpo di Sears-Haack

PARTE 5 – FLUSSI IPERSONICI

- Campo ipersonico e relazioni
- Teoria di Newton

PARTE 6 – FLUSSI VISCOSI

- Equazioni di Navier-Stokes
- Flusso turbolento
- Strato limite con effetti termici e di compressibilità
 - Equazioni strato limite 2D
 - Flusso di Couette
 - Flusso adiabatico con $Pr=1$: Integrale di Busemann
 - Flusso adiabatico con $Pr \neq 1$
 - Flusso non adiabatico, $Pr=1$, assenza di gradienti di pressione: Analogia dei Campi
 - Analogia di Reynolds
 - Convezione forzata
 - Correzione del C_D per effetti termici e di comprimibilità
- Flusso nell'intorno del punto di arresto
 - Equazione integrale dello strato limite
 - Metodo di Thwaites e sforzo di attrito nel punto di arresto
 - Flusso di calore nel punto di arresto
- Effetti di flussi di calore sulla transizione dello strato limite

ESERCITAZIONI SVOLTE

- Gas perfetti
- Miscele di gas
- Condizioni critiche
- Urto retto
- Flusso di Rayleigh
- Flusso di Fanno
- Urto obliquo
- Cuneo in teoria esatta
- Riflessione regolare di urti
- Espansioni
- Placca piana in teoria esatta
- Profili di temperatura strato limite termico
- Flussi di calore su placca piana
- Resistenza di attrito di placca piana
- Flusso di calore su bordo d'attacco
- Relazione di laboratorio profilo NACA 0015
- Relazione di laboratorio flussi supersonici

In coda alla dispensa si trova ancora:

- Dimostrazioni svolte
- Temi d'esame
- Formulario di gasdinamica per l'esame

GAS DINAMICA

30/09/2013

Prof. Gaetano Iuso

Aerodinamica → FLUSSI INCOMPRESSIBILI e NON VISCOSI
($M < 0,3$)

GAS DINAMICA → FLUSSI COMPRESSIBILI e VISCOSI ($M > 0,3$)

Flusso	Mach	INFO SUL CORSO
SUBSONICO INCOMPRESSIBILE	$< 0,3$	
SUB. COMPRESSIBILE	$> 0,4$	
TRANSONICO	$0,8 < M < 1,3$	
SUPERSONICO	$1,3 < M < 3 \div 4$	
IPERSONICO	$M > 4$	

Transonico = COMPLICAZIONI!
 ↳ onde d'urto
 ↳ oscillazioni
 ↳ BUFFETING ...

Onde d'urto → altissima dissipazione
 ↓
 RESISTENZA D'ONDA

Volo IPERSONICO : es. Rientro navette spaziali



- $M_{ig} \approx 10$
- Altissima pressione totale
 → altissima T

↓
 DISSOCIAZIONE DI O_2 e N_2 → PLASMA

Flusso VISCOSO

μ → strato limite → FRICTION DRAG

$$D = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S C_D$$

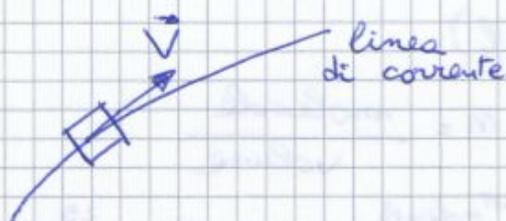
$$Re = \frac{\rho V_{\infty} L}{\mu_{\infty}}$$

$$C_D = f(\text{forma}, \alpha, Re)$$

Se $M \uparrow \Rightarrow C_D = f(Re, M, \dots)$

⚠ COMPRESSIBILITÀ INFLUENZA ANCHE LA RESISTENZA DI ATRITO

FLUSSI A BASSA VELOCITÀ



$$p = \text{cost}$$

$$p^0 = p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{costante lungo una linea di corrente}$$

$$H = h + \frac{V^2}{2} = \text{cost}$$

$$h = c_p T$$

BASSA VELOCITÀ

↓
T = cost

ISOTERMO ≈ ADIABATICO

FLUSSI AD ALTA VELOCITÀ

$$p^0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \text{cost lungo linea di corrente}$$

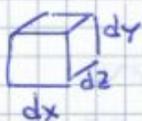
$$H = h + \frac{V^2}{2} = \text{cost}$$

$$V \uparrow \Rightarrow h \uparrow (T \uparrow)$$

qui entra la
TERMODINAMICA

MODELLO DI GAS

- Insieme di molecole
 - no forma propria
 - no forze coesione
 - no volume proprio
- Comprimibile / in comprimibile
- Particelle fluide → VOLUME DI CONTROLLO PUNTIFORME



Sufficientemente grande da contenere un elevato numero di molecole

→ QUANTITÀ STATISTICA

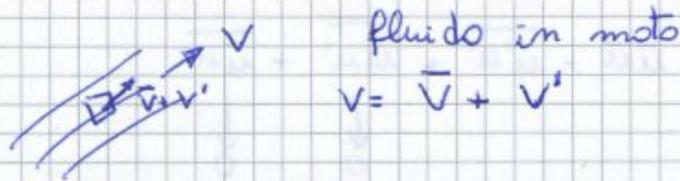
→ media sull'insieme

Numero di Avogadro: 1 mol → $6,023 \cdot 10^{23}$ molecole

$$1 \text{ mol} = 6,023 \cdot 10^{23}$$

$$1 \text{ Mol} = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ molecole} = 1 \text{ kmol}$$

↓
 N_A



collisioni $\left\{ \begin{array}{l} \text{pressione} \\ \text{sforzi viscosi} \end{array} \right.$

<p>Flusso LAMINARE</p> <p>FLUTTUAZIONI MOLECOLARI (Termodinamica)</p> <ul style="list-style-type: none"> - distanze di spostamento piccole 	<p>Flusso TURBOLENTO</p> <p>FLUTTUAZIONI TURBOLENTE</p> <ul style="list-style-type: none"> - distanze di spostam. di ordini di grandezza + grandi delle agitazioni molecolari
--	---

Velocità di AGITAZIONE MOLECOLARE v_{at}

$l_{\text{ARIA QUIETA}} = 6,35 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$

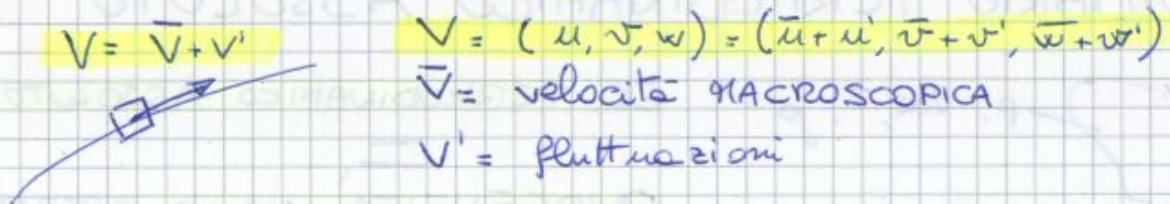
GAS MONOATOMICO $l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \cdot n}$

$d \sim \text{\AA} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$m =$ massa molecolare [kg/molecola]

$l = \frac{1 \cdot m}{\sqrt{2} \pi d^2 \cdot n \cdot m} \propto \frac{m}{\sigma \rho}$ (σ = sezione auto)

$\frac{\text{molecola}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{molecola}} = \rho!$



$\bar{V} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, $V' = (u', v', w')$

Energia traslazionale media di ogni molecola:
 cinetica

$= \frac{1}{2} m |\bar{V}^2| = \frac{1}{2} m (\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v} + \bar{w}\bar{w}) =$

$= \frac{1}{2} m \left((\bar{u} + u')(\bar{u} + u') + (\bar{v} + v')(\bar{v} + v') + (\bar{w} + w')(\bar{w} + w') \right)$ (1.1)

$u = \bar{u} + u'$

$v = \bar{v} + v'$

$w = \bar{w} + w'$

EVOLUZIONE:

- PROGRESSIONE DI STATI DI EQUILIBRIO

- CONDIZIONI ^{appure} NON DI EQUILIBRIO

→ STRATO LIMITE

→ URTI

⇒ Comporta la creazione di gradienti delle grandezze

Che legame c'è tra la temperatura e le fluttuazioni caotiche?

K_B : COSTANTE DI BOLTZMANN

$$K_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{molecola} \cdot \text{K}}$$

$$R = 8314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mol}$$

Dalla meccanica statistica

$$\overline{u'u'} = \overline{v'v'} = \overline{w'w'} = \frac{K_B \cdot T}{m} \quad [\text{J}]$$

$$\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'} = 3 \frac{K_B T}{m} \quad (1.4)$$

Sostituendo (1.4) in (1.2):

$$(1.5) \quad E_T = \frac{1}{2} m \left(3 \frac{K_B T}{m} \right) = \frac{3}{2} K_B T = \frac{1}{2} m v_{\text{at}}^2$$

$$(1.6) \quad \rightarrow \quad v_{\text{at}} = \sqrt{3 \frac{K_B T}{m}}$$

$$m \cdot N_A = M \quad \text{MASSA MOLARE}$$

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{mole}} \cdot \frac{\text{mole}}{\text{mole}} = \frac{\text{kg}}{\text{mole}} \right]$$

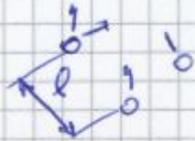
$$v_{\text{at}} = \sqrt{\frac{3 K_B T}{m} \cdot \frac{N_A}{N_A}} = \sqrt{\frac{3 R T}{M}} \quad (1.7)$$

$$p = \rho(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$$

→ **PRESSIONE TERMODINAMICA MEDIA**

$$\bar{p} = \frac{1}{3}\rho(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) \quad (1.12)$$

FLUIDO come CONTINUO



$$Kn = \frac{l}{L}$$

NUMERO DI
KNUDSEN



$$l_{aia} = 6,35 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$$

FLUSSO CONTINUO : $Kn < 0,01$

FLUSSO LEGGERMENTE RAREF: $0,01 < Kn < 0,1$

" MODERATA M. RAREFATTO: $0,1 < Kn < 10$

" ALTAMENTE RAREFATTO: $Kn > 10$

GRADI DI LIBERTA' ENERGETICI

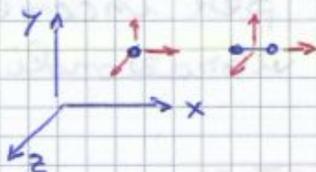
Modi in cui la molecola può immagazzinare energia

- TRASLAZIONE
- ROTAZIONE
- VIBRAZIONALE



Molecole viste come
corpi rigidi
Molecole come corpi deformabili
→ MASSA MOLLA

■ TRASLAZIONALE



m { MONO ATOMICA
BI ATOMICA
POLI ATOMICA

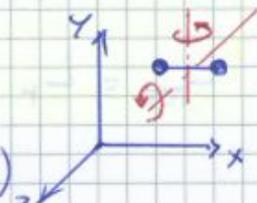
$$L_t = 3$$

■ ROTAZIONALE

$m=1$ MONO ATOMICHE $L_r = 0$

$m=2$ BI ATOMICHE $L_r = 2$

$m > 2$ POLI ATOMICHE $L_r = 3$ (di solito)



$$L_{\text{tot}} = L_1 + L_2 + 2(3M - L_1 - L_2)$$

$$\rightarrow L_{\text{tot}} = 6M - L_1 - L_2$$

Esempio: ARIA

80% N_2
20% O_2

$$L = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{TRASL}}}{3} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ROT.}}}{2} = 5$$

} $5 \text{ bosse } T$

EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA

L'energia si ripartisce in maniera equa lungo ogni grado di libertà

$$L=1 \rightarrow \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} k_B T \quad [J/\text{molecola}]$$

$$L \neq 1 \rightarrow \bar{\epsilon}_L = \frac{L}{2} k_B T$$

ENERGIA INTERNA mole

$$\epsilon = N_A \cdot \bar{\epsilon}_L = \frac{L}{2} N_A k_B T \rightarrow \epsilon = \frac{L}{2} RT \quad [J/\text{Mole}]$$

ENTALPIA mole

$$H = \epsilon + RT = \frac{L+2}{2} RT \quad [J/\text{mole}]$$

Volendo riferire il tutto alla massa si divide per la massa mole M

$$e = \frac{\epsilon}{M} = \frac{L}{2} \frac{R}{M} T$$

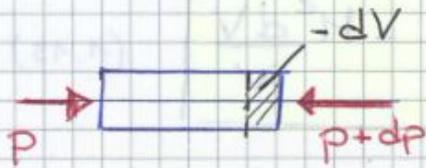
$$e = c_v T$$

$$h = \frac{H}{M} = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} T$$

$$h = e + P/\rho$$

$$h = c_p T$$

COMPRESSIBILITÀ



SQUILIBRIO TRA PRESSIONI

→ CONTRAZIONE VOLUME

$$+dp \Rightarrow -dV$$

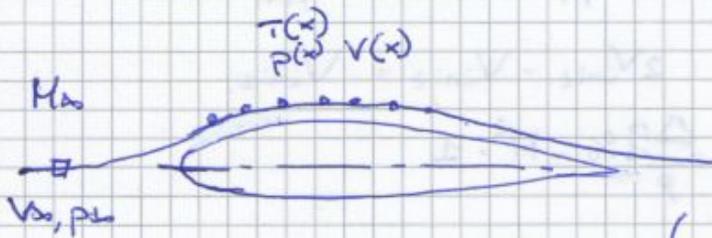
$$\beta = - \frac{dV/V}{dp} = - \frac{dV}{dp} \cdot \frac{1}{V} \quad \left[\frac{m^2}{N} \right]$$

Variazione % del volume su variazione di pressione

$$+dp \Rightarrow -dV \Rightarrow +dp$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dp}$$

COMPRESSIBILITÀ DI UN FLUIDO



(anticipazioni)

$$M = \frac{V}{a}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{dp} \right)_{S=\text{cost}}}$$

PROPAGAZIONE SUONO

ISENTROPICA

$$a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$$



$$dp = -\rho V dV \quad \text{--- Bernoulli differenziale ---}$$

Integrata lungo una linea di corrente se $p = \text{cost}$

$$\rightarrow P^0 = P + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost} \quad [\text{INCOMPRESSIBILE}]$$

$$\frac{dp}{dp} = - \frac{\rho}{dp} V dV \quad \text{se } S = \text{cost} \rightarrow \frac{dp}{dp} = a^2$$

GASDINAMICA 3/10/2013

PROPRIETÀ DI TRASPORTO

- 1) VISCOSITÀ DINAMICA (μ)
- 2) CONDUCEBILITÀ TERMICA (λ)
- 3) DIFFUSIVITÀ DI MASSA (D)

Si attivano con

- 1) GRADIENTI DI VELOCITÀ
- 2) " DI TEMPERATURA
- 3) " DI CONCENTRAZIONE DI MASSA

→ CAUSANO

- 1) FLUSSO DI q.d.m $\rightarrow \tau$
- 2) " DI CALORE q
- 3) " DI MASSA

• Agitazione molecolare u', v', w'

Massa di gas in agitazione → FLUSSO DI:

- $m u'$: QDM
- energia
- massa

Flusso = $\frac{\text{quantità di...}}{\text{Superficie} \cdot \text{tempo}}$

⚠ LE PROPRIETÀ DI TRASPORTO IN PRESENZA DI GRADIENTI CAUSANO DEI FLUSSI NETTI

1. VISCOSITÀ DINAMICA μ

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$$

SFORZO = $\frac{\text{variazione di quantità di moto}}{\text{tempo} \cdot \text{unità di superficie}} = \frac{F}{S}$

↳ NORMALE: p = pressione

↳ TANGENTE: τ = sforzo di attrito



$$\overline{p u' v'} = - m \cdot n \cdot v_{at} \cdot d\bar{u} \quad (1.15)$$

$$d\bar{u} = \frac{d\bar{u}}{dy} \cdot dy \quad \text{e} \quad dy = l$$

SCALA DELLE
GRANDEZZE SU
CUI SI SCAMBIA
qdm

$$d\bar{u} = \frac{d\bar{u}}{dy} \cdot l$$

$$\rightarrow \overline{p u' v'} = - m \cdot n \cdot v_{at} \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} \cdot l = \underline{\underline{\mu \frac{d\bar{u}}{dy}}} \quad (1.16)$$

VISCOSITÀ DINAMICA \Leftrightarrow $\mu = m \cdot n \cdot v_{at} \cdot l \quad (1.17)$

$$\downarrow$$

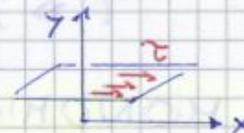
$$\mu = \rho \cdot v_{at} \cdot l$$

$$v_{at} = \sqrt{3 \frac{R T}{M}}$$

Ora sappiamo da cosa dipende μ

$$\rightarrow -\overline{p u' v'} = \tau_{xy} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (1.18)$$

direzione \swarrow
faccia normale
e y: giace
li sopra



"-" perché prevale il flusso di quantità di moto verso il basso.

◆ GRANDEZZE DA CUI DIPENDE μ .

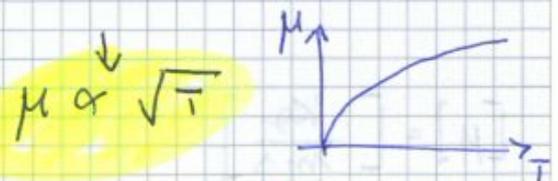
$$\mu = \frac{m \cdot n}{\rho} \cdot l \cdot v_{at} \quad l \propto \frac{1}{d^2 n}$$

$$\rightarrow \mu \approx m \cdot \frac{1}{d^2 n} \cdot \sqrt{3 \frac{R T}{M}}$$

$$\mu \approx m \left(\frac{1}{d^2} \right) \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \rightarrow \mu \propto \sqrt{\frac{m k_B T}{d^4}}$$

In ultima analisi la
VISCOSITÀ DINAMICA DIPENDE
DALLA TEMPERATURA! NON DALLA PRESSIONE!

$\mu \propto \sqrt{T}$ valido a alte temperature



FORMULA DI WILKE

→ MISCELE DI GAS di N componenti

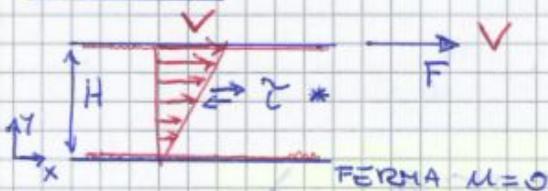
$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(1 + \sum_{k=1, k \neq i}^N G_{ik} \frac{X_i}{X_k} \right)^{-1}$$

$$G_{ik} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_k} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\mu_k}{\mu_i} \right)^{1/4} \right]^2}{2^{3/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_k} \right) \right]^{1/2}}$$

I contributi nella sommatoria $\sum_{k=1, k \neq i}^N$ si prendono SOLO per $k \neq i$. Se $k=i \rightarrow$ contributo = 0.

$X \rightarrow$ frazioni molari

ESEMPIO : due PLACCHE PIANE infinite parallele

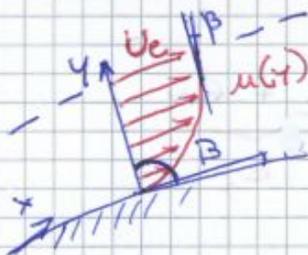


• ADERENZA A PARETE

La forza F va applicata continuamente x vincere la resistenza di attrito

$$\frac{du}{dy} = \frac{V}{H}$$

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V}{H}$$

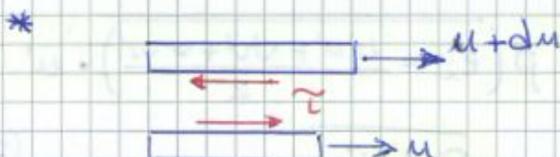


$$\frac{du}{dy} = \tan \beta$$

A PARETE $\rightarrow \beta_{max} \rightarrow \tau_{MAX}$

AL confine $\rightarrow \beta = 0 \rightarrow \tau = 0$

$$D_f = \int_S \tau_w ds$$



♦ IL FILETTO + LENTO PROVA A RAUENTARE IL + VELOCE

FLUSSI NETTI DI CALORE

$$q_x = \overline{\rho \bar{e} v}$$

$$q_y = \overline{\rho \bar{e} v}$$

$$q_z = \overline{\rho \bar{e} v}$$

FOURIER

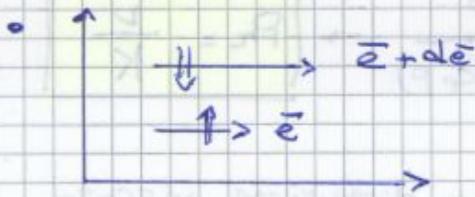
$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$[\lambda] \quad q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow \lambda = q \cdot \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial x}} = \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{K}} \right]$$

$$= \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{mK}} \right] = \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$$



FLUSSO VERSO BASSO (-)

FLUSSO VERSO ALTO (+)

$$(1.20) \quad -m(\bar{e} + d\bar{e})n \cdot v_{at} + m\bar{e} \cdot n \cdot v_{at} = -m d\bar{e} \cdot n \cdot v_{at}$$

$$(1.21) \quad q_y = -m d\bar{e} \cdot n \cdot v_{at} = \overline{\rho \bar{e} v}$$

$$d\bar{e} = \frac{d\bar{e}}{dy} \cdot dy \quad , \quad dy = l$$

$$\rightarrow q_y = \overline{\rho \bar{e} v} = -m n \frac{d\bar{e}}{dy} \cdot l \cdot v_{at}$$

$$\bar{e} = c_v T$$

$$d\bar{e} = c_v dT$$

$$q_y = \overline{\rho \bar{e} v} = -m \cdot n \cdot v_{at} \cdot l \cdot c_v \frac{dT}{dy}$$

$$q_y = -\frac{m \cdot n \cdot v_{at} \cdot l \cdot c_v \cdot dT}{dy} = -\lambda \frac{dT}{dy} \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow \lambda = \underbrace{m \cdot n \cdot v_{at} \cdot l \cdot c_v}_{\mu} \Rightarrow \lambda = \mu \cdot c_v \quad (1.23)$$

GAS: $\lambda = 1,45 \mu c_v$

3. DIFFUSIVITA' DI MASSA D

- Dipende dalla specie chimica
- Compi con concentrazioni di molecole diverse (come CHIMICA o METALLURGIA)
- flusso in direzione della regione con concentrazione minore → **FLUSSO DI MASSA**

Legge di FICK

$$J = -D \frac{\partial S}{\partial x}$$

Anche questo è un effetto dell'agitazione caotica delle molecole

... se poi si immesca un MOTO TURBOLENTO LA DIFFUSIONE È + RAPIDA xk la grandezza in gioco non è + dell'ordine del libero cammino medio

• RIASSUMENDO •

PROPRIETA' DI TRASPORTO \Leftrightarrow AGITAZIONI MOLECOLARI

	immescata da	Causa
VISCOSITA' DINAMICA $\mu = m \cdot n \cdot v_{at} \cdot l$	GRADIENTI DI VELOCITA' $\frac{\partial u}{\partial y}$	FLUSSO NETTO DI Q. DI MOTO $\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} = -\overline{\rho u'v'}$
CONDUCIBILITA' TERMICA $\lambda = m \cdot n \cdot v_{at} \cdot l \cdot c_v$ $= \mu \cdot c_v$	GRADIENTI DI TEMPERATURA $\frac{\partial T}{\partial n}$	FLUSSO NETTO DI CALORE $q = -\frac{dT}{dx} = \overline{\rho e'u'}$
Diffusivita' di massa D	Gradienti di CONCENTRAZIONE DI SPECIE CHIMICHE $\frac{\partial S}{\partial x}$	FLUSSO NETTO DI MASSA $J = -D \frac{\partial S}{\partial x}$

In natura la maggior parte dei processi sono IRREVERSIBILI, ma:

•) PROPAGAZIONE DEL SUONO È ISENTROPICA

ISENTROPICO: ADIABATICO + REVERSIBILE

$$\delta q = 0$$

LAVORO: compiuto da forze esterne sulla superficie del volume di gas

(1.25) $\delta L = -p dv$ = lavoro di COMPRESSIONE

→ Risolviamo il 1° principio usando (1.25)

de = $\delta q - p dv$ (1.26)

$h = e + p/v$, risolviamo ancora il 1° princ. usando l'entalpia

$dh = de + d(pv) \rightarrow$ de = $dh - d(pv)$ (1.27)

Uguagliamo (1.26) e (1.27)

→ $dh - d(pv) = \delta q - p dv$
 $dh - p dv - v dp = \delta q - p dv$

→ $dh = \delta q + v dp$ (1.28) I° PRINCIPIO con ENTALPIA

• ENTROPIA

2° PRINCIPIO

$ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{irr}$ $\left[ds = \frac{\delta q}{T} \geq 0 \right]$

$ds_{irr} \geq 0$

FENOMENI DISSIPATIVI

$T_{ij} \rightarrow$ flussi qm CAOTICA

$q_i \rightarrow$ flussi energie CAOTICA

$J \rightarrow$ flussi di specie

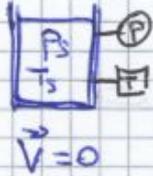
PROCESSI REVERSIBILI

$ds = \frac{\delta q}{T}$

QUESTA È SOLO LA DEF. DI ENTROPIA, NON IL 2° PRINCIPIO.

Esempio di CAMPO OMOENTROPICO

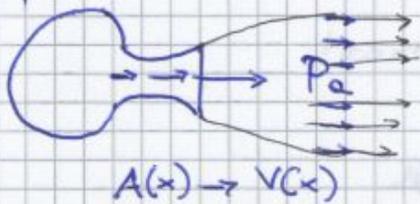
→ condizioni di SERBATOIO, gas fermo, pareti rigide non conducibili



CONDIZIONI DI ARRESTO

$$T_0 = T^{\circ}$$

$$P_{sub} = P^{\circ}$$



Se $\mu=0$ e $\lambda=0$ → PROCESSO ISENTROPICO

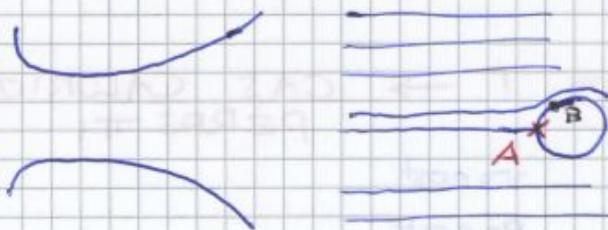
CAMPO OMOENTROPICO

Lungo una linea di corrente:

$$H = h + \frac{V^2}{2} = \text{cost}$$

OMOTOTALENTALPICO

▲ Mettiamo ora una sfera a valle dell'ugello

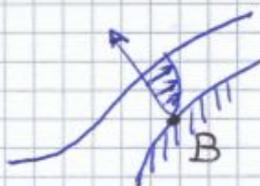


$V_A = 0$ PUNTO DI ARRESTO

$$V \downarrow \Rightarrow T \uparrow, P \uparrow, H \uparrow$$

$$\left. \begin{array}{l} V_A = 0 \\ T_A = T^{\circ} \\ P_A = P^{\circ} \end{array} \right\} = \text{CONDIZIONI DI SERBATOIO}$$

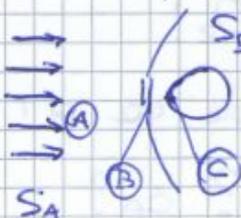
- Consideriamo anche gli effetti viscosi → STRATO LIMITE



FUORI dallo strato limite la T° si conserva

$$P_B^{\circ} < P_A^{\circ}$$

- Flusso supersonico



$$T_A^{\circ} = T_B^{\circ} = T_C^{\circ} = T_{serb.}$$

$$P_C = P_B^{\circ} < P_A^{\circ} = P_{serb.}$$

VARIAZIONE DI ENTROPIA

$$T ds = de + p dv$$

$$\frac{T ds}{T} = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p dv}{T}$$

$$\rightarrow \text{eq. di stato: } p v = \frac{R}{M} T \rightarrow \frac{p}{T} = \frac{1}{v} \frac{R}{M}$$

$$\rightarrow ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dv}{v}$$

$$\rightarrow \Delta_2 - \Delta_1 = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \int_1^2 \frac{dv}{v}$$

$$\Delta_2 - \Delta_1 = c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{R}{M} \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \quad (1.29)$$

oppure

$$T ds = dh - v dp$$

$$\frac{T ds}{T} = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v dp}{T}$$

$$\frac{v}{T} = \frac{1}{p} \frac{R}{M}$$

$$\rightarrow \Delta_2 - \Delta_1 = c_p \int_1^2 \frac{dT}{T} - \frac{R}{M} \int_1^2 \frac{dp}{p}$$

$$\Delta_2 - \Delta_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad (1.30)$$

$\Delta_2 - \Delta_1 =$ variazione di entropia nelle condizioni TOTALI \rightarrow per definizione condizioni di processo ISENTROPICHE

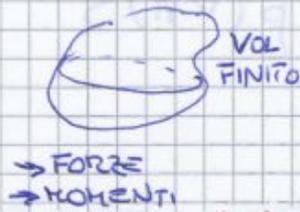
LEGGI DI CONSERVAZIONE

(EQUAZIONI DEL MOTO)

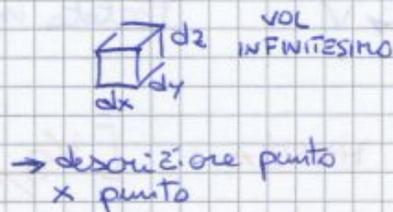
- 1) MASSA 2) QUANTITÀ DI MOTO 3) ENERGIA

Approccio:

• INTEGRALE



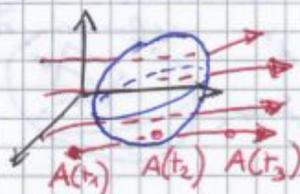
• DIFFERENZIALE



• APP. MOLECOLARE

• Descrizione:

EULERIANA



: volume fisso nello spazio (vd. finito o infinitesimo)
Volume permeabile ai flussi
Vediamo particelle diverse al suo interno istante per istante

Approccio differenziale → forma **CONSERVATIVA**

$$\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu^2}{\partial x}$$

LAGRANGIANA



: si segue l'evoluzione di una DETERMINATA PARTICELLA nel suo campo di moto.

→ OSSERVATORE SOLIDALE ALLA PARTICELLA

→ Derivata SOSTANZIALE : $\frac{D}{Dt}$

Approccio differenziale → forma **NON conservativa**

$$\mu \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$Q = f(t, x(t), y(t), z(t))$$

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla Q$$

MOTI STAZIONARI
 $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$

3) ENERGIA

Si riferisce al 1° principio della termodinamica
 $de = \delta q + \delta e$, solo che questo vale SOLO per sistemi in quiete.

$$\left(e + \frac{v^2}{2}\right) \quad \frac{v^2}{2} = \text{energia cinetica / unità di massa}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) dVol = - \int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_{Vol} \rho \dot{q} dVol + \dot{Q}_{viscoso} + \dot{W}_{viscoso} +$$

LAVORO: L pressioni

$$L \text{ sforzi viscosi } * \text{ per ora no} + \int_{Vol} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dVol$$

CALORE: ASSORBIMENTO DI RADIAZIONI
 EMISSIONE DI RADIAZIONI
 COMBUSTIONI INTERNE ...



$$\dot{q} = [J/kg \cdot s] \rightarrow \int_{Vol} \rho \dot{q} dVol$$

Se fluido VISCOSO, CONDUCIBILE, DIFFUSIVO... } PROPRIETÀ DI TRASPORTO

$$\rightarrow \dot{Q}_{viscoso} [J/s]$$

$$* \text{ se } \mu \neq 0, \frac{\text{LAVORO } \tau_{ij}}{\text{tempo}} = \dot{W}_{viscoso} [J/s]$$

Equaz. completa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) dVol = & - \int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \left[\begin{array}{l} \text{FLUSSI +} \\ \text{LAVORO FORZE} \\ \text{PRESSIONE} \end{array} \right. \\ (3) \quad & + \int_{Vol} \rho \dot{q} dVol + \dot{Q}_{viscoso} + \dot{W}_{viscoso} + \left[\begin{array}{l} \text{CALORE} \\ + \\ \text{VISCOSITÀ} \end{array} \right. \\ & + \int_{Vol} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dVol \left. \begin{array}{l} \text{LAVORO} \\ \text{FORZE DI} \\ \text{CAMPO} \end{array} \right] \end{aligned}$$

In realtà \dot{Q} e \dot{W} sono POTENZE (cioè energia / tempo)

LAGRANGIANO

"Eulero sta sul ponte
Lagrange se ne va in barca"

$$* \frac{\partial p}{\partial t} = - \left[\left(p \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left(p \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \left(p \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right]$$

SI ESPLICITANO LE DERIVATE

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = - \left[p \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial y} + p \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{Dp}{Dt} = - \rho \nabla \cdot \vec{v} \quad (1e)$$

* FORMA NON CONSERVATIVA

■ QUANTITÀ DI MOTO

Euleriano

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho \vec{v} dVol = - \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S p \vec{n} dS + \int_{Vol} \rho \vec{f} dVol$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho \vec{v} dVol + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{Vol} \nabla p dVol + \int_{Vol} \rho \vec{f} dVol$$

EQUAZIONE VETTORIALE \rightarrow scomponibile lungo $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$

$$x \rightarrow \int_{Vol} \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} dVol + \int_S \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{Vol} \frac{\partial p}{\partial x} dVol + \int_{Vol} \rho f_x dVol$$

$$\int_S \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_S (\rho u \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{Vol} \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) dVol$$

$$\int_{Vol} \left[\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x \right] dVol = 0$$

Se volume è arbitrario $\int \dots = 0$ se $\dots = 0$

$$x \rightarrow \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

$$y \rightarrow \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$$

$$z \rightarrow \frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$$

Sviluppiamo la divergenza

(2e) Euleriano
esponso

ENERGIA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Vol}} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\text{Vol} = - \int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_{\text{Vol}} \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\text{Vol} + \int_{\text{Vol}} \rho \dot{q} d\text{Vol} + 0$$

$$\int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\text{Vol}} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\text{Vol}$$

$$\int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\text{Vol}} \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] d\text{Vol}$$

[... solito procedimento]

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) \quad (3e)$$

Lagrangiano

$$(3e) \quad \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

EQ. DELL'ENERGIA INTERNA

$$\therefore \rho \frac{De}{Dt} = - \rho (\nabla \cdot \vec{v}) + \rho \dot{q} \quad (1.34)$$

facendo (3e) - (1.34) \rightarrow eq. ENERGIA MECCANICA

$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = - \vec{v} \cdot \nabla p + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) \quad (1.35)$$

• ENTALPIA STATICA $h = c_p T = e + p/\rho$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \rho \dot{q} \quad (1.36)$$

• ENTALPIA TOTALE $H = h + \frac{v^2}{2}$ $v^2 = u^2 + v^2 + w^2$
(1.36) + (3e)

$$(1.37) \quad \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} + h \right) = - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \underbrace{\left[\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p \right]}_{(1e)=0} + 2\rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

GASDINAMICA 14/10/2013

Relazione dell'ENTALPIA TOTALE

$$H = c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2}, \quad H = h + \frac{V^2}{2}$$

$$\rightarrow T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_0 \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

$$\rightarrow \frac{\gamma R}{\gamma-1} \frac{T}{M} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \frac{T_0}{M} \quad (1.39)$$

$$\frac{\gamma R}{M} T = a^2$$

$$\frac{\gamma R}{M} T_0 = a_0^2$$

velocità del suono in condizioni di serbatoio

altra EQ. ENALPIA TOTALE

$$(1.40) \quad \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

$$\text{da } H = c_p T + \frac{V^2}{2}$$

$T \downarrow, V \uparrow$

Per $T \rightarrow 0 K$ allora $V = V_{\text{limite}}$

Dall'eq. della entalpia totale se T tende a zero assoluto $\Rightarrow V$ sarà la MAX possibile e $a \rightarrow 0$

$$a) \quad T \rightarrow 0 K \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \rightarrow 0$$

Se le molecole non collidono più come si propaga l'onda sonora? Non si propaga più!

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} = \frac{V_{\text{lim}}^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{V_{\text{lim}}}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (1.41)$$

$$M_{\text{lim}} = \frac{V_{\text{lim}}}{a_0} \rightarrow \infty$$

b) Condizioni CRITICHE $\rightarrow V = a$

$$M = 1 \quad V^*, a^*$$

(1.47)

$$M^2 = \frac{2}{[(\gamma+1)/M^{*2}] - (\gamma-1)}$$

(1.48)

$$M^{*2} = \frac{M^2(\gamma+1)}{2 + M^2(\gamma-1)}$$

Se localmente

$M=1$	\rightarrow	$M^* = 1$
$M < 1$	\rightarrow	$M^* < 1$
$M > 1$	\rightarrow	$M^* > 1$
$M \rightarrow \infty$	\rightarrow	$M^* \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$

◆ Se siamo in condizioni ISENTROPICHE possiamo trovarci tutti i rapporti critici delle varie grandezze

• $T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$

da $\frac{\rho^*}{\rho_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$ $\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}$

\downarrow

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} \quad (1.49)$$

• $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/\gamma-1} \rightarrow \frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma/\gamma-1}$

\downarrow

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^{\gamma/\gamma-1} = \left[\frac{2}{\gamma-1} \right]^{\gamma/\gamma-1} \quad (1.50)$$

• $\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[\frac{2}{\gamma-1} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1.51)$

Per l'aria

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,833 \quad \frac{P^*}{P_0} = 0,528 \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,634$$

MOLTO IMPORTANTE :

$$\frac{Q^2}{\gamma-1} + \frac{M^2}{2} = \frac{Q^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (1.43)$$

$$0 \leq r \leq r_0 \quad v_r = r \cdot \omega$$

$$r > r_0 \quad v_r = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

CROCCO lega CINETICA e TERMODINAMICA

Ipotesi:

- 1) EFFETTI VISCOSI NULLI
- 2) FORZE DI CAMPO = 0

• Riprendendo il I principio con entropia e entalpia

$$(1.27_2) \quad T ds = dh - v dp \quad \text{variazioni infinitesime}$$



$$T \nabla s = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (1.52) \quad \text{VARIAZIONI FINITE}$$

$$\bullet \quad H = h + \frac{v^2}{2} \rightarrow h = H - \frac{v^2}{2}$$

$$\nabla h = \nabla H - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

$$\bullet \quad \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p \quad (2e) \quad (\text{eq. QUANTITÀ DI MOTO, Lagrangiana})$$

SOSTITUIAMO (2e) in (1.52)

$$T \nabla s = \nabla H - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right]$$

Si dimostra che

$$\vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

$$\Rightarrow \boxed{T \nabla s = \nabla H - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} \quad \text{EQUAZIONE DI CROCCO (1.53)}$$

$$\bullet \quad \text{FLUSSO STAZIONARIO} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla H - T \nabla s$$

I gradienti di entalpia e entropia rendono il flusso ROTAZIONALE

GASDINAMICA 17/10/2013

VELOCITÀ POTENZIALE (o funzione potenziale)

Compo di moto

$$u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z)$$

$$p = p(x, y, z) \quad T = T(x, y, z) \quad \rho$$

→ 6 INCOGNITE, ⇒ EQ. DI EULERO = pochissime soluzioni analitiche

Noi ora racchiudiamo le 3 equazioni del moto in un'unica equazione con una sola incognita → FUNZIONE POTENZIALE ϕ

Consideriamo $\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

SE $\nabla \times \vec{A} = 0$ in ogni punto del campo

ALLORA ESISTE UNA FUNZIONE SCALARE f PER CUI $\vec{A} = \nabla f$

(infatti $\nabla \times \nabla f = 0$, SEMPRE)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = 0$$

Ora prendiamo il vettore \vec{V} al posto di \vec{A} .

→ $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ definito in ogni punto del campo

- IRROTAZIONALE
- STAZIONARIO
- NON VISCOSO

⚠ USIAMO LA FUNZIONE POTENZIALE SOLO SOTTO QUESTE IPOTESI! (1.54)

⇒ esiste una funzione scalare ϕ per cui $\vec{V} = \nabla \phi$

(1.55) $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$

ϕ = FUNZIONE POTENZIALE

Poiché (1.58) = (1.53)

$$-\frac{p}{2} d(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = a^2 dp$$

Derivando:

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow) \quad \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{p}{2a^2} \frac{d}{dx} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \\ y \rightarrow) \quad \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{p}{2a^2} \frac{d}{dy} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \\ z \rightarrow) \quad \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{p}{2a^2} \frac{d}{dz} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \end{aligned} \right\} (1.60)$$

Riprendendo la (1.57) e sostituendo i $\frac{\partial p}{\partial \dots}$ trovati in (1.60)

$$(1.61) \quad p(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) + \phi_x \left[-\frac{p}{2a^2} \frac{d}{dx} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \right] + \phi_y \left[-\frac{p}{2a^2} \frac{d}{dy} (\dots) \right] + \phi_z \left[-\frac{p}{2a^2} \frac{d}{dz} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \right] = 0$$



$$(1.62) \quad \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \phi_{yy} + \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2}\right) \phi_{zz} + \frac{2\phi_x\phi_y}{a^2} \phi_{xy} + \frac{2\phi_x\phi_z}{a^2} \phi_{xz} + \frac{2\phi_y\phi_z}{a^2} \phi_{yz} = 0$$

In questa abbiamo racchiuso l'eq. di CONTINUITÀ e la Q. DI MOTO + la velocità del suono.

$\phi(x, y, z)$... ma $a(x, y, z)$ rimane incognita?

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=\text{cost}}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

MA QUINDI L'INCOGNITA a PUÒ ESSER TOLTA:

Compo IRROTAZ + INVISCIDO = $H = \text{cost}$

$$H_0 = \text{cost} = c_p T_0 = h + \frac{V^2}{2} = c_p T + \frac{V^2}{2} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}$$

140

$$T \rightarrow \rho = \sqrt{\frac{R T}{M}}$$

$$M = \frac{V}{Q}$$

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$P = \frac{P}{R T}$$

Perciò una volta che si ha la FUNZIONE POTENZIALE SI TROVA TUTTO IL RESTO!

- SUB
- SUPER
- IPER

 } eq. LINEARE ... TRANS → NON LINEARE
 ↓
 casino!

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{LINEARE}$$

$$f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{NON LINEARE}$$

↓
 $f_1 = \text{soluzione}$

$f_2 = \text{soluzione}$

$f_3 = f_1 + f_2$ è ancora soluzione

Per il NON LINEARE come fai a trovare soluzioni analitiche?!?

⇒ CFD, risoluzione numerica, ci sono moltissime soluzioni (una volta imposte le condizioni al contorno)

... quali soluzioni sono poi fisicamente accettabili?

Questo fatto lo stabilirà uno esperto di aero/gas dinamica!

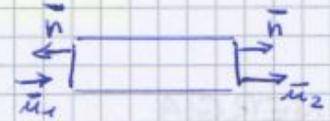
Nella regione /// si verifica l'evoluzione del campo (onde d'urto, foci di espansione, immissione o cessione di calore)

\vec{n} : versore normale def. positivo uscente

A: sezione del volume

CONTINUITÀ

(1) ~~$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \rho \, d\text{vol} + \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$~~



↓ STAZIONARIO, ...

$\int_S = \int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{A_{laterale}}$ poiché lì $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

$A_1: \vec{v} \cdot \vec{n} = -u_1$

$A_2: \vec{v} \cdot \vec{n} = +u_2$

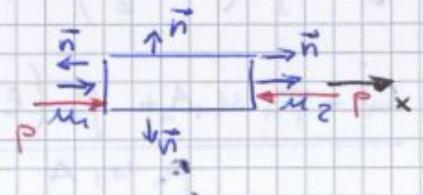
$-p_1 u_1 A_1 + p_2 u_2 A_2 = 0$

$p_1 u_1 A_1 = p_2 u_2 A_2$

$pu = \text{cost} \quad (1-1D)$

QUANTITÀ DI MOTO [vettoriale]

(2) $\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = - \int_S p \vec{n} \, dS$



La pressione è sempre discorde a \vec{n}

$\rightarrow x) \quad -[-p_1 A_1] \quad -[+p_2 A_2] = - \int_S p \vec{n} \, dS \quad (2.1)$
 \vec{n} discorde con x
 FORZA PRESSIONE DISCORDE CON \vec{n}
 $\rightarrow \vec{n}$ CONCORDA CON x su A_2

$-\int_S p \vec{n} \, dS = \int_{A_1} + \int_{A_2} = +p_1 A_1 - p_2 A_2$

$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_S \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{A_{lat}}$

→ $q + H_1 = H_2$
(3-10)



FORNENDO CALORE
L'ENTALPIA TOTALE
NON SI CONSERVA PIÙ!

Le equazioni trovate sono:

$$\begin{cases} (1-10) & pu = \text{cost} \\ (2-10) & p + pu^2 = \text{cost} \\ (3-10) & q + H_1 = H_2 \end{cases}$$

Commento alla (3-10)

$q + H_1 = H_2$

a) $q \neq 0 \rightarrow H_1 \neq H_2$ flusso Rayleigh

b) $q = 0 \rightarrow H_1 = H_2$

per esempio

→ URTO RETTO ←

H_0 si conserva

T_0 si conserva

$P_{01} > P_{02}$

GASDINAMICA 21/10/2013 il giorno dopo LEIPZIG 2013!

PICCOLE PERTURBAZIONI

→ perturbazioni di pressione → FRONTE D'ONDA

fluttuazione
chiamate
SUONO

ENERGIA (qdm)
TRASMESSA DA
PARTICELLA A
PARTICELLA

$v_{eff} = p(\bar{t})$



• Velocità di propagazione della perturbazione dipende dal MEZZO (ARIA $a \approx 340 \text{ m/s}$)

LIQUIDI $a \approx 1600 \text{ m/s}$

SOLIDI $a \approx 5000 \text{ m/s}$

$p \uparrow \Rightarrow a \uparrow \uparrow$

PARTICELLE + VICINE

$a \rightarrow \infty$ per fluidi sempre più INCOMPRESSIBILI

• A cavallo dell'onda il campo è imperturbato

PROCESSO ADIABATICO e quasi ISENTROPICO

Δ NO DISCONTINUITÀ MONTE - VALLE

Uguagliando (2.7) e (2.9):

$$-\frac{a}{\rho} = \frac{dp/d\rho + a^2}{-2a\rho} \rightarrow 2a^2 = \frac{dp}{d\rho} a^2$$

$$\rightarrow a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (2.10) \quad \text{VELOCITÀ DEL SUONO}$$

Poiché la propagazione di un'onda sonora è un fenomeno ADIABATICO e non ci sono dissipazioni \Rightarrow è un'evoluz. ISENTROPICA

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\Delta = \text{cost}}$$

GAS PERFETTI:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost} \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = ?$$

$$p = \text{cost} \cdot \rho^\gamma \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = \text{cost} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1}$$

$$= \frac{p}{\rho^\gamma} \cdot \gamma \cdot \rho^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\Delta = \text{cost}} = \gamma \cdot \frac{p}{\rho}$$

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

a è un indice della COMPRESSIBILITÀ

$$\frac{1}{a^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\Delta = \text{cost}}$$

\rightarrow se a è molto grande \Rightarrow GAS è INCOMPRESSIBILE

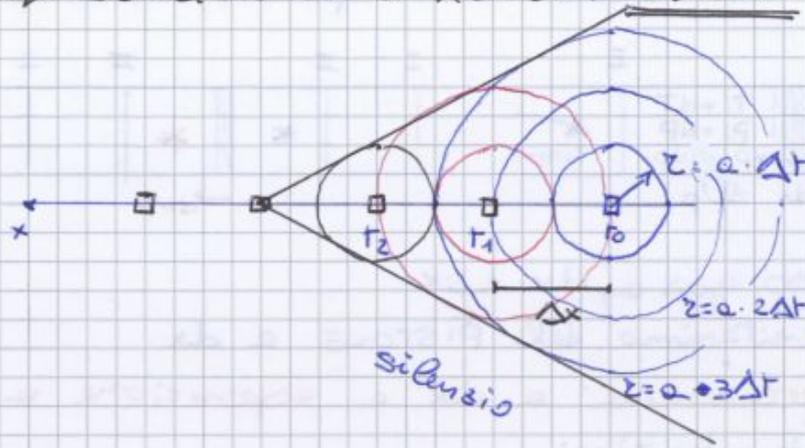
per $a \rightarrow \infty$, $\frac{\partial \rho}{\partial p} \rightarrow 0 \rightarrow$ INCOMPRESSIBILE \leadsto SOLIDI

$$a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

$$v_{at} = \sqrt{\frac{\gamma}{\text{cost}} \frac{R}{M} T}$$

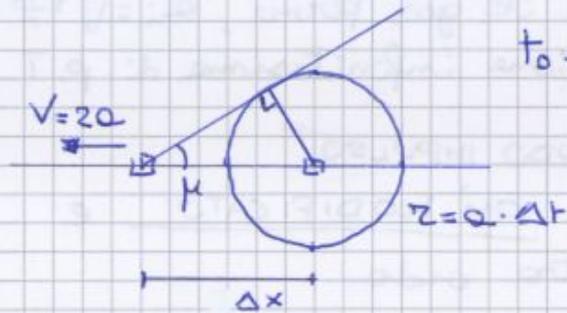
MOLTO SIMILE A VELOCITÀ DEL SUONO MA UN PO' + GRANDE (stesso ordine di grandezza, $v_{at} \approx 460$ m/s ARIA)

➔ SORGENTE IN MOTO A $V > a$



PARTICELLA STA SEMPRE DAVANTI ALLE SFERE

- Inviluppo sfere = CONO DI MACH



$t_0 + \Delta t$

$$r = a \cdot \Delta t$$

$$\Delta x = V \cdot \Delta t$$

$$\sin \mu = \frac{r}{\Delta x} = \frac{a \Delta t}{V \Delta t} = \frac{1}{M}$$

$$\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right)$$

$M \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$ (CONO DI MACH SI RESTRINGE)

Se $M=1$, $\mu=90^\circ$ (sorgente a $V=a$)

$M=2$, $\mu=30^\circ$

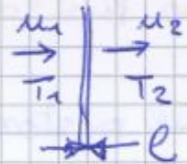
ONDE D'URTO

- CAMBIAMENTI DRASTICI DI GRANDEZZE MONTE-VALLE

- FENOMENI DISSIPATIVI

⇒ ADIABATICO MA NON ISENTROPICO

DENTRO l'urto ⇒ FENOMENI VISCOSI ⚠



Compo AERONAUTICO



▶ Onde d'urto avvengono anche in dolo subsonico $M > 0,4$



* qui corrente accelera e può localmente raggiungere condizione sonora

Se $M > 1$ in accelerazione ⇒ URTO

SORGENTE: non + una particella ma un PROFILO ALARE

GASDINAMICA

22/10/2013

continua sull'urto

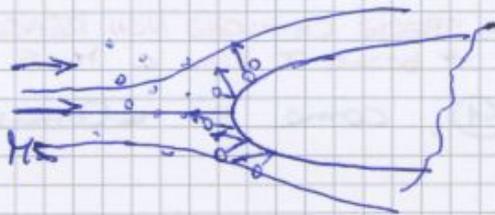
TUBO D'URTO



◆ FLUSSO ESTERNO

SUBSONICO

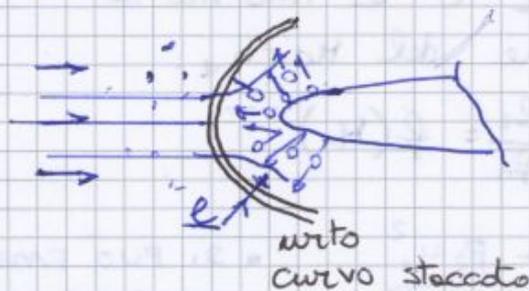
$$V_{\infty} < a_{\infty}$$



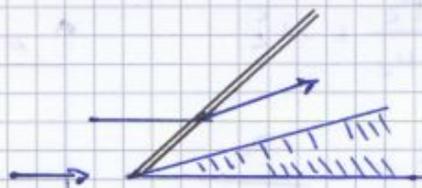
$$V_{at} > a_{\infty}$$

SUPERSONICO

$$V_{\infty} > a_{\infty}$$



$$l \approx 10^{-4} \text{ mm}$$



URTO OBLIQUO

Le particelle del flusso urtano il corpo e rimbalzano indietro.

FRONTE PERTURBATO CHE RISALE IL FLUSSO DI CORRENTE con velocità di agitazione termica. L'info del corpo che sta disturbando il flusso arriva MOLTO A MONTE.

Urto particelle col corpo ma

$$V_{at} \approx a_{\infty}$$

- COALESCENZA DEI FRONTI PERTURBATI CHE RISALGONO LA CORRENTE * FINO AD UNA POSIZIONE DI EQUILIBRIO
- COMPATTAZIONE FRONTI

URTO

- * COALESCONO A POCA DISTANZA DAL CORPO.
- PRIMA DELL'URTO (a monte) IL FLUSSO NON RICEVE ALCUNA INFORMAZIONE SUL DISTURBO CHE C'È A VALLE

Perché in supersonico abbiamo detto che $v_{at} \approx a_{\infty}$?

→ Perché tanto $V_{\infty} > v_{at}$ e $V > a_{\infty}$ e inoltre v_{at} e a_{∞} sono dello stesso ordine di grandezza.

Poi è un discorso QUALITATIVO.

Riprendendo l'eq. dell'energia nella forma (1.43)

$$\frac{Q^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2}$$

$$\rightarrow Q^2 = \frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u^2$$

$$Q_1^2 = \frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u_1^2 \quad (2.13)$$

$$Q_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u_2^2 \quad (2.14)$$

ADIABATICO

$\rightarrow T_0 = \text{cost}$

$\frac{T_0}{T^*} = \text{costante}$

Il campo (1) e (2) presi singolarmente sono isentropici

$\rightarrow T_0$ si conserva

\rightarrow CONDIZIONI CRITICHE SONO LE STESSA

$$\Rightarrow a_1^{*2} = a_2^{*2} = a^{*2}$$

Sostituiamo (2.13) e (2.14) in (2.12)

$$(2.15) \rightarrow \left(\frac{\gamma+1}{2} \frac{a^{*2}}{\gamma u_1} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_1^2}{\gamma u_1} \right) - \left(\frac{\gamma+1}{2} \frac{a^{*2}}{\gamma u_2} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_2^2}{\gamma u_2} \right) = u_2 - u_1$$

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma} a^{*2} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (u_2 - u_1) = u_2 - u_1$$

$$\frac{1}{u_2 - u_1} \frac{\gamma+1}{2\gamma} a^{*2} \frac{(u_2 - u_1)}{u_1 u_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{(u_2 - u_1)}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_1}$$

Dividiamo tutto per $u_2 - u_1$ e otteniamo

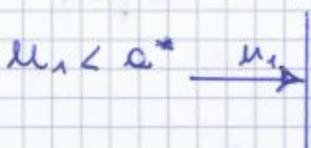
$$(2.16) \quad \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{a^{*2}}{u_1 u_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} = 1 \quad \rightarrow \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{a^{*2}}{u_1 u_2} = 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} = \frac{2\gamma - \gamma + 1}{2\gamma} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}$$

$$(2.17) \Rightarrow \boxed{a^{*2} = u_1 u_2}$$

RELAZIONE DI PRANDTL

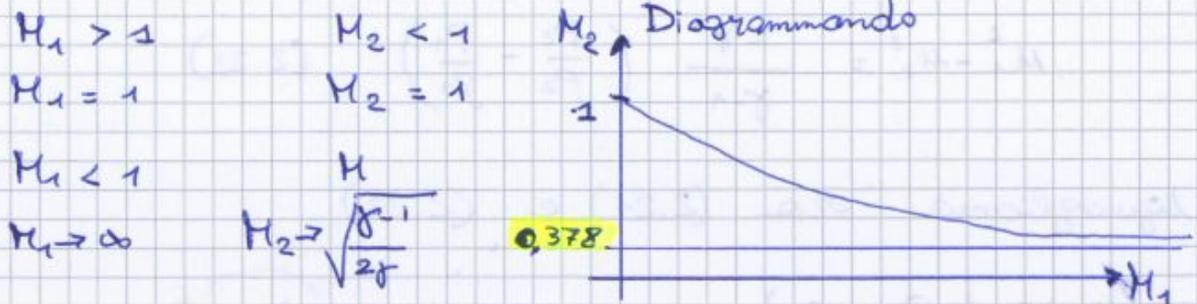
2 POSSIBILI SOLUZIONI

a) Flusso a monte subsonico:



$u_2 > a^*$ se no non vole Prandtl $\Delta_2 < \Delta_1$ RAFFREDDA!

ONDA DI ESPANSIONE



Relazione pressioni, densità

$$u_1 - u_2 = \frac{P_2}{\rho_2 u_2} - \frac{P_1}{\rho_1 u_1} \quad (2.11)$$

MOLTIPLICHIAMO per $(u_1 + u_2)$:

$$(u_1 + u_2)(u_1 - u_2) = (u_1 + u_2) \left(\frac{P_2}{\rho_2 u_2} - \frac{P_1}{\rho_1 u_1} \right)$$

$$u_1^2 - u_2^2 = \left(\frac{P_2 u_1}{\rho_2 u_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1 u_2}{\rho_1 u_1} \right)$$

Moltiplichiamo per $\frac{\rho_1}{\rho_1}$ e $\frac{\rho_2}{\rho_2}$ (cioè moltip. per 1)

$$= \left(\frac{P_2 \cancel{u_1} \rho_1}{\rho_2 u_2 \rho_1} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1 \cancel{u_2} \rho_2}{\rho_1 u_1 \rho_2} \right) \quad (2.20)$$

eq. CONTINUITÀ: $\rho u = \text{cost}$

$$= \left(\frac{P_2}{\rho_1} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_2} \right)$$

$$= \frac{1}{\rho_1} (P_2 - P_1) + \frac{1}{\rho_2} (P_2 - P_1)$$

$$= (P_2 - P_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (2.21)$$

ENERGIA

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{cost}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{RT}{M} \right) \rightarrow \frac{\bar{P}}{\rho}$$

$$\rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right)$$

$$\Rightarrow u_1^2 - u_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \quad (2.22)$$

$$M_1 \uparrow \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} \uparrow$$

$$M_1 = 1 \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 \quad \text{ONDA DI MACH} \rightarrow \text{EVANESCENTE}$$

$$M_1 \rightarrow \infty \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$



$\left[\frac{p_2}{p_1} \right]$ Abbiamo trovato $\frac{p_2}{p_1}$, usiamo le relazioni di Rankine & Hugoniot e calcoliamo $\frac{p_2}{p_1}$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad (2.28)$$

$$M_1 \uparrow \quad \frac{p_2}{p_1} \uparrow$$

$$M_1 \rightarrow \infty \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$$

$$\left[\frac{T_2}{T_1} \right]$$

$$T \propto \frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} \propto \frac{p_2}{\rho_2} \cdot \frac{\rho_1}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right] \quad (2.29)$$

$$M_1 \rightarrow \infty \quad \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{2}{\gamma+1}$$

$$M_1 = 5 \quad \frac{T_2}{T_1} \approx 6$$

DOPO URTO

PRESSIONE \uparrow

DENSITA' \uparrow

TEMPERATURA \uparrow

ENTROPIA \uparrow

SALTO DI ENTROPIA

$$\begin{aligned} \Delta_2 - \Delta_1 &= c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \\ &= c_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} \end{aligned}$$

AVENDO GIÀ I RAPPORTI IN FUNZIONE DI M_1 SOSTITUIAMO

Facendo il rapporto $\frac{P_{02}}{P_{01}}$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\gamma/\gamma-1}}{P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\gamma/\gamma-1}}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2}\right)^{\gamma/\gamma-1} \quad (2.32)$$

• $\frac{P}{\rho} \propto T$ $\rho \propto \frac{P}{T}$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_{01}} \frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{P_{02}}{P_{01}} \quad \rightarrow \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_{01}} \quad (2.33)$$

ONDA considerata ferma \rightarrow STAZIONARIO

$$\frac{DH}{Dt} = 0$$

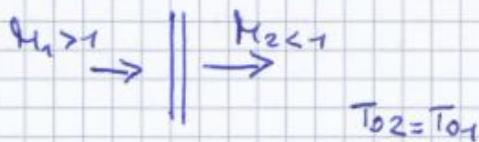
ONDA IN MOVIMENTO \rightarrow NON STAZIONARIO,
compi ① e ② in continua evoluzione

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

- ONDA D'URTO VIAGGIA A VELOCITÀ ~~DEL SUONO~~ SUPERSONICA!!! Viaggia insieme al corpo che disturba!

GAS DINAMICA 24/10/2013

Dettagli su weto retto



$P_{02} < P_{01}$ \rightarrow DISSIPAZIONE

$$P_2 > P_1$$

$$u_2 < u_1$$

$$M_2 < 1$$

$$\Delta_2 - \Delta_1 > 0 \rightarrow \Delta_2 - \Delta_1 = c_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - \frac{R}{H} \ln \frac{P_{02}}{P_{01}}$$

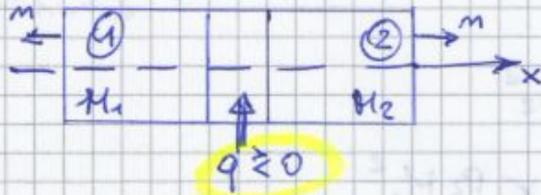
FLUSSO DI RAYLEIGH

o flusso con immissione di calore

► Flusso INTERNO 1D

- EFFETTI VISCOSI NULLI

■ SCAMBIO DI CALORE $q \neq 0$

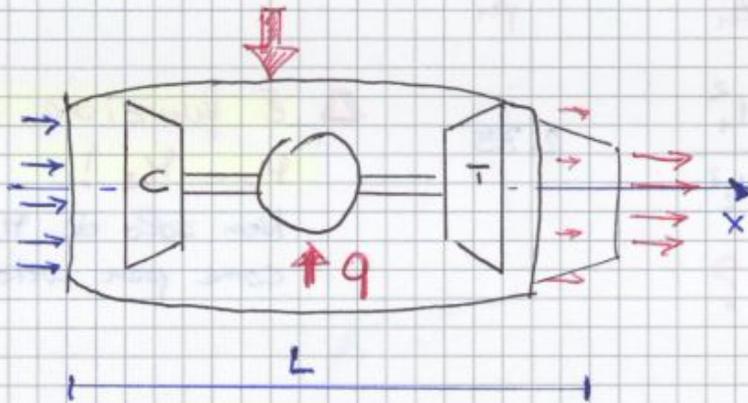


Variazione da compo ① a compo ②

① a compo ②



FORNITURA DI CALORE



Condizione SIMILE a motore

TURBOFAN

(o a qualsiasi motore a getto, moto interno e un condotto)

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 & (1-1D) \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 & (2-1D) \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2} & (3-1D) \\ \frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T & (4) \end{cases}$$

RISOLUZIONE

CFD

SOLUZIONI ESPLICITE

$$\frac{p_2}{p_1} = f(\dots)$$

Problema: assegnato compo ① \Rightarrow ricavare compo ②

$$(3-1D) \quad c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$H_{01} + q = H_{02}$$

$$\rightarrow q = H_{02} - H_{01}$$

$$c_p T_{01} + q = c_p T_{02} \rightarrow T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p}$$

$$T_{02} > T_{01} \Rightarrow q > 0$$

$$T_{02} < T_{01} \Rightarrow q < 0$$

RAPPORTO P_2/P_1

$$\text{Eq. stato} \rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right) \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \quad (2.37)$$

Grandezze d'arresto

- RAPPORTO P_{02}/P_{01}

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (2.38)$$

Riprendendo (2.37):

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.39)$$

- RAPPORTO T_{02}/T_{01}

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)}{T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right) \quad (2.40)$$

Variatione di entropia

$$\Delta_2 - \Delta_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} ;$$

$$\Delta_2 - \Delta_1 = c_p \ln \left[\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right]^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \quad (2.41)$$

... Sono tutte equazioni da cui non posso estrarre M_2 !

M_2 è INCOGNITO!!!!!!

$$\frac{du}{ds} = - \frac{u}{c_0} \frac{1}{\gamma(M^2)}$$

$$M^2 - 1 > 0 \Rightarrow \frac{du}{ds} < 0$$

$q > 0 \Rightarrow$ CORRENTE DECELERERA

Ⓒ $M_2 = 1 \rightarrow$ SONICA

CHOKING

$q = q_{max} = q^*$

$q > 0$

$M_1 > 1$

$\frac{dT}{ds} \rightarrow \infty$

II) INGRESSO SUBSONICO, $q > 0$

$$q > 0 \Rightarrow \frac{dT}{ds} > 0 \quad (\gamma M^2 - 1) < 0 \rightarrow M < \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$

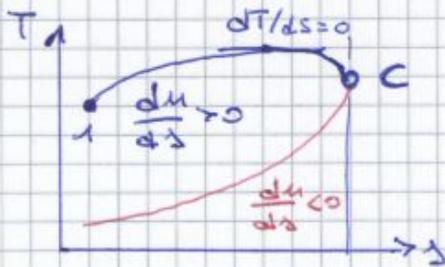
$M < 1$

$$\frac{dT}{ds} < 0$$

$$\text{se } (\gamma M^2 - 1) > 0 \rightarrow M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} < M < 1$$

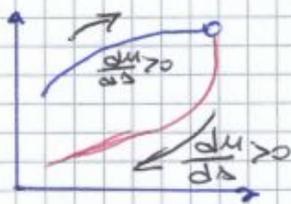
CASO PARTICOLARE
bisogna studiare la funzione



$$\frac{dT}{ds} = 0$$

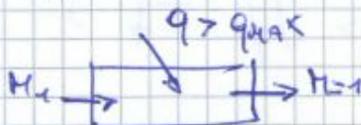
III) +IV)

$q < 0$, posso percorrere la curva al contrario da C a 1



Se volessi ACCELERARE CONTINUAMENTE da un ingresso SUBSONICO dovrei fornire calore fino a C e poi sottrarlo fino ad arrivare in condiz. supersonica

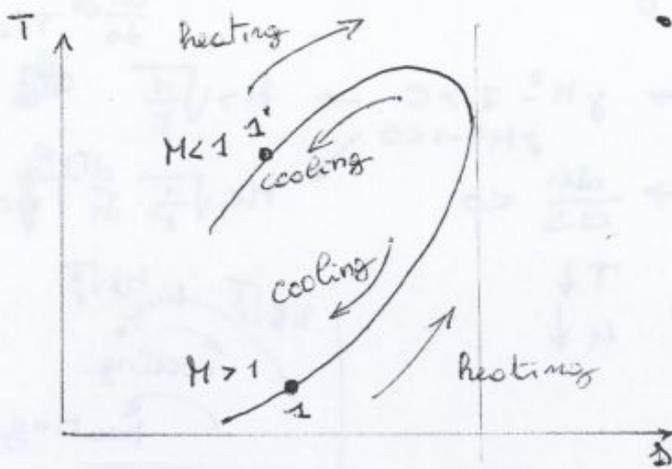
Supponiamo che $q > q_{MAX}$ per $M_1 = \dots > 1$



A MONTE $(M_1) < M_1$
 $q > q_{MAX}$

Deve entrare meno supersonico.

CURVA DI RAYLEIGH



• C'è una curva diversa per ogni condizione diversa di ingresso (1)

La curva è il luogo dei punti dei possibili stati (2) dato l'ingresso

(1) e un certo apporto di calore q.

$$(1) \frac{dT}{ds} = \frac{T}{C_p} \frac{(\gamma M^2 - 1)}{(M^2 - 1)}$$

$$(2) \frac{du}{ds} = -\frac{u}{cv} \frac{1}{\gamma(M^2 - 1)}$$

I) INGRESSO SUPERSONICO $\rightarrow M_1 > 1$
 $q > 0 \Rightarrow$

NON È UNA CONDIZIONE MA UN EFFETTO REGOLATO MA M!!
 SE

$$(1) \frac{dT}{ds} > 0, M^2 - 1 > 0 \Rightarrow \gamma M^2 - 1 > 0 \rightarrow M > \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$

$$(2) \text{ visto che } M > \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \rightarrow \frac{du}{ds} < 0$$

$$q > 0 \rightarrow T \uparrow$$

$$M > 1 \rightarrow u \downarrow$$

II) INGRESSO SUBSONICO $\rightarrow M_1 < 1$
 $q > 0$

perciò $\frac{dT}{ds} > 0$

$$(1) \text{ se } M^2 - 1 < 0 \rightarrow \gamma M^2 - 1 < 0 \rightarrow M < \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$

(essendo $M < 1$) ma se $\gamma M^2 - 1 > 0 \rightarrow M > \sqrt{\frac{1}{\gamma}} < 1 \Rightarrow \frac{dT}{ds}$

$$(2) \text{ visto che } M < \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \rightarrow \frac{du}{ds} > 0$$

$$M < 1 \rightarrow \dots \rightarrow M < 1 \rightarrow q > 0 \rightarrow \begin{cases} T \uparrow & \text{se } M < \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \\ u \uparrow & \text{se } M > \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \end{cases}$$

III) INGRESSO SUPERSONICO $M_1 > 1$
 $q < 0$

$$(1) \frac{dT}{ds} < 0, M^2 - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$M < \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$

$$M > 1 \rightarrow \begin{cases} T \downarrow \\ u \uparrow \end{cases}$$

$$(2) M < \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \rightarrow \frac{du}{ds} > 0$$

MA poiché $\sqrt{\frac{1}{\gamma}} < 1$ e l'ingresso è supersonico è impossibile che $T \downarrow$ con $s \uparrow$

GASDINAMICA 28/10/2013

CONDIZIONI CRITICHE NEL FLUSSO DI RAYLEIGH

Rapporti tra grandezze

$$\frac{f_1}{f_2} = f(M_1, M_2) \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

Condiz. critiche \rightarrow quelle che si avrebbero se $M=1$ (M locale)

$\frac{f}{f^*} \rightarrow$ CONDIZ. CRITICHE = CONDIZ. DI RIFERIMENTO
 \rightarrow CONDIZ. SONICHE

$$\triangle \begin{cases} P_1 \rightarrow P^* \text{ se } M_1=1 \\ P_2 \rightarrow P \end{cases} \quad \frac{P}{P^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \quad (2.44)$$

con M = Mach generico della sezione in cui vogliamo la P

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2 \quad (2.45)$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M^2} \left(\frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right) \quad (2.46)$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.47)$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(1 + \gamma)M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} \cdot [2 + (\gamma - 1)M^2] \quad (2.48)$$

Perché tiriamo in ballo le condizioni critiche?

\rightarrow Perché ci danno uno schema risolutivo + rapido x calcolare le condizioni nella sezione (2)

SCHEMA I)
DIRETTO

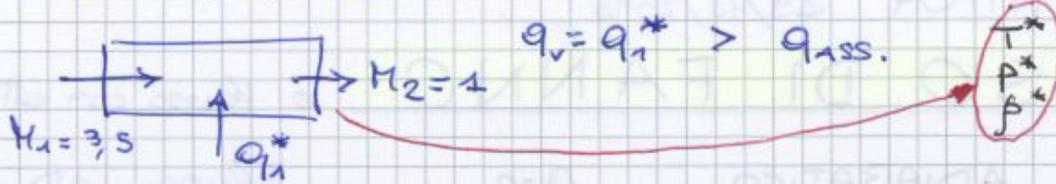
M_1, q_1, \dots

a) $T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p}$

b) $\frac{T_{02}}{T_{01}} = f(M_1, M_2) \Rightarrow M_2$

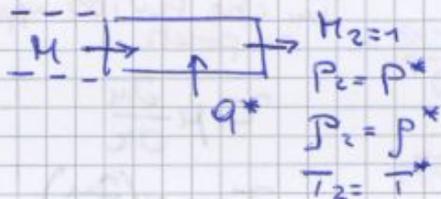
c) $\frac{P_2}{P_1} = f(M_1, M_2), \dots$

Caso virtuale



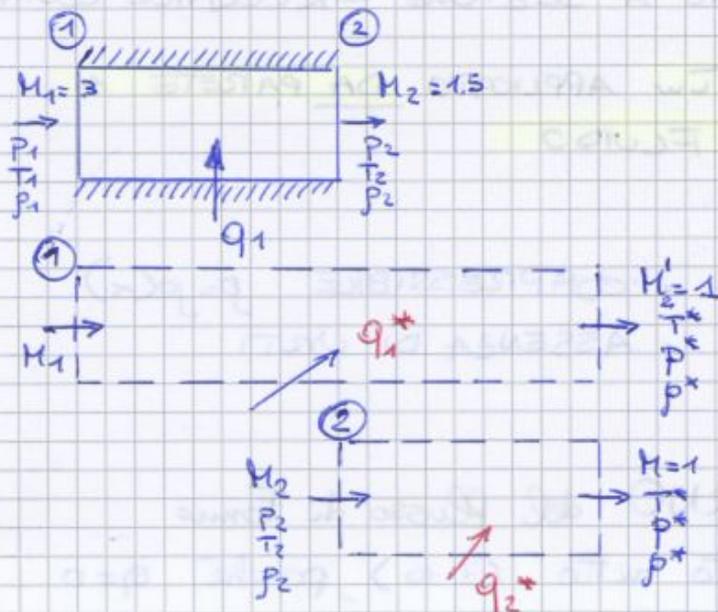
LE CONDIZIONI CRITICHE SONO IDENTICHE

Prendendo una sezione QUALSIASI dove $M_{ach} = 1$



$q = q_1^* - q_2^*$

Ho scomposto il condotto assegnato in condotti virtuali



- Mettiamoci in stazione ① e SUPPONIAMO di fornire q_1^* tale che $M_{uscita} = 1$. Visto che se $M_1 > 1$ e $q > 0$ il flusso DECELERA $\rightarrow q_1^* > q_1$ poiché $M_2 = 1 < M_2 = 1,5$.
- Mettiamoci in staz. ② e supponiamo di fornire q_2^* t.c. $M_2 = 1$

LE GRANDEZZE CRITICHE SONO SEMPRE LE STESSA POICHÉ DIPENDONO DA $M = 1$!

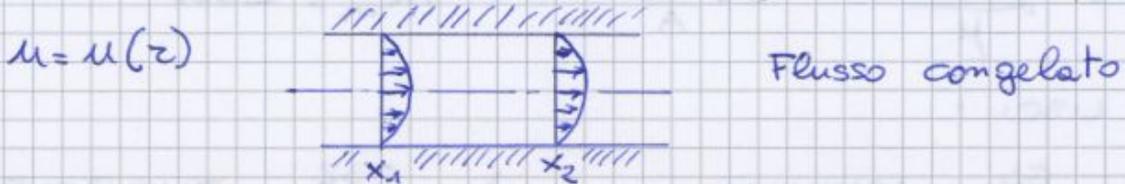
I q^* DIPENDONO DAL MACH DI INGRESSO NEL CONDOTTO virtuale

QUANTITÀ DI MOTO → c'è l'attrito!

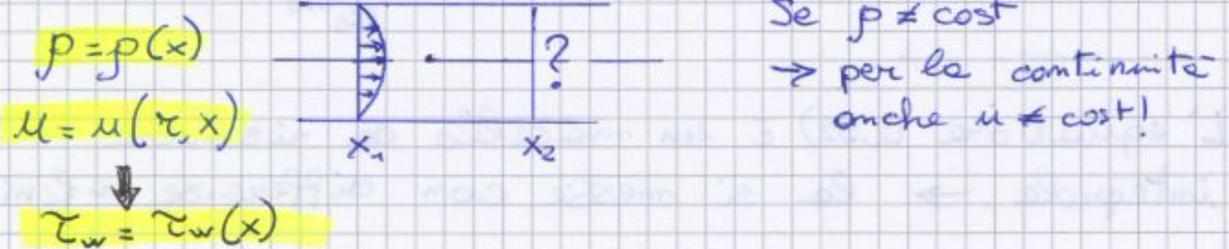
$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p \vec{n} dS - \int_S \tau_w dS \quad (2.49)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Rayleigh}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{risultante forza} \\ \text{è discorde a asse } x}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\triangle}$

Se flusso fosse INCOMPRESSIBILE: $p = \text{cost} \Rightarrow \tau_w = \text{cost}$



... ma se il FLUSSO è COMPRESSIBILE $p = p(x)$!
 → $p \neq \text{cost}$!



$$\int_S \tau_w dS = - \pi D \int_L \tau_w dx \quad (2.50)$$

$dS = \pi \cdot D \cdot dx$ $L = \text{lunghezza condotto}$

Sviluppando i termini e sostituendoci la (2.50), la (2.49) diventa:

$$- p_1 u_1^2 A + p_2 u_2^2 A = (p_1 A - p_2 A) - \pi D \int_0^L \tau_w(x) \quad (2.51)$$

Dividendo tutto per $A = \frac{\pi D^2}{4}$ si ottiene:

$$(p_2 - p_1) + (p_2 u_2^2 - p_1 u_1^2) = - \frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx \quad (2.52)$$

Nell'incompressibile: [PARENTESI]

$\tau_w = \text{cost}$

GRADIENTE DI PRESSIONE in un condotto

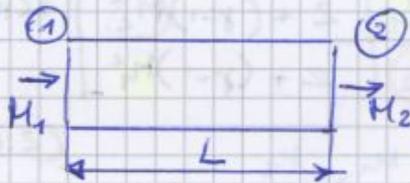
$$p_2 - p_1 = - \frac{4}{D} \tau_w \cdot l \rightarrow \frac{p_2 - p_1}{L} = - \frac{4}{D} \tau_w = \frac{dp}{dx}$$

Integrando (2.55) tra ingresso e uscita del condotto:

$$\frac{4}{D} \int_0^L C_f dx = \left[-\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2} \quad (2.56)$$

Questa equazione correla le condizioni di ingresso e uscita con gli sforzi d'attrito tra le 2 sezioni

RELAZIONI TRA CAMPO ① e ②



• $T_{01} = T_{02}$ $\frac{f_2}{f_1} = f(M_1, M_2)$

TEMPERATURE

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_0}{T_0} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}$$

$$\rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_2^2} \quad (2.57)$$

I CAMPI ① e ②

FUORI DAL CONDOTTO SONO ISENTROPICI!

PRESSIONI

$$\rho^2 = \gamma \frac{P}{P} \cdot \frac{\mu}{\mu} \rightarrow \rho^2 = \frac{\gamma P \mu}{\text{cost}} \rightarrow \gamma \frac{P \mu}{\rho^2} = \text{cost}$$

$$\left[\frac{\gamma P_1 \mu_1}{\rho_1^2} = \frac{\gamma P_2 \mu_2}{\rho_2^2} \right] \rightarrow$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\mu_1}{\rho_1^2} \cdot \frac{\rho_2^2}{\mu_2} = \frac{\mu_1}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\mu_2}$$

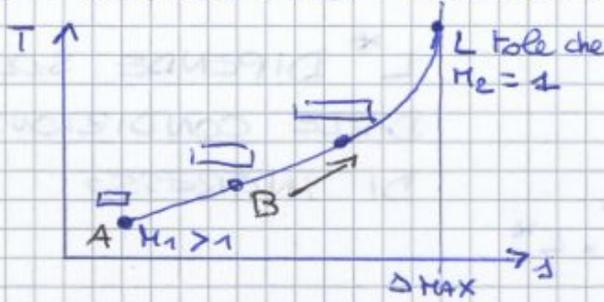
$$\left(\frac{\mu_1}{\rho_1} \right) \rho_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1}$$

$$\rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\gamma \frac{P_2}{\mu_2} T_2}{\gamma \frac{P_1}{\mu_1} T_1}}$$

prendendo (2.57) e sostituendo

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_2^2}} \quad (2.58)$$

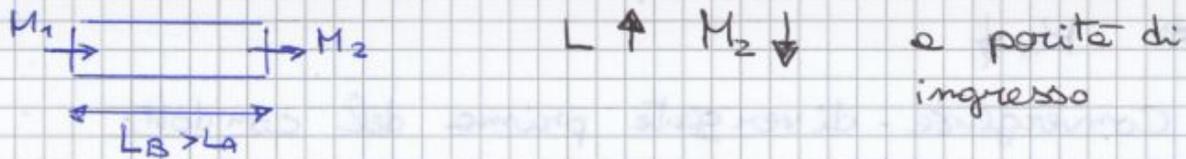
● INGRESSO SUPERSONICO



$M_1 > 1$
OGNI PUNTO DELLA CURVA
RAPPRESENTA STESSA
CONDIZIONI DI INGRESSO
E LUNGHERZA L CRESCENTE

$$M > 1 \quad M^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{ds} > 0 \quad \text{sempre}$$

$$\frac{du}{ds} = - \left(\frac{+}{+} \right) \Rightarrow \frac{du}{ds} < 0 \quad \text{corrente decelera con } L \uparrow \text{ (e fissato } M_1)$$



e porta di ingresso

Questo gioco continua fino a

L^* : LUNGHERZA CRITICA \rightarrow lunghezza tale che per quella data condizione di ingresso c'è uscita SONICA: $M_2 = 1$

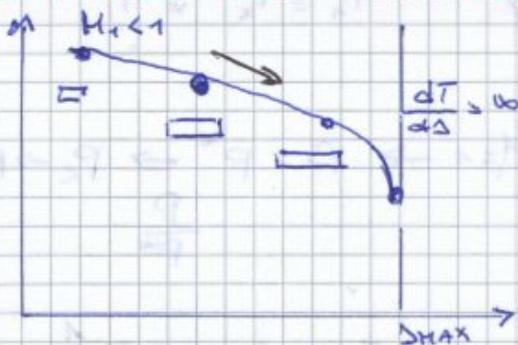
$$L^* \rightarrow \frac{dT}{ds} = \infty$$



CHOKING

[è lo stesso gioco del flusso di Rayleigh, solo che la cosa q^*]

● INGRESSO SUBSONICO



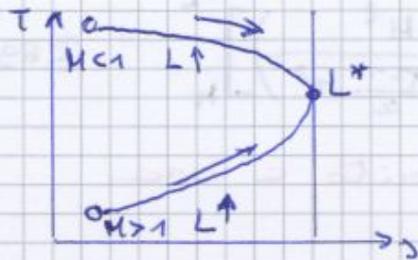
$M_1 < 1$

$$M < 1 \quad \rightarrow \quad M^2 - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{ds} < 0 \quad \text{sempre}$$

$$\frac{du}{ds} = - \left(\frac{+}{-} \right) \Rightarrow \frac{du}{ds} > 0 \quad \text{ACCELERAZIONE con } L \uparrow \text{ (e fissato } M_1)$$

GASDINAMICA 31/10/2013

Continua flusso di Fanno

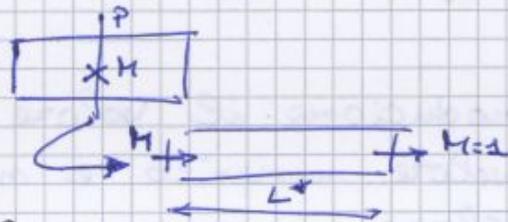


$q=0 \quad \mu \neq 0$

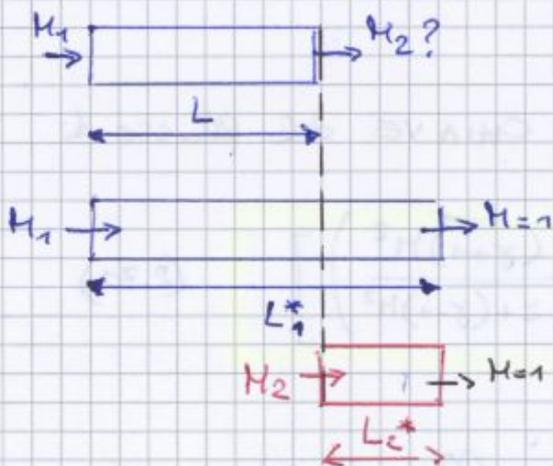
Come si calcola il campo ρ ?

\Rightarrow utilizzando i rapporti con le grandezze CRITICHE

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = f(M_1, M_2) \rightarrow \frac{\rho}{\rho^*}$$



Questo è il concetto di base:



$$L = L_1^* - L_2^*$$

$x=L^* \rightarrow$ sezione in cui $M=1$

A M_1 data compete una data lunghezza CRITICA L_1^* per cui $p^*, \rho^*, T^* \dots$

Prendendo come ingresso del condotto VIRTUALE l'uscita di quello assegnato, avrò una L_2^* per cui $p^*, \rho^*, T^* \dots$ e le grandezze CRITICHE SONO LE STESSA

Prendendo l'eq. della q.d.m. (2.56)

$$\frac{4}{D} \int_0^L C_f dx = \left[-\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2}$$

Questa eq. relazione l'attrito che si sviluppa lungo il condotto con i Mach di ingresso e di uscita

Dimensionale

$$L = L_1^* - L_2^*$$

Adimensionale

$$\frac{4L\bar{C}_f}{D} = \left(\frac{4L^*\bar{C}_f}{D}\right)_1 - \left(\frac{4L^*\bar{C}_f}{D}\right)_2 \quad (2.72)$$

SCHEMA
DI
CALCOLO

ASSEGNATO SI CALCOLA
AVENDO M_1 INCOGNITA

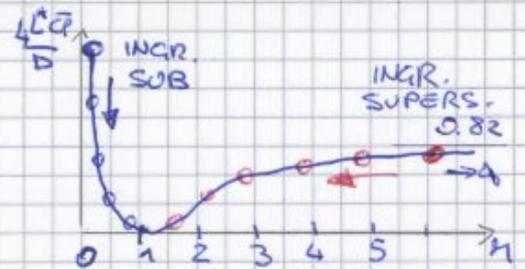
$$\rightarrow \left(\frac{4L^*\bar{C}_f}{D}\right)_2 = \left(\frac{4L\bar{C}_f}{D}\right) - \left(\frac{4L^*\bar{C}_f}{D}\right)_1$$

Ottenuto $\left(\frac{4L^*\bar{C}_f}{D}\right)_2$ si entra con quel numero nella relazione (2.71) e si trova M_2 !

► Diagrammare $\frac{4L^*\bar{C}_f}{D} = f(M)$

Per $M \rightarrow \infty$ per l'aria ($\gamma=1,4$)

$$\frac{4L^*\bar{C}_f}{D} \rightarrow 0,82$$



Esempio

$L^* = ?$

$$\bar{C}_f = f(Re, M, \epsilon \rightarrow \text{rugosità})$$

effetti
viscosi

distribuzione τ

$$\bar{C}_f = 0,005$$

Asintoto orizzontale significa che per $M_1 \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow L^* = \frac{0,82}{4} \cdot \frac{D}{\bar{C}_f} \approx 40 D$$

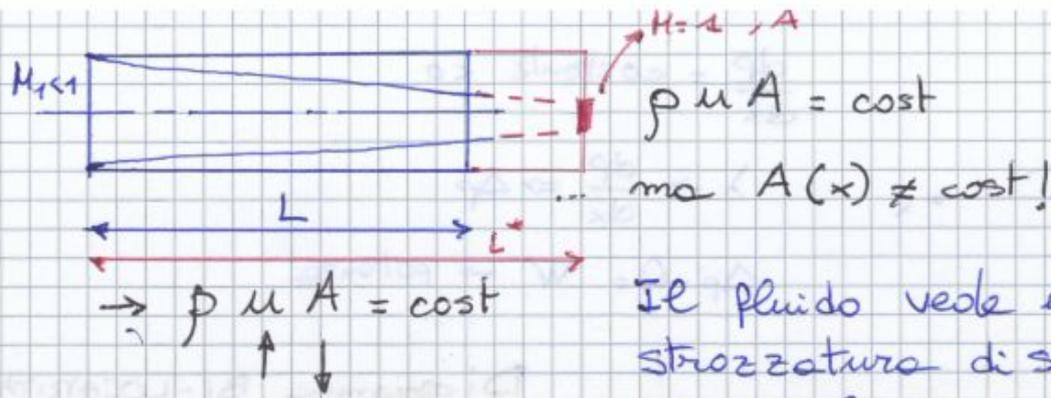
Cioè, quel condotto dopo 40 diametri diventa critico.

▣ SCHEMA RISOLUTIVO

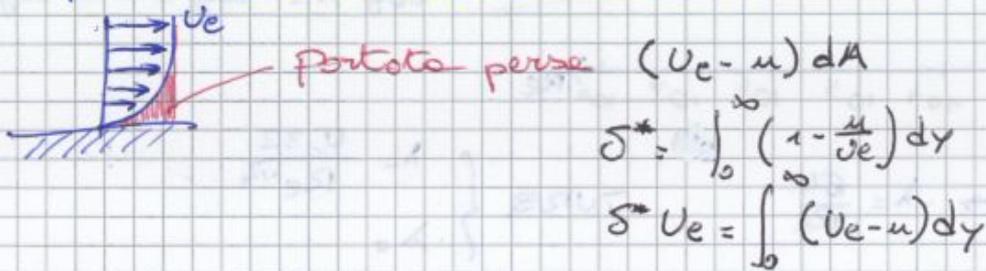
a) Relazioni ESPLICITE

Condiz. assegnate

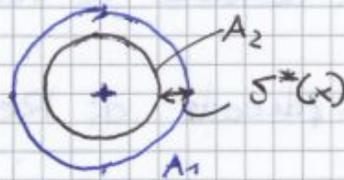
$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 \\ P_1 \\ T_1 \\ P_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ D_1 \\ \bar{C}_f \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{01} \\ P_{01} \\ P_1 \end{array} \right. \quad \frac{4L\bar{C}_f}{D}$$



Bisognerebbe ragionare in termini di δ^* \rightarrow spessore di spostamento \Rightarrow PERDITA DI PORTATA

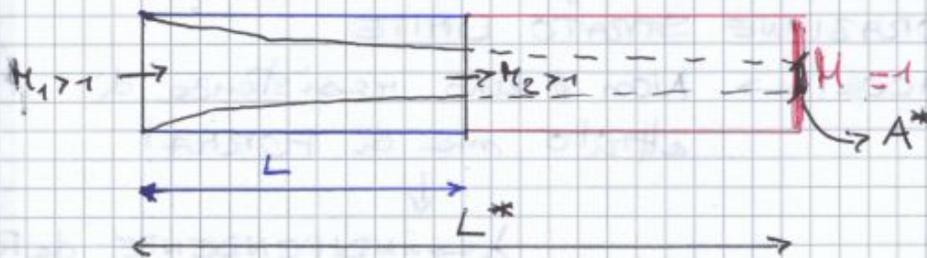


$$A(x) = A_1 - \delta^*(x)$$



② Perché un flusso in ingresso SUPERSONICO DECELERA lungo il condotto?

\Rightarrow Perché è un flusso supersonico che vede un condotto effettivo CONVERGENTE!



■ Coefficiente di attrito C_f

INCOMP.

$$\lambda = \frac{dp/dx}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 / D}$$

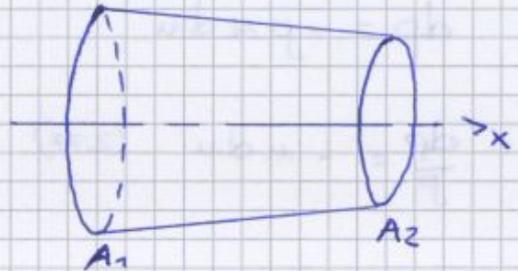
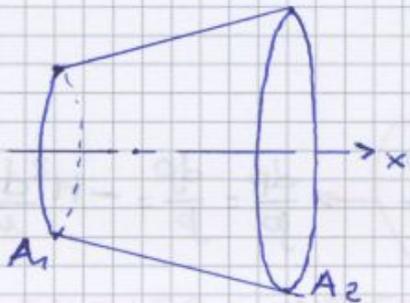
$$\lambda = -4 C_f$$

$$C_f = C_f(\pi)$$

FLUSSI QUASI-1-DIMENSIONALI

1D $\left\{ \begin{array}{l} \text{URTO RETTO} \\ \text{FLUSSO RAYLEIGH} \\ \text{FLUSSO FANNO} \end{array} \right\}$ CONDOTTI CON $A = \text{cost}$

Flussi QUASI-1D : CONDOTTI CON $A = A(x)$
L'area è una debole $r(x)$



- $q = 0$
- $\tau = 0$

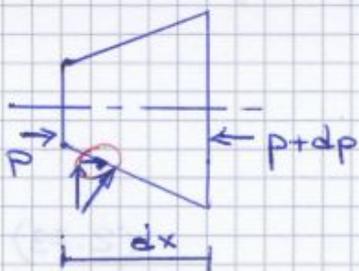
Consideriamo il flusso adiabatico e inviscido, ma le proprietà del fluido **VARIANO** CON LA SEZIONE

- CONTINUITÀ

$$\rho u A = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (2.73)$$

- QUANTITÀ DI MOTO

$$\rho_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = \rho_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2 \quad (2.74)$$



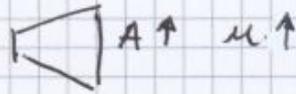
- ENERGIA $q = 0$

$$H_{01} = H_{02} \quad \cdot \quad h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.75)$$

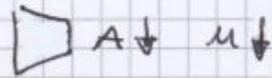
Scriviamo ora le versioni differenziali per avere la relazione tra ρ, u, A .

$M > 1$ SUPERSONICO $\Rightarrow M^2 - 1 > 0$

$\frac{dA}{A} = + \dots - \frac{du}{u} \rightarrow dA > 0 \quad du > 0$

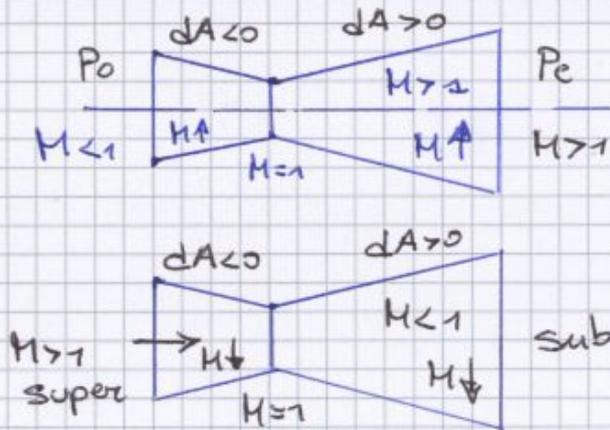


$dA < 0 \quad du < 0$



$M = 1 \rightarrow dA = 0$ sezione minima

■ Se ho in ingresso $M < 1$ e voglio sempre accelerare? \rightarrow CONVERGENTE - DIVERGENTE



Il flusso nel
condotto dipende
DALLE PRESSIONI
AI CAPI

$\frac{P_e}{P_o}$: potrebbe anche portare a violare l'isenteopicità
e quindi CAUSARE URTI NEL CONDOTTO

URTO

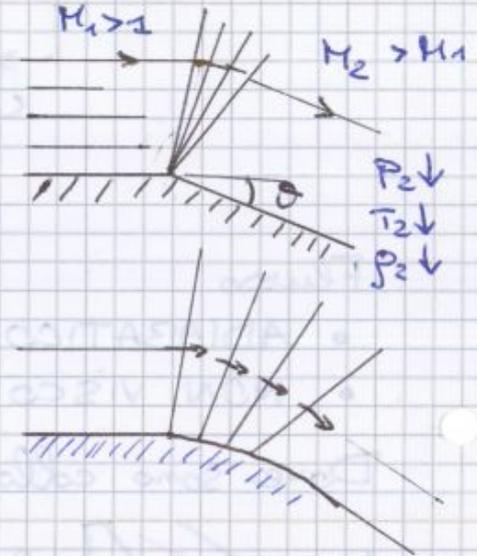
La corrente viene deflessa **IN DIREZIONE DELLA CORRENTE A MONTE** → deflessa su se stessa

ESPANSIONE

La corrente è deflessa in modo da **ALLONTANARSI DALLA DIREZIONE DI MONTE**

- Cond. tangenza
- ONDE SEMPLICI DI ESPANSIONE
→ FASCIO DI ESPANSIONE
→ esp. isentropica
→ rotazione graduale

▲ Parete a curvatura graduale $\theta(x)$



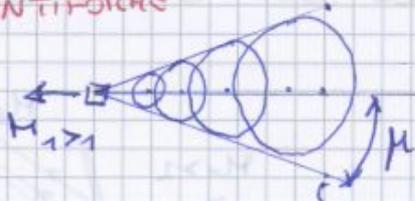
θ : DEFLESSIONE PARETE → cond. tangenza

↓
defles. corrente a valle

β : DEFL. ONDA D'URTO rispetto a corrente a monte

URTO OBLIQUO & SUONO

- Sorgente in movimento e $M_1 > 1$
PUNTI FORNE

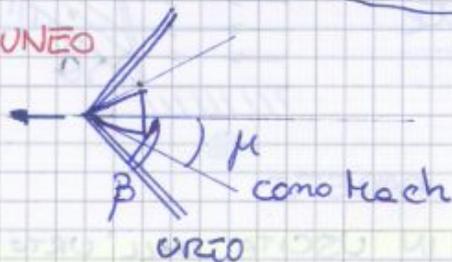


$$\mu = \arcsin \frac{1}{M_1}$$

CONO DI MACH

→ Linee di Mach

CUNEO



Si dimostrerà che

$$\beta > \mu$$

QUANTITÀ DI MOTO → proiettore in direzione \vec{N} e \vec{T}

$$(2) \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p \vec{n} dS$$

◆ Moltiplichiamo scalarmemente per \vec{N}

$$\vec{v} \cdot \vec{N} = u$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -u_1 \text{ su } A_a$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = w_1 \text{ su } A_b$$

$$\int_S \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \left[- \int_S p \vec{n} dS \right] \cdot \vec{N}$$

$\vec{v} \cdot \vec{n}$ su A_a PROIEZIONE DI \vec{v} LUNGO \vec{N}

PORTATA IN MASSA ATTRAVERSO A_f

$$\left[(-p_1 u_1 A_a) \cdot u_1 + (p_2 u_2 A_d) \cdot u_2 \right] + \left[(-p_1 w_1 A_f) \cdot u_1 + (p_2 w_1 A_b) \cdot u_1 \right] +$$

PORTATA IN MASSA ATTRAVERSO $A_a \rightarrow p_1 (\vec{v} \cdot \vec{n}) A_a$

\vec{n} su A_a DISCORDE DA \vec{N}

$$+ \left[(-p_2 w_2 A_e) \cdot u_2 + (p_2 w_2 A_c) \cdot u_2 \right] = - \left[-P_1 A_a + P_2 A_d \right]$$

FORZA PRESSIONE DISCORDE CON \vec{n}

$$A_f = A_b, A_e = A_c$$

→ CONTRIBUTI UGUALI e OPPOSTI

$$[F_{p_{a3}} = -F_{p_b}] \text{ CAMPO 1}$$

$$[F_{p_e} = -F_{p_c}] \text{ CAMPO 2}$$

• Stesso campo
→ stessa p
⇒ $\sum F = 0$

$$\Rightarrow (-p_1 u_1) u_1 + (p_2 u_2) u_2 = P_1 - P_2$$

$$P_1 + p_1 u_1^2 = P_2 + p_2 u_2^2$$

(3.2) IMPULSO NORMALE

Si ritrova la (2.10)

Le equazioni sono le stesse dell'orto retto scritte con le componenti normali all'orto

Ma non finisce qui! **BISOGNA PROIETTARE LUNGO \vec{T} !**

◆ Moltiplichiamo scalarmemente per \vec{T}

$$\vec{v} \cdot \vec{T} = w$$

$$\int_S \left[- \int_S p \vec{n} dS \right] \cdot \vec{T} = 0$$

Non ci sono componenti di forze di pressione in direzione // all'orto

$$\rightarrow \int_S \rho w (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$\rightarrow \frac{p_1 u_1 + p_1 \left(e_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) u_1}{p_1 u_1} = \frac{p_2 u_2 + p_2 \left(e_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) u_2}{p_2 u_2}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_1} + \left(e_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) = \frac{p_2}{p_2} + \left(e_2 + \frac{V_2^2}{2} \right)$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \rightarrow h_1 + \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2 + v_2^2}{2}$$

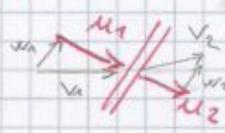
(3.3) $H_{01} = H_{02}$

$$\boxed{h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}}$$

Urto obliquo è un sottocaso di quello retto usando la componente normale all'urto

Ⓔ Equazioni urto obliquo?

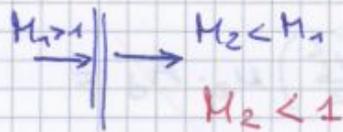
$$\begin{aligned} pu &= \text{cost} \\ p + pu^2 &= \text{cost} \\ h + \frac{u^2}{2} &= \text{cost} \end{aligned}$$



URTO OBLIQUO	URTO RETTO
$pu = \text{cost}$ $p + pu^2 = \text{cost}$ $h + \frac{u^2}{2} = \text{cost}$	$u_1 \parallel u_2$
	BAH!

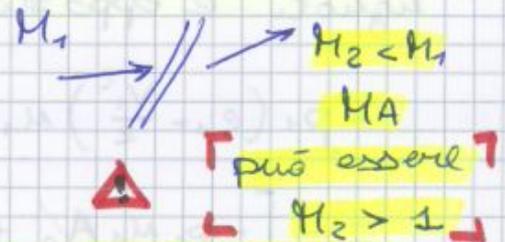
DISSIPAZIONE $\rightarrow P_{02} < P_{01}$

URTO RETTO
 \Rightarrow È IL + INTENSO



URTO FORTE

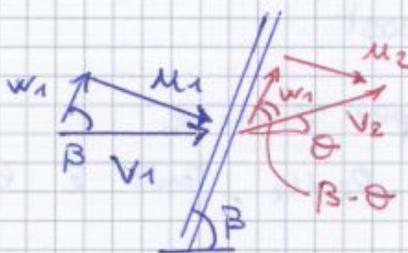
URTO OBLIQUO



URTO DEBOLE

Si parlerà di M_1 NORMALE

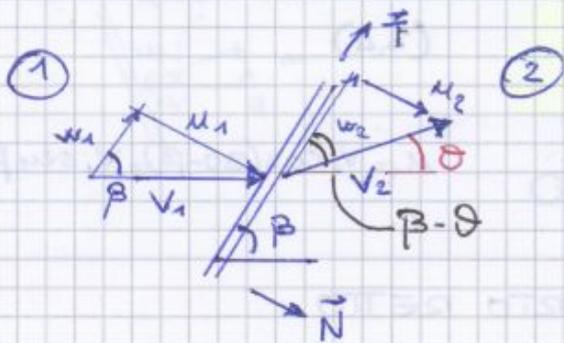
MACH NORMALE



$$M_1 = \frac{V_1}{a_1}$$

$$M_{1n} = \frac{u_1}{a_1}$$

$$M_{2n} = \frac{u_2}{a_2}$$



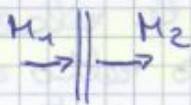
$$M_{1n} = M_1 \sin \beta = \frac{v_1 \sin \beta}{a_1}$$

$$M_{2n} = \frac{u_2}{a_2} = \frac{v_2 \sin(\beta - \theta)}{a_2}$$

$$M_{2n} = M_2 \sin(\beta - \theta) \quad (3.9)$$

$$\rightarrow M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta - \theta)}$$

■ Nell'urto retto M_1 e M_2 sono univocamente legati:



$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (2.19)$$

↓
Questa relazione vale anche per
URTO OBLIQUO SOSTITUENDO
 M_1, M_2 con M_{1n} e M_{2n}

$$M_{2n}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma - 1)}$$

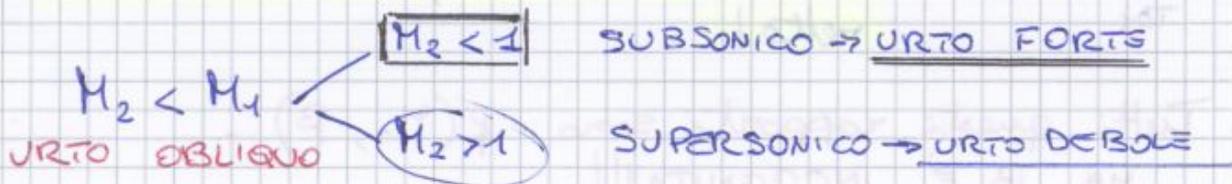
sostituendo

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta$$

$$M_{2n} = M_2 \sin(\beta - \theta)$$

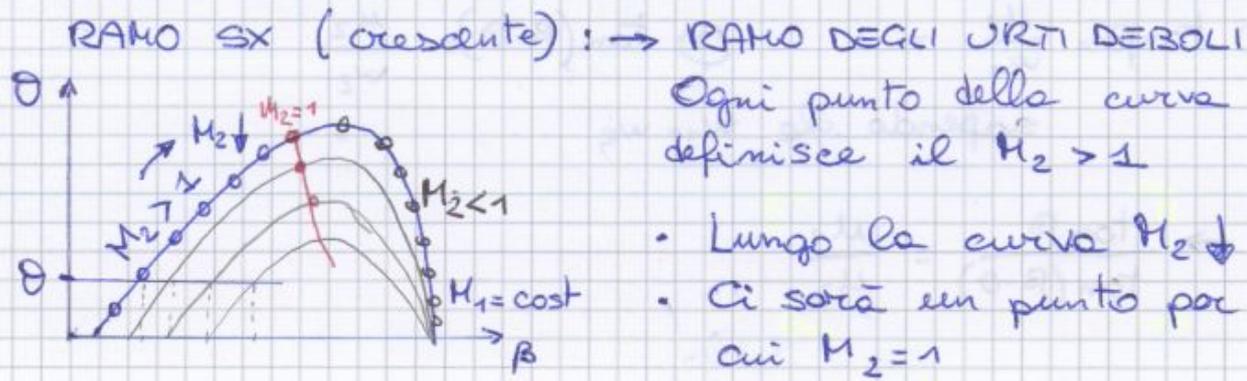
$$M_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\beta - \theta)} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)(M_1 \sin \beta)^2}{2\gamma (M_1 \sin \beta)^2 - (\gamma - 1)} \right] \quad (3.10)$$

$$M_2^2 = f(\theta, \beta, M_1)$$



Osservando la figura calcoliamo $\tan \beta$ nel
campo (1) e nel campo (2).

Questo ci porterà a una relazione che lega $\theta - \beta - M$.



RAMO DX (decremente): RAMO URTI FORTI
 $M_2 < 1$

△ OGNI CURVA È DEFINITA DA UN SOLO MACH 1. OGNI COMBINAZIONI θ - β - M_1 mi darà un certo M_2 che devo CALCOLARE

Supponiamo di avere un θ fissato: entrando con θ nel diagramma si intersecano le curve e vedo che L'INCLINAZIONE $\beta \uparrow$, AUMENTA AL CALARE DI M_1 .

Ramo debole : $M_1 \downarrow$ $\beta \uparrow$

Ramo forte : $M_1 \uparrow$ $\beta \uparrow$

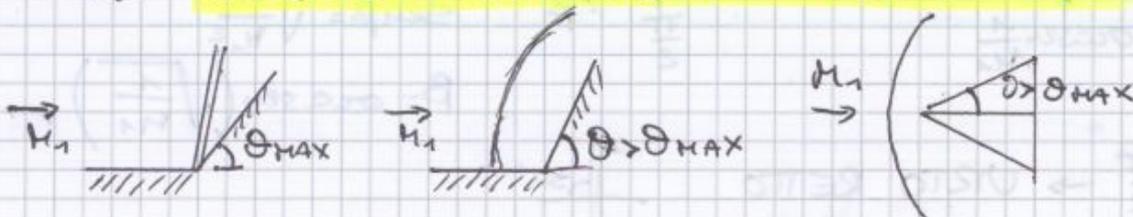
NOTA: nel diagramma
 • ENTRO con M_1 e $\theta \rightarrow$ TROVO β
 • ENTRO con θ e $\beta \rightarrow$ LEGGO M_1
 • SUL DIAGRAMMA NON LEGGO M_2 !

Con la relazione θ - β - M si risolvono tutti i problemi con urto obliquo, piano, ATTACCATO.

PER OGNI M_1 C'È UN CERTO θ_{MAX}

CASO A e se facessi una rampa con $\theta > \theta_{MAX}$ cosa succede all'urto?

⇒ URTO CURVO E STACCATO

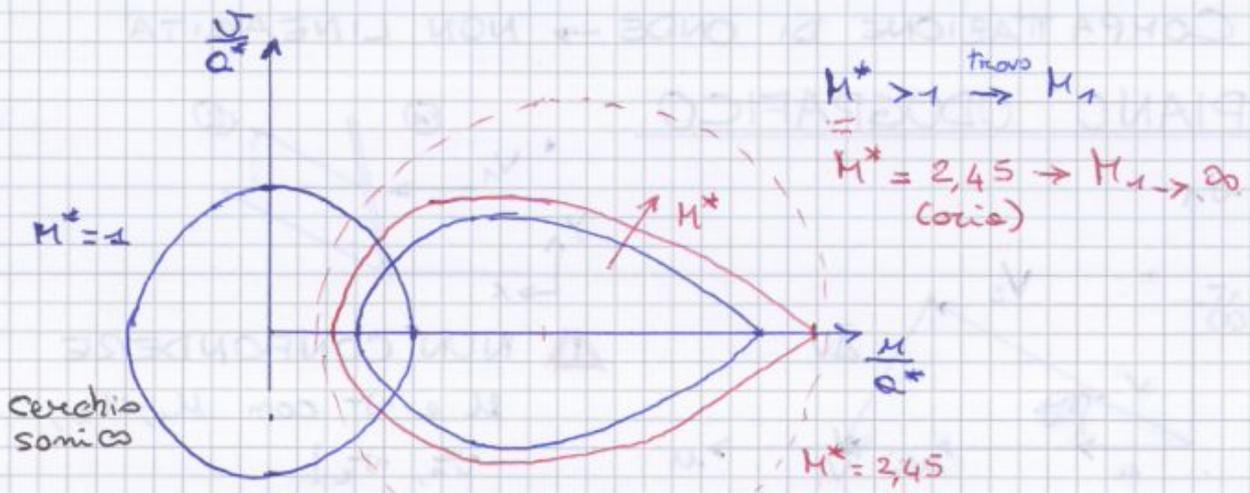


Dove si posiziona l'urto staccato?

→ In una posizione di equilibrio data da M_1 e θ_{MAX}

CASO B. Ho $\theta = \theta_{MAX}$ per M_1 , poi riduco M_1

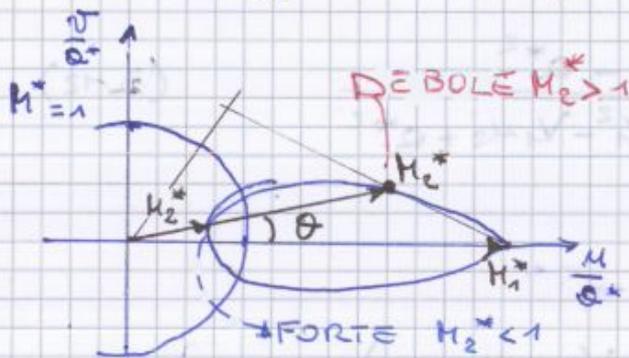
⇒ urto mi degenera e finisce di nuovo curvo e staccato.



La corrente a monte lo legge su $\frac{v}{c^*} = 0$

* Per questo conviene adimensionalizzare, così usando M^* possiamo anche rappresentare $M \rightarrow d$

Come si legge la strofoide:



$M^* = 1,5 \quad M_1 = 2$

$\tan \theta = \frac{v}{u}$
 \rightarrow pendenze rette

M_2^* : lunghezza vettore da origine che interseca la polare in DUE PUNTI

- $M_2^* < 1 \rightarrow$ URTO FORTE
- $M_2^* > 1 \rightarrow$ URTO DEBOLE

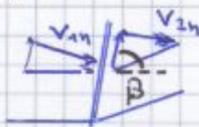
? β

$V_1 = V_{1n} + \cancel{V_{1t}}$

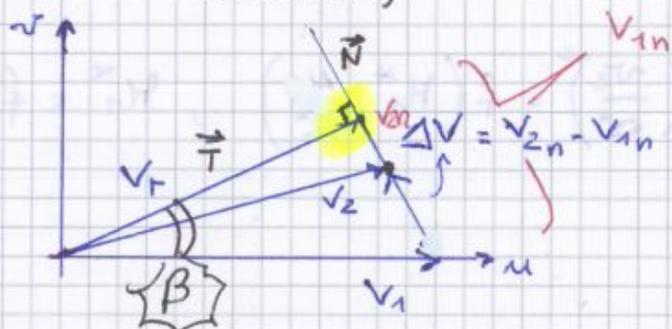
$V_2 = V_{2n} + \cancel{V_{2t}}$

$\Delta V = V_{2n} - V_{1n}$

poiché $V_{1t} = w_1, V_{2t} = w_2$
 e $w_1 = w_2$

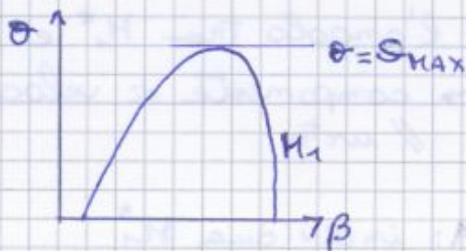


(n, t = normale / tangenziale dell'urto)



GASDINAMICA 7/11/2013

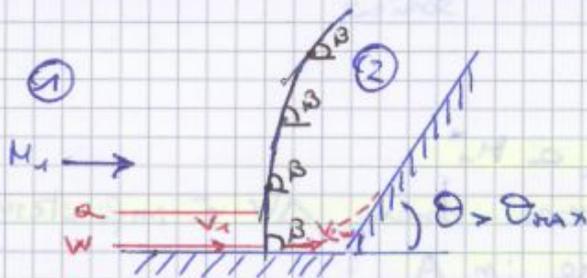
URTI STACCATI e CURVI



- 1) $\theta > \theta_{max}$ corrispondente a M_1
- 2) $\theta = \theta_{max} \rightarrow M \downarrow$

Queste due situazioni portano ad un URTO CURVO e STACCATO;

1) M_1 di monte fissato



La distanza dipende da M_1

- Il campo (2) è diverso da quello dopo l'urto obliquo!
- CAMPI (1) e (2) SONO COMunque ISENTROPICI

• Il β locale (cioè l'inclinazione dell'urto) è VARIABLE. A parete arriva a 90°

⚠ β VARIABILE \Rightarrow EVOLUZIONE DIFFERENTE PER OGNI FILETTO FLUIDO

DIPENDE DA DISTANZA DEL FILETTO DALLA PARETE

■ FILETTO TANGENTE A PARETE, w

\rightarrow vede un urto retto perché a parete $\beta = 90^\circ$

(w) $V_1 \rightarrow V_{2w}$ $V_{2w} < V_1$, $V_{2w} < a$ SUBSONICO

V_{2w} è subsonica, poi vede la parete inclinata, sente il disturbo PRIMA di avvicinarsi (subs.) e DEFLETTE PRIMA DELLA PARETE INCLINATA

■ FILETTO a , non molto lontano da parete

$\beta \approx 90^\circ$

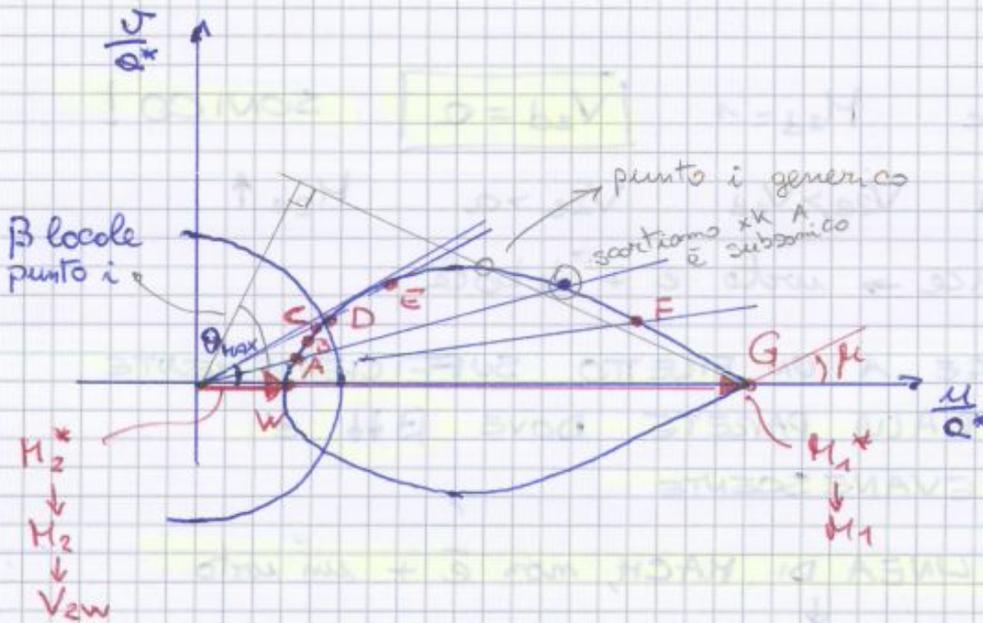
(a) $V_1 \rightarrow V_{2a}$ $V_{2a} < V_1$, $V_{2a} > V_{2w}$, $V_{2a} < a$ xk è vicino a w
URTO OBLIQUO

La linea sonica arriva fino a V_{2d} in uscita dell'urto, dove $V_{2d} = a \rightarrow M_{2d} = 1$ in uscita da urto.

- La trattazione di urto obliquo è valida LOCALMENTE e PENDENZA PER PENDENZA
 \Rightarrow spezzettando l'urto curvo e considerando il campo $\textcircled{2}$ IMMEDIATAMENTE A VALLE dell'urto

! NELL'URTO OBLIQUO IL FLUSSO NON ACCELERAVA DOPO L'URTO! SE USCIVA CON $V_2 \Rightarrow$ QUELLA V_2 RIMANEVA COST IN TUTTO $\textcircled{2}$, anche + o - volte dell'urto! **!**
 Qui invece dopo l'urto (un po' dopo) IL FLUSSO ACCELERA!
 \Rightarrow PER QUESTO CONSIDERIAMO SOLO IL CAMPO $\textcircled{2}$ IMMEDIATAMENTE A VALLE DELL'URTO, x poterlo considerare obliquo

Riportiamo il discorso sul piano



C: θ_{max}
 \rightarrow tangenza

D: PUNTO SONICO
 \rightarrow Inters. TRA POLARE E CERCCHIO SONICO

Ci sono sempre 2 intersezioni tra la polare e la retta dell'origine. \rightarrow UNA LA SI SCARTA SEMPRE

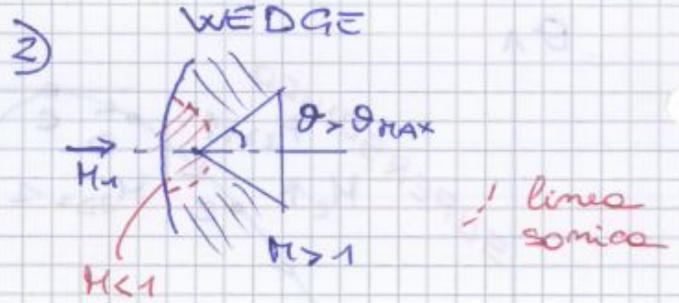
- Filletti vicino a parete \rightarrow SUBSONICI (\rightarrow si scarta intersez. fuori da cerchio sonico)

Perf " Dove sta il punto G? " RISATA GENERALE

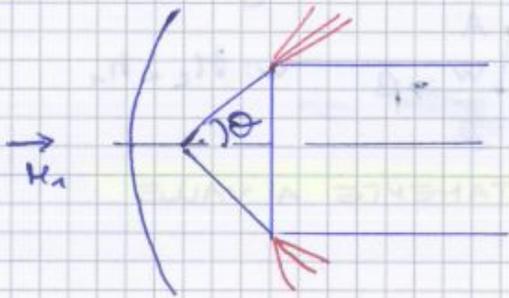
- PUNTO G \rightarrow STA NELLA CUSPIDE
 \rightarrow Variazioni infinitesime di velocità

β locale generico: CONGIUNGENTE da G a i, retta per origine \perp CONGIUNG. \rightarrow misuri β_i locali

GEOMETRIE

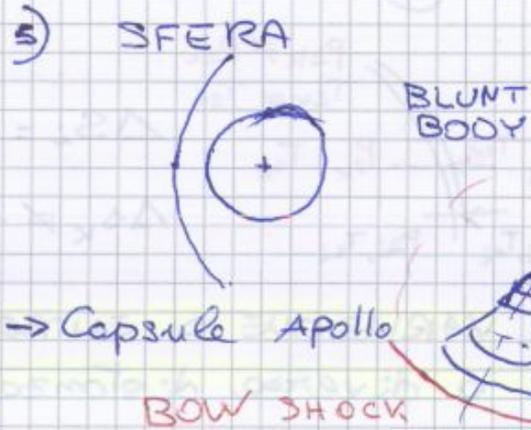
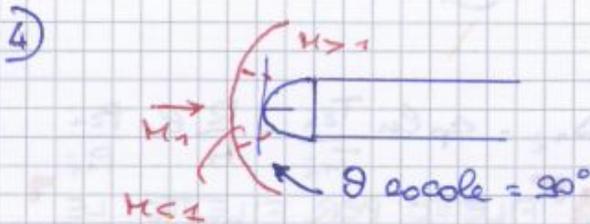


3) **CUNEO + PIAZZA PIANA**



$\theta > \theta_{max}$ per un certo M_1

Forma tipica per sonde di velocità



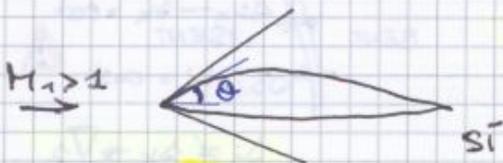
PROFILI ALARI

SUBSONICO INCOMPRESS.



SUPERSONICO

2) Se mosso un profilo subsonico il flusso vede un corpo tozzo!



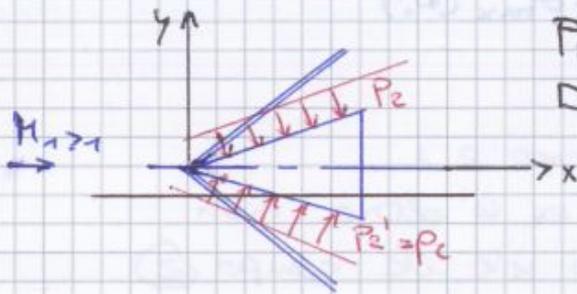
PUNTI ANGOLOSI

θ : tangente al profilo nel bordo di attacco.

Finché $\theta < \theta_{max}$ PER QUEL $M_1 \rightarrow$ l'urto è obliquo: ci piace!

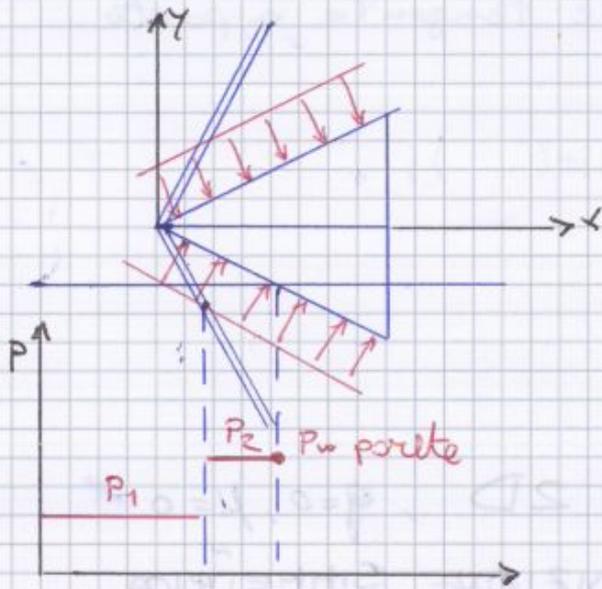
Ora concentriamoci sul cono ad $\alpha=0$

DISTRIBUZIONE PRESSIONI



P_2 È COSTANTE IN OGNI PUNTO DEL CAMPO (2)

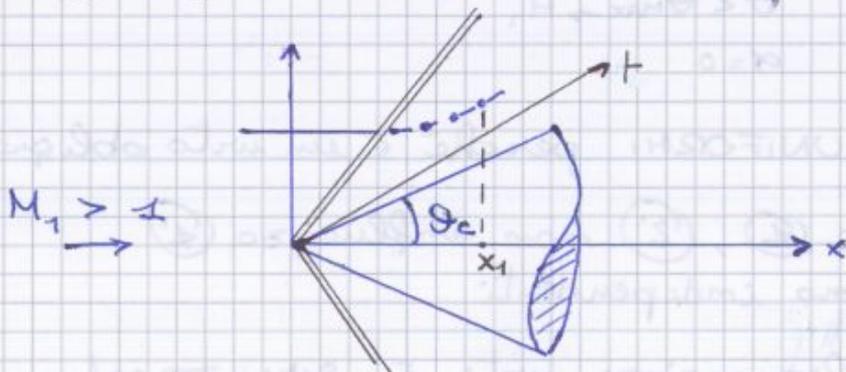
Seguiamo la linea // asse x



$$P_2 > P_1$$

$$\frac{P_2}{P_1} > 1$$

CONO : CORPO SEMPLICE ; 3D



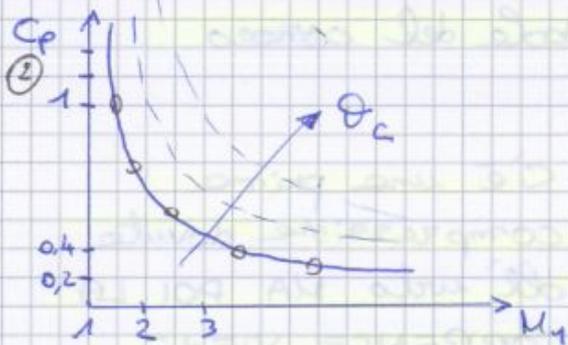
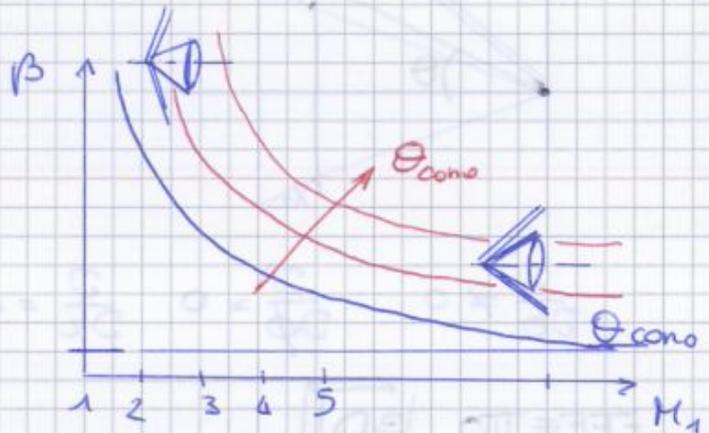
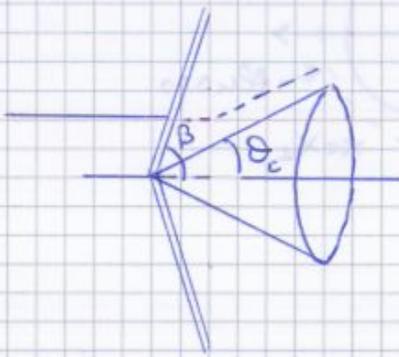
URTO CONICO

⚠ LA CONDIZIONE DI TANGENZA NON "SCATTA" SUBITO A VALLE DELL'URTO!

- P_2 c'è subito dopo l'urto HA POI EVOLUVE LUNGO LA L'ASSE DI CORRENTE
- zetta t: generica generatrice inclinata di θ

GASDINAMICA 11/11/2013

Continuo flusso conico



$$C_p = \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2}$$

$C_p > 1 \Leftrightarrow$ FLUSSO COMPRESSIBILE

MEMO

SUBSONICO INCOMPRESSIBILE

$C_{p \max} = 1$ nel punto di arresto, dove $p = p_0$.

$$C_p = \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2}$$

... for risolvere puoi il M_0 come abbiamo fatto a esercitazione

$$\rightarrow C_p = \frac{2}{\gamma M_0^2} \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right)$$

C_p , FLUSSI COMPRESSIBILI

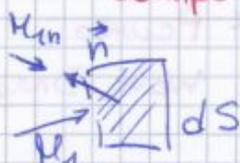
Fino ad adesso nella teoria delle onde supersoniche abbiamo visto

▶ URTI OBLIQUI

▶ URTI CURVI e STACCATI 2D, se corpo tozzo c'è una superficie curva \rightarrow URTO 3D

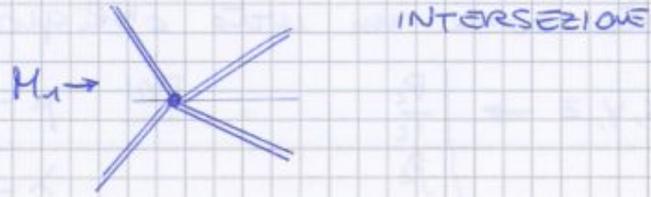
Assegnato M_1, α , geometria

- 1) Superficie urto 3D
- 2) Risolvere NUMERICAMENTE il compo ②

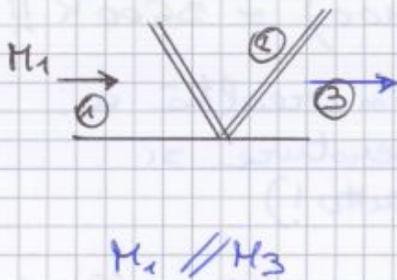


$$M_{1n} = f(x, y, z)$$

RIFLESSIONE e INTERSEZIONE DI URTI



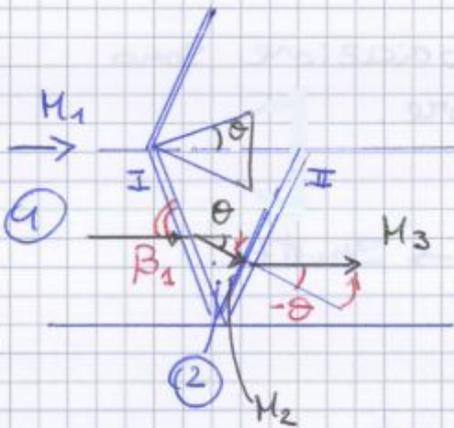
RIFLESSIONE REGOLARE



Un urto incide sulla parete e viene riflesso originando un campo ③.

REGOLARE SE LA CORRENTE DEL CAMPO ③ È ALLINEATA CON QUELLA DEL CAMPO ①

a) CUNEO → Flusso esterno



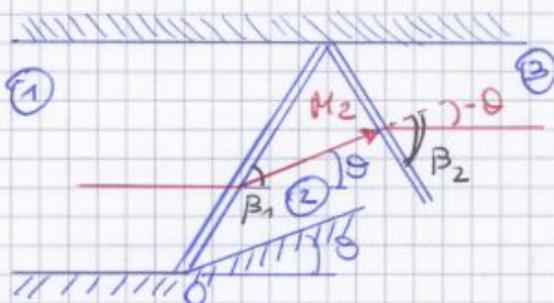
② Corrente // a parete cuneo → deflessa di θ

③ URTO RIFLESSO → Deflessione di $-\theta$: la corrente viene deflessa verso l'alto e diventa // a parete.

IL SECONDO URTO È GOVERNATO DA H_2

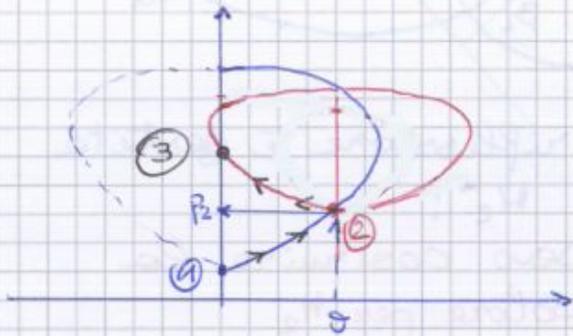
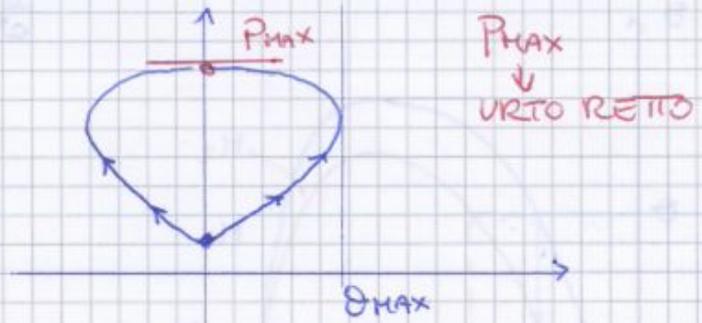
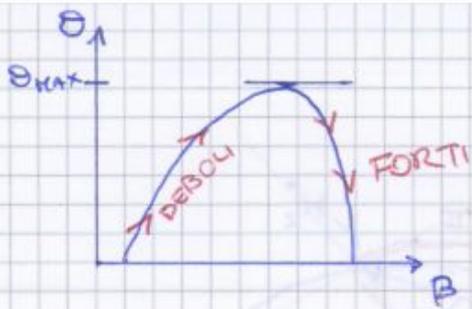
$\theta < \theta_{max}$ per H_2 → CONDIZIONE PER AVERE RIFLESSIONE REGOLARE

b) FLUSSO INTERNO



$$H_3 < H_2 < H_1$$

RIFLESSIONI MULTIPLE SUCCESSIVE → rollentono correnti supersoniche



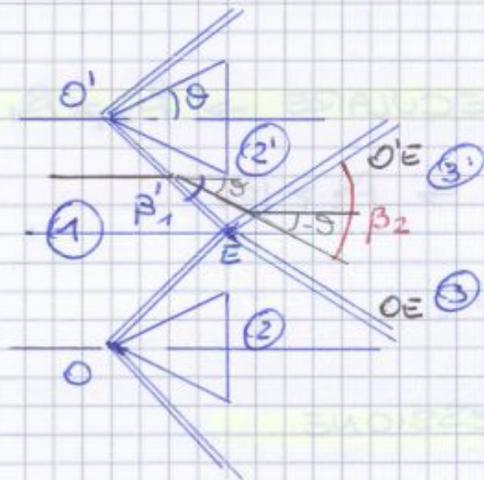
$M_1 = \dots$

$M_2 =$

M_3 deve stare su o_{me} y
perché se $\theta_1 = 0 \rightarrow \theta_3 = 0$

♡ CARDIOIDE

INTERAZIONE



SIMMETRIA SOPRA-SOTTO

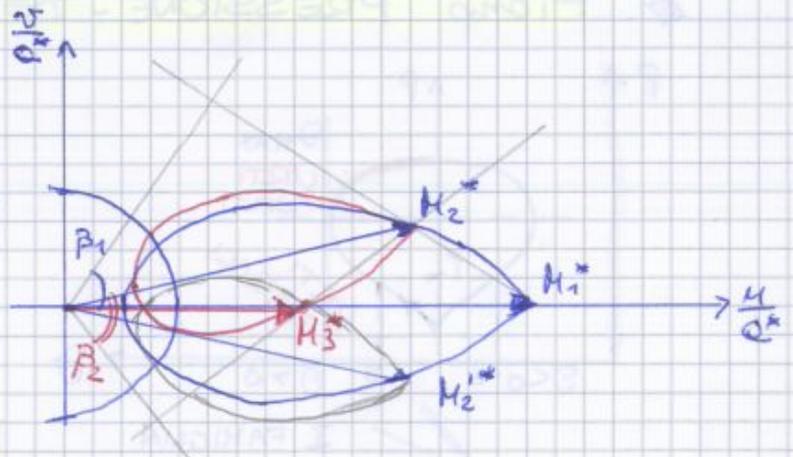
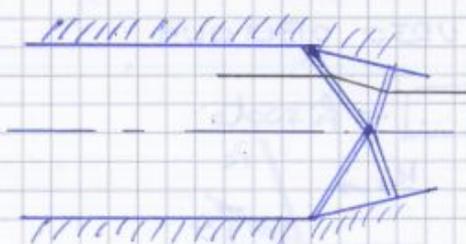
$M_3 = M_3'$

$P_3 = P_3'$

...

$\beta_2' > \beta_1$

$M_2' < M_1'$



Δ β_2 è misurato DA M_2^*

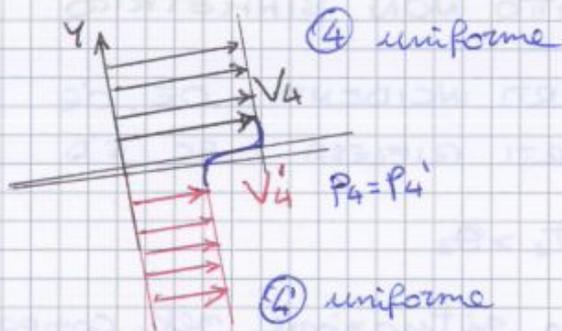
Non puoi esercitare un ∇p a cavallo della slip line
 xk se no ci sarebbe un moto \perp alla slipline.

$V_4' < V_4$ perché la corrente con V_4' proviene da un
 moto più forte

COME SI SPIEGANO FISICAMENTE LE SLIPLINE?

- Il campo 4 è libero, non vede + pareti

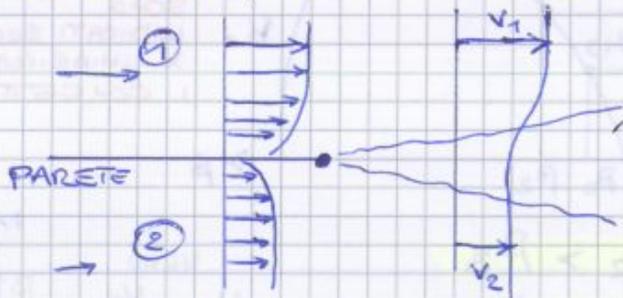
SHEAR LAYER : $\mu \neq 0$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$



All'interno dello shear
 layer avviene il
 RACCORDO tra V_4 e V_4' .
 → gradiente di velocità
 ϕ : inclinazione SLIPLINE

Tanto più sarà sottile lo shear layer tanto più
 marcato sarà il gradiente $\frac{\partial u}{\partial y}$ → PIÙ MARCATI SFORZI
 VISCOSI

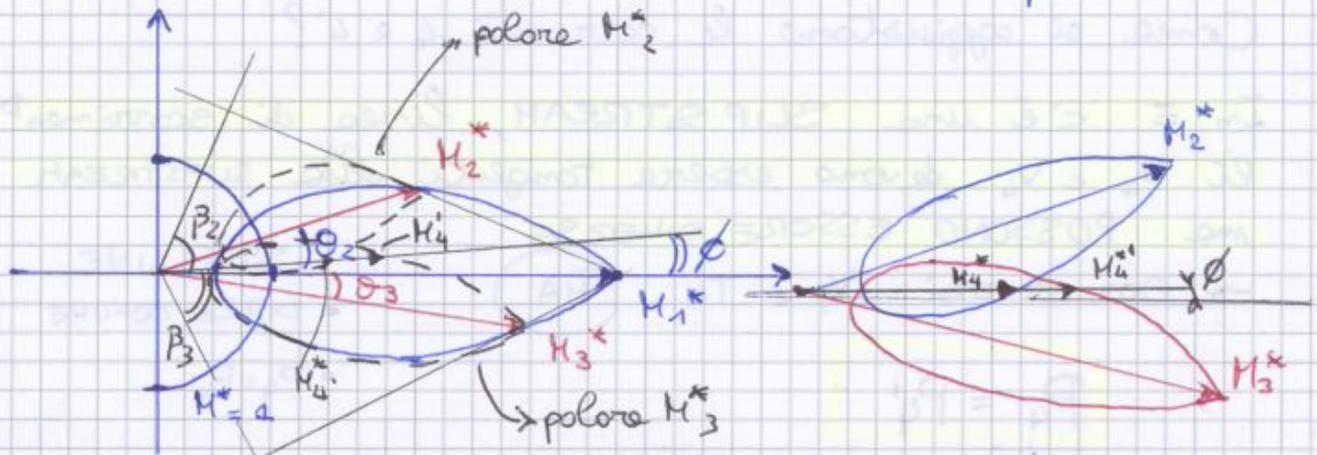
Altro esempio: mescolamento di due getti e $V \neq$

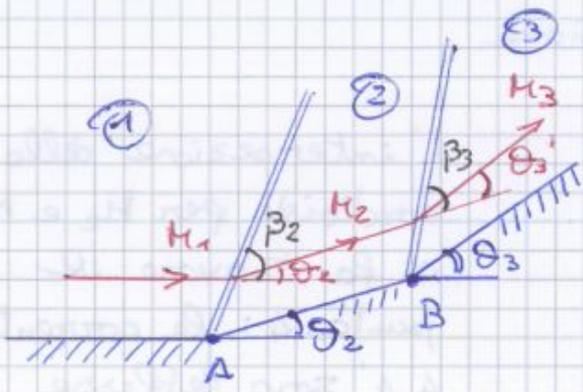


SHEAR LAYER
 LO SHEAR LAYER INTERNO
 ALLA SLIP LINE RACCORDA
 TUTTO CON GLI SFORZI
 VISCOSI.

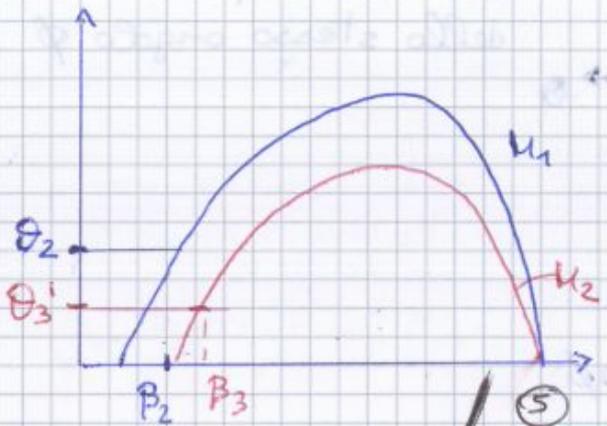
$\Delta_4' > \Delta_4$

Ora studiamo il sistema di viti sulla polare



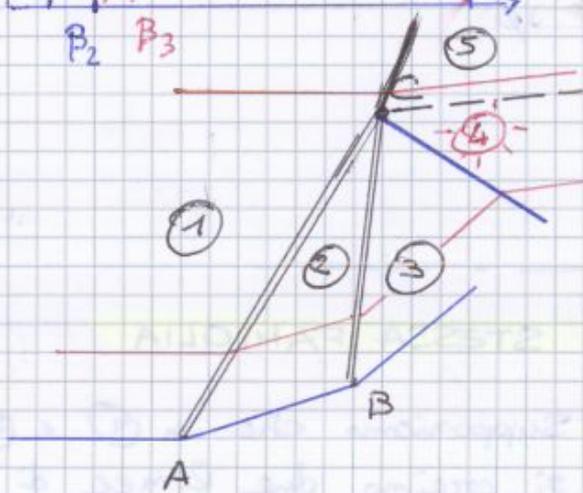


$$\theta_3' = \theta_3 - \theta_2$$



$$P_3 > P_2$$

PRIMA O POI L'URTO 2 e 3
SI INCONTRANO E COALESCONO



Parole chiave

- CONVERGONO
- COALESCENZA

→ URTO DEBOLMENTE CURVO

Compo ⑤ ≠ Compo ③!
I filetti più vicini
da 2 evoluzioni diverse

⇒ IN C NASCE LA SLIPLINE

SLIPLINE

~~$P_3 = P_5$~~
NO!!

deflessione delle due correnti che vanno allineate
SPERIMENTALMENTE NON C'È QUELLO!

ONDA RIFLESSA → CAMPO ④

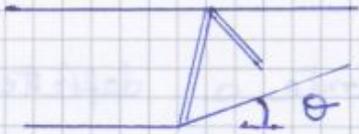
- a) ESPANSIONE
- b) debole onda d'urto

$$P_4 = P_5$$

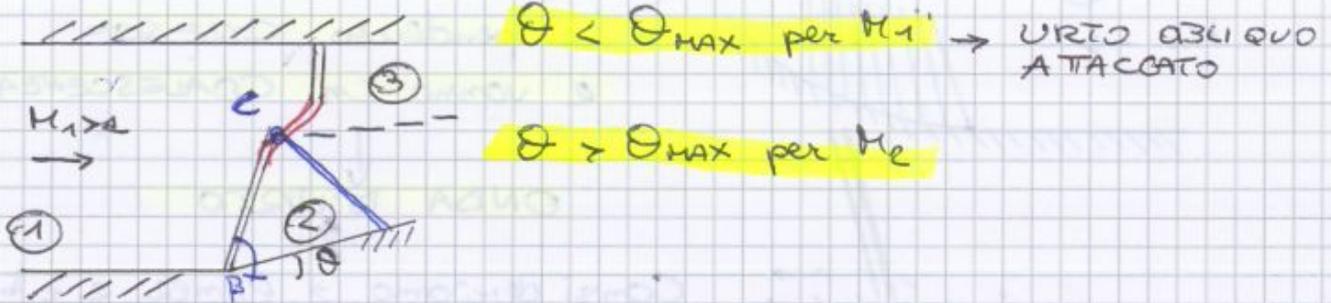
DEFLESSIONE DELLA CORRENTE } ONDA RIFLESSA

RIFLESSIONE REGOLARE

θ per M_2 e $\theta < \theta_{max}$



RIFLESSIONE DI MACH



URTO RETTO A PARETE : $M_3 \perp$

② Come si ricordano le due onde d'urto?

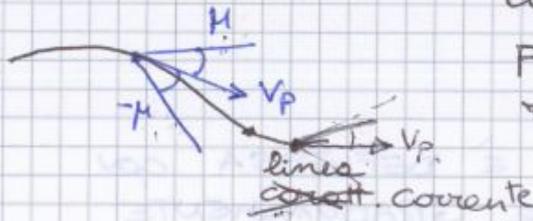
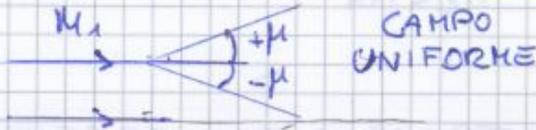
C'è un tratto di urto curvo,

↓ poi
ONDA RIFLESSA

In C c'è anche una SLIP LINE

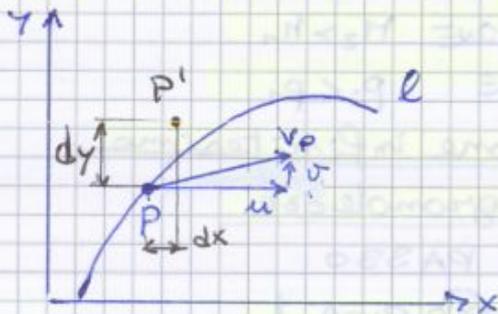
$$\boxed{\theta = f(\mu)} \quad ?$$

LINEE DI MACH : linee che racchiudono il cono in cui si propagano le piccole perturbazioni



Se il campo non è uniforme ci sono linee curve. Per ogni punto la tangente locale alla linea coratt. rappresenta la linea di Mach

LINEE CARATTERISTICHE



Piano fisico x-y.

Linea l lungo cui in ogni P è moto v_p

▶ NON È UNA LINEA DI CORRENTE



Se mi metto in P' è possibile calcolare $v_{p'}$ sapendo solo v_p ?

- Distanza su x P-P' : dx
- " " su y P-P' : dy

$$u(P') = u(P) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (3.15) \quad \text{Sviluppo in serie}$$

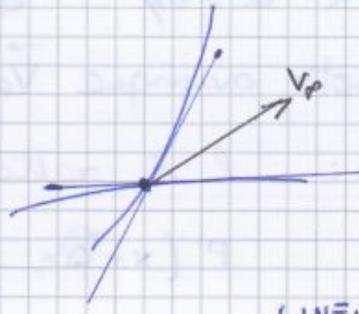
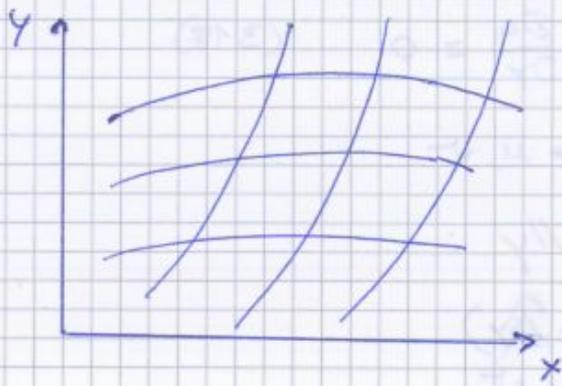
$$v(P') = v(P) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (3.16)$$

Riprendiamo l'eq. del POTENZIALE in 2D

$$(1.62) \quad \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \phi_{yy} - 2 \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} \cdot \phi_{xy} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x \\ \nu = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y \end{array} \right\}$$

$$\phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad \phi_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial \nu}{\partial y}, \quad \phi_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \nu}{\partial x}$$



Linee caratteristiche:
 linee su cui sono determinate le grandezze ma NON LE DERIVATE di tali grandezze

Riprendiamo (1.62)

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2)$$

Flusso dev'essere:

- SUPERSONICO
- IRROTAZIONALE
- ADIABATICO

LINEE DI MACH =
 tangenti locali delle linee caratteristiche
 → Se flusso è SUPERSONICO ogni punto in cui c'è V_p vede l'incrocio di 2 linee caract., inclinate localmente di $\pm \mu$.

$$d\phi_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} dy = du \quad (3.19) \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \phi_{xx}$$

$$d\phi_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy = dv \quad (3.20) \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial y} = \phi_{xy} = \phi_{yx}$$

$$\frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \phi_{yy}$$

Facciamo un bel sistemone con (1.62), (3.19), (3.20)

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \phi_{xx} - 2 \frac{uv}{a^2} \phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \phi_{yy} = 0 \\ dx \phi_{xx} + dy \phi_{xy} + 0 = du \\ 0 + dx \phi_{xy} + dy \phi_{yy} = dv \end{cases}$$

Incognite: $\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}$?

SISTEMA LINEARE ALGEBRICO, con un metodo a scelta
 ▲ CRAMER

$$X_i = \frac{\det(C_i)}{\det(\text{omog. associato})}$$

$$\phi_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & 0 & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -2 \frac{uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}}$$

Sist. omog ASS

$$\begin{matrix} x & x & x & = & 0 \\ x & x & x & = & 0 \\ x & x & x & = & 0 \end{matrix}$$

termini noti sostituiti nelle colonne dell'incognita

a) **Flusso SUPERSONICO**

$M > 1 \rightarrow \Delta = M^2 - 1 > 0 \rightarrow$ 2 soluzioni reali

• EQUAZIONE VELOCITÀ POTENZIALE
 \rightarrow **IPERBOLICA**

2 DIREZIONI CARATTERISTICHE

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^+ \left(\frac{dy}{dx}\right)^-$

b) **Flusso SONICO**

$M = 1 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow$ 1 sola soluzione

1 SOLA DIREZ. CARATT.

• EQ. POTENZIALE \rightarrow **PARABOLICA**

c) **Flusso SUBSONICO**

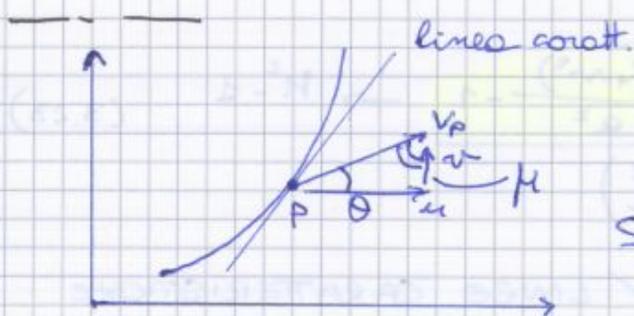
$M < 1 \rightarrow \Delta = M^2 - 1 < 0 \Rightarrow$ NO SOLUZIONI REALI

Nessuna direzione caratteristica

• EQ. POTENZIALE
 \rightarrow **ELLIPTICA**

\rightarrow Muovendosi lungo una linea in cui V_p è definita su tutto L , posso calcolare V_p su ogni P' .

Questo perché il punto P' sa già cosa sta succedendo prima che si avvicini lì

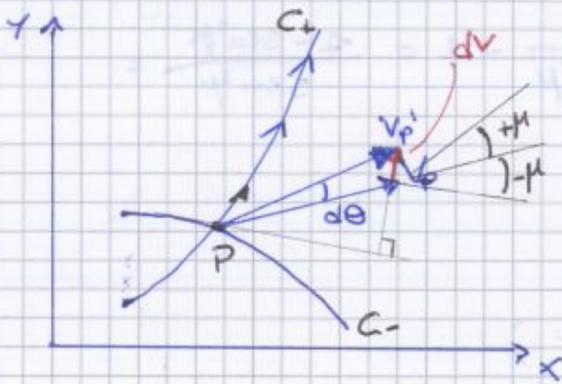


$u = V_p \cos \theta$
 $v = V_p \sin \theta$
 Sostituiamo nella (3.23)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{V_p^2 \sin \theta \cos \theta}{a^2} \pm \sqrt{\frac{V_p^2}{a^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 1}}{1 - \frac{V_p^2}{a^2} \cos^2 \theta} \quad (3.24)$$

$\frac{V^2}{a^2} = M^2 = \frac{1}{\sin^2 \mu}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{car}} = \frac{-\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin^4 \mu} \pm \sqrt{\frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 1}{\sin^2 \mu}}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} \quad (3.25)$$



Supponiamo di porci in P e andare lungo C+.
 Diciamo alla Vp una deflessione infinitesima $d\theta > 0$

$d\theta > 0 \rightarrow$ ESPANSIONE = ACCELERAZIONE

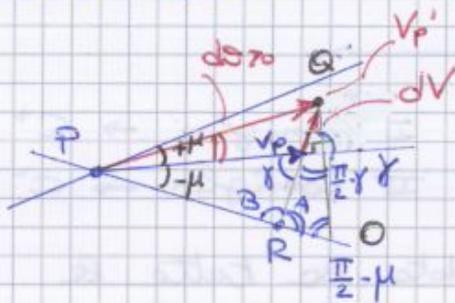
$$V_p' = V_p + dV$$

Come risulta dV rispetto alle direzioni caratteristiche?

dV è \perp alla tangente a C- (se stiamo viaggiando su C+)

\nearrow_{C+} : dV \perp tan di C-

DIMOSTRAZIONE:



γ : angolo tra V_p e dV

$QO \perp V_p$

$$PQR: \mu + \gamma + B = \pi$$

$$QRO: \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) + A = \pi$$

$$\mu + \gamma + B = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) + A$$

$$A = B \text{ se } \gamma = \frac{\pi}{2} - \mu$$

dV è \perp alla tangente DELL'ALTRA FAMIGLIA se mi sto muovendo su una certa curva. [all'inizio abbiamo supposto di muoverci lungo C+]

se $d\theta < 0 \rightarrow$ COMPRESSIONE isentropica

Ora che abbiamo "scoperto" le linee caratteristiche torniamo al problema iniziale.

$$\frac{dV}{V} = f(M) ?$$

$$M = \frac{V}{a}$$

$$V = M \cdot a \xrightarrow{\log} \ln V = \ln M + \ln a$$

↓ differenziabile

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} \quad (3.30)$$

$$\rightarrow \frac{da}{a} = f(M) ?$$

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

$$\left(\frac{a_0}{a} \right)^2 = \frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \rightarrow a = a_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$a_0 = \text{cost}$

$$\frac{da}{a} = \left(\frac{a_0}{a} \right) \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \left(\frac{\gamma-1}{2} \cdot 2M dM \right) \right] \quad (3.31)$$

Risolvendo:

$$\frac{da}{a} = - \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} M dM \quad (3.32)$$

Andando a sostituire le (3.32) in (3.30)

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (3.33)$$

(3.33)

Ora si mette (3.33) in (3.29)

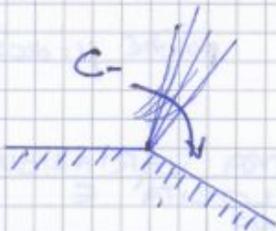
e si ottiene:

$$\rightarrow d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (3.34)$$

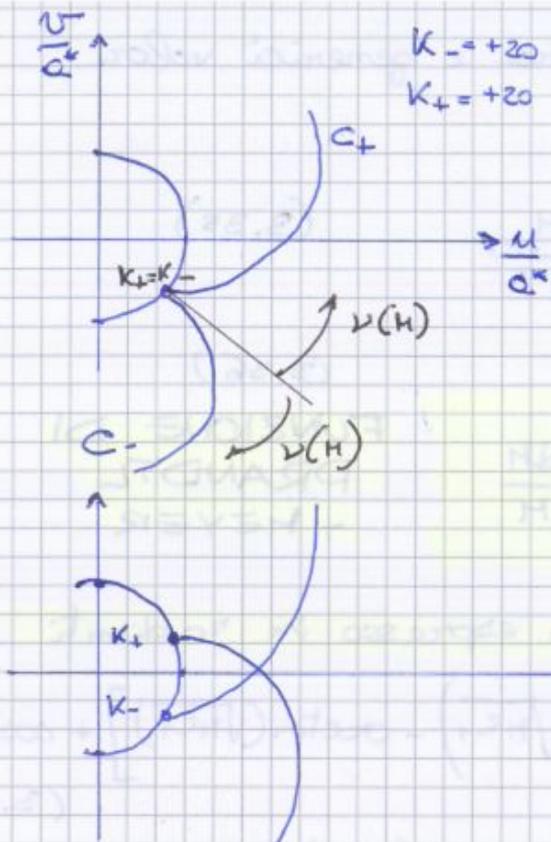
(3.34)

$d\theta > 0 \rightarrow () + \rightarrow$ espansione elementore

$d\theta < 0 \rightarrow () - \rightarrow$ compressione elementore



il ventaglio di espansione è tangente a C+.



k_+ e k_- mi danno l'origine per il conteggio degli angoli $\nu(H)$

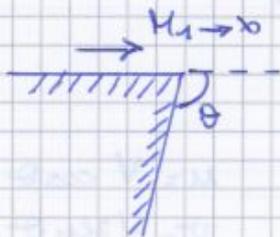
$$\lim_{H \rightarrow \infty} \nu(H) = \pm \left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right]$$

Amia: $\gamma = 1,4 \rightarrow \vartheta = \pm 130,45$

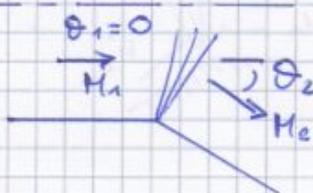
$H \rightarrow \infty, H^* = 2,445$ (circ)

CIRCONFERENZA CHE CONTIENE TUTTE LE EPICICLOIDI

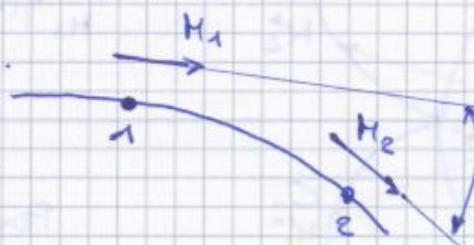
$\vartheta = 130,45^\circ$ significherebbe



FISICAMENTE NON ESISTE!

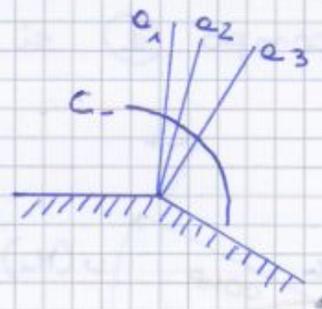
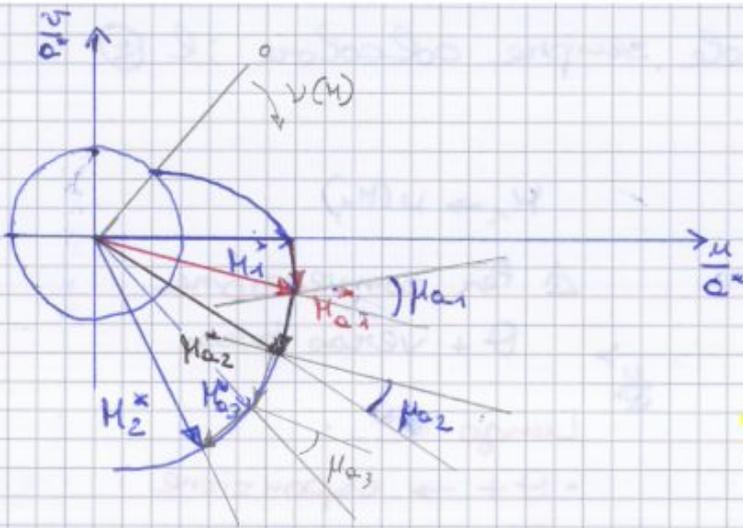


Caso generale:



(3.33)

$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \nu(H_2) - \nu(H_1)$



a_1, a_2, a_3 sono le tangenti alla linea caratteristica dell'altra famiglia

- dV è \perp alla tan. della linea coratt. di C_+

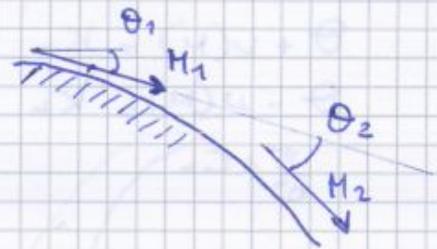
$$\sin \mu_1 = \frac{1}{M_1}$$

$$\sin \mu_2 = \frac{1}{M_2}$$

Riprendendo la funzione di Prandtl-Meyer

$$(\theta_2 - \theta_1) = \cancel{X} [v(M_2) - v(M_1)]$$

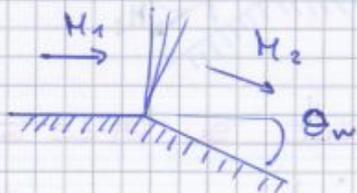
SI FA CADERE IL DOPPIO SEGNO



$$\rightarrow \theta_2 - \theta_1 = [v(M_2) - v(M_1)]$$

$v(M)$ si inizia a contare dalla retta per il K che origina la curva caratteristica

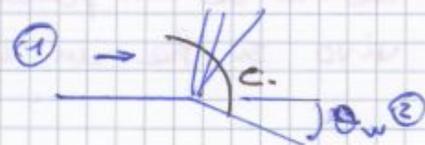
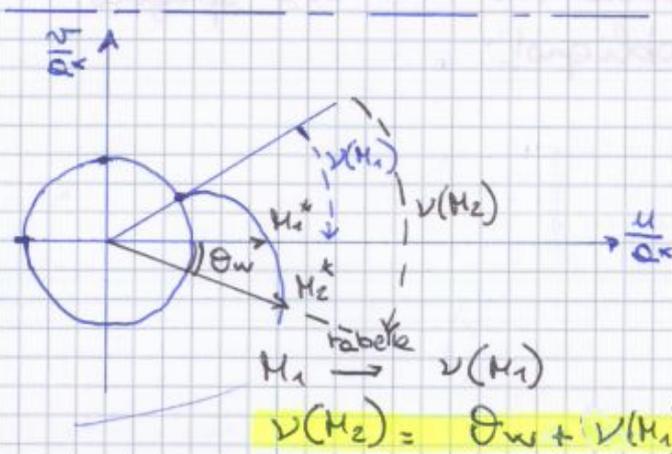
Esempio



$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = \theta_w$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_w$$



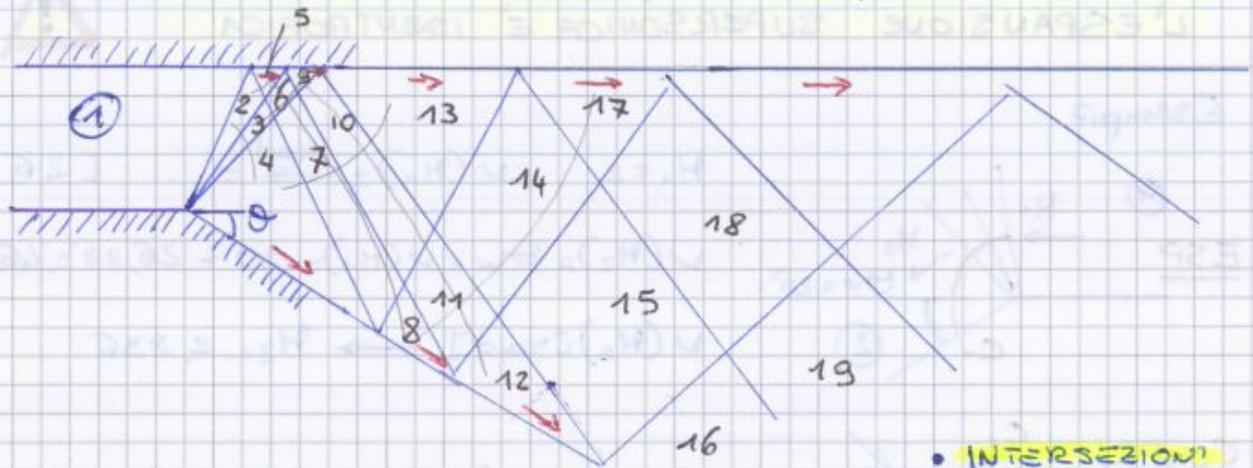
DATI: M_1, θ_w

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_w - 0 = \theta_w$$

$$\theta_w = v(M_2) - v(M_1)$$

$$v(M_2) = \theta_w + v(M_1) = \dots \quad v(M_2) \xrightarrow{\text{tabella}} (M_2)$$

RIFLESSIONE di onde di espansione



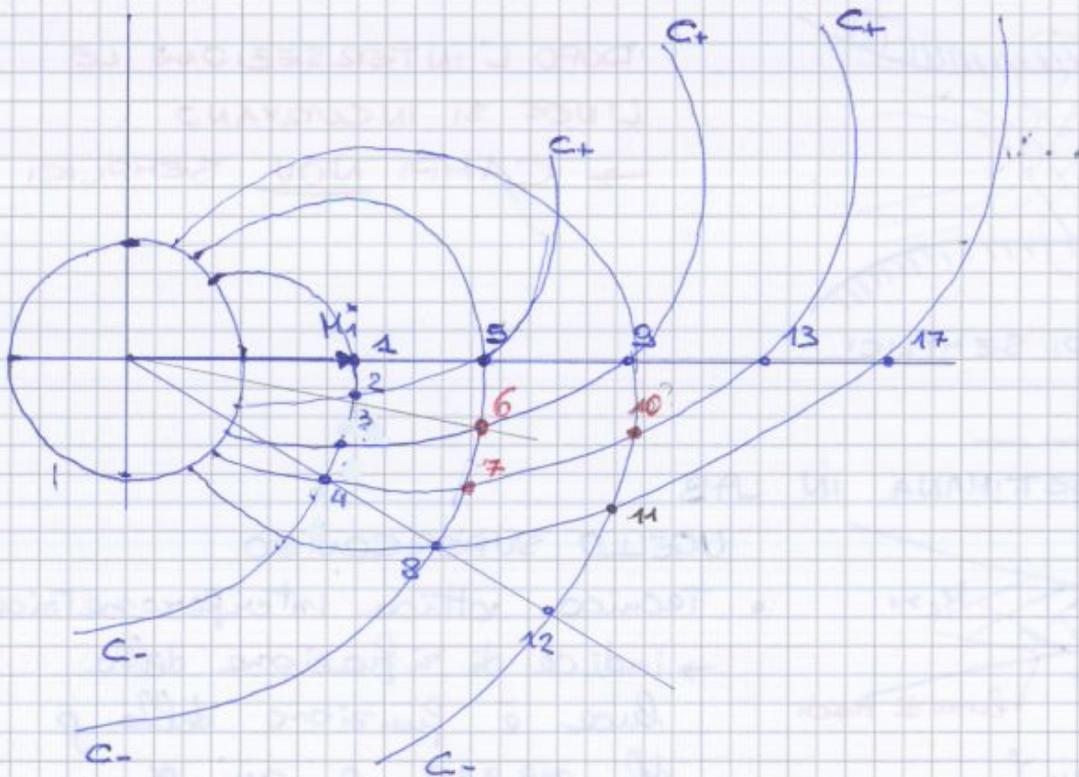
ONDE DI ESPANSIONE DIVERGONO

• INTERSEZIONI DEBOLI
→ linee rette

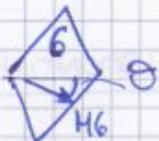
• Dati H_1, θ

④ → $v(H_4) = \theta + v(H)$ $H_4 \rightarrow \begin{cases} T_4 \\ P_4 \\ \dots \end{cases}$

⑤, ⑨, ⑬ Tangenza a parete in tutti i casi e contatto con le pareti



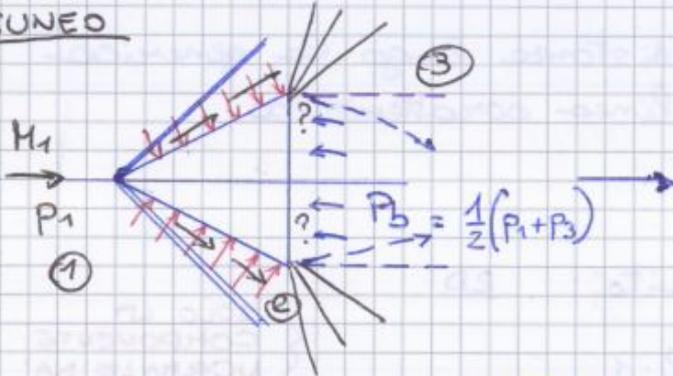
Come si determinano i centri? Con l'intersezione delle EPICICLOIDI



SHOCK-EXPANSION THEORY

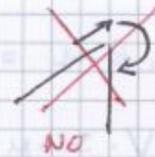
→ URTI + ESPANSIONI

CUNEO



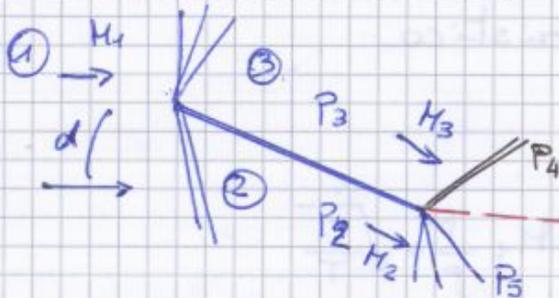
$P_b = \frac{1}{2} (P_1 + P_3)$ → PER ORA LO ASSUMIAMO PER BUONO

Il campo di moto sotto lo spigolo è molto complicato.
 • Si verifica un'espansione che deflette la corrente



DI SICURO NON COSÌ!
 NON C'È M_b !

PLACCA PIANA con $\alpha \neq 0$



$P_2 \gg P_3$
 ... e al bordo di fuga?
 LE PRESSIONI DEVONO ESSERE UGUALI!

→ P_2 deve espandere x scendere

→ P_3 deve subire un urto

* SLIPLINE

→ Si prendono gli strumenti dati dai singoli campi
 → Metti i campi insieme!

GASDINAMICA 25/11/2013

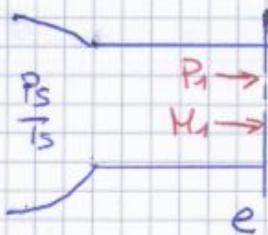
GETTO 2D

$\mu = 0$

Serbatoio e condotto

P_a (e): sezione di uscita (exhaust)

Getto = corrente libera

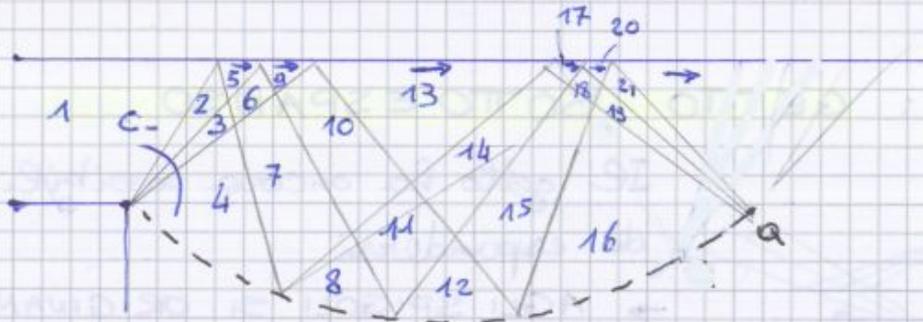


$V=0$
 AMBIENTE ESTERNO

Possono presentarsi diversi casi:

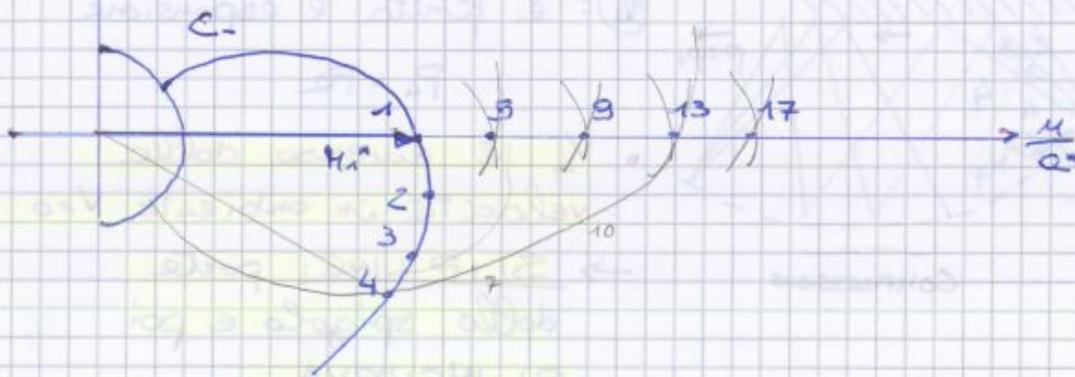
→ PARTONO ONDE DI COMPRESSIONE, CHE VEDRANNO UNA RIFLESSIONE E CONVERGERANNO POI IN Q.

Dopo la I rifless della onde di compressione la p è, $p = p_1 \dots$ e si ripete la situazione che c'è alla fine del condotto.



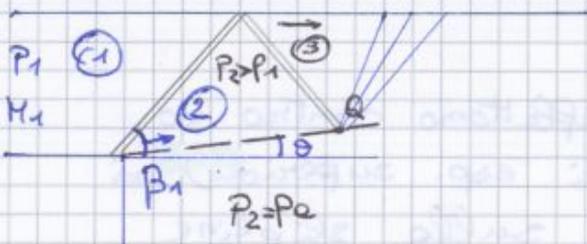
$\frac{p_2}{p_1}$

• 5, 9, 13, 17 sono attraversati dalle linee di entrambi le famiglie



$V_4 = V_8 = V_{12} = V_{16} = \dots$ perché stanno sulla slipline.

$P_1 < P_2$: GETTO SOVRAESPANSO

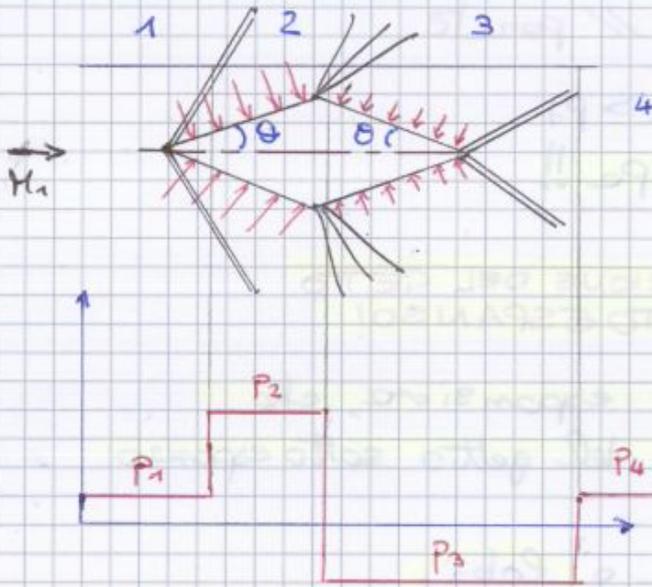


- URTO OBLIQUO
- Slip line, $P_2 = P_2$

② P_2 , $\frac{P_2}{P_1}$ noto $\frac{P_2}{P_1} = f(M_{n2} = M_1 \sin \beta) \rightarrow \beta_1$

Torniamo ai corpi immersi in un flusso supersonico

ROMBO (profilo a diamante)



$P_2 > P_1$

$P_3 < P_2$

Simmetria se $\alpha = 0$.

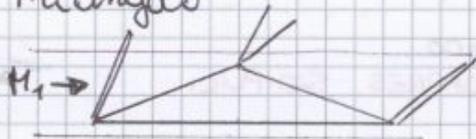
$D_w = \int p dA \rightarrow$ WAVE DRAG \rightarrow Resistenza di pressione

$C_{Dw} = \frac{D_w}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 S}$

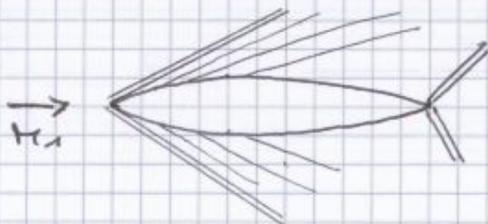
$C_{Dw} = f(M)$ [NON DI Re perché $\mu=0!$]

$C_{Dp} = f(Re, M)$

Triangolo



PROFILO BICONVESSO SIMMETRICO



$M_1 > 1$

θ_{le} : tangente al bordo d'attacco

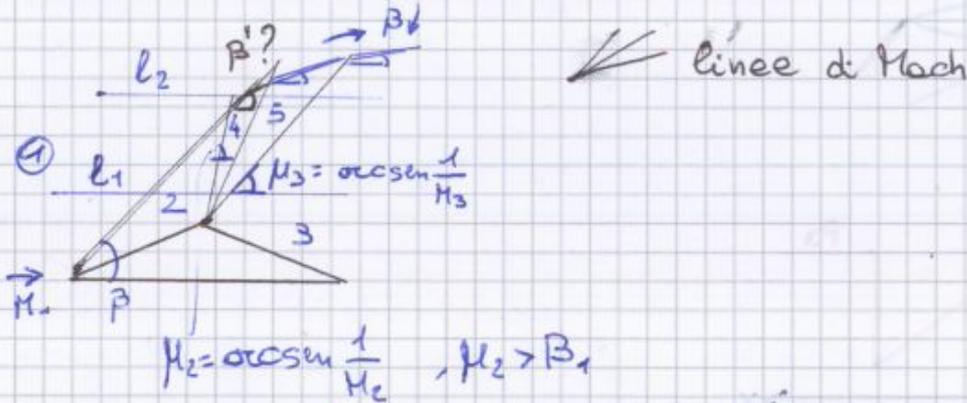
se $\theta_{le} < \theta_{max}(M_1) \rightarrow$ urto obliquo attaccato

Dopo un dx la parete è meno pendente

\rightarrow deflessione gas duole \Rightarrow ONDE ELEMENTARI DI ESPANSIONE (NON FASCIO)

• URTO al trailing edge

INDEBOLIMENTO ONDA D'URTO



Quanto sarà β' ? Cioè inclinazione dell'urto dopo l'interazione con la linea di Mach?

l_1 : linea di corrente ① - ② - ④

l_2 : " " " ① - ④

l_1 : $P_2 > P_1$, $P_4 < P_2 \rightarrow \frac{P_4}{P_1} < \frac{P_2}{P_1}$ ESPRIMONO LE INTENSITÀ

l_2 : $P_4 > P_4$

$$\frac{P_4}{P_1} = f(M_1 \sin \beta') \quad \text{URTO GIÀ DISTURBATO}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = f(M_1 \sin \beta) \quad \text{URTO NON ANCORA DISTURBATO}$$

$$\frac{P_4}{P_1} < \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \sin \beta' < \sin \beta \Rightarrow \boxed{\beta' < \beta}$$

→ LA PENDENZA LOCALE DOVE L'ONDA DI MACH INCIDE SULL'ONDA D'URTO È + BASSA

⇒ URTO + DEBOLE!

⇒ Continua così la storia ad ogni interazione finché $\beta' = \mu(M_1)$

GASDINAMICA 26/11/2013

FLUSSI LINEARIZZATI

Noi fin' ora abbiamo trattato i flussi supersonici con la TEORIA ESATTA.

Tuttavia talvolta le soluzioni sono ordue da trovare.

- Negli anni '30-'40 (quando non c'erano i computer) venne pensata la TEORIA LINEARIZZATA

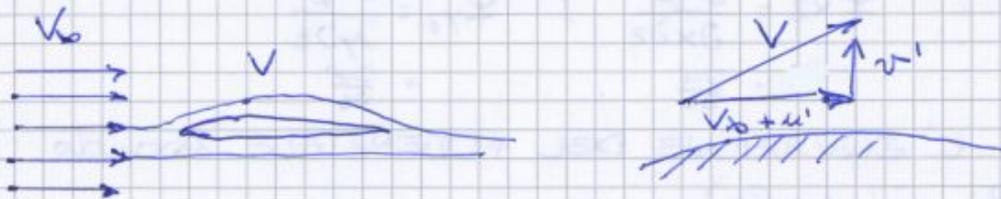
⇒ semplifica il tutto e consente di trovare delle soluzioni analitiche partendo dall'eq. del potenziale. Si usava per il calcolo dei C_D, C_L, \dots

TEORIA FLUSSI LINEARIZZATI

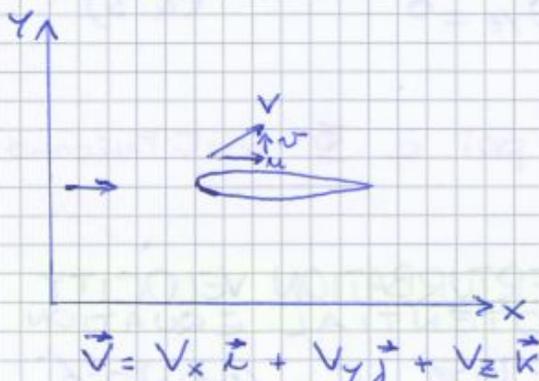
= TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI

Ipotesi:

1) PICCOLE PERTURBAZIONI: il corpo introduce piccole variazioni di velocità rispetto a V_0



- 2) PROFILO SOTILE
- 3) BASSE INCIDENZE
- 4) $\mu = 0$
- 5) IRROTAZIONALE ⇒ ommette potenziale ϕ



SUL PROFILO	A MONTE
$V = \begin{cases} V_x = V_0 + u' \\ V_y = v' \\ V_z = w' \end{cases}$	$V_0 = \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases}$

▶ IRROTAZIONALE: $\nabla \times \vec{V} = 0$ ma allora esiste ϕ tale che $\nabla \phi = \vec{V} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$

La (4.4) è ancora un'equazione esatta.

Ora ci vorrà $\frac{\partial \phi}{\partial \dots}$ sostituiamo u', v', w' . (4.5)

$$\left[a^2 - (V_\infty + u')^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + (a^2 - v'^2) \frac{\partial v'}{\partial y} + (a^2 - w'^2) \frac{\partial w'}{\partial z} +$$

$$- 2(V_\infty + u')v' \frac{\partial u'}{\partial y} - 2(V_\infty + u')w' \frac{\partial u'}{\partial z} - 2v'w' \frac{\partial v'}{\partial z} = 0$$

Ora sfruttando il fatto che h_0 è costante lungo una linea di corrente vogliamo esprimere a^2 in funzione della relazione $h = \frac{a^2}{\gamma - 1}$

$H_0 = \text{cost}$



$$h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} = h + \frac{V^2}{2} = \dots$$

$$c_p T_\infty = \frac{\gamma R T_\infty}{\gamma - 1} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \quad h_\infty = h + \frac{(V_\infty + u')^2 + v'^2 + w'^2 - V_\infty^2}{2}$$

$$h = c_p T = \frac{a^2}{\gamma - 1} \rightarrow \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{(V_\infty + u')^2 + v'^2 + w'^2 - V_\infty^2}{2}$$

$$\rightarrow a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad (4.6)$$

Sostituiamo (4.6) in (4.5)

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \quad (4.7)$$

$$= M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{u'^2}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \left(\frac{v'^2 + w'^2}{V_\infty} \right) \right] \frac{\partial u'}{\partial x} +$$

$$+ M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{v'^2}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \left(\frac{w'^2 + u'^2}{V_\infty} \right) \right] \frac{\partial v'}{\partial y} +$$

$$+ M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \frac{w'^2}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \left(\frac{u'^2 + v'^2}{V_\infty} \right) \right] \frac{\partial w'}{\partial z} +$$

$$+ M_\infty^2 \left[\frac{v'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{v'w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right]$$

Valida per tutti i flussi, è ancora l'eq. esatta.

• FORTEMENTE NON LINEARE a destra : $f \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$

• incognita $\phi(x, y, z)$ sotto forma di u', v', w'

Cp LINEARIZZATO SUBSONICO

Dopo aver calcolato il Cp linearizzato si vedrà come mettere in redazione il Cp incompreso e quello compreso su un profilo.

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{P}{P_\infty} - 1 \right) \quad \text{ora ci serve } \frac{P}{P_\infty} = f(V)$$

il campo è isentropico:

$$\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\gamma/\gamma-1} \rightarrow f(\text{velocità})$$

$$h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} = h + \frac{V^2}{2}$$

$$\begin{cases} h = C_p T \\ h_\infty = C_p T_\infty \end{cases}$$

$$T + \frac{V^2}{2C_p} = T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2C_p}$$

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1 M}$$

$$(T - T_\infty) = \frac{V_\infty^2}{2C_p} - \frac{V^2}{2C_p} \quad \text{dividiamo per } T_\infty$$

$$\left(\frac{T}{T_\infty} - 1 \right) = \frac{1}{T_\infty} \frac{V_\infty^2}{2 \frac{\gamma R}{\gamma-1 M}} - \frac{1}{T_\infty} \frac{V^2}{2 \frac{\gamma R}{\gamma-1 M}}$$

$$\rightarrow \frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V_\infty^2 - V^2}{a_\infty^2}$$

Considerando che $V^2 = (V_\infty + u')^2 + v'^2 + w'^2$
 $= V_\infty^2 + 2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2$

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \left(2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2 \right) \quad (4.10)$$

$$\rightarrow \frac{P}{P_\infty} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \left(2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \frac{V_\infty^2}{V_\infty^2} \left(2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{2u'}{V_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{V_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.11)$$

Questa è esatta: ora introduciamo le piccole perturbazioni

$$v^1 = \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow V_{\infty} \frac{df}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.15)$$

$$(1-M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.9) \quad 2D$$

$$\beta = \sqrt{1-M_{\infty}^2}$$

$$\rightarrow \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.16)$$

Se io volessi esprimere il fenomeno COMPRESSIBILE in un piano INCOMPRESSIBILE, come potrei fare?

→ PIANO TRASFORMATO

$$\begin{cases} \xi = x & \eta = \beta y & y = f(x) \\ \bar{\phi}(\xi, \eta) = \phi(x, \beta y) = \beta \phi(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 1 & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \beta \end{aligned}$$



Legame tra i 2 potenziali di perturbazione

$$\phi = \frac{1}{\beta} \bar{\phi}$$

Vogliamo riscrivere (4.9/2D) per il piano trasformato.

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi_{\xi} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}$$

$$\phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Rightarrow \phi_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}$$

$$\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \phi_{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

$$\phi_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Rightarrow \phi_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}$$

Ora ci servono le derivate ϕ_x, ϕ_{xx}, \dots in funzione di ξ, η .

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$$

\downarrow
 1

MA POICHÈ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \rightarrow (4.19) = (4.20)!$

$\rightarrow V_{\infty} \frac{df}{dx} = V_{\infty} \frac{d\eta}{d\xi} \rightarrow \boxed{\frac{df}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}} \quad (4.21)$

Le pendenze locali SONO LE STESSA
 \Rightarrow LA FORMA DEL CORPO È LA STESSA!

Quindi la trasformazione mette in relazione il flusso compressibile su un profilo in (x, y) e il flusso subsonico C_p linearizzato: sullo stesso profilo in (ξ, η)

$C_{p,c} = -\frac{2u'}{V_{\infty}} = -\frac{2}{V_{\infty}} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{2}{V_{\infty}} \frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (4.22)$

$\bar{u} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \rightarrow$ incompressibile [INFATTI IL PIANO TRASFORMATO È INCOMPRESSIBILE]

$\rightarrow C_{p,c} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(-\frac{2\bar{u}}{V_{\infty}} \right) \rightarrow \boxed{C_{p,c} = \frac{1}{\beta} C_{p,i}}$
 $C_{p,i}$ incompressibile linearizzato

CORREZIONE di PRANDTL - GLAUERT

$\boxed{C_{p,c} = \frac{C_{p,i}}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}}} \quad (4.23)$

\Rightarrow Avendo il $C_{p,i}$ e la correzione di Prandtl-Glauert possiamo calcolare il $C_{p,c}$ per lo stesso profilo!

... e anche calcolare i coeff. di portanza e di resistenza e di momento

$C_L = \frac{1}{c} \int_0^1 (C_{p,-} - C_{p,+}) d\left(\frac{x}{c}\right)$

$C_{L,i} \quad C_{L,c} = \frac{1}{\beta} C_{L,i}$

$C_{m,i} \quad C_{m,c} = \frac{1}{\beta} C_{m,i}$

$(C_{L,\alpha})_c = (C_{L,\alpha})_i \cdot \frac{1}{\beta}$

MEMO: la correzione di Prandtl Glauert vale solo per il SUBSONICO!
 Compressibile ma subsonico!

GASDINAMICA 28/11/2013

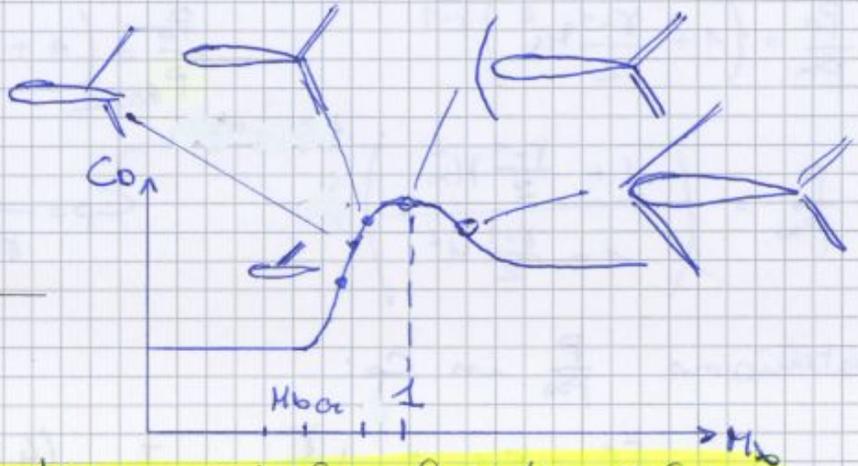
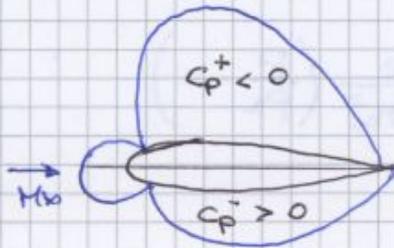
FLUSSI LINEARIZZATI

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

$$C_{p,c} = \frac{C_{p,i}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

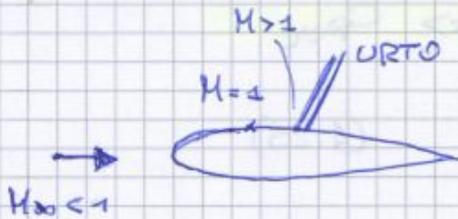
COMPRESSIBILE SUBSONICO

PROFILI



$M_{\infty,crit}$: Mach e monte per cui localmente sul profilo si ha $M=1$

se $M_\infty \uparrow \rightarrow$ Mach locale $M > 1$



$\mu = 0$

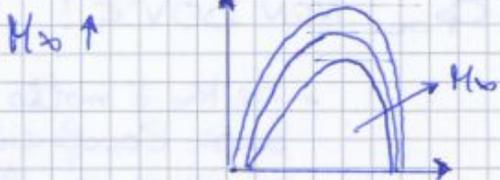
$$D = D_w \neq 0$$

RESISTENZA D'ONDA (o di pressione)

Viene a cadere il paradosso di D'Alembert!

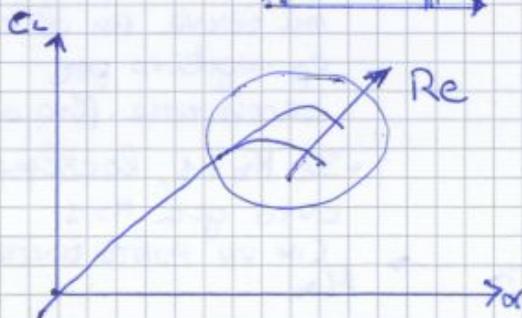
\rightarrow NON VALE IN COMPRESSIBILE

$M_\infty = 1$, $\theta_{LE} > \theta_{MAX}(M_\infty=1) \rightarrow$ URTO STACCATO



$M_\infty \uparrow \Rightarrow \theta_{MAX}(M_\infty) \uparrow$

\rightarrow SI HA POI UN URTO OBLIQUO AL Leading Edge



$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_c = \frac{\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_i}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

$$C_{L,\alpha,c} = \frac{C_{L,\alpha,i}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

Δ
SIAMO ANCORA IN SUBSONICO COMPRESSIBILE

Come calcolarlo?

1)

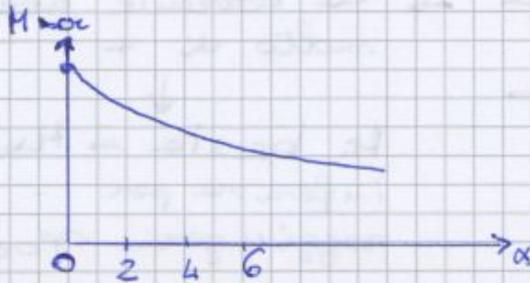


$C_{p_i} \rightarrow$ NOTO

\rightarrow CORREZ. PRANDTL-GLAUERT

ΔC_p locale
varia con α !

$$C_{p_{min_c}} = \frac{C_{p_{i_{min}}}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}}$$



Se $\alpha \uparrow$, localmente la corrente è già molto veloce.

\rightarrow basta un M_{∞} basso per giungere localmente a $M=1$

2) Metodo ANALITICO per iterazione

$$C_{p_c} = \frac{C_{p_i}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}}$$

$$C_{p_{oc}} = f(M_{\infty})$$

$$C_{p_{inc}} = \sqrt{1 - M_{\infty}^2} C_{p_c}$$

(4.26)

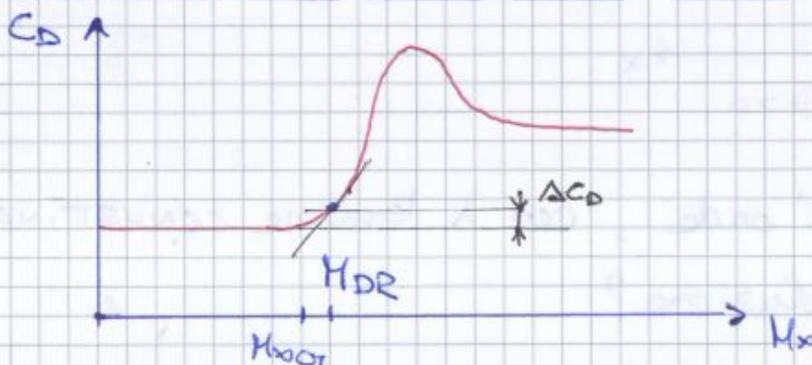
$$C_{p_{inc_{MIN}}} = \sqrt{1 - M_{\infty_{CR}^2}} C_{p_{oc}}$$

$C_{p_{oc}}$ è dato da (4.25)

Sostituendo:

$$\rightarrow C_{p_{i_{min}}} = \sqrt{1 - M_{\infty_{CR}^2}} \cdot \left\{ \frac{2}{\gamma M_{\infty_{CR}^2}} \cdot \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty_{CR}^2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.27)$$

NON AVREBBE SENSO DIRE C_{p_i} OR POICHÉ IN INCOMPRESSIBILE NON PUÒ RAGGIUNGERE LA CONDIZIONE CRITICA!!!



MACH DRAG-RISE

$$M_{DR} = f(\alpha, \dots)$$

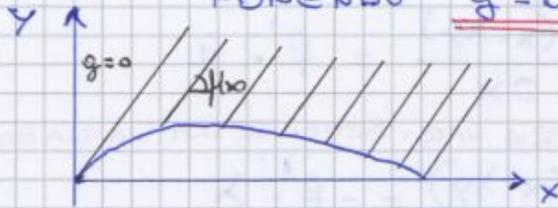
$$\frac{\partial C_D}{\partial M_{\infty}} = 0,1 \text{ Douglas}$$

$$\Delta C_D = 0,002 \text{ Boeing}$$

La soluzione generale è una combinazione lineare di 2 funzioni

$$\phi(x, y) = f(x - \lambda y) + g(x + \lambda y) \quad (4.29)$$

DORSO : SI CERCA UNA SOLUZ. PARTICOLARE PONENDO $g=0$



$$\phi(x, y) = f(x - \lambda y)$$

Se $\phi = \text{cost}$
 $f(x - \lambda y) = \text{cost}$
 $\rightarrow x - \lambda y = \text{cost}$

$$x - \lambda y = \text{cost} \quad \rightarrow \quad y = \frac{x - \text{cost}}{\lambda} \quad \text{sono rette}$$

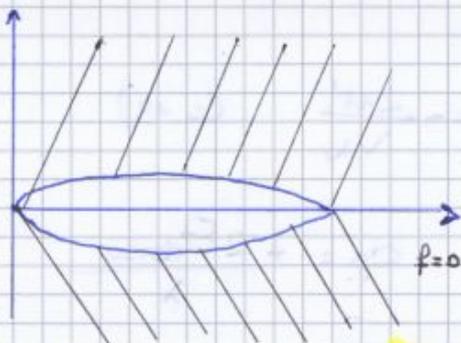
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \rightarrow \tan \mu_{\infty}$$

$$\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M_{\infty}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{perché } M_{\infty} > 1$$

- Queste rette sono linee di Mach dove $\phi = \text{cost}$
- Ad ogni linea di Mach la corrente si deflette di una quantità infinitesima
- Δ $\phi = \text{cost}$ lungo UNA STESSA LINEA, ma ϕ cambia da linea a linea

VENTRE : $\phi(x, y) = g(x + \lambda y)$



Cerchiamo soluzioni

$$\phi = \text{cost}$$

$$x + \lambda y = \text{cost}$$

$$y = \frac{\text{cost} - x}{\lambda}$$

$$\rightarrow y = \frac{x - \text{cost}}{\lambda}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

Condizioni di contorno \rightarrow TANGENZA

Che differenza c'è con la teoria esatta?

→ Lì conoscevamo la pressione esatta sul profilo dopo un urto obliquo sul leading edge!

Ora invece non ci sono urti xk assumiamo piccole perturbazioni

VENTRE: $\phi = g(x + \lambda y)$

$$u' = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial g(x + \lambda y)}{\partial (x + \lambda y)} \cdot \frac{\partial (x + \lambda y)}{\partial x} = g' \cdot 1$$

$$v' = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial g(x + \lambda y)}{\partial (x + \lambda y)} \cdot \frac{\partial (x + \lambda y)}{\partial y} = g' \cdot \lambda$$

Tangenza: $\tan \theta = \frac{v'}{V_b + u'}$, $\tan \theta \approx \theta$, $u' \ll V_b$

$$\rightarrow \theta = \frac{v'}{V_b} \rightarrow v' = V_b \theta$$

$$g' = g' \Rightarrow u' = \frac{v'}{\lambda}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{V_b \theta_e}{\lambda}$$

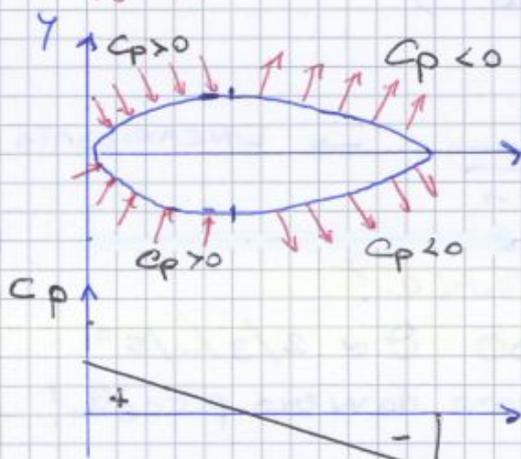
u = upper surface

l = lower surface

$$C_{pe} = -\frac{2u'}{V_b} = -\frac{2\theta_e}{\lambda} \rightarrow C_{pe} = -\frac{2\theta_{ventre}}{\sqrt{M_b^2 - 1}} \quad (4.34)$$



Raggruppando DORSO e VENTRE



$C_p > 0$
ANTERIORE: COMPRESSIONE
DORSO + VENTRE

$C_p < 0$
POSTERIORE: ESPANSIONE
DORSO + VENTRE

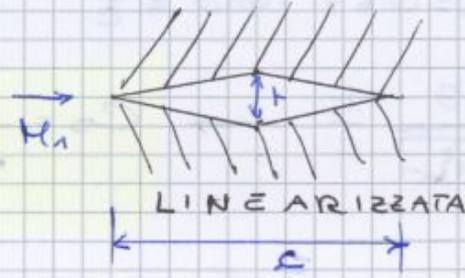
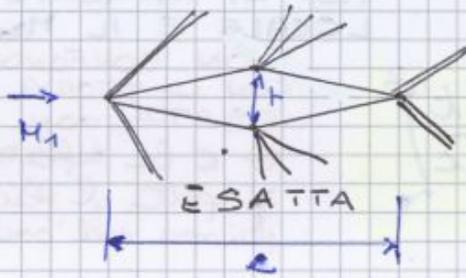
→ anteriore: corrente deflette verso monte

→ post.: deflette in direz. opposte

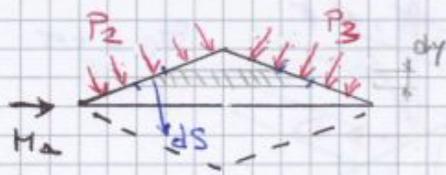


LINEARIZZATA
 ESATTA
 Per $\theta = 5^\circ$: $err = 10\%$

PROFILO A ROMBO / a diamante



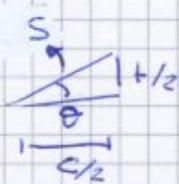
Calcolare il C_D in teoria linearizzata.



$$dD = 2 [P_2 ds \cdot \sin \theta - P_3 ds \sin \theta]$$

$$= 2 [P_2 - P_3] ds \sin \theta, \quad \sin \theta = \frac{t}{c}$$

integrando $\rightarrow D = 2 [P_2 - P_3] \frac{t}{2}$



$$D = [P_2 - P_3] t$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 c \cdot 1} = \frac{[P_2 - P_3] t}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 c \cdot 1} = \frac{[(P_2 - P_1) - (P_3 - P_1)]}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 c \cdot 1}$$

$$C_D = (C_{P_2} - C_{P_3}) \frac{t}{c}$$

Ora se si usano i C_p della teoria esatta viene il C_D esatto, se si usano i C_p della teoria linearizzata vengono i risultati approx.

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 c} = \frac{(P_e - P_u) c}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 c} = \frac{[(P_e - P_0) - (P_u - P_0)]}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2}$$

$$= C_{Pe} - C_{Pu} \quad \left[\text{poi noi sappiamo che } C_{Pu} < 0 \Rightarrow \text{sarà } C_{Pe} + C_{Pu} \dots \right]$$

$$C_L = (C_{Pe} - C_{Pu}) \cos \alpha \approx C_{Pe} - C_{Pu}$$

$$C_D = (C_{Pe} - C_{Pu}) \sin \alpha$$

In teoria linearizzata

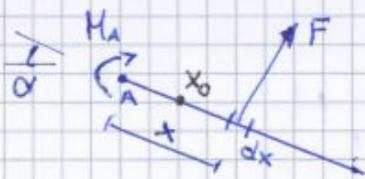
$$C_{Pe} = \frac{2\theta}{\sqrt{M_0^2 - 1}}, \quad \theta = \alpha$$

$$C_{Pu} = \frac{2\theta}{\sqrt{M_0^2 - 1}}, \quad \theta = -\alpha \rightarrow \text{perché sul dorso c'è un'espansione e bisogna avere } C_{Pu} < 0$$

$$C_L = \left[2\alpha - (-2\alpha) \right] \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \quad (4.37)$$

$$C_L = \frac{4}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \cdot \alpha \rightarrow C_{L\alpha} = \frac{4}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$$

BONUS: MOMENTO DI BECCHEGGIO



$$M_A = -F \cdot x$$

$$dM_A = -(P_e - P_u) \cdot (dx \cdot 1) \cdot x$$

$$M_A = - \int_0^c (P_e - P_u) x dx = C_{m_A} \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 S c$$

$$C_{m_A} = \frac{- \int_0^c (P_e - P_u) x dx}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 (c \cdot 1) \cdot c}$$

$$= - \frac{1}{c^2} \int_0^c (C_{Pe} - C_{Pu}) x dx = - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^c (2\alpha - (-2\alpha)) x dx \rightarrow$$

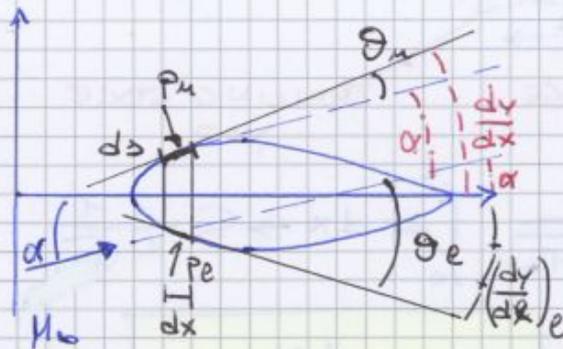
$$C_{Pe} = \frac{2\alpha}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \quad C_{Pu} = - \frac{2\alpha}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$$

GASDINAMICA 2/12/2013

... continua teoria linearizzata

PROFILI ALARI IN TEORIA LINEARIZZATA

◆ PROFILO BICONVESSO con $\alpha \neq 0$



- PROFILO SOTILE
- PICCOLA INCIDENZA α

Consideriamo una fettina di superficie e poi tracciamo la tangente.

NOTA: angoli $> 90^\circ$ ret. antioraria

θ è l'angolo tra la tangente locale e il H_0

⚠ $\theta = \frac{dy}{dx}$ SOLO SE $\alpha = 0$, ma qui $\alpha \neq 0$!

DORSO (upper)

VENTRE (lower)

$$\theta_u = \left(\frac{dy}{dx} \right)_u - \alpha$$

$$\theta_e = - \left(\frac{dy}{dx} \right)_e + \alpha$$

(4.39)

(4.40)

$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$$

(4.41)

(4.42)

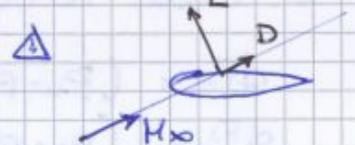
$$C_{p_u} = \frac{2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_u - \alpha \right]$$

$$C_{p_e} = \frac{2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left[- \left(\frac{dy}{dx} \right)_e + \alpha \right]$$

◆ Coefficiente di portanza del profilo $\rightarrow C_{p_u}$ e C_{p_e}

• per piccoli angoli confondiamo

θ_u e θ_e



$$dL = p_e (ds \cdot 1) \cos \theta_e - p_u (ds \cdot 1) \cos \theta_u$$

$$\begin{cases} \cos \theta \approx \cos \theta_e \approx \cos \theta_u \approx 1 \\ ds \approx dx \end{cases}$$

$$dL = (p_e - p_u) dx$$

$$L = \int_0^c (p_e - p_u) dx$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 c \cdot 1} = \frac{1}{c} \int_0^c (C_{p_e} - C_{p_u}) dx = \frac{2}{c \sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^c \left[- \left(\frac{dy}{dx} \right)_e + \alpha - \left(\frac{dy}{dx} \right)_u + \alpha \right] dx$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(4.42)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(4.41)} \quad \rightarrow$$

$$C_D = \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\int_0^c \Theta_u^2 dx + \int_0^c \Theta_e^2 dx \right] \quad \text{O RIMANE NELL'INTEGRALE PERCHÉ VARIA CON X!}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\int_0^c \left(\frac{dy}{dx} - \alpha \right)^2 dx + \int_0^c \left(-\frac{dy}{dx} + \alpha \right)^2 dx \right]$$

$$= \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\int_0^c \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_u^2 - 2\alpha \frac{dy}{dx} + \alpha^2 \right] dx + \int_0^c \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_e^2 - 2\alpha \left(\frac{dy}{dx} \right)_e + \alpha^2 \right] dx \right]$$

$\int_0^c \frac{dy}{dx} dx = 0$, ma $\int_0^c \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \neq 0!!$, $\int_0^c \alpha^2 dx = \alpha^2 c$

$$\rightarrow C_D = \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha^2 c + \int_0^c \left(\frac{dy}{dx} \right)_u^2 dx + \int_0^c \left(\frac{dy}{dx} \right)_e^2 dx + \alpha^2 c \right]$$

$$C_D = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{2}{c \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\int_0^c \left(\frac{dy}{dx} \right)_u^2 dx + \int_0^c \left(\frac{dy}{dx} \right)_e^2 dx \right] \quad (4.45)$$

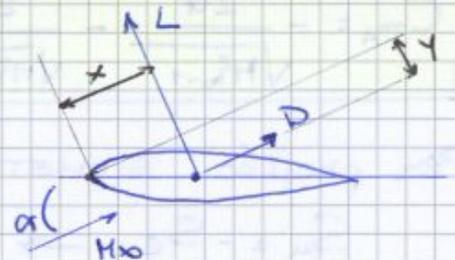
Qui invece la FORMA NON È TRASCURABILE!
 (La placca piana ad $\alpha=0$ ha $D_w=0$)

• Assegnata la forma $\begin{cases} y^+ = y(x)_u \\ y^- = y(x)_e \end{cases} \rightarrow C_D = C_D(\alpha, M_\infty, \text{forma})$

PER FLUSSO INVISCIDO E LINEARIZZATO

◆ Coeff. di momento

• Per una data incidenza α
 L e D si esercitano nel centro di pressione che avrà una ascissa variabile con α



• Riferendosi invece al bordo d'attacco:

$$M_A = -L \cdot x - D \cdot y$$

Corpi aerodinamici sono caratterizzati da un $\frac{L}{D} \gg 1$, inoltre $x \gg y \rightarrow$ trascuriamo il contributo di D.

Proprietà FOCALE:

$$M_p = M_A + L \cdot x_p$$

$$M_o = M_A + L \cdot x_o \quad : \text{mom.}$$

$$C_{m_o} = C_{m_A} + C_L \cdot \frac{x_o}{c}$$

Riprendendo le (4.46) e (4.43) si ottiene:

$$C_{m_o} = \left[-\frac{2\alpha}{\sqrt{M_o^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{M_o^2 - 1}} \frac{S_u + S_e}{c^2} \right] + \frac{4\alpha}{\sqrt{M_o^2 - 1}} \cdot \frac{x_o}{c} \quad (4.47)$$

= COSTANTE al variare di α !

Posizione del fuoco

$$\frac{\partial C_{m_o}}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow \frac{\partial C_{m_o}}{\partial \alpha} = -\frac{2}{\sqrt{M_o^2 - 1}} + \frac{4}{\sqrt{M_o^2 - 1}} \frac{x_o}{c} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{x_o}{c} = 0,5}$$

COME PER LA PLACCA PIANA
 \Rightarrow IN SUPERSONICO IL FUOCO
 STA A METÀ DELLA CORDA

[in SUBSONICO INCOMPRESS.
 STA A 1/4 DELLA CORDA]

Tornando alla (4.47) e sostituendo $\frac{x_o}{c} = 0,5$

$$\rightarrow C_{m_o} = -\frac{2}{\sqrt{M_o^2 - 1}} \frac{S_u + S_e}{c^2}$$

► Per profili SIMMETRICI $C_{m_o} = 0$

► Se per $\alpha = 0$ $L = 0$ e $C_L = 0 \Rightarrow C_m(\alpha = 0)$

$$\downarrow \\ C_m = C_{m_A} = 0$$

• Per profili ASIMMETRICI $C_{m_o} \neq 0$, $C_{m_o} < 0$
 Convenzionalmente la portanza genera un
 momento focale a picchiare

Tornando alla DRAG: supersonico inviscido

\rightarrow SOLO D WAVE.

Minima D per $\alpha = 0 \rightarrow C_D$ minimo

$$C_{Dmin\text{ DORSO}} = \frac{2}{c\sqrt{H_0^2-1}} \left[\frac{y_f^2}{x_f} + \int_0^{x_f} \left(\frac{dy_b}{dx}\right)^2 dx + \frac{y_f^2}{c-x_f} + \int_{x_f}^c \left(\frac{dy_b}{dx}\right)^2 dx \right] u$$

Calcolo del MINIMO della funzione:

il minimo si avrebbe per $\frac{dy_b}{dx} = 0$, cioè

potete PIANA!



Qual è il valore di x_f che minimizza C_{Dmin} ?

$$x_f = ? \quad \frac{\partial C_{Dmin}}{\partial x_f} = 0 \rightarrow \boxed{x_f = \frac{c}{2}}$$

SPESORE MASSIMO È A META' DELLA CORDA

Con $x_f = \frac{c}{2}$ si ottiene: $C_{Dmin} = \frac{2}{c} \left[2 \frac{y_f^2}{c} + \frac{y_f^2}{c - \frac{c}{2}} = \frac{2y_f^2}{c} + \frac{2y_f^2}{c} \right]$

$$C_{Dmin\text{ DORSO}} = \left[\frac{2}{\sqrt{H_0^2-1}} \cdot 4 \left(\frac{y_f}{c}\right)^2 \right] u \quad (4.43)$$

Analogamente per il ventre: invece di y_f c'è $(t - y_f)$

$$C_{Dmin\text{ ventre}} = \left[\frac{2}{\sqrt{H_0^2-1}} \cdot 4 \left(\frac{t-y_f}{c}\right)^2 \right] u \quad (4.50)$$

Profilo completo: somma di contributo dorso e ventre

$$C_{Dmin} = \frac{8}{c^2\sqrt{H_0^2-1}} \left[y_f^2 + (t-y_f)^2 \right] \quad (4.51)$$

Qual è il valore di y_f che minimizza la funzione?

$$\frac{\partial C_{Dmin}}{\partial y_f} = 0 \quad \text{per} \quad \boxed{y_f = \frac{t}{2}}$$

Sostituendo:

$$\boxed{C_{Dmin} = \frac{4}{\sqrt{H_0^2-1}} \left(\frac{t}{c}\right)^2} \quad (4.52)$$

RIASSUMENDO:

- SUP. PIANE
- $x_f = c/2$
- $y_f = t/2$



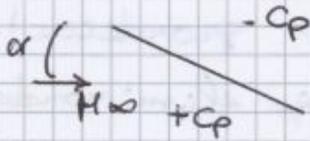
PROFILO A ROMBO È IL PROFILO DI MINIMA RESISTENZA D'ONDA



GASDINAMICA 3/12/2013

ALI DI ALLUNGAMENTO FINITO

Prendiamo una placca piana di allungamento finito in teoria linearizzata \rightarrow linee di Mach, espansione sul dorso e compressione sul ventre



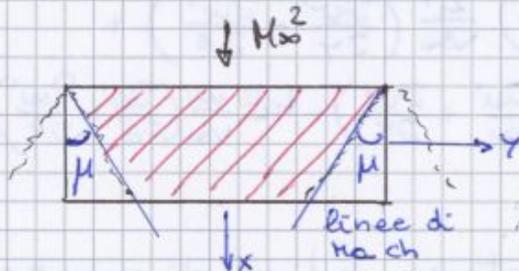
$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$\theta_u = +\alpha$$

$$\theta_l = -\alpha$$

Avrei distribuzione di pressione costante su dorso e ventre.

- In corrispondenza delle estremità cosa succede?

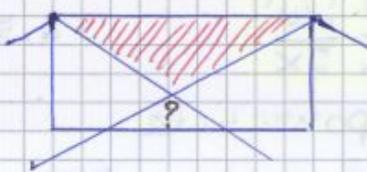


/// ZONA IN CUI VALE TEORIA LINEARIZZATA

► LONTANO DAGLI SPIGOLI IL FLUSSO È 2D

- In corrispondenza degli spigoli ho linee di Mach legate a $\mu = \alpha \text{ cosen } \frac{1}{M_\infty}$

- AREA PERTURBATA deve raccordarsi con il campo a valle



- ALA CORTA + BASSO M $\rightarrow \mu \uparrow$
 \rightarrow intersezione linee di Mach!

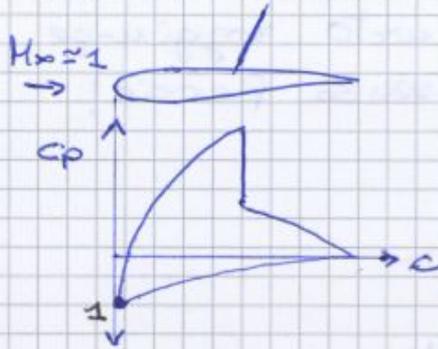
L'unica area trattabile con la teoria linearizzata è quella imperturbata ///

Con la teoria linearizzata si può trattare SUBSONICO COMPRESSIBILE e SUPERSONICO

$$C_{p0} = \frac{C_p}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

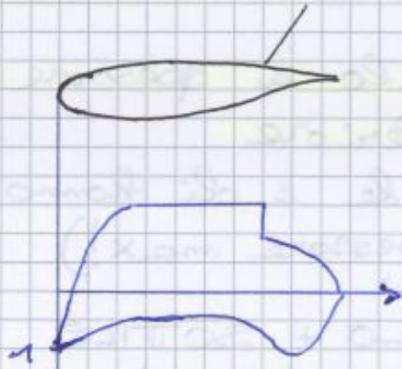
PROFILO ALARE



• PROFILO CLASSICO

Se $H_\infty \approx 1$ localmente ci saranno già le condizioni per un urto.

Profilo più adatto al transonico: **VARIAZIONE GRADUALE DI SPESSORE sul dorso**



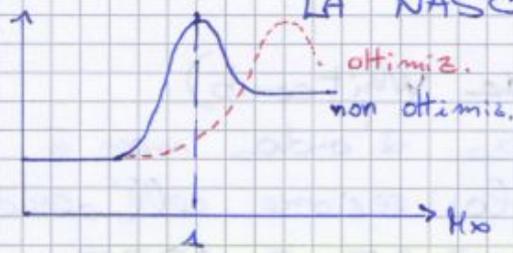
→ **SUPERCRITICO ottimizzato per transonico**

Sul dorso la corrente accelera ma con **ESTREMA GRADUALITÀ**.

⇒ Ci sarà un urto + debole e + spostato verso il bordo di fuga.

OBIETTIVO: ALLONTANARE (per H_∞ + elevati)

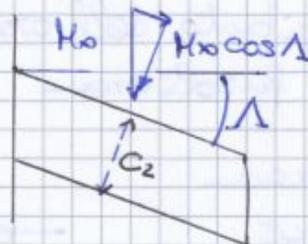
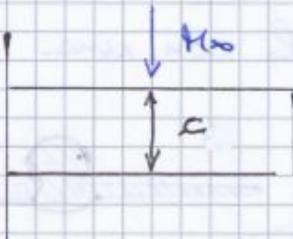
LA NASCITA DI URTI E IL DRAG RISE.



◆ **SUPERSONICO:**
leading edge A PUNTA

● **TRANSONICO:**
grande SPESSORE

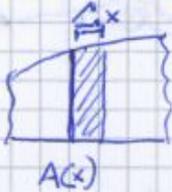
GEOMETRIA ALARE



ANGOLO DI FRECCIA.

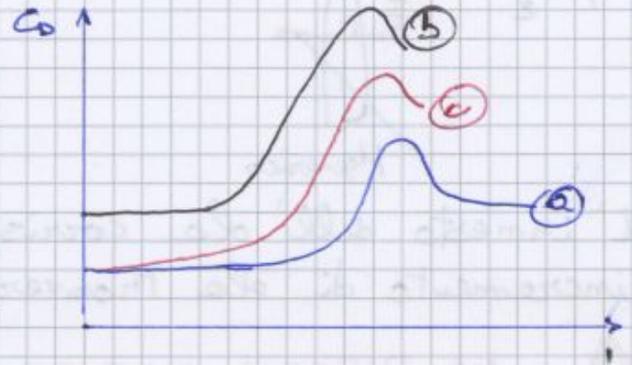
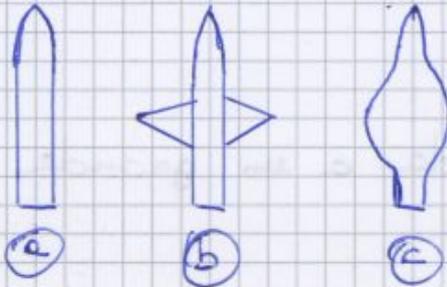
La componente di velocità che causa gli urti è quella \perp all'ala

• Devo curare la distribuzione dei volumi



$\Delta V = A(x) \cdot \Delta x \rightarrow$ distribuzione delle aree.

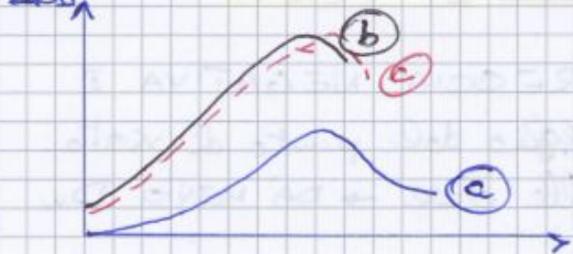
In galleria venne misurata la resistenza d'onda di questi 3 corpi:



(b) e (c) hanno stesso volume ma diversa distribuzione delle aree!

(b) presenta per M_0 inferiori la condizione di drag rise a causa della brusca variazione di sezione in corrispondenza delle alette

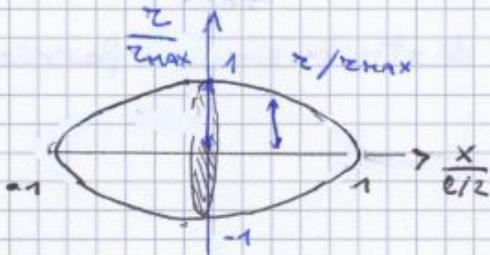
- ΔC_D dovuto a resistenza d'onda da sommarsi al tratto costante



$\Delta C_D = C_D - C_{Dw}$

Qual è il corpo di MINIMA RESISTENZA D'ONDA?

\rightarrow Corpo di **SEARS-HAACK** [TRANSONICO]



$$\frac{z}{z_{max}} = \left[1 - \left(\frac{x}{l/2} \right)^2 \right]^{0,75}$$

$q = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2$

$$\frac{D}{q} = \frac{\rho}{2} \pi \left(\frac{A_{max}}{l} \right)^2 = C_{Dw} \cdot S$$

il corpo di Sears-Haack è quello di riferimento per la resistenza d'onda \rightarrow bisogna cercare di avere

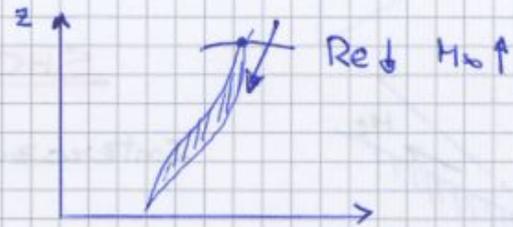
GASDINAMICA 5/12/2013

FLUSSO IPERSONICO

$M_a > 5$ Fosse di rientro di capsule spaziali

$M_{RIENTRO \text{ SHUTTLE}} \approx 25$

$M_{R. \text{ APOLLO}} = 30$



C'è un preciso corridoio di rientro per effettuare un rientro in sicurezza

■ Davanti al corpo tozzo c'è un urto CURVO e STACCATO



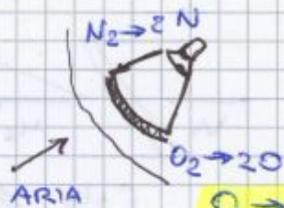
$M_a \approx 30 \quad z \approx 50 - 60 \text{ km}$

$T_{\infty} = 280 \text{ K}$

Se si assume come urto retto avremmo una $T_2 \approx 50.000 \text{ K}$.

Temperatura in realtà + bassa perché c'è la

▶ DISSOCIAZIONE → reazione ENDOTERMICA
 assorbe colore



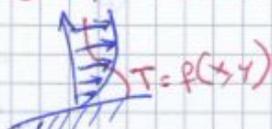
▶ SCAMBIO TERMICO RADIATIVO: la parete irradia colore

→ $T_{2 \text{ reale}} \approx 1600 \text{ K}$

Nel campo ipersonico si è sviluppata

- AEROTERMODINAMICA
- AEROTERMOCHIMICA

A parete → STRATO LIMITE CINEMATICO + TERMICO



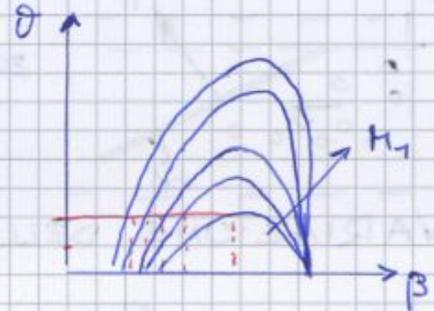
Abbiamo ricavato le relazioni dell'urto obliquo per $M_1 \rightarrow \infty$

$$C_p = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2} = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \approx \frac{4}{\gamma + 1} \left(\sin^2 \beta \frac{1}{M_1^2} \right) \quad (5.1)$$

$$M_1 \rightarrow \infty \quad \boxed{C_p = \frac{4}{\gamma + 1} \sin^2 \beta} \quad (5.4) \quad C_p \text{ FLUSSO IPERSONICO}$$

Funzione θ - β - M

$$\tan \theta = \frac{2}{\tan \beta} \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos^2 \beta) + 2} \right]$$



$M_1 \rightarrow \infty$

β piccoli: $\sin \beta \approx \beta$

θ piccoli: $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$

La relazione θ - β - M diventa

$$\theta = \frac{2}{\beta} \left[\frac{M_1^2 \beta^2 - 1}{M_1^2 (\gamma + 1) + 2} \right] \xrightarrow{M_1 \rightarrow \infty} \frac{2}{\beta} \left[\frac{\beta^2}{\gamma + 1} \right] = \frac{2\beta}{\gamma + 1}$$

$$\theta = \frac{2\beta}{\gamma + 1} \rightarrow \beta = \frac{\gamma + 1}{2} \theta \quad (5.5)$$

ARIA: $\gamma = 1,4$, $\beta = 1,2\theta$: l'urto è inclinato solo il 20% più della parete.

Supersonico linearizzato

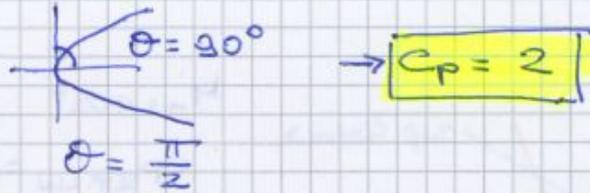
$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$



Questa è ben diversa dalla relazione del C_p su ipersonico linearizzato, cioè $C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$

NELL'IPERSONICO MOLTE COSE SONO INDIPENDENTI DA MACH, prendono valori asintotici

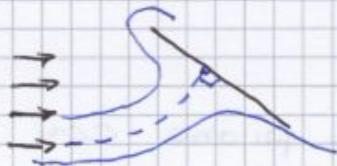
PUNTO DI ARRESTO



⚠ $C_{p_{MAX}} = 2!$ Nel subsonico in $C_{p_{MAX}}$ era 1!

Difetti della teoria

1. Dietro alla placca $p = p_r$: FALSO!
2. Se si lavora nel flusso SUBSONICO INCOMPRESS. il flusso a monte risente già del disturbo del corpo



Secoli dopo però si trovò che questa teoria è valida per $M_\infty \rightarrow \infty$ e $\gamma \rightarrow 1$

È una teoria molto approx, ma può andare bene per flussi ipersonici.

Inserendo (5.5) in (5.3)

$M_\infty \rightarrow \infty$

$C_p = \frac{4}{\gamma+1} \sin^2 \beta$

$\beta = \frac{\gamma+1}{2} \theta$

$\gamma \rightarrow 1$

$C_p = 2 \sin^2 \beta$

$\beta = \theta$

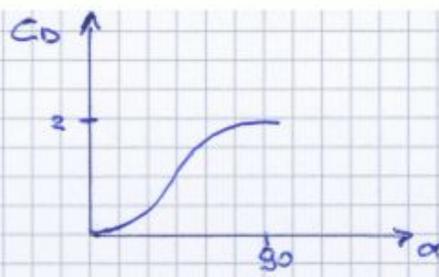
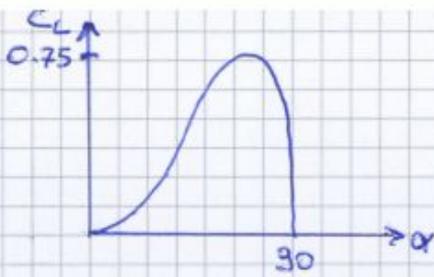
$C_p \approx 2 \sin^2 \theta$

... che è proprio risultato di Newton!

$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$

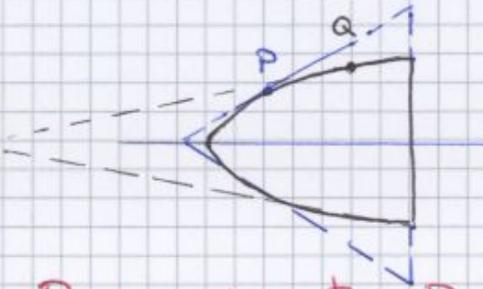
$\gamma \rightarrow 1 \rightarrow \frac{p_2}{p_1} \approx \infty!$

MEMO $\gamma = \frac{L+2}{L}$



Migliorie alla teoria di Newton

CUNEO TANGENTE



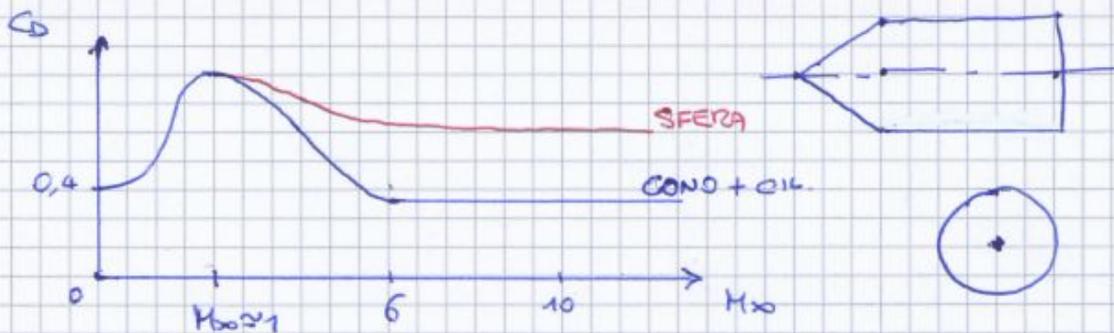
θ non è costante ma è graduale

Per ogni punto P può essere assegnato un cono tangente bi-dimensionale

- $P \rightarrow \theta_P$
- $Q \rightarrow \theta_Q \dots$

Cono tangente

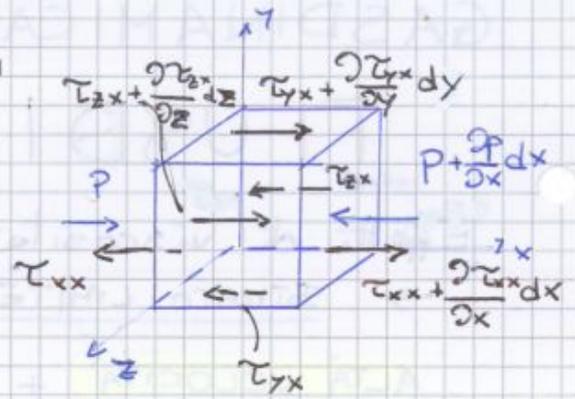
Invece del cono si prende un cono con angolo θ pari alla tangente locale del corpo di portanza.



Per $M > 6$ C_p NON è + $f(M) \rightarrow$ campo di validità della teoria di Newton

$\tau_{visc} \rightarrow$ TENSORE DEGLI SFORZI

τ_{ij} : i - FACCIA
 j - DIREZIONE

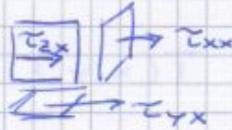


\rightarrow RISULTATO DEL

TRASPORTO DI QDM CAOTICA

lungo le 3 direzioni

Per ogni componente di qdm nascono 3 sforzi viscosi (1 normale alla faccia \perp alla qdm e 2 sulle facce parallele)



\rightarrow x) C'è solo quel campo di pressione

• VISCOSO: se $i=j$ $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$

legati a $-\overline{p'u'}$, fluttuazione molecolare con MEDIA di INSIEMI

\rightarrow x $\Sigma F_x = m a_x$, equilibrio lungo x

$$\begin{aligned} & (-\tau_{xx} + p) dy dz + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx - p - \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \\ & + \left[-\tau_{yx} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \right] dx dz + \left[-\tau_{zx} + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \right] dy dx \\ & + \rho g_x dx dy dz = a_x \cdot \rho \cdot dx dy dz \end{aligned} \quad (6.2)$$

Dividendo per $dx dy dz$ e considerando che

$$a = \frac{D}{Dt} \quad \text{perciò} \quad a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \dots$$

$$(6.3): \quad a_z = \dots$$

$$1) \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

$$2) \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$$

$$3) \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

Incognite: COMPONENTI DI VELOCITÀ, PRESSIONE, VISCOSITÀ

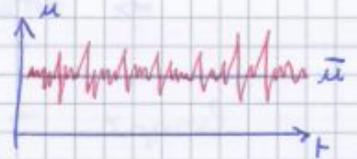
⚠ Poche soluzioni analitiche

Se si risolve si trova il campo di moto e pressione

$$u = u(x, y, z, t) \quad v = v(x, y, z, t) \quad w = w(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

◆ **FLUSSO TURBOLENTO**: rapide variazioni di u col tempo → spettro di variazione delle scale molto ampio



NAVIER-STOKES

è valido per tutto

- ◆ STAZIONARIO / INSTAZIONARIO
- ◆ FLUSSI 3D
- ◆ FLUSSI COMPRESS / INCOMPRES. $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
- ◆ FLUSSI LAMINARI / TURBOLENTI

TURBOLENTO

RANS: Reynolds Average Navier Stokes equations

→ GRANDEZZE MEDIE $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

u'
 v'
 w'

TERMINI FLUTTUANTI
Vanno modellizzati

SFORZI DI REYNOLDS SI SOMMANO A QUELLI VISCOSI

$$\tau_{Rij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (6.6)$$

sono molto simili agli SFORZI VISCOSI MOLECOLARI

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (6.7)$$

u'_j e u'_i sono **FLUTTUAZIONI TURBOLENTE** nel tempo

LE SCALE SONO ≠ TRA FLUTTUAZIONI MOLECOLARI e TURBOLENTE!!!



- MOLECOLARI - VISCOSI: libero cammino medio
- TURBOLENTE → scale $\gg l$

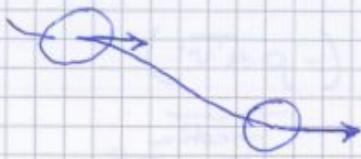


VELOCITÀ

- VISCOSITÀ: velocità $v_{at} \approx 500 \text{ m/s}$
- TURBOLENTE: velocità media $\ll v_{at}$

GASDINAMICA 12/12/2013

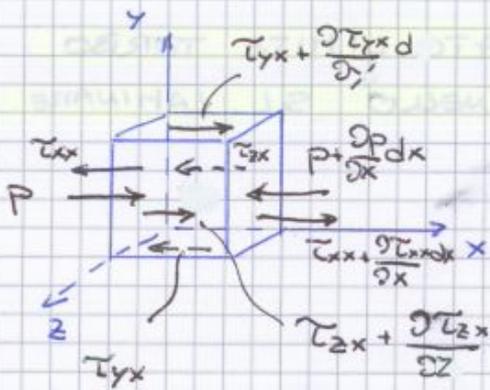
EQUAZIONE ENERGIA fluidi viscosi



DIFFERENZIALE + LAGRANGIANO

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho q + \boxed{\mu} + \boxed{\lambda} \quad \left[\frac{W}{kg} \right]$$

$$\rho dx dy dz \left[\frac{D(e + \frac{v^2}{2})}{Dt} \right] = \text{LAVORO FORZE ESTERNE} \left\{ \begin{array}{l} \text{pressioni} \\ \tau_{ij} \end{array} \right. + \text{CALORE} \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} \rightarrow \text{combustioni} \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q \end{array} \right.$$



Ora vedremo lungo x, poi gli si sommano i contributi delle altre direzioni xk e un'eq. scalare

- CONVENZIONE: forze dirette come x POSITIVO → danno LAVORO (+)

LAVORO PRESSIONI

$$\left[p \cdot u - \left(p u + \frac{\partial(pu)}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = - \frac{\partial(pu)}{\partial x} dx dy dz$$

LAVORO SFORZI VISCOSI

$$\begin{aligned} & \left[- \cancel{\tau_{xx} u} + \left(\cancel{\tau_{xx} u} + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \tau_{xx} \left[\begin{array}{c} dy \\ dz \end{array} \right] \\ & + \left[- \cancel{\tau_{yx} u} + \cancel{\tau_{yx} u} + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} dy \right] dx dz + \tau_{yx} \left[\begin{array}{c} dx \\ dz \end{array} \right] \\ & + \left[- \cancel{\tau_{zx} u} + \cancel{\tau_{zx} u} + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} dz \right] dx dy + \tau_{zx} \left[\begin{array}{c} dx \\ dy \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow x) \left[- \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xx} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx} u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx} u)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

$$\uparrow y) \left[- \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yy} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zy} v)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

$$\uparrow z) \left[- \frac{\partial(pw)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz} w)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zz} w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

LAVORO COMPRESSIVO PRESSIONI + SFORZI VISCOSI

$$\rho \frac{D(e + \frac{v^2}{2})}{Dt} = \rho \frac{D(h + \frac{v^2}{2})}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \quad (6.12)$$

Sostituiamo (6.12) in (6.11)

$$\rightarrow \rho \frac{DH}{Dt} = + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{xx} u}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \tau_{zz} w}{\partial z} + \left\{ \rho \dot{q} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \right\} \quad (6.13)$$

Noi ora ci occuperemo di un problema:

- STAZIONARIO
- NO SORGENTI DI CALORE, $\dot{q} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{DH}{Dt} = 0 + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} \quad (6.14)$$

Sostituendo (6.14) nella (6.13):

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} \right] = \left\{ \frac{\partial \tau_{xx} u}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \tau_{zz} w}{\partial z} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \right\}$$

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} \right] = \left\{ \frac{\partial [\tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w - q_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\tau_{yx} u + \tau_{yy} v + \tau_{yz} w - q_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \tau_{zz} w - q_z]}{\partial z} \right\} \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \tau \cdot v}{\partial n} = \tau \cdot \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial \tau}{\partial n}$$

DISSIPATIVO

$$\mu \frac{\partial v}{\partial n} \cdot \frac{\partial v}{\partial n}$$

ENTROPIA ↑↑

Se flusso staz, inviscido, non conduttibile

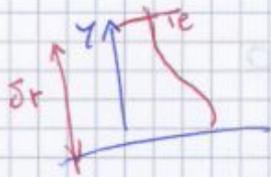
$$u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \rightarrow H = \text{cost lungo la linea di corrente}$$



NO STRATO LIMITE!

$$h + \frac{v^2}{2} = h_{\infty} + \frac{v_{\infty}^2}{2} = H_{\infty}$$

S.L. TERMICO



$$P_e = \frac{\mu \varphi}{\lambda} = \frac{\nu}{K}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$K = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

DIFFUSIVITÀ TERMICA

δ_T : SPESSORE S.L. TERMICO

→ ordinata per cui $T = 0,99 T_e$

$$P_e = \frac{\nu}{K}$$

$P_e > 1$ DOMINANO EFFETTI VISCOSI

$P_e < 1$ " " TERMICI

S.L. LAMINARE

$$\frac{\delta_v}{\delta_T} \propto \sqrt{P_e}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_e = 1 \quad \delta_v = \delta_T \\ P_e < 1 \rightarrow \delta_T > \delta_v \end{array} \right.$$

GAS

$$P_e \text{ ARIA} = 0,71$$

I gas diffondono + velocemente i flussi di energia caotico dei flussi di qdm

FORMULA DI EUCKEN

$$P_e = \frac{2L + 4}{2L + 9} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$$

(6.16)

CASO 2D : $w = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$(6.17) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

$$(6.18) \left\{ \begin{array}{l} x) \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$y) \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$$

$$(6.19) \left\{ \begin{array}{l} \rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial (\tau_{xx} u + \tau_{xy} v - q_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yx} u + \tau_{yy} v - q_y)}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$(6.20) \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T \end{array} \right.$$

5 INCOGNITE : u, v, ρ, p, T

Equazioni di governo per: 2D, STAZIONARI, COMPRESSIBILI

Quindi l'equazione (6.18) diventa:

$$\rightarrow x) \quad \rho \left(u \frac{\partial \mu}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = - \frac{dP_e}{dx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

TRASC.
RISPETTO A $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

TRASC.

dalla (6.4), relazione
ostitutiva

$$\Rightarrow \rightarrow x) \quad \rho \left(u \frac{\partial \mu}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = - \frac{dP_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.21)$$

se è compressibile $\mu = \mu(\tau(y))$

e quindi non è cost con y!

Non posso portare fuori dalle derivate!

ENERGIA

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial (\tau_{xx} u + \tau_{xy} v - q_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yx} u + \tau_{yy} v - q_y)}{\partial y}$$

TRASC.

$$q_x \ll q_y$$

$$u \gg v$$

$$\tau_{yy} = \mu \frac{\partial v}{\partial y}, \text{ ma } \frac{\partial v}{\partial y} \text{ è trascurabile!}$$

La (6.19) diventa:

$$\Rightarrow \rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial (\tau_{yx} u - q_y)}{\partial y}$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\rightarrow \rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (6.22)$$

Vogliamo per comporre H anche a destra:

$$h = c_p T \rightarrow T = \frac{h}{c_p}, \text{ portiamo } u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right] \quad \frac{\lambda}{c_p \mu} = \frac{1}{Pr}$$

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u^2}{2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \quad (6.23)$$

ENERGIA Coelette

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u^2/2}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

$$Pr = \frac{\mu(T(y))}{\rho c_p(\lambda(T(y)))}$$

≈ cost con y

... perché allora è DENTRO $\frac{\partial}{\partial y}$? *

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial (u^2/2 + h)}{\partial y} \right) \right]$$

Soluzione:

$$h + Pr \frac{u^2}{2} = \text{cost} = h_e + Pr \frac{U_e^2}{2} = h_w$$

* Perché se fosse fuori ci sarebbero problemi a integrare!

torriamo allo strato limite e esaminiamo un caso semplice

FLUSSO ADIABATICO

$\frac{dPr}{dx} \neq 0$, $Pr = 1$, → c'è una soluzione analitica

INTEGRALE DI BUSEMANN

→ STRATO LIMITE ADIABATICO

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u^2/2}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

se $Pr = 1$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} + h \right) = \frac{\partial H}{\partial y}$$

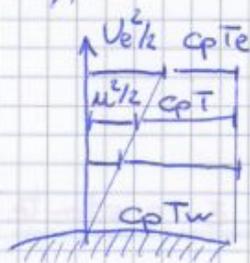
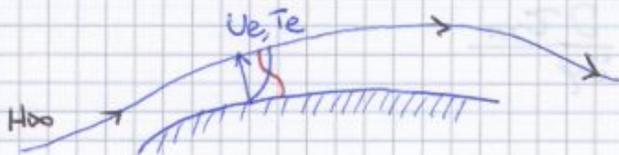
$$\rightarrow \rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right] \quad (6.24)$$

Soluzione:

$H = \text{COSTANTE LUNGO } y$

$$\frac{u^2}{2} + h = \frac{U_e^2}{2} + h_e$$

x fissato: $U_e(x), T_e(x)$



$$\frac{U_e^2}{2} + c_p T_e = H_e = \frac{u^2}{2} + c_p T$$

Scendendo verso parete: $\frac{u^2}{2} \downarrow$ e $T \uparrow$

e se $Pr = 1$ per BUSEMANN $H = H_e = \text{cost}$

$$H_w = c_p T_w$$

GASDINAMICA 16/12/2013

continua

CASO ADIABATICO

- $\frac{dPe}{dx} = \text{qualsiasi}$
- $q_w = 0$
- $Pr \neq 1$

ENERGIA

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad \begin{cases} c_p = \text{cost} \text{ fino a } \sim 1500 \text{ K} \\ \mu = \mu(\tau) \\ \lambda = \lambda(\tau) \end{cases}$$

$$T \uparrow \Rightarrow \mu \uparrow, \lambda \uparrow, \quad \frac{\mu}{\lambda} = \text{cost}$$

\Rightarrow Nonostante T vari $Pr \approx \text{cost}$.

Se $Pr = \text{cost}$ è + facile trovare la soluzione dell'equazione.

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial (Pr u^2/2)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

$$\circlearrowleft = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(Pr \frac{u^2}{2} + h \right) \right]$$

1) Se $\circlearrowleft = 0$ la soluzione sarebbe $h + \frac{u^2}{2} = \text{cost}$ $\rightarrow \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = 0$

2) Se $\circlearrowright = 0 \rightarrow \frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(Pr \frac{u^2}{2} + h \right) = 0$

SOLUZ. $\rightarrow h + Pr \frac{u^2}{2} = \text{cost}$

FLUSSO ALLA COUETTE.

SOLUZIONE STRATO LIMITE: intermedia tra 1 e 2

$$\frac{dPe}{dx} \neq 0, q_w = 0, Pr \neq 1$$

$$h + R \frac{u^2}{2} = \text{cost}$$

R = FATTORE DI RECUPERO

$y \uparrow$ ext
 h_e, h_e

$$h + R \frac{u^2}{2} = h_e + R \frac{u_e^2}{2} = H_{REC.} \quad (6.26)$$

NELLO STRATO LIMITE SI CONSERVA ENTALPIA DI RECUPERO!

... ma chi ci dà R ? Perché se R non c'è come calcoliamo T_{rec} ?

→ SI PUÒ ESPRIMERE $R = f(Pr)$

COUETTE : $R = Pr$

ARIA

0,71

S.L. LAMINARI: $R = Pr^{1/2}$

0,843

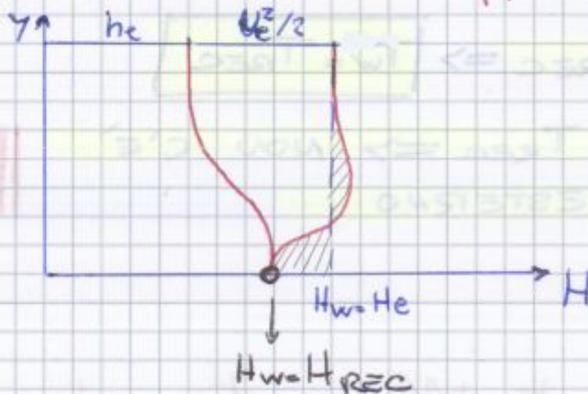
S.L. TURBOLENTO $R = Pr^{1/3}$

0,89

Se Turbolenza $\rightarrow \infty$, i processi di diffusione di quantità di moto e di energia interna costica (μ) (λ)

sono dello stesso ordine di grandezza perché la turbolenza rimescola tutto

♦ Fisicamente cosa rappresenta R ?



$Pr = 1$

$h + \frac{u^2}{2} = \text{cost} = h_c + \frac{u_c^2}{2}$

$Pr \neq 1$

$h + R \frac{u^2}{2} = h_c + R \frac{u_c^2}{2}$

Dov'è finita l'energia che manca?

DISSIPAZIONE DI ENERGIA CINETICA \rightarrow CALORE

che viene DIFFUSO ANCHE VERSO GLI STRATI +

ALTI DELLO STRATO LIMITE \Rightarrow e porrete manca quella dose di energia

(R) mi dice quanto dell'energia cinetica esterna è stata trasformata in calore

$\sim 85\%$

$\sim 15\%$ viene diffuso verso gli strati + lontani

Profilo di T

$h + R \frac{u^2}{2} = h_c + R \frac{u_c^2}{2}$

$T + R \frac{u^2}{2c_p} = T_c + R \frac{u_c^2}{2c_p}$

CONDIZIONI DI ADIABATICITÀ



Dopo un transitorio iniziale T_w si porta a T_{rec} .

... MA SE $T_w \neq T_{rec}$ (\rightarrow maggiori nel corpo c'è una sorgente di calore) $\Rightarrow q_w \neq 0!$

Caso reale: $\frac{dp}{dx} \neq 0, Pr \neq 1, q_w \neq 0$



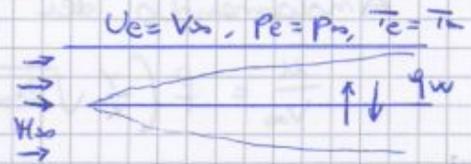
NON ESISTONO SOLUZIONI ANALITICHE

CASO DIABATICO e $\frac{dp}{dx} = 0$ [cioè NON ADIABATICO]

\rightarrow FLUSSO DI CALORE $q_w \neq 0$

$\rightarrow \frac{dPe}{dx} = 0 \Rightarrow$ PLACCA PIANA $\alpha = 0$

$\rightarrow Pe = 1$



$T_e = \text{costante lungo } x \rightarrow T_e \neq T_{rec} \rightarrow T_{rec} \neq T_e$

$T_{rec} = T_\infty + \frac{R U_e^2}{2c_p}$ | **SOLUZIONI ANALITICHE SOLO PER PLACCA PIANA AD $\alpha = 0$**

Riprendiamo l'eq. ENERGIA (6.23, e si raccoglie Pe)

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pe} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{\partial h}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{2} (u^2 + h) \right)$$

$$\rightarrow \left\{ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right] \right. \quad (6.24)$$

Per una lamina piana investita senza incidenza la (6.21) diventa

$$\rightarrow \left\{ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right. \quad (6.30)$$

Sono 2 equazioni formalmente IDENTICHE

CROCCO 1939: se abbiamo $u \rightarrow$ soluzione di (6.30)

Soluzione di (6.24) $\Rightarrow H = \underline{c_1} + \underline{c_2} \cdot u$ combinazione lineare

$$T = T_w(1-\varphi) + T_\infty \varphi^2 + T_0(\varphi - \varphi^2) \quad (6.34)$$

GASDINAMICA 17/12/2013

Se $Pr \neq 1$, $R = Pr$

RELAZIONI GENERALI

- VALIDE ANCHE PER $Pr=1$ e $q_w=0$

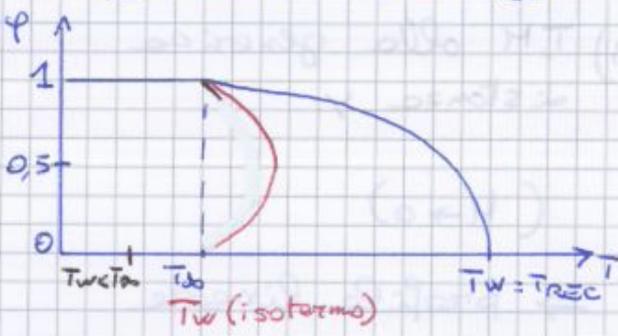
$$T = T_w(1-\varphi) + T_\infty \varphi^2 + T_{REC}(\varphi - \varphi^2) \quad (6.35)$$

ANALOGIA DEI CAMPI (6.33) SI CORREGGE CON R:

$$\frac{\mu}{V_\infty} = \frac{(R + R \frac{\mu^2}{2}) - h_w}{(R_\infty + R \frac{V_\infty^2}{2}) - h_w}$$

$$= \frac{T + R \frac{\mu^2}{2c_p} - T_w}{T_\infty + R \frac{V_\infty^2}{2c_p} - T_w} = \frac{T(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M^2) - T_w}{T_\infty(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2) - T_w} \quad (6.36)$$

ADIABATICO: $T_w = T_{REC}$



$T_w = T_{REC}$ adiabatico
 $T_w = T_\infty$ isoterma

Profilo ISOTERMO

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} \neq 0! \quad q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

$$\varphi = \frac{\mu}{V_\infty} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

• $T_w = T_\infty \rightarrow q_w < 0$ FLUSSO DI CALORE ENTRANTE NELLA PARETE
 \rightarrow La corrente cede calore alle pareti!

Possiamo perciò riscrivere (6.38)

$$\frac{\tau_w}{\mu V_0} = \frac{-\frac{c_p}{\lambda} q_w(x)}{h_{\infty} + \frac{V_0^2}{2} - h_w}$$

$$\frac{\tau_w(x)}{V_0} = \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)_{Pr=1} \frac{-q_w(x)}{h_{\infty} + \frac{V_0^2}{2} - h_w} \quad (6.39)$$

ANALOGIA DI REYNOLDS
Pr = 1

Se conosciamo lo colmente (→ su una x fissata) τ_w OPPURE $q_w \Rightarrow$ SI PUÒ RICAVARE L'INCOGNITA MANCANTE (rispettivamente q_w e τ_w)

Pr ≠ 1 | R = Pr² A = Pr⁰ : FATTORE DI ANALOGIA

	τ	q	R	A
Couette	1	1	Pr	Pr
S.L. LAMINARE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	Pr ^{1/2}	Pr ^{2/3}
S.L. TURBOLENTO	$\frac{1}{3}$	0,6	Pr ^{1/3}	Pr ^{0,6}
∞ TURBO	0	0	1	1

$$\frac{\tau_w(x)}{V_0} = \frac{-A q_w(x)}{h_{\infty} + R \frac{V_0^2}{2} - h_w} \quad (6.40)$$

ANALOGIA DI REYNOLDS
Pr ≠ 1

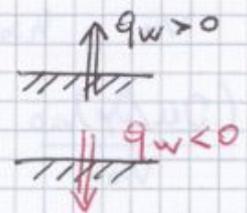
$$\frac{\tau_w(x)}{V_0} = \frac{-A q_w}{c_p (T_{rec} - T_w)}$$

$$q_w \propto -(T_{rec} - T_w)$$

se $T_w = T_{rec} \rightarrow q_w = 0$

$T_w > T_{rec} \rightarrow q_w > 0$

$T_w < T_{rec} \rightarrow q_w < 0$



$$K = \frac{\bar{c}_w \cdot c_p}{AV_0} \cdot \frac{2 \rho_0 V_0}{2 \rho_0 V_0} \Rightarrow K = C_{D_f} \cdot \frac{c_p \rho_0 V_0}{2A} \quad (6.44)$$

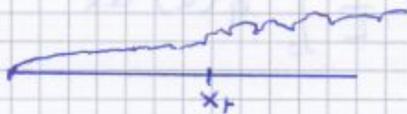
RESISTENZA D'ATTRITO PLACCA PIANA COMPRESS. + TERMICO

$$C_D = C_D(Re_L, M_0, \frac{T_w}{T_0})$$

$$C_{D_f} = C_{D_i} \cdot X \left(M_0, \frac{T_w}{T_0} \right)$$

$$Re_{oc} = \frac{V_0 \cdot X_f \cdot \rho_0}{\mu_0} = 5 \cdot 10^5$$

$$X_f = \frac{5 \cdot 10^5 \mu_0}{V_0 \rho_0}$$



$$Re_L = \frac{V_0 L \rho_0}{\mu_0} \rightarrow \left[\frac{X_f}{L} = \frac{5 \cdot 10^5}{Re_L} \right]$$

Se abbiamo $Re_L = 10^6$, $\frac{X_f}{L} = 0,5 \rightarrow$ da 0 a 0,5: LAM
da 0,5 a 1: TURBO

Per semplicità tratteremo il flusso SOLO LAM,
o SOLO TURBO fin dal bordo di attacco.

Metodo della SEZIONE RAPPRESENTATIVA

$$T(x,y) \rightarrow \begin{cases} \mu(\tau) \\ p(\tau) \end{cases}$$

μ e p variano da punto a punto... ma allora quali uso se devo calcolare grandezze medie?

\rightarrow USO I VALORI DI UNA SEZIONE RAPPRESENTATIVA

\Rightarrow quella in cui $\frac{M}{V_0} = 0,5$: dà i migliori

risultati se rapportati ai valori sperimentali

$$\varphi = 0,5 \rightarrow T^*$$

... e dov'è la dipendenza da Ma ?

$$\frac{T_{rec}}{T_{\infty}} = 1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2$$

Mettendo insieme i pezzi la 6.49 diventa

$$X_{LAM} = \left[\frac{T_w + T_{\infty}}{2 T_{\infty}} + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_{\infty}^2}{4} \right]^{-0,125}$$

CORREZ.
S.L.
LAMINARE
(6.50)

STRATO LIMITE TURBOLENTO

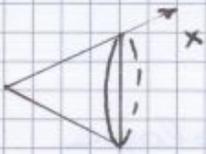
$$\overline{T_w inc} \propto Ma^{1/5} p^{4/5}$$

$$\overline{T_w} \propto M^* 1/5 p^* 4/5$$

$$X_{TURB} = \left[\frac{T_w + T_{\infty}}{2 T_{\infty}} + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_{\infty}^2}{4} \right]^{-0,65}$$

CORREZ.
S.L.
TURBO
(6.51)

(6.50) e (6.51) contengono al loro interno tutti i possibili casi.



$$Re_{x \text{ cono}} = \frac{V(x) \cdot x}{\nu}$$

$$Re_{x \text{ placca}} = \frac{V_{\infty} \cdot x}{\nu}$$

Mettendosi in condizioni tali da avere

- $Re_{x \text{ cono}} = Re_{x \text{ placca}}$
- $M_{\infty \text{ cono}} = M_{\infty \text{ placca}}$
- $\left(\frac{T_w}{T_e}\right)_{\text{cono}} = \left(\frac{T_w}{T_e}\right)_{\text{placca}}$

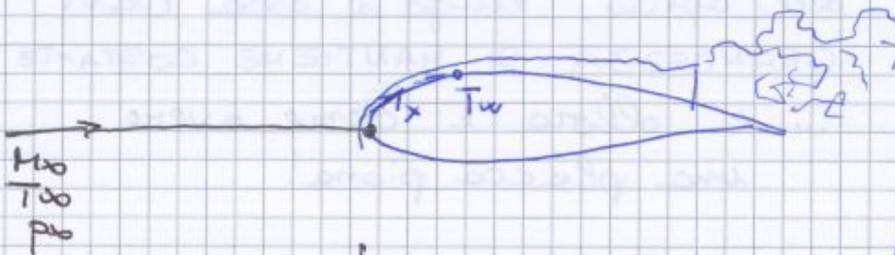
⇒ C'È SIMILARITÀ DI COEFFICIENTI DI ATTRITO LOCALI TRA CONO E PLACCA PIANA

$$SLL \left\{ \begin{array}{l} C_{f \text{ cono}}(x) = \sqrt{3} C_{f \text{ PP}}(x) \\ q_{w \text{ cono}}(x) = \sqrt{3} q_{w \text{ PP}}(x) \end{array} \right. \quad [Re_{\text{cono}} = Re_{\text{pp}}]$$

$$SLT \left\{ C_{f \text{ cono}}(x) = (1,1 \div 1,15) C_{f \text{ PP}}(x) \right.$$

FLUSSO nell'intorno del PUNTO DI ARRESTO

$M < 0,8$: CAMPO SUBSONICO COMPRESSIBILE



ADIAB:

$$T_w(0) = T_{0w}$$

$$p_w(0) = p_{0w}$$

($p_w(0) < p_{0w}$ se c'è urto)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_w(0) = ? \\ q_w(0) = ? \end{array} \right.$$

In funzione di $T_w(0)$ e $q_w(0)$ si definirà la migliore geometria per limitarne gli effetti

PUNTO DI ARRESTO: ARRESTO DI PUNTA → effetti viscosi trascurabili

Il criterio di transizione mi dice quando stoppare Thwaites e fare portare Head.

E noi quale usiamo?

► Intorno del punto di overesto → CORRENTE ACCELERATA



$$U_e \frac{dU_e}{dx} > 0$$

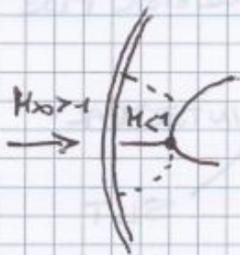
$$\frac{d\theta}{dx} < 0$$

ACCELERAZIONE → Stabilizzante

Nell'intorno del punto di overesto δ_L è LAMINARE

⇒ THWAITES

Ha senso usarlo anche se c'è un flusso supersonico perché nell'intorno del punto di overesto c'è un M più basso



... però che sia incompressibile si crede poco!!!

METODO DI THWAITES

Risolve rispetto a $\theta(x)$

$$\theta^2(x) = \frac{0,45\nu}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(x) dx \quad (6.53)$$

Relazioni AGGIUNTIVE

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \rightarrow \text{ACCELERAZ.} \quad (6.54)$$

$$e(\lambda) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \cdot \frac{\theta}{U_e} = \quad (6.55)$$

e NORMALIZZA $\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \frac{\tau_w}{\mu}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}$$

$$Re_\theta = \frac{U_e \theta}{\nu}$$

Relazioni empiriche

CERBEI & BRADSHAW

$$\left. \begin{array}{l} \text{FLUSSI ACCELERATI} \\ \text{FLUSSI DECELERATI} \end{array} \right\} e(\lambda) = 0,22 + 1,57 \lambda - 1,8 \lambda^2$$

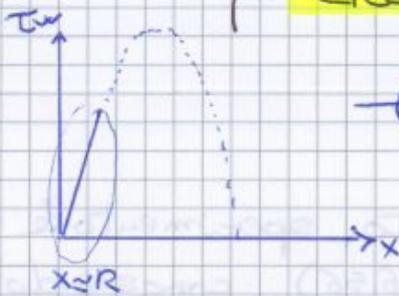
Risolviemo rispetto a τ_w

$$\tau_w = 0,328 \frac{k^{3/2} \mu}{(0,075\nu)^{1/2}} \cdot x \quad (6.60)$$

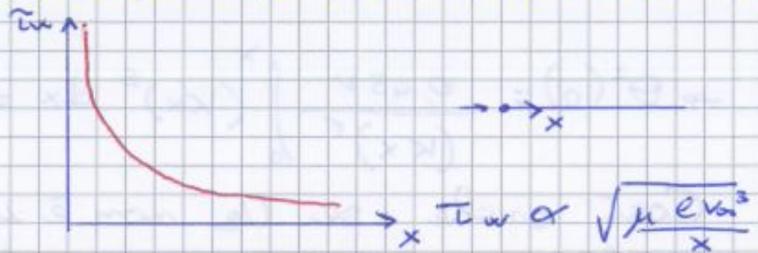
⇒ $\tau_w = c \cdot k^{3/2} \cdot x$
 costante una volta def. la forma

QUINDI lo sforzo di attrito è

- $\tau_w(0) = 0$ NEL PUNTO DI ATRIBITO
- CRESCE LINEARMENTE NELL'INTERNO DI $x=0$



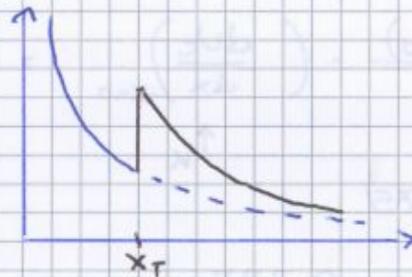
CILINDRO



PLACCA PIANA

... e se $\alpha \neq 0$? È la stessa cosa! Si sposta solo il punto di origine e poi da lì (cioè dove parte l'ascissa curvilinea) è la stessa cosa!

... e se c'è TRANSIZIONE?



$$\tau_w = c \cdot k^{3/2} \cdot x$$

Accelerazione + intenso ⇒ sforzo + intenso

=
 FLUSSO CALORE
 PIÙ ELEVATO
 per analogia

$h_e \rightarrow$ da intendere come h_e poiché

$$H_e = h_e + \frac{u^2}{2} = h_e + \textcircled{0} \quad \text{NEL PUNTO DI ARRESTO}$$

$h_w \rightarrow H_w$

H coincide con entalpia statica poiché nel punto di arresto il termine cinetico è nullo!

$$h_e - h_w = c_p(T_0 - T_w)$$

$$\cdot \sqrt{K} \Rightarrow K = \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_{x=0}$$

SUBSONICI INCOMPRESSIBILI

$$M_{\infty} \leq 0,3$$

\rightarrow Cilindro

$$K = \frac{4 V_{\infty}}{D}$$

\rightarrow Sfera

$$K = 3 \frac{V_{\infty}}{D}$$

\rightarrow Flat nosed

$$K = 1,57 \frac{V_{\infty}}{D}$$

$$q_w(0) \propto \sqrt{K_{x=0}}$$

Nel punto di arresto si manifesta il flusso di calore + alto di tutto il corpo

SUBSONICI COMPRESSIBILI

$$M_{\infty} < 0,7$$

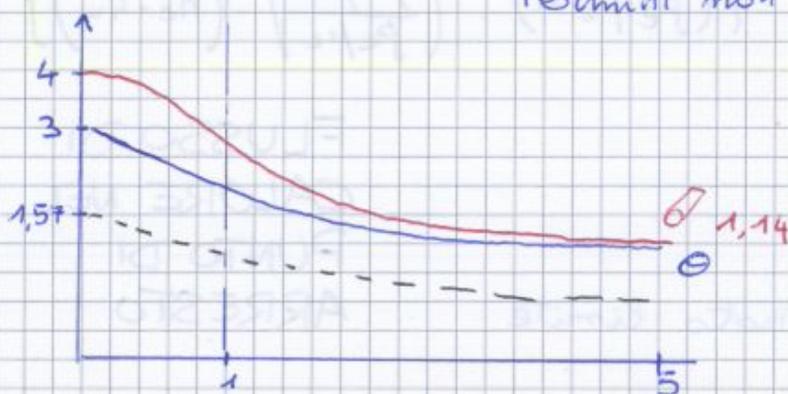
$$\frac{KD}{V_{\infty}} = f(M_{\infty})$$

$$\text{Cilindro} \quad \frac{KD}{V_{\infty}} = 4 \left(1 - 0,416 M_{\infty}^2 - 0,164 M_{\infty}^4 + \dots \text{ordine sup.} \right)$$

$$\text{Sfera} \quad \frac{KD}{V_{\infty}} = 3 \left(1 - 0,252 M_{\infty}^2 - 0,0175 M_{\infty}^4 + \dots \right)$$

$$\text{Flat nosed} \quad \frac{KD}{V_{\infty}} = 1,57 \left(1 + \dots \right)$$

Termini non conosciuti



Il flat nosed è quello che avrà il minimo flusso termico nel punto di arresto

$$\rightarrow \frac{KD}{V_0} = \sqrt{8 \frac{P_0}{P_e}}$$



si assume retto

$P_e = P_2$ DOPO URTO

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = f(M_0) \quad \text{RELAZIONE URTO RETTO}$$

Perché il plot nosed vede il flusso di colore + basso?

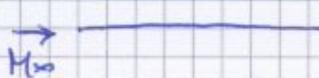
$$K \propto \frac{1}{D} \rightarrow \propto \frac{1}{R} \rightarrow \boxed{q_w \propto \frac{1}{\sqrt{R}}}$$

Ecco perché le teste delle capsule spaziali hanno un elevato raggio di curvatura!



Giustificazione delle relazioni date

PLACCA PIANA



NON ADIAB.

$$q_w \neq 0$$

$$\frac{dP_e}{dx} = 0$$

ANALOGIA REYNOLDS

$$\frac{\tau_w}{V_0} = - \frac{A q_w}{C_p (T_{rec} - T_w)}$$

Come possiamo adeguare l'analogia all'intorno del punto di arresto?

- 1) $V_0 \rightarrow U_e(x)$
- 2) $T_{rec} - T_w \rightarrow T_0 - T_w$

NEL PUNTO DI ARRESTO NON C'E' TREC MA T_0 !!!

$$\tau_w(x) = \sqrt{\frac{P_0 \mu_0 V_0^3}{x}} \rightarrow \dots \sqrt{P^* \mu^* U_e^2(x) \frac{dU_e}{dx}}$$

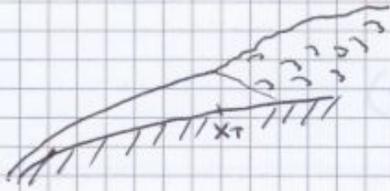
PLACCA PIANA

STRUTTURA E' LA STESSA

$$\tau_w \rightarrow \tau_w = \text{coeff.} \sqrt{P^* \mu^*}$$

*: grandezze riferite alla sezione rappresentativa

EFFETTI DEL q_w SU TRANSIZIONE dello S.L.

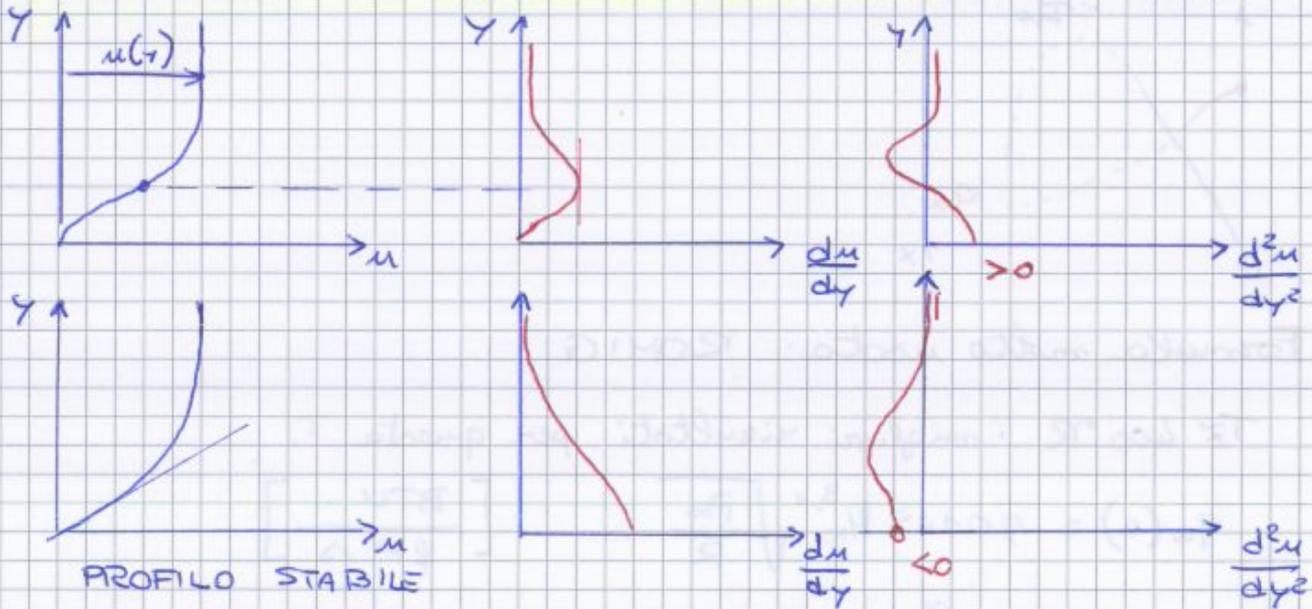


Come influenza il flusso di calore la transizione dello strato limite da laminare a turbolento?

⇒ CRITERIO DI RAYLEIGH

È un criterio cinematico che utilizza il profilo di velocità nello strato limite laminare

INSTABILITÀ S.L.L. → flesso nel profilo $u=u(y)$
(condiz. necessaria ma non suff.)



→ STABILITÀ: $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_w < 0$

→ INSTABILITÀ: $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_w > 0$

Eq. strato limite DIFF, LAM, COMPRESS, 2D

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Isoliamo il criterio di stabilità:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)$$

Valutiamo a parete.

$\frac{dPe}{dx} < 0 \rightarrow \frac{dUe}{dx} > 0$ **FLUSSO ACCELERA**
 \rightarrow STABILIZZA

© $q_w \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)$

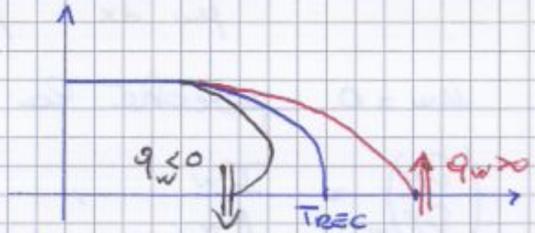
GAS $\left\{ \frac{\partial \mu}{\partial T} > 0 \right.$

$q_w > 0 \Rightarrow T_w > T_{REC}$

PARETE CALDA \rightarrow DESTABILIZZA

$q_w < 0 \Rightarrow T_w < T_{REC}$

PARETE FREDDA \rightarrow STABILIZZA



Liquidi $\left\{ \frac{\partial \mu}{\partial T} < 0 \right.$

$q_w > 0$

STABILIZZA

$q_w < 0$

DESTABILIZZA

Con i liquidi
 è il contrario
 del gas

\rightarrow La ricetta per uno strato limite LAMINARE STABILE è:

- 1) ASPIRARE
- 2) ACCELERARE
- 3) RAFFREDDARE LA PARETE

GAS DINAMICA esercitazione 3/10/2013

Esercizio 1: CARATTERIZZARE TUTTE LE PROPRIETÀ DELL'ARIA.

Aria 20% N₂ + ~20% O₂

L = 5 ? $\gamma, C_p, c_p, C_v, c_v$

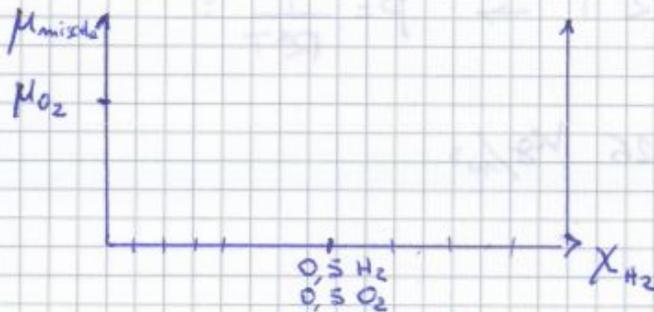
2) Es. 4.6 pag. 35 MISCELE di GAS

O₂ + H₂ T = 288k

$$X_i = \frac{N_i}{N_{tot}} = \frac{P_i}{P_{tot}} = \frac{V_i}{V_{tot}} \Rightarrow \text{FRAZIONE MOLARE}$$

$$\sum X_i = 1$$

? calcolare la viscosità con la formula di WILKE



M_{O₂} = 32 kg/mole M_{H₂} = 2 kg/mole

N = 2 → O₂, H₂

$$\begin{aligned} \mu_{H_2} &\Rightarrow \text{SUTHERLAND} \begin{cases} S = 0,65 \cdot 10^{-6} \\ \chi = 71 \text{ K} \end{cases} \\ \mu_{O_2} &\Rightarrow \quad \quad \quad \begin{cases} S = 1,65 \cdot 10^{-6} \\ \chi = 110 \text{ K} \end{cases} \end{aligned}$$

G_{ik} → G₁₂ = _____

1 → H₂

2 → O₂

G₂₁ = _____

X_{H₂} | X_{O₂} = 1 - X_{H₂}

→ μ_{MISCELA} = f(M, X, μ)

→

2) Calcolare la massa molare di una miscela (aria) composta 80% N_2 + 20% O_2

$$X_i = \frac{N_i}{N_{tot}} = \frac{V_i}{V_{tot}} = \frac{P_i}{P_{tot}}$$

FRAZIONE VOLUMETRICA
(o molare)

$$C_i = \frac{m_i}{m_{tot}}$$

CONCENTRAZIONE PONDERALE

avendo $X_i \rightarrow C_i = \frac{X_i M_i}{\sum X_i M_i} = \frac{m_i}{m_{tot}}$

MISCELE
DI GAS

$$C_i \rightarrow X_i = \frac{C_i / M_i}{\sum C_i / M_i} = \frac{N_i}{N_{tot}}$$

$$M_{miscela} = \sum X_i M_i = \sum \frac{1}{C_i / M_i}$$

CALORI SPECIFICI MOLARI

$$C_{p,misc} = \sum X_i C_{p,i}$$

$$C_{p,i} = \frac{L_i + 2 R}{2}$$

$$C_{v,misc} = \sum X_i C_{v,i}$$

$$C_{v,i} = \frac{L_i R}{2}$$

CALORI SPECIFICI MASSICI

$$c_{p,misc} = \frac{C_{p,misc}}{M_{misc}} = \frac{L_i + 2 R}{2 M_{misc}}$$

$$Y_{misc} = \frac{C_{p,misc}}{C_{v,misc}} = \frac{c_{p,misc}}{c_{v,misc}} =$$

$$c_{v,misc} = \frac{C_{v,misc}}{M_{misc}} = \frac{L_i R}{2 M_{misc}}$$

$$= \frac{\sum X_i (L_i + 2)}{\sum X_i L_i}$$

$$M_{aria} = \sum X_i M_i = 0,8 \cdot 28 + 0,2 \cdot 32 = 29 \text{ kg/mole}$$

$G = \rho V S \rightarrow$ portata in MASSA SI CONSERVA

calcoliamo la portata in GOLA
che abbiamo e' area

$$T_2^0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right) \quad \text{in sezione 2}$$

$$= 324 \text{ K}$$

NO URTI
 \Downarrow
 T^0 SI CONSERVA

$$T_g = \frac{T^0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_g^2 \right)} = 270 \text{ K}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$p_g = p_0 \left(\frac{T_{0g}}{T_0} \right)^{1/\gamma-1}$$

la calcolo con $T^0 = T_s$ e $p^0 = p_s$

$$[...]\ p_0 = \frac{p_0}{\frac{R}{\gamma_{mix}} \cdot T_0} = 0,0579 \text{ Kg/m}^3$$

$$H^* = \sqrt{\frac{H^2(\gamma+1)}{2+H^2(\gamma-1)}}$$

oppure $H_1^* = \frac{V_1}{Q_1^*} = \frac{H_1 \cdot Q_1}{Q_1^*} = 1,633$

b) $\frac{V_e}{Q^*} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \sqrt{6} = 2,449 \rightarrow V_e$

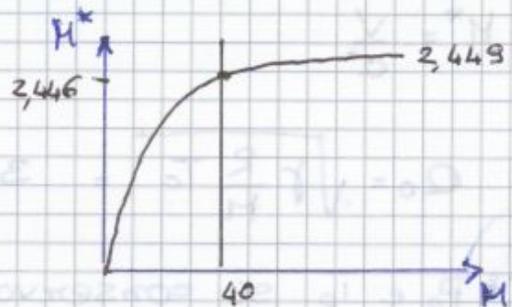
$$\frac{V_e}{Q_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} = \sqrt{5} = 2,236$$

$$\frac{Q^c}{Q_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} = 0,813$$

c) Se $H = 40$

$$H_1^* = \frac{V_1}{Q_1^*} = \frac{H_1 \cdot Q_1}{Q_1^*} = 2,446$$

Per $H \rightarrow \infty$, H^*



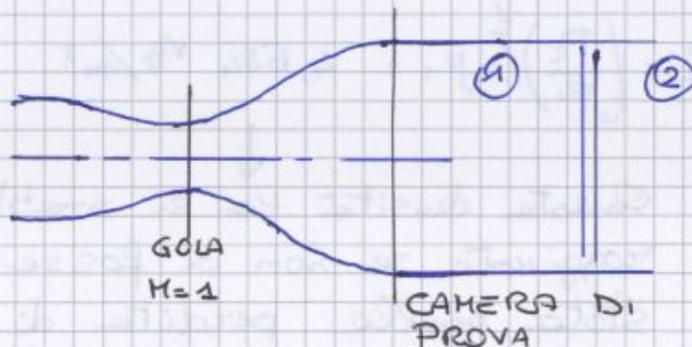
Diagrammone $H^* = f(H)$ sia e per H_2 ($\gamma =$

GASDINAMICA ESERCITAZIONE 22/10/2013

URTO RETTO

Esercizio 1Esercizio 2

Galleria supersonica



① $M_1 = 3$? P_2, T_2, ρ_2, M_2

$$P_1 = 0,5 \text{ atm} = 50662,5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 200 \text{ K}$$

Se si vuole cambiare velocità di prova bisogna cambiare l'ugello (oppure ugello a geometria variabile) (la sezione di uscita).

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) = 10,33 \rightarrow P_2 = 523512,5 \text{ Pa} = 5,16 \text{ atm}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right] = 2,678$$

$$T_2 = 2,678 \cdot T_1 = 535,63 \text{ K}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{R T_2} = 3,40 \text{ Kg/m}^3$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + [(\gamma-1)/2] M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\frac{\gamma-1}{2})}} = \sqrt{\frac{2,8}{12,4}} = 0,475$$

$$(2) \quad P_{02} = P_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

IL CAMPO A MONTE È
A VALLE È ISENTROPICO!
Solo l'evoluzione non
lo è.

$$M_2 = \left(\left[\left(\frac{P_{02}}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/2} = 0,706$$

$$M_2 = \frac{1 + [(\gamma-1)/2] M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\frac{\gamma-1}{2})}$$

$$\gamma M_2 M_1^2 - M_2 \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) = 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_1^2$$

$$\left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_1^2 - \gamma M_2 M_1^2 = -1 - M_2 \left(\frac{\gamma-1}{2} \right)$$

$$M_1 = \left[\frac{1 + M_2 \left(\frac{\gamma-1}{2} \right)}{\gamma M_2 - \left(\frac{\gamma-1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Es. 3.10 pag. 97 Anderson

Corrente di ELIO e di ARIA a $M_1 = 5$.

Calcolare $\frac{P_2}{P_1}$ per He e per aria

$$\frac{P_2}{P_{1 \text{ elio}}} = 4 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) = \textcircled{31} \rightarrow \text{urto + intenso}$$

He \rightarrow MONOATOMICO

$$\gamma = \frac{l+2}{e} = \frac{5}{3}$$

Aria \rightarrow BIATOMICO

$$\gamma = \frac{l+2}{e} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{P_2}{P_{1 \text{ aria}}} = \textcircled{29}$$

• $V_1 = 1700 \text{ m/s}$ $T_1 = 288 \text{ K}$

$$C_{He} = \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{8314}{4} \cdot 288} = 998,83 \text{ m/s}$$

$$C_{aria} = \sqrt{1,4 \cdot \frac{8314}{29} \cdot 288} = 339,99 \text{ m/s}$$

$$M_{1 \text{ He}} = \frac{1700 \text{ m/s}}{998,83 \text{ m/s}} = 1,70$$

$$M_{1 \text{ ARIA}} = \frac{1700 \text{ m/s}}{339,99 \text{ m/s}} = 5$$

$$\frac{P_2}{P_{1 \text{ He}}} = 3,36$$

$$\frac{P_2}{P_{1 \text{ aria}}} = 29$$

⚠ L'INTENSITÀ DELL'URTO È REGOLATA DA M_1

Es. 3.3 pag. 96 PROFILO ALARE TRANSONICO



$$0,8 \leq M_0 \leq 1,2$$

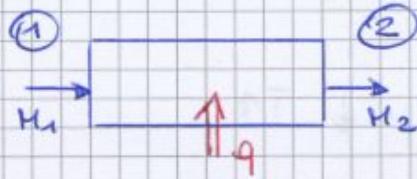
Urto obliquo lo approx. come retto

Per $M_0 = 1,04$ 1,08 1,12 1,16

Calcolare i rapporti tra pressioni totali e calcolare la variazione di entropia.

FLUSSO DI RAYLEIGH

Es. 3.13 pag. 106 Anderson



$$M_1 = 0,2$$

$$p_1 = 1 \text{ atm} \quad T_1 = 273 \text{ K}$$

$$q = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

? (2)

$M_1 < 1, q > 0 \Rightarrow$ Flusso accelera!

se $M > \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$: $T \downarrow$, se $M < \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$: $T \uparrow$

$$q + H_{01} = H_{02}$$

$$q + c_p T_{01} = c_p T_{02} \quad T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) = 275,18 \text{ K}$$

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 275,18 \text{ K} + \frac{1 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{1003 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 1272,18 \text{ K}$$

$\frac{p}{p^*} = f(M_1) \rightarrow M_2$ possiamo ricavarlo dal rapporto $\frac{T_{02}}{T_{01}}$!

TABELLE

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}}{T_{01}^*} \cdot \frac{T_{01}^*}{T_{01}}$$

$$\frac{T_{01}^*}{T_{01}} = f(M_1) = 0,1736$$

$$= \frac{1272,18}{275,18} \cdot 0,1736 = 0,8025$$

Tabella: IN $\frac{T_{02}}{T_{01}^*} = 0,8025 \rightarrow$ OUT: $M_2 = 0,59$

$$M_2 = 0,58 \begin{cases} P_2/P^* = 1,632 \\ T_2/T^* = 0,8955 \\ P_{02}/P_0^* = 1,083 \end{cases} \quad M_1 = 0,2 \begin{cases} P_1/P^* = 2,273 \\ T_1/T^* = 0,2066 \\ P_{01}/P_0^* = 1,235 \end{cases}$$

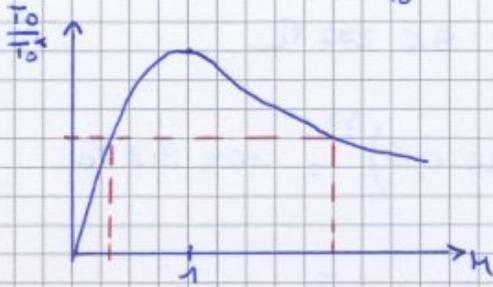
$$P_2 = \frac{P_2}{P^*} \cdot \frac{P^*}{P_1} \cdot P_1 = 1,632 \cdot \frac{1}{2,273} \cdot 1 \text{ atm} = 0,718 \text{ atm}$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T^*} \cdot \frac{T^*}{T_1} \cdot T_1 = 0,8955 \cdot \frac{1}{0,2066} \cdot 273 \text{ K} = 1183 \text{ K}$$

$$P_{02} = \frac{P_{02}}{P_0^*} \cdot \frac{P_0^*}{P_{01}} \cdot P_{01} = 1,083 \cdot \frac{1}{1,235} \cdot p_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 0,90 \text{ atm}$$

Bisogna fare attenzione a questo!

La funzione $\frac{T_0}{T_0^*} = f(M)$ ha un andamento del genere:



QUINDI PER UNO STESSO VALORE DEL RAPPORTO POSSO AVERE 2 MACH!

ATTENZIONE: se $q < q^*$ e $M > 1 \Rightarrow$ NON SCENDO SOTTO $M=1$ in uscita!

Facciamo ora la 2^a risoluzione

$$M_2 = 1,58 \quad \begin{cases} P_2/P^* = 0,5333 \\ T_2/T^* = 0,7117 \\ P_{02}/P_0^* = 1,164 \end{cases}$$

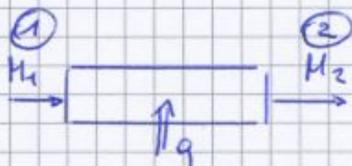
Avevamo $q > q^*$ si dovrebbe ricadere e' impresso

$$P_2 = 0,5333 \cdot \frac{1}{0,1765} \cdot 1 \text{ atm} = 3,025 \text{ atm}$$

$$T_2 = 0,7117 \cdot \frac{1}{0,2803} \cdot 300 \text{ K} = 761,7 \text{ K}$$

$$P_{02} = 1,164 \cdot \frac{1}{3,424} \cdot P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 12,49 \text{ atm}$$

Esercizio.



$$M_1 = 0,4 \quad T_1 = 298 \text{ K} \quad p_1 = 10^5 \text{ Pa}$$

a) $q = 50\,000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$

b) $q = 180\,000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$

? calcolare ② nel caso a) e nel caso b) e il q^* necessario per avere $M_2=1$

$$c_p T_{01} + q = c_p T_{02} \Rightarrow T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} =$$

$$\text{a) } = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) + \frac{50\,000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{1003 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 347,06 \text{ K}$$

$$\text{b) } = 297,21 + \frac{180\,000}{1003} = 476,67 \text{ K}$$

$$\text{a) } \frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{T_{02}}{T_{01}} \cdot \frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{347,06}{297,21} \cdot 0,5290 = 0,6177 \rightarrow M_2 = 0,45$$

$$M_2 = 0,45 \quad \begin{cases} T_2/T^* = 0,6903 \\ P_2/P^* = 1,888 \\ P_{02}/P_0^* = 1,139 \end{cases}$$

(0,44) tabella

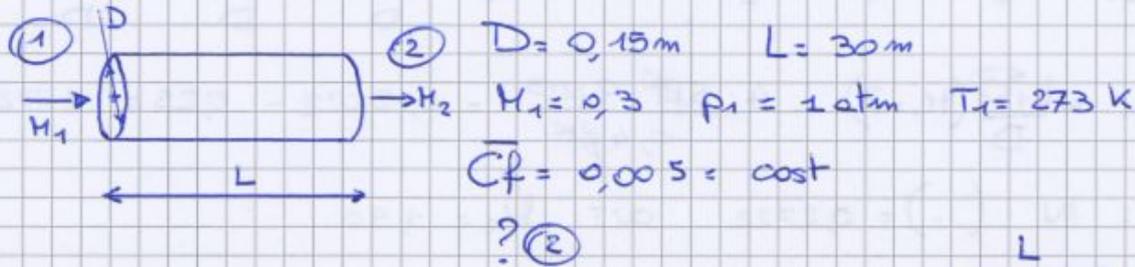
$$M_1 = 0,4 \quad \begin{cases} T_1/T^* = 0,6151 \\ P_1/P^* = 1,961 \\ P_{01}/P_0^* = 1,157 \end{cases}$$

FLUSSO DI FANNO

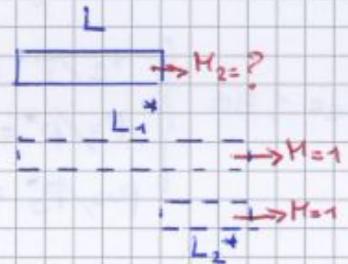
$$4 \frac{L \bar{C}_F}{D} = \left(4 \frac{L^* \bar{C}_F}{D} \right)_1 - \left(4 \frac{L^* \bar{C}_F}{D} \right)_2$$

DATO $f(M_1)$ $f(M_2)$

Es. 3.17 pag 114 Anderson



$$\left(4 \frac{L \bar{C}_F}{D} \right)_{\text{ASSEGNATO}} = \left(4 \frac{L_1^* \bar{C}_F}{D} \right) - \left(4 \frac{L_2^* \bar{C}_F}{D} \right)$$



$$\frac{4 L_2^* \bar{C}_F}{D} = \frac{4 L_1^* \bar{C}_F}{D} (M_1 = 0,3) - \frac{4 L \bar{C}_F}{D}$$

$$= 5,299 - \frac{4 \cdot 30 \cdot 0,005}{0,15} = 1,299$$

Tabella: IN : $\frac{4 L_2^* \bar{C}_F}{D} = 1,299$ OUT: $M_2 = 0,48$

$$M_2 = 0,48 \begin{cases} T_2/T^* = 1,147 \\ P_2/P^* = 2,231 \\ P_{02}/P^* = 1,380 \end{cases} \quad M_1 = 0,3 \begin{cases} T_1/T^* = 1,179 \\ P_1/P^* = 3,619 \\ P_{01}/P^* = 2,035 \end{cases}$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T^*} \cdot \frac{T^*}{T_1} \cdot T_1 = 265,60 \text{ K}$$

$$P_2 = \frac{P_2}{P^*} \cdot \frac{P^*}{P_1} \cdot P_1 = 0,616 \text{ atm}$$

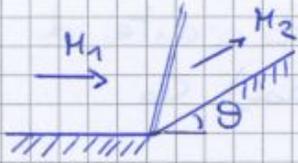
$$P_{02} = \frac{P_{02}}{P_{01}} \cdot \frac{P_{01}}{P_{01}^*} \cdot P_{01} = 1,380 \cdot \frac{1}{2,035} \cdot 1 \left(1 + 0,2 \cdot 0,3^2 \right)^{3,5} = 0,72 \text{ atm}$$

$$\Delta_2 - \Delta_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 111,50 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{\frac{R}{M} T_2} = 0,819 \text{ kg/m}^3$$

URTI OBLIQUI

Es. 4.1 pag. 138 Anderson



$$M_1 = 3 \quad p_1 = 1 \text{ atm}$$

$$T_1 = 288 \text{ K} \quad \theta = 20^\circ$$

$$? \beta, p_2, T_2, M_2, p_{02}, T_{02}$$

Supponiamo urto DEBOLE

• Da tabella $\theta - \beta - M \rightarrow \beta = 37,76^\circ$
 ($\beta = 38^\circ$ da grafico)

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta = 1,837$$

Avendo il M_{1n} lo mettiamo nelle relazioni dell'urto retto per ottenere le grandezze a valle

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{1n}^2 - 1) = 3,77$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1 = 3,77 \text{ atm}$$

QUESTI RAPPORTI SE NO SI OTTENGONO DALLE TABELLE DELL'URTO RETTO!

in: $M_{1n} \rightarrow$ out: $\frac{T_2}{T_1}, \dots$ (2.28)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{\frac{R}{M} T_1} = \frac{101325 \text{ Pa}}{\frac{8314 \text{ J/k}}{28 \text{ kg/mol}} \cdot 288 \text{ K}} = 1,226 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1) M_{1n}^2}{2 + (\gamma-1) M_{1n}^2} = 2,417 \quad (2.27)$$

$$p_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1 = 2,96 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p_2 = \rho_2 \frac{R}{M} T_2 \rightarrow T_2 = \frac{p_2}{\rho_2 \frac{R}{M}} = 449,66 \text{ K}$$

EQ. GAS PERFETI

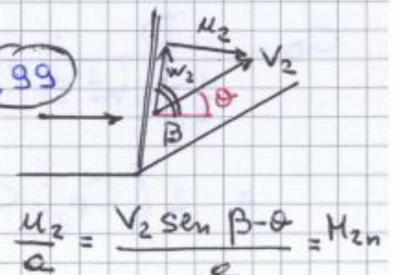
$$M_{2n} = \sqrt{\frac{2 + (\gamma-1) M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma-1)}} = 0,608 \quad (2.19)$$

$$M_{2n} = M_2 \sin(\beta - \theta) \rightarrow M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta - \theta)} = 1,99$$

$$p_{02} = p_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 29,04 \text{ atm}$$

$$T_{02} = T_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right) = 805,79 \text{ K}$$

$$= T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \Leftrightarrow \text{LA } T_0 \text{ SI CONSERVA NELL'URTO}$$



$$\frac{u_2}{a} = \frac{V_2 \sin(\beta - \theta)}{a} = M_{2n}$$

$$M_{2n} = \sqrt{\frac{2 + (\gamma-1)M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma-1)}} = 0,668$$

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta = 1,60$$

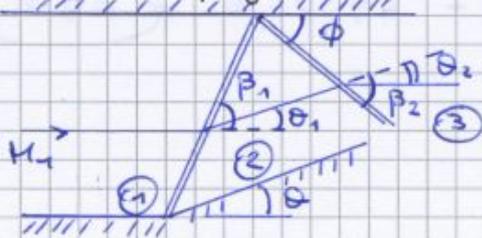
$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta-\theta)} = 2,25 \quad \dots \text{non serve!}$$

Con M_{1n} entriamo nelle relazioni dell'urto retto e si ricava

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{1n}^2 - 1) = 2,82$$

$$\rightarrow C_D = \frac{4}{\gamma M_0^2} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \tan \theta = 2 \cdot 0,0774 = \boxed{0,155}$$

Es. 4.10 pag. 153



RIFLESSIONE REGOLARE

$$M_1 = 2,8$$

$$\theta_1 = 16^\circ$$

$$P_1 = 1 \text{ atm}$$

$$T_1 = 519^\circ \text{R}$$

$$? \phi, M_3, P_3, T_3$$

URTO I M_1 GOVERNA

Tabella urto obliquo: $\beta_1 = 34,92^\circ$

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta = 1,6028$$

$$M_2 = \frac{1}{\sin(\beta-\theta)} \sqrt{\frac{2 + (\gamma-1)M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma-1)}} = \frac{0,6676}{\sin(34,92-16)} = \boxed{2,06}$$

Tabella urto retto

$$\frac{P_2}{P_1} = f(M_{1n}) = 2,82 \quad \rightarrow P_2 = \frac{P_2}{P_1} \cdot P_1 = 2,82 \text{ atm}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = f(M_{1n}) = 1,38 \quad \rightarrow T_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot T_1 = 716,22^\circ \text{R}$$

URTO II M_2 GOVERNA

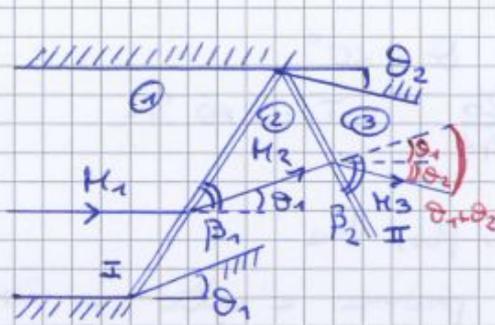
Tab. urto obliquo: IN: $M_2 = 2,06$, $\theta = 16^\circ$

OUT: $\beta_2 = 45,30^\circ$

$$M_{2n} = M_2 \sin \beta_2 = 2,06 \sin(45,30^\circ) = 1,464$$

Es. 4.11 pag 154

RIFLESSIONE



$M_1 = 3$ $\theta_1 = 14^\circ$
 $P_1 = 1 \text{ atm}$ $\theta_2 = 10^\circ$
 $T_2 = 300 \text{ K}$
 ? M_3, P_3, T_3

URTO I

Tab. urto obliquo: IN: $M_1 = 3$ $\theta_1 = 14^\circ$

OUT: $\beta_1 = 31,22^\circ$

$M_{1n} = M_1 \sin \beta_1 = 1,55$

Tab. urto retto: IN $M_{1n} = 1,55$

OUT $M_{2n} = 0,6841$

$\frac{P_2}{P_1} = f(M_{1n}) = 2,63$

$\frac{T_2}{T_1} = f(M_{1n}) = 1,35$

$M_2 = M_{2n} \cdot \frac{1}{\sin(\beta_2 - \theta_1)} = \frac{0,6841}{\sin(31,22^\circ - 14^\circ)} = 2,31$

URTO II

Tab. urto obl: IN $M_2 = 2,31$ $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 24^\circ$

OUT $\beta_2 = 52,53$

MEMO: θ e β

$M_{2n} = M_2 \sin \beta_2 = 1,83$

Tab. urto retto IN $M_{2n} = 1,83$

OUT $M_{3n} = 0,61$

SONO SEMPRE MISURATI RISPETTO ALLA CORRENTE A MONTE DELL'URTO!

$\frac{P_3}{P_2} = f(M_{2n}) = 3,74$

$\frac{T_3}{T_2} = 1,55$

$M_3 = \frac{M_{3n}}{\sin(52,53 - 24^\circ)} = 1,28$

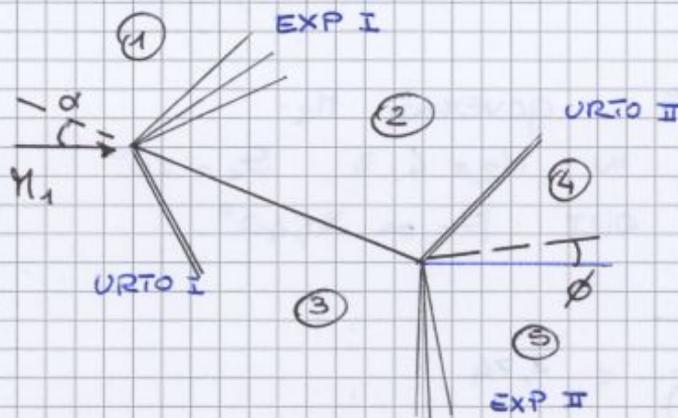
$T_3 = \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot T_1 = 1,55 \cdot 1,35 \cdot 300 \text{ K} = 627,75 \text{ K}$

$P_3 = \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot P_1 = 3,74 \cdot 2,63 \cdot 1 \text{ atm} = 9,83 \text{ atm}$

PLACCA PIANA IN FLUSSO SUPERSONICO

Teoria esatta

Es. 4.16 pag. 178



$$\alpha = 20^\circ$$

$$M_1 = 3$$

? ①, ②, ③, ④, ⑤, ϕ

URTO I

Tabella urto obliquo: IN $M_1 = 3$ $\theta_1 = 20^\circ$
 $\beta_1 = 37,76^\circ$

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta = 1,837$$

$$M_3 = \frac{1}{\sin(\beta_1 - \theta_1)} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma - 1)}} = \frac{0,608}{\sin(37,76^\circ - 20^\circ)} = 1,99$$

Tabella urto retto

$$\frac{P_3}{P_1} = f(M_{1n}) = 3,780$$

$$\frac{P_{03}}{P_{01}} = f(M_{1n}) = 0,794$$

ESPANSIONE I: governa M_1

Tabella espansione

$$\theta_2 - \theta_1 = \nu(M_2) - \nu(M_1)$$

$$\nu(M_1) = 49,76^\circ$$

$$\nu(M_2) = \theta_2 - \theta_1 + \nu(M_1) = 20^\circ - 0^\circ + 49,76^\circ = 69,76^\circ$$

$$\rightarrow \nu(M_2) = 69,76^\circ$$

$$\text{OUT } M_2 = 4,3$$

$$\frac{P_{01}}{P_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\gamma / (\gamma - 1)} = 36,73$$

$$\frac{P_{02}}{P_2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\gamma / (\gamma - 1)} = 230$$

MEMO: ESPANSIONE È ISENTROPICA

$$\rightarrow P_{02} = P_{01}$$

$$\frac{P_{02}}{P_1} = \frac{P_2}{P_{02}} \cdot \frac{P_{02}}{P_{01}} \cdot \frac{P_{01}}{P_1} = (230)^{-1} \cdot 1 \cdot 36,73 = 0,159$$

$$\frac{P_4}{P_2} = f(2,31) = 6,058 \rightarrow \frac{P_4}{P_1} = \frac{P_4}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} = 0,963$$

EXP II

$$\theta_5 = 21^\circ \quad v(M_3) = 26^\circ$$

$$v(M_5) = 21^\circ + 26^\circ = 47^\circ \rightarrow \text{out: } M_5 = 2,87$$

$$\frac{P_{05}}{P_5} = f(2,87) = 30,19$$

$$\frac{P_5}{P_1} = \frac{P_5}{P_{05}} \cdot \frac{P_{05}}{P_{03}} \cdot \frac{P_{03}}{P_{01}} \cdot \frac{P_{01}}{P_1} = \frac{1}{30,19} \cdot 1 \cdot 0,794 \cdot 36,78 = 0,967$$

$$\phi = 1^\circ \quad \frac{P_5}{P_1} = 0,967 \quad \frac{P_4}{P_1} = 0,963$$

Facciamo una bella interpolazione lineare con le differenze tra i valori dei rapporti

$$\frac{y-y_1}{y_0-y_1} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

$$\phi = 0^\circ \quad \frac{P_5}{P_1} - \frac{P_4}{P_1} = 0,0932$$

$$\phi = 1^\circ \quad \frac{P_5}{P_1} - \frac{P_4}{P_1} = 0,004$$

$$\frac{\phi - 0^\circ}{1^\circ - 0^\circ} = \frac{\left(\frac{P_5}{P_1} - \frac{P_4}{P_1}\right) - 0,0932}{0,004 - 0,0932} \rightarrow \text{Ora calcoleremo il } \phi \text{ per una } \frac{P_5}{P_1} - \frac{P_4}{P_1} = 0$$

$$\Rightarrow \phi = 0 - \frac{0,0932}{0,004 - 0,0932} = 1,04$$

Il risultato esatto sarebbe 0,7 però a forza di portarsi dietro approssimazioni è comprensibile un errore del genere.

$$\phi = 0,7$$

URTO II

$$\theta_2 = 20,7^\circ \rightarrow \beta_2 = 33^\circ$$

$$M_{2n} = M_2 \sin 33^\circ = 2,34$$

$$\frac{P_4}{P_2} = f(2,34) = 6,22$$

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{P_4}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} = 6,22 \cdot 0,159 = 0,988$$

EXP II

$$\theta_5 = 20,7^\circ$$

$$v(M_5) = 20,7 + 26 = 46,7^\circ \rightarrow M_5 \approx 2,85$$

$$\frac{P_{05}}{P_5} = 29,28$$

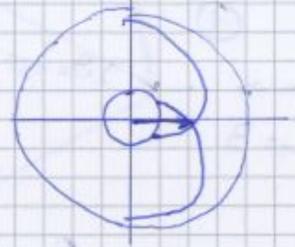
$$\frac{P_5}{P_1} = 0,9973$$

GASDINAMICA ESERCITAZIONE 21/11/2013

- 1) Tabulatore $v(M)$ per $M = 1 \div 5$
- 2) Tracciare 2 epicicli di per $M_1 = 2$

- ▶ C_+ (\pm): $K_+ = 30^\circ$
- ▶ C_- (\mp): $K_- = -30^\circ$

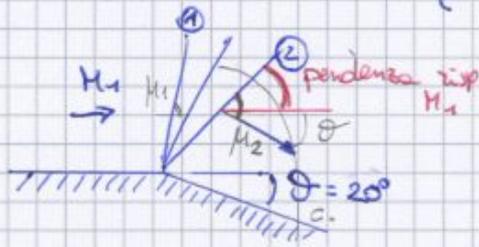
+ Cerchio somico
+ cerchio $\infty = M^* = 2,449$



Es. 4.13 pag. 172 Anderson

$$M_1 = 1,5 \quad P_1 = 1700 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2} = \frac{771 \text{ Kg} \cdot 9,81}{0,0929 \text{ m}^2} = 81416 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 460^\circ \text{R} \quad ^\circ\text{C} = (\text{R} - 491,67) \cdot \frac{5}{9} \rightarrow T_1 = -17,53^\circ \text{C} = 255 \text{ K}$$



? ②
? pendenza di prima e ultima linea del fascio rispetto a direzione di M_1

$$v(M_1) = 11,91^\circ$$

$$\mu(M_1) = 41,81^\circ$$

$$\theta_2 - \theta_1 = v(M_2) - v(M_1) \rightarrow v(M_2) = \theta_2 + v(M_1) = 31,91^\circ$$

↓ tabelle

$$M_2 = 2,20 \quad \mu(M_2) = 26,33^\circ$$

$$T_{02} = T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) = 369,75 \text{ K}$$

$$P_{02} = P_{01} = P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 298880 \text{ Pa}$$

$$P_2 = \frac{P_{02}}{c} = 27952 \text{ Pa}$$

$$T_2 = \frac{T_{02}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)} = 187,88 \text{ K}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{\frac{R}{M} T_2} = 0,518 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Pendenza di ①: $\mu_1 = 41,81^\circ$

" di ②: $\mu(M_2) - \theta = 26,33^\circ - 20^\circ = 6,33^\circ$

LA PENDENZA DELLE LINEE DI ESPANSIONE (cioè le tangenti alle linee C_+) È DATA DA $\mu(M_{\text{locale}})$

$M_{\text{locale}} \rightarrow M$ a cavallo dell'espansione

(tanto sono variazioni infinitesime tra un'onda e l'altra)

GASDINAMICA · ESERCITAZIONE 3/12/2013

MACH CRITICO e C_p CRITICO

Profilo NACA 0015

$\alpha = 4^\circ$ $V_\infty = 20 \text{ m/s} \rightarrow \text{INC.}$ $p_\infty = 10^5 \text{ Pa}$ $T_\infty = 300 \text{ K}$

• In un punto sul dorso è misurata una

$(p - p_\infty) = -338 \text{ Pa}$

? Δp se $M_b = 0,7 \rightarrow \text{COMPRESS.}$

$a_1 = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 300} = 347 \text{ m/s}$

$M_1 = \frac{20}{347} = 0,05 \rightarrow \text{INCOMPRESS.}$

CORREZIONE PRANDTL-GLAUERT

$C_{pc} = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$

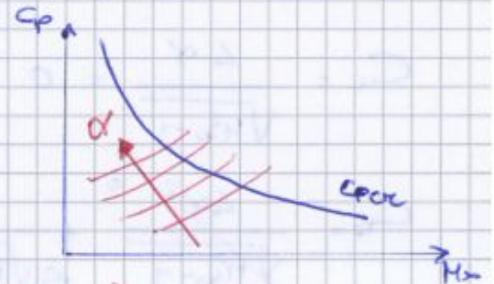
$C_{pi} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} p_\infty V_\infty^2} = \frac{-338 \text{ Pa}}{95 \cdot 1,161 \cdot 20^2 \text{ Pa}} = -1,4556$

$C_{pc} = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1-M_\infty^2}} = \frac{-1,4556}{\sqrt{1-0,05^2}} = -2,038$

$p - p_\infty = +C_{pc} \cdot \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = -69858 \text{ Pa}$

$V_\infty = a \cdot M_\infty = 347 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,7 = 243 \text{ m/s}$

$C_{pcr} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$



$C_{pcr} = \frac{C_{pi \text{ min}}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$

LA MASSIMA VELOCITÀ IN UN PUNTO DEL PROFILO PER FLUSSO INCOMP. È $M=1$.

$\Rightarrow C_{pi \text{ min}} = \frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$

per iterazione
 $M_{\infty cr}$ per $\alpha=4^\circ$ è 0,55

$$= \left[0,04 \frac{x^3}{3} - 0,04 \frac{x^2}{2} + 0,01 \right]_0^1 = 3,33 \cdot 10^{-3}$$

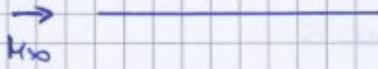
$$\rightarrow C_0 = \frac{2}{1\sqrt{4-1}} \cdot (3,33 \cdot 10^{-3} \cdot 2) = 7,68 \cdot 10^{-3}$$

FLUSSI VISCOSI

Es. 11.5 pag. 205 T_{∞}

PLACCA PIANA

$$Pr_{\infty} = 2 \quad T_{\infty} = 292 \text{ K}$$



? φ per cui si ha T_{MAX}

? T_{MAX} per diversi valori di T_w

$$\varphi = \frac{u}{V_{\infty}}, \text{ varia tra } 0 \text{ e } 1$$

Andamento temperatura nello s.l. TERMICO

$$T = T_w(1-\varphi) + T_{\infty}\varphi^2 + T_{REC}(\varphi-\varphi^2)$$

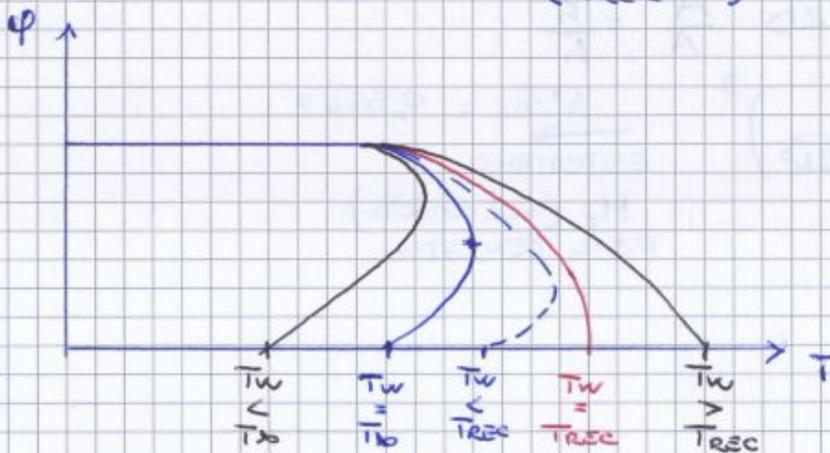
$$\frac{dT}{d\varphi} = -T_w + 2T_{\infty}\varphi + T_{REC} - 2T_{REC}\varphi$$

Imponendo $\frac{dT}{d\varphi} = 0$ si ottiene $\varphi_{(T=T_{MAX})} = \frac{T_{REC} - T_w}{2(T_{REC} - T_{\infty})}$

Sostituendo $\varphi_{(T=T_{MAX})}$ nell'espressione di T :

$$T_{MAX} = T_w \left(1 - \frac{T_{REC} - T_w}{2(T_{REC} - T_{\infty})} \right) + T_{\infty} \left(\frac{T_{REC} - T_w}{2(T_{REC} - T_{\infty})} \right)^2 + T_{REC} \left(\frac{T_{REC} - T_w}{2(T_{REC} - T_{\infty})} - \left(\frac{T_{REC} - T_w}{2(T_{REC} - T_{\infty})} \right)^2 \right)$$

$$[\dots] \quad T_{MAX} = T_w + \frac{1}{4} \frac{(T_{REC} - T_w)^2}{(T_{REC} - T_{\infty})}$$



Es. 11.8 pag. 211

Placca piana, aria STANDARD

$$T_{\infty} = 288 \text{ K} \quad M_{\infty} = 2,5 \quad \text{S.L. TURBOLENTO}$$

$$\varphi(T_{\text{MAX}}) = 0,3$$

? calcolare T_w , T_{MAX} , diagramma $T(\varphi)$

$$\text{Turbolento} \quad R = Pr^{1/3} = 0,71^{1/3} = 0,892$$

$$T = T_w(1-\varphi) + T_{\infty}\varphi^2 + T_{\text{REC}}(\varphi - \varphi^2)$$

$$\varphi = \frac{u}{V_{\infty}}$$

$$a_{\infty} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_{\infty}} = 340 \text{ m/s} \rightarrow u_{(T_{\text{MAX}})} = 0,3 \cdot 350 = 255 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{\infty} = a_{\infty} M_{\infty} = 850 \text{ m/s}$$

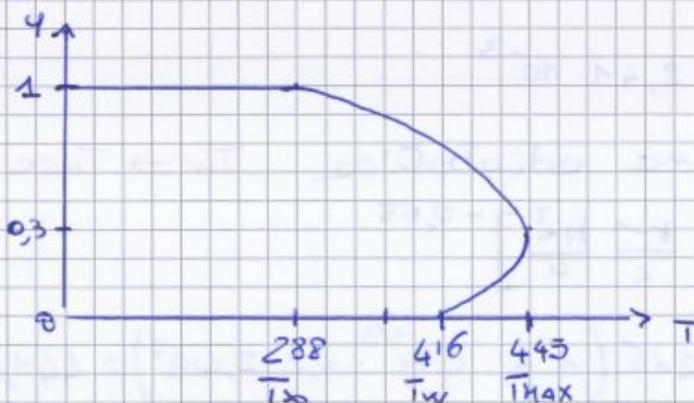
$$\frac{dT}{d\varphi} = 0 \rightarrow \varphi(T_{\text{MAX}}) = 0,3 = \frac{T_{\text{REC}} - T_w}{2(T_{\text{REC}} - T_{\infty})}$$

$$T_{\text{REC}} = T_{\infty} \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 \right) = 609,12 \text{ K}$$

$$\rightarrow 0,3 = \frac{609,12 - T_w}{2(609,12 - 288)} \rightarrow T_w = 416,45 \text{ K}$$

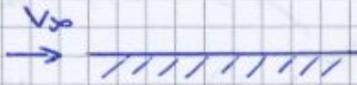
$$T_{\text{MAX}} = T_w + \frac{(T_{\text{REC}} - T_w)^2}{4(T_{\text{REC}} - T_{\infty})} = 445,35 \text{ K}$$

da mettere nel formulario



FLUSSI DI CALORE

Es. 11.17 pag. 215



$$L = 0,6 \text{ m} \quad B = 0,2 \text{ m}$$

$$V_{\infty} = 850 \text{ m/s}$$

$$\text{ARIA STANDARD} \begin{cases} T_{\infty} = 288 \text{ K} \\ p = 101 \text{ kPa} \end{cases}$$

a) $T_w = 400 \text{ K}$

b) $T_w = 700 \text{ K}$

? flusso di calore Q_w in caso a) e b)

Andremo a utilizzare l'analogia degli scambi integrali

$$Re_L = \frac{V_{\infty} L}{\nu} = \frac{850 \cdot 0,6}{1,454 \cdot 10^{-5}} = 35\,075\,653 > 10^7$$

⇒ ALTO TURBOLENTO

$$R_{TURBO} = Pr^{1/3} = 0,892$$

$$C_{Dc} = C_{Di} \cdot X_{TURB}$$

$$= \frac{0,029}{Re_L^{1/2}} \cdot \left[\frac{T_w + T_{\infty}}{2T_{\infty}} + R \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_{\infty}^2}{4} \right]^{-0,65}$$

$q_{\infty} = 340 \text{ m/s}$ a) $X_{TURB} = (1,194 + 0,27875)^{-0,65} = 0,7775$

$M_{\infty} = \frac{V_{\infty}}{q_{\infty}} = 2,5$ b) $X_{TURB} = (1,715 + 0,27875)^{-0,65} = 0,6386$

a) $C_{Dc} = 2,424 \cdot 10^{-3} \cdot 0,7775 = 1,8847 \cdot 10^{-3}$

b) $C_{Dc} = 2,424 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6386 = 1,5479 \cdot 10^{-3}$

$$C_D = \frac{\overline{\tau_w}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2}$$

non confondere $C_f(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2}$
con

ANALOGIA DI REYNOLDS

ALTO TURBOLENTO : $R = Pr^{-1/3} = 0,892$

$A = Pr^{0,6} = 0,8142$

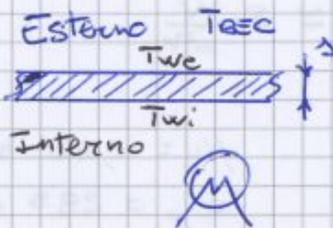
$$\frac{\overline{\tau_w}}{V_{\infty}} = - \frac{A \overline{q_w}}{h_{\infty} + R \frac{V_{\infty}^2}{2} - h_w}$$

$$\overline{q_w} = - \frac{\overline{\tau_w}}{A V_{\infty}} c_p (T_{REC} - T_w) = - K (T_{REC} - T_w)$$

Es. 11.18 FLUSSO TERMICO SU CACCIA SUPERSONICA



Assimiliamo la fusoliera attorno all'abitacolo ad una placca piana dove da una parte c'è il flusso esterno e dall'altra la cabina

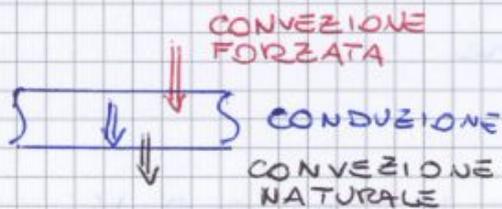


Oltre ad usare un materiale adeguato bisogna mettere uno scambiatore di calore all'interno dell'abitacolo per non arrostitire il pilota! Quanta Potenza termica dovrà ospitare per mantenere $T_i = 25^\circ\text{C}$?

$M_\infty = 2,4$ $L_{\text{abitacolo}} = 1,2\text{m}$ $h_{\text{abitacolo}} = 1,1\text{m}$

Materiale $\left\{ \begin{array}{l} \delta = 6\text{cm} \\ \lambda = 0,1 \end{array} \right.$

quota $20\text{km} \rightarrow T_\infty = 217\text{K}$
 $\rho_\infty = 0,088 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$



Per semplicità facciamo finta che la convezione naturale sia forzata

Come andremo a risolvere il problema?

→ Partendo dall'omologia di Reynolds integrale, calcolando il C_D corretto e ricavando poi lo scambio di calore.

Convezione forzata EXT: $q_w = -K_e (T_{REC} - T_{we})$

Conduzione: $q_w = \frac{\lambda}{\delta} (T_{we} - T_{wi})$

Con. "naturale" INT: $q_w = -K_i (T_{wi} - T_i)$

A regime i 3 flussi devono essere uguali → STAZIONARIO

$$K_e (T_{REC} - T_{we}) = \frac{\lambda}{\delta} (T_{we} - T_{wi}) = K_i (T_{wi} - T_i)$$

→ $q_w = K_{TOT} (T_{REC} - T_i)$ $K_{TOT} = f(K_e, \frac{\lambda}{\delta}, K_i)$

$$T_{REC} - T_{we} = \frac{q_w}{K_e}$$

$$T_{we} - T_{wi} = \frac{q_w}{\lambda/\delta}$$

$$T_{wi} - T_i = \frac{q_w}{K_i}$$

$$k_{e2} = \frac{C_{D02} \cdot \rho \cdot c_p \cdot V_2^2}{2 A V_0} = 88,8 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\frac{1}{K_{TOT}} = \frac{1}{88,8} + \frac{0,06}{0,1} + \frac{1}{8} = 0,736 \rightarrow K_{TOT2} = 1,358$$

$$Q_{w2} = K_{TOT2} (T_{REC} - T_i) = 192,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \rightarrow T_{we2} = 437,8 \text{ K}$$

Se vediamo come cilindrica circa la superficie della cabina, la potenza termica che il condizionatore deve esportare sono:

$$Q = q_w (\pi d \cdot L) = \text{800 W}$$

Ora ci serve T^* , quella della sezione rappresentativa

$$T = T_w(1-\varphi) + T_2\varphi^2 + T_0(\varphi-\varphi^2)$$

$$\downarrow$$

$$\varphi = 0,5$$

$$\downarrow$$

$$T^* = 0,5 T_w + 0,25 T_2 + 0,25 T_0$$

$$= 0,5 \cdot 500 + 0,25 \cdot 1723 + 0,25 \cdot 1779 = 1125,5 \text{ K}$$

p^* non ha senso definirla poiché nello strato limite $\frac{dp}{dx} = 0$

$$p^* = \frac{p_2}{\frac{R}{H} T^*} = 0,7086 \text{ kg/m}^3$$

• $\mu^* \rightarrow$ FORMULA MONOMIA

$$\frac{\mu^*}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T^*}{T_{ref}} \right)^w$$

ARIA $\mu_{ref} = 1,781 \cdot 10^{-5}$

$T_{ref} = 288 \text{ K}$

$w = 0,75$

$$\mu^* = \left(\frac{T^*}{T_{ref}} \right)^w \mu_{ref} = 4,95 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot s$$

oppure Sutherland

$$\mu = S \frac{T^{3/2}}{X+T} = 1,46 \cdot 10^{-6} \frac{(1125,5)^{3/2}}{110 + 1125,5} = 4,46 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot s$$

$$\rightarrow \tau = 1,326 \sqrt{4,46 \cdot 10^{-5} \cdot 0,7086 \cdot 336^2 \cdot 2 \cdot 336 \cdot \frac{1}{0,3}} = 110,20 \text{ Pa}$$

$$V_e = V_2 \rightarrow M_2 = f(M_1) = 0,404 \quad V_2 = 0,404 \cdot \sqrt{\gamma \frac{R}{H} T_2} = 336 \text{ m/s}$$

Velocità potenziale cilindro

$$V_e(\varphi) = 2V_0 \sin \varphi = 2V_0 \sin \frac{x}{R}$$

$$\frac{dV_e}{dx} = 2V_0 \cos \left(\frac{x}{R} \right) \cdot \frac{1}{R} = 2V_2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{R}$$

$$q(0) = - \frac{110,20}{0,79 \cdot 336} \cdot 1003 (1779 - 500) =$$

$$A = P_{\tau}^{2/3} \text{ SLL} = 0,79$$

$$532 \ 551 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

* Dove c'è $V_e(x)$ si mette $V_e(0)$!
Cioè 336 m/s!
Non $2V_0 \sin \frac{x}{R}$!
... anche xk
se no sarebbe $V_e(0) = 0!$

Es. 11.22 - RIENTRO MISSIONE SPAZIALE

Lo shuttle ha un ogive approx con una sfera di
 $r = 0,3 \text{ m}$.

$$M_0 = 15$$

$$z = 100\,000 \text{ ft} = 30480 \text{ m}$$

$$T_0 = 233 \text{ K} = 419 \text{ }^\circ\text{R}$$

$$\rho_0 = 0,01655 \text{ kg/m}^3$$

$$a_0 = 305,8 \text{ m/s}$$

$$V_0 = 4587 \text{ m/s}$$

$$P_0 = 23,083 \frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^2}$$

? $q_w(0)$ con formula di ROHIGI

$$\begin{aligned} q_w(0) &= 0,0145 M_0^{3,1} \sqrt{\frac{P_0}{R}} \\ &= 0,0145 \cdot 15^{3,1} \sqrt{\frac{23,083}{0,98 \text{ ft}}} \\ &= 311,4 \frac{\text{BTU}}{\text{ft}^2 \text{ s}} \end{aligned}$$

⚠️ VUOLE IN INGRESSO

$$[P] = \frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^2}$$

$$[R] = \text{ft}$$

È tutto in unità

IMPERIAL!



$$1 \text{ BTU} = 0,250 \text{ kcal}$$

$$1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J} \rightarrow 1 \text{ BTU} = 0,250 \text{ kcal} \cdot \frac{4186 \text{ J}}{\text{kcal}} = 1046,5 \text{ J}$$

$$\frac{311,4 \text{ BTU}}{\text{ft}^2 \text{ s}} = \frac{311,4 \cdot \text{BTU} \cdot 1046,5 \frac{\text{J}}{\text{BTU}}}{\cancel{\text{ft}^2} \cdot (0,3048)^2 \frac{\text{m}^2}{\cancel{\text{ft}^2}} \Delta} = 3507 \frac{\text{KW}}{\text{m}^2}$$

- Profilo alare NACA 0015:** profilo simmetrico con $t/c=0,15$ e corda $c=100$ mm. Esso è rappresentato da un'ala in scala che ha le estremità attaccate alle pareti della camera di prova; inoltre è montato in modo tale da poterne variare l'incidenza rispetto al flusso d'aria.

Sul dorso del profilo sono presenti 11 prese di pressione posizionate a $\frac{x}{c} * 100 = 0 / 2,5 / 5 / 10 / 20 / 30 / 40 / 50 / 60 / 70 / 80$ [mm]; per migliorare le misure si rileva la pressione sulla sezione di mezzeria.

Ogni presa di pressione è collegata tramite un condotto ad un manometro multicanna.
- Manometro multicanna:** ad ogni canna contenente il liquido manometrico, ovvero alcool, è collegata una presa di pressione. Le prese di pressione sono 13 in totale: 11 sul profilo alare, 1 presa di pressione statica in camera di prova e 1 presa di pressione totale posta a monte del profilo. Le canne sono disposte sotto una lastra di vetro graduata che permette di leggere l'altezza della colonna di fluido nelle singole canne: attraverso la misura della quota piezometrica e il confronto con la canna di riferimento si ricava la pressione differenziale misurata dalla presa di pressione corrispondente. La pressione di riferimento è costituita dalla pressione a monte.

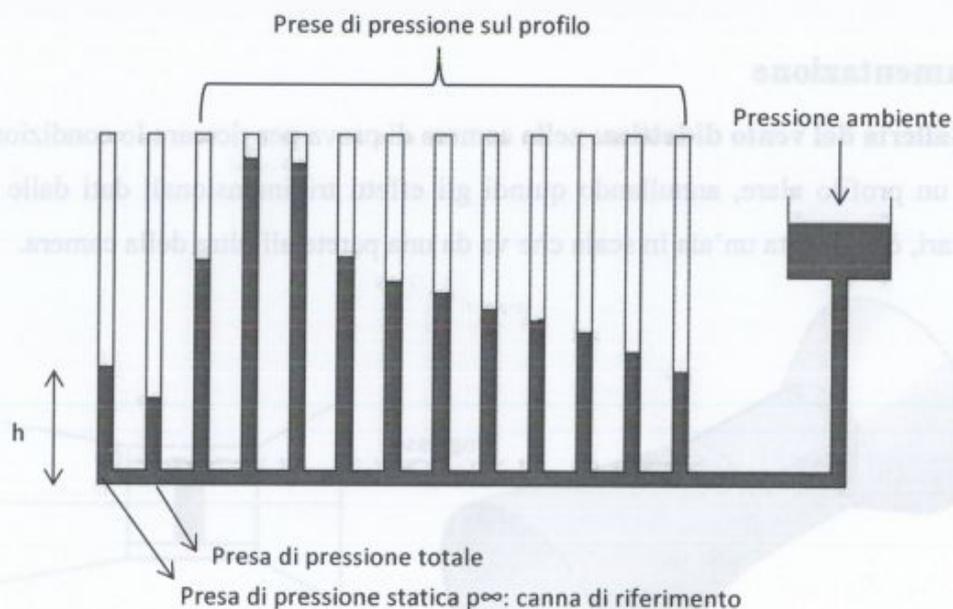


Figura 2: Schema del manometro multicanna

4. Elaborazione dei dati

Per poter calcolare il coefficiente di pressione è necessario conoscere la V_∞ del flusso, ricavabile dalla seconda equazione:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{\gamma(h_\infty - h_0)sen\beta}{\rho}}$$

Il coefficiente di pressione è quindi calcolabile adimensionalizzando la pressione differenziale misurata in corrispondenza di una certa presa:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{p_0 - p_\infty} = \frac{\gamma(h_\infty - h)sen\beta}{\gamma(h_\infty - h_0)sen\beta} = \frac{h_\infty - h}{h_\infty - h_0}$$

Si calcola perciò il c_p in corrispondenza di ogni presa di pressione lungo la corda avendo solamente le differenze tra le quote piezometriche. Volendo anche avere il valore della velocità locale V sul profilo:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = \frac{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho V^2}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2$$

$$V = V_\infty * \sqrt{1 - c_p}$$

N° presa	x/c	$\alpha=11^\circ$				$\alpha=-11^\circ$			
		h[mm]	p-p ∞ [Pa]	V+ [m/s]	cp+	h[mm]	p-p ∞ [Pa]	V- [m/s]	cp-
statica		223				247			
totale		161				193			
1	0	330	-432,5475	40,6964	-1,7258	269	-88,9350	27,2910	-0,4074
2	0,025	396	-699,3525	47,9896	-2,7903	195	210,2100	4,4272	0,9630
3	0,05	392	-683,1825	47,5794	-2,7258	208	157,6575	12,1244	0,7222
4	0,1	337	-460,8450	41,5307	-1,8387	224	92,9775	17,4299	0,4259
5	0,2	306	-335,5275	37,6962	-1,3387	241	24,2550	21,6887	0,1111
6	0,3	286	-254,6775	35,0000	-1,0161	248	-4,0425	23,2164	-0,0185
7	0,4	270	-189,9975	32,6833	-0,7581	251	-16,1700	23,8411	-0,0741
8	0,5	259	-145,5300	30,9903	-0,5806	253	-24,2550	24,2487	-0,1111
9	0,6	249	-105,1050	29,3666	-0,4194	254	-28,2975	24,4499	-0,1296
10	0,7	241	-72,7650	28,0000	-0,2903	255	-32,3400	24,6495	-0,1481
11	0,8	231	-32,3400	26,1916	-0,1290	252	0,0000	23,0043	
		V_∞ [m/s]	24,6495			V_∞ [m/s]	23,0043		

I valori calcolati per $\alpha=-11^\circ$ rappresentano quelli caratteristici del ventre quando il profilo ha $\alpha=+11^\circ$.

POLITECNICO DI TORINO, A.A. 2013-2014, Corso di GASDINAMICA

Relazione di laboratorio:

Visualizzazione di flusso supersonico in galleria del vento didattica

Allievo: **Cappo Matteo s209364**

1. Obiettivi

Visualizzare il flusso supersonico in una galleria del vento didattica con la tecnica Schlieren. In particolare si vogliono osservare le linee di Mach di un'espansione supersonica e le onde d'urto su un piccolo corpo conico collocato nella camera di prova.

2. Strumentazione

- **Galleria del vento supersonica didattica (Figura 1):** galleria di piccole dimensioni (pochi centimetri di diametro per poche decine di centimetri di lunghezza). Essa è formata da un convergente – divergente per realizzare un flusso supersonico nella camera di prova; all'interno di questa possono essere inseriti corpi di pochi millimetri sostenuti da supporti regolabili. Le pareti della camera di prova sono trasparenti, in modo tale che questa possa essere attraversata da un fascio di luce che, riflesso da una serie di specchi e opportunamente filtrato, proietti su uno schermo una visualizzazione delle onde supersoniche (onde d'urto e di espansione). Questo permette di implementare la tecnica Schlieren: a causa della diversa densità del fluido dopo l'onda di espansione/urto, varia localmente l'indice di rifrazione del mezzo e questo permette di visualizzare le onde sullo schermo come delle striature scure.

3. Esecuzione e commenti

La galleria riceve aria compressa da un compressore, il quale può realizzare una pressione massima di circa 8,5 bar; il flusso in ingresso è subsonico. L'esperienza prevedeva di generare un flusso supersonico con cui investire un cono posto nella camera di prova a valle del divergente e visualizzare quindi gli urti sul corpo. Per realizzare l'espansione supersonica nel condotto è necessario un rapporto tra la pressione di ingresso nell'ugello e quella di uscita (pressione ambiente) $\frac{P_{in}}{P_{out}} \approx 8$.

POLARE DELL'URTO

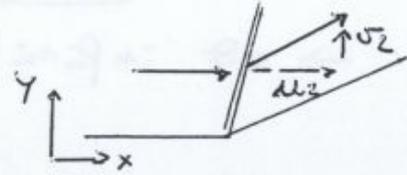
• DIMOSTRAZIONI •

piano ortografico

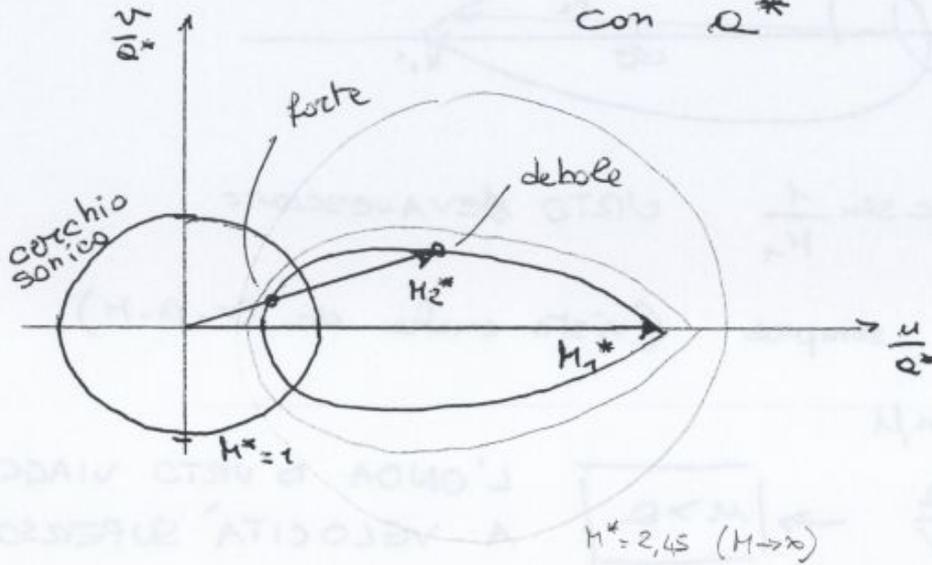
Scomponiamo V secondo x e y

$$\vec{V}_1 = u_1 \vec{i} \quad \vec{V}_2 = u_2 \vec{i} + v_2 \vec{j}$$

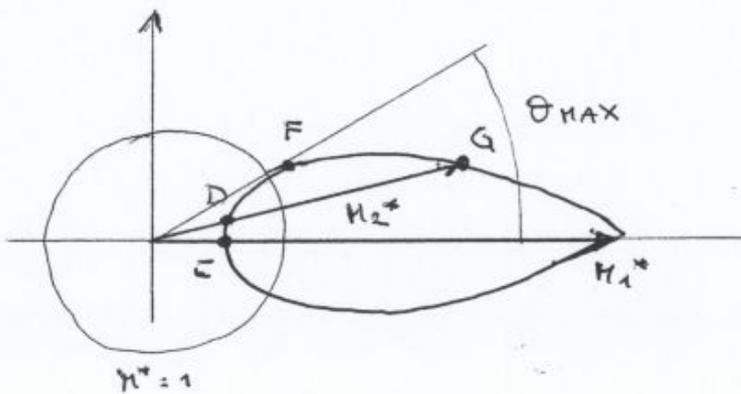
$$\Delta V = V_1 - V_2$$



• Su strofoide (polare) \rightarrow grandezze adimensionalizzate con ρ^*



• Per ogni H_1
 \downarrow
 1 sola polare



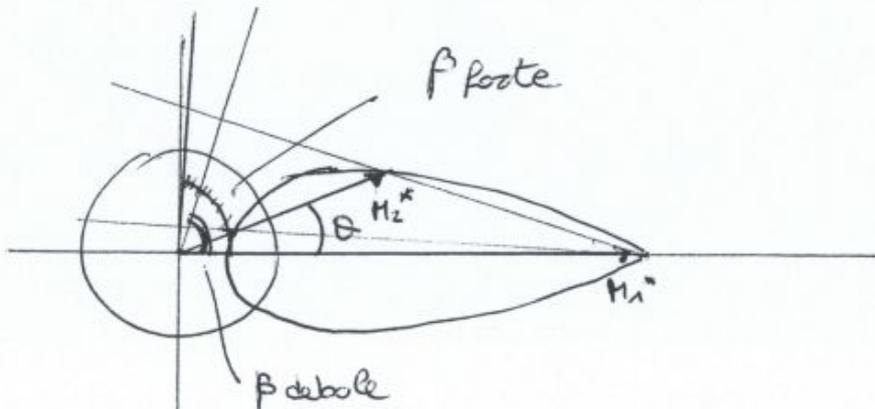
F: $\rightarrow \theta_{MAX}$

E: $0^\circ = \theta \rightarrow$ URTO RETTO

D: $H_2^* < 1 \rightarrow$ URTO FORTE

G: $H_2^* > 1 \rightarrow$ URTO DEBOLE

Come trovare β sulla polare?



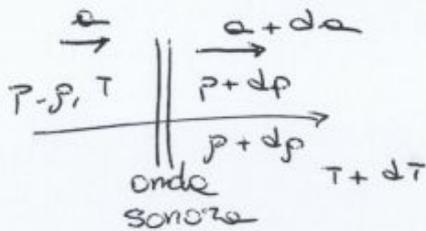
1) Retta che congiunge H_1^* e H_2^*
 $\rightarrow \Delta V = V_{1n} - V_{2n}$

2) Retta da origine \perp a retta precedente

3) Se $H_2 \text{ DEB} \rightarrow \beta \text{ DEB}$
 $H_2 \text{ FORTE} \rightarrow \beta \text{ FORTE}$

VELOCITÀ DEL SUONO

Suono \rightarrow piccola perturbazione, è fenomeno
ADIAIBATICO e ISENTROPICO



Step 1 : EQ. CONTINUITÀ 1D

$$\rho u = \text{cost} \rightarrow \rho a = (\rho + d\rho)(a + da)$$

$$\cancel{\rho a} = \cancel{\rho} a + \rho da + a d\rho + \cancel{da d\rho}$$

INFINITESIMO
ORDINE SUP.

$$\rightarrow \rho da = -a d\rho \rightarrow \frac{da}{d\rho} = -\frac{a}{\rho} \quad (1)$$

Step 2 : EQ. QDM 1D

$$p + \rho u^2 = \text{cost}$$

$$p + \rho a^2 = (p + dp) + (\rho + d\rho)(a + da)^2$$

$$= (p + dp) + (\rho + d\rho)(a^2 + 2ada + \cancel{da^2})$$

TRASC.

$$\cancel{p + \rho a^2} = \cancel{p + dp} + \cancel{\rho} a^2 + \rho da da \rho + d\rho a^2 + \cancel{2\rho da d\rho}$$

TRASC

$$0 = dp + 2\rho p da + a^2 d\rho$$

$$da = \frac{-dp - a^2 d\rho}{2\rho p}$$

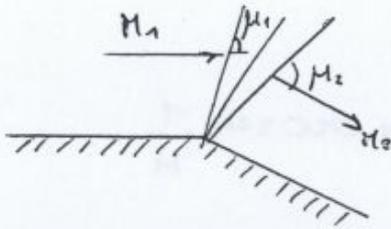
$$\frac{da}{d\rho} = \frac{-dp - a^2 d\rho}{2\rho p} \cdot \frac{1}{d\rho} \rightarrow \frac{da}{d\rho} = -\frac{\frac{dp}{d\rho} + a^2}{2\rho p}$$

Riprendendo (1)

$$-\frac{a}{\rho} = \frac{dp/d\rho + a^2}{-2\rho p}$$

$$\rightarrow \cancel{-\frac{a}{\rho}} (2\rho p) = \frac{dp}{d\rho} + a^2 \rightarrow +2a^2 = \frac{dp}{d\rho} + a^2 \rightarrow \boxed{a^2 = \frac{dp}{d\rho}}$$

ESPANSIONI SUPERSONICHE



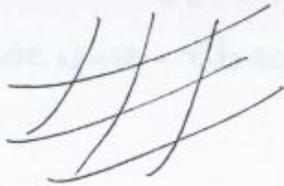
CORRENTE DEFLESSA
CON CONTINUITÀ E GRADUALMENTE
ACCELERATA

→ VARIAZIONE INFINITESIMA GRANDEZZE
ATTRAVERSO L'ONDA DI ESPANSIONE

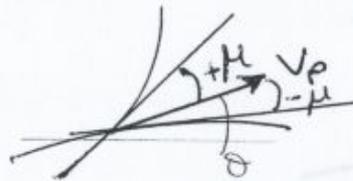
ISENTROPICA!

Linee di Mach: linee che racchiudono il
cono in cui si propagano le piccole
perturbazioni

LINEE CARATTERISTICHE: LINEE SU CUI SONO DETERMINATE
LE GRANDEZZE MA NON LE LORO
DERIVATE



Linee di Mach = TANGENTI LOCALI
DELLE LINEE CARATT.

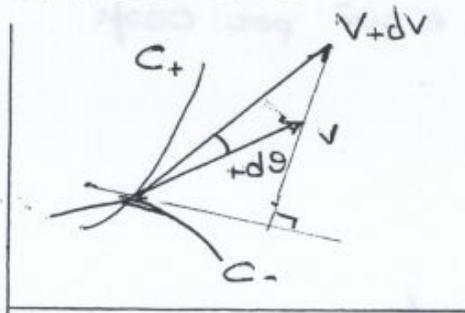


$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{car}} = \tan(\theta \pm \mu)$$

Flusso SUPERSONICO: $\Delta = M^2 - 1 > 0 \rightarrow 2$ direz. caract.

SONICO: M_1 , $\Delta = 0 \rightarrow 1$ " "

Subsonico $\Delta < 0 \rightarrow$ nessuna direz. caract.



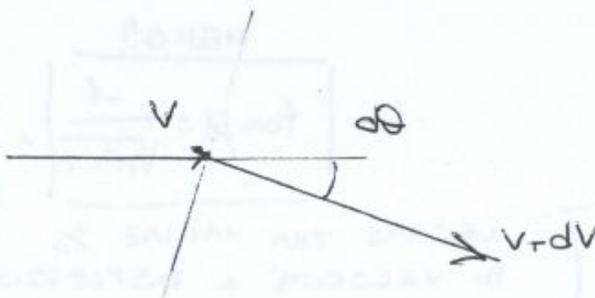
Muovendosi verso C_+

dV è \perp alla tangente a C_-

$d\theta > 0$: espansione

$d\theta < 0$: compressione isentropica

RELAZIONE $\theta = f(M)$?



PRANDTL - MEYER

■ $d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$, ora vogliamo $\frac{dV}{V} = f(M)$

$M = \frac{V}{a} \rightarrow V = M \cdot a \rightarrow \ln V = \ln M + \ln a$

Step 1: DIFFERENZ. DEL LOG. DI $V = M \cdot a$

$$\left| \frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} \right| (*)$$

Step 2: $\frac{da}{a} = f(M)$

$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \quad \left(\frac{a_0}{a} \right) = \frac{\sqrt{\frac{R}{M} T_0}}{\sqrt{\frac{R}{M} T}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$

$a = a_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$, a_0 è una costante

$\frac{da}{a} = \frac{a_0}{a} \cdot -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\gamma-1}{2} M dM \right)$

$\frac{da}{a} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-\frac{\gamma-1}{2}) M dM$

$\frac{da}{a} = -\frac{\gamma-1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} M dM$ la mettiamo in (*)

~~$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} - \frac{(\frac{\gamma-1}{2}) M dM}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)} = \frac{dM(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2) - (\frac{\gamma-1}{2}) M^2 dM}{M(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}$~~

$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} - \frac{(\frac{\gamma-1}{2}) M dM}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)} = \frac{dM(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2) - (\frac{\gamma-1}{2}) M^2 dM}{M(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}$

$= \frac{dM + \frac{\gamma-1}{2} M^2 dM - \frac{\gamma-1}{2} M^2 dM}{M(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}$

Step 3: METTERE $\frac{da}{a}$ IN $\frac{dV}{V}$

$\frac{dV}{V} = \frac{1}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)} \frac{dM}{M}$

Step 4: $\frac{dV}{V}$ in $d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$

$$\boxed{d\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)} \frac{dM}{M}}$$

FLUSSI LINEARIZZATI

- ISENTROPICO
- IRROTAZIONALE
- NON VISCOSO
- PICCOLE PERT. → or fosse
- PROFILO SOFFIE

C_p LINEARIZZATO

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty a_\infty^2 \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}} = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty \gamma \frac{P_\infty}{\rho_\infty} M_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{P}{P_\infty} - 1 \right)$$

$$\rightarrow C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{P}{P_\infty} - 1 \right)$$

Vogliamo $\frac{P}{P_\infty} = f(V)$. → non $f(M)$!

• Campo isentropico → $\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} = h + \frac{V^2}{2}$$

$$T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2C_p} = T + \frac{V^2}{2C_p}$$

$$T - T_\infty = \frac{V_\infty^2}{2C_p} - \frac{V^2}{2C_p} \rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_\infty} = \frac{1}{2C_p} (V_\infty^2 - V^2) \cdot \frac{1}{T_\infty}$$

$$\left(\frac{T}{T_\infty} - 1 \right) = \frac{1}{2 \left(\frac{\gamma R T_\infty}{\gamma - 1} \right)} (V_\infty^2 - V^2) = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(V_\infty^2 - V^2)}{a_\infty^2}$$

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(V_\infty^2 - V^2)}{a_\infty^2}$$

Consideriamo che $V = V_\infty + u' + v' + w'$

$$V^2 = (V_\infty + u')^2 + v'^2 + w'^2 = V_\infty^2 + 2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2$$

$$\rightarrow \frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_\infty^2 - V_\infty^2 - 2u'V_\infty - u'^2 - v'^2 - w'^2}{a_\infty^2}$$

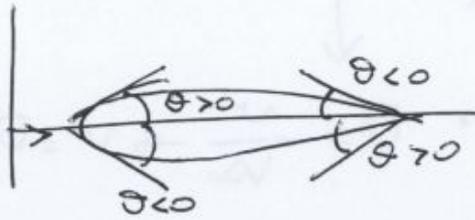
$$= 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2}{a_\infty^2}$$

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2}{a_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2 a_\infty^2} \left(\frac{V_\infty^2}{V_\infty^2} (2u'V_\infty + u'^2 + v'^2 + w'^2) \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

FLUSSO SUPERSONICO LINEARIZZATO

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \lambda = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$



θ : tangente al profilo
RISPETTO A M_∞



$$\phi(x, y) = f(x - \lambda y) + g(x + \lambda y)$$

DORSO se $\phi = \text{cost}$ $\rightarrow f(x - \lambda y) = \text{cost}$
 $\rightarrow x - \lambda y = \text{cost}$

$$y = \frac{x - \text{cost}}{\lambda}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right) \rightarrow \tan \mu_a$$

VENTRE



se $\phi = \text{cost}$ $g(x + \lambda y) = \text{cost}$
 $x + \lambda y = \text{cost}$

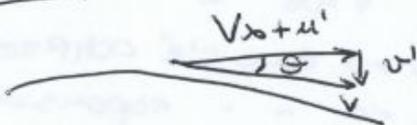
$$y = \frac{-x + \text{cost}}{\lambda}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right)$$

Superflusso

Condizioni al contorno = TANGENZA

DORSO



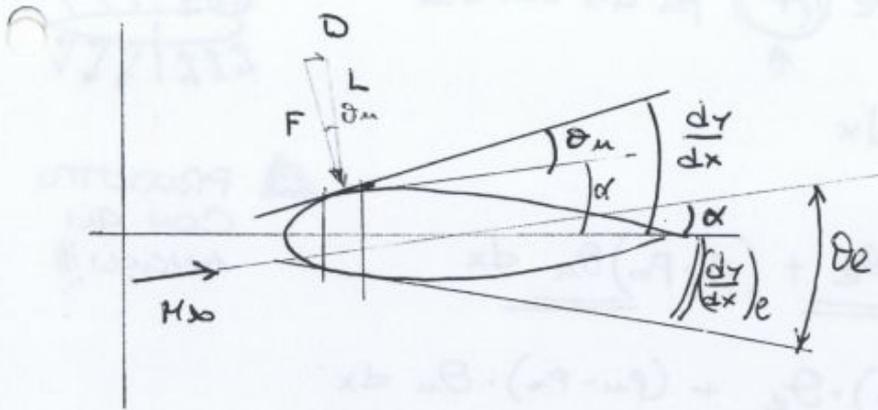
$$u' = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v' = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$u' = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f(x - \lambda y)}{\partial (x - \lambda y)} = f' \cdot 1$$

$$v' = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial (f(x - \lambda y))}{\partial y} = f' \cdot (-\lambda) \rightarrow f' = -\frac{v'}{\lambda}$$

PROFILI ALARI in teoria linearizzata



$$\theta_u = \left(\frac{dy}{dx}\right)_u - \alpha$$

$$\theta_e = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_e + \alpha$$

$$C_{p_u} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_u - \alpha \right]$$

$$C_{p_e} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[-\left(\frac{dy}{dx}\right)_e + \alpha \right]$$

CALCOLO DEL \$C_L\$

$$dL = p_e ds \cos \theta_e - p_u ds \cos \theta_u$$

$$= (p_e - p_u) ds \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \approx 1 \\ ds \approx dx \end{array} \right.$$

$$= (p_e - p_u) dx$$

$$L = \int_0^c (p_e - p_u) - (p_u - p_\infty) dx$$

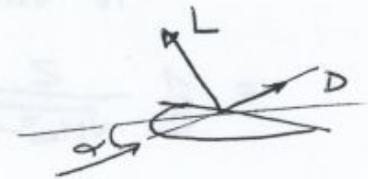
$$C_L = \frac{\int_0^c (p_e - p_u) - (p_u - p_\infty) dx}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c \cdot 1} = \frac{1}{c} \int_0^c C_{p_e} - C_{p_u} dx$$

$$= \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^c \theta_e - \theta_u dx = \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^c \left[-\left(\frac{dy}{dx}\right)_e + \alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)_u + \alpha \right] dx$$

$$C_L = \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^c 2\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)_e - \left(\frac{dy}{dx}\right)_u dx \quad \int_0^c \frac{dy}{dx} dx = 0$$

$$C_L = \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot 2\alpha \cdot c$$

$$\rightarrow \boxed{C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}}$$



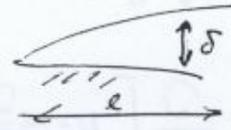
\$dL\$ deve essere normale alla direzione \$\alpha\$ non alla direzione \$\frac{dy}{dx}\$!



STRATO LIMITE 2D

ASSUNZIONI : $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

$$\left| \begin{array}{l} \delta \ll \ell \\ \nu \ll u \end{array} \right|$$



- STAZIONARIO
- COMPRESSIBILE

CONTINUITÀ

Equazioni 2D

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial [\tau_{xx} u + \tau_{yx} v - q_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\tau_{xy} u + \tau_{yy} v - q_y]}{\partial y}$$

QDM

$$x) \quad \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$y) \quad \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

SEMPLIFICAZIONI

QDM y) $\frac{\partial p}{\partial y} \gg$ altri termini $\rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{dp_e}{dx}$$

$$x) \quad \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{dp_e}{dx}$$

~~TRASC.~~

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{dp_e}{dx}$$

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

~~TRASC.~~

ENERGIA

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial (\tau_{xx} u + \tau_{yx} v - q_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xy} u + \tau_{yy} v - q_y)}{\partial y}$$

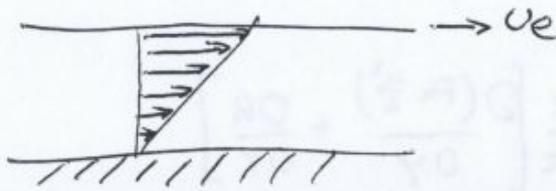
~~TRASC.~~

$$q_x \ll q_y$$

$$u \gg v$$

Così particolari di strato limite

FLUSSO DI COUETTE



$$\frac{QDH}{\rho} \quad \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dpe}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}) = 0 \rightarrow \tau_{yx} = \text{COSTANTE}$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{U_e}{d}$$

$$\text{ENERGIA} \quad \rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

→

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial (Pr \frac{u^2}{2})}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rightarrow \text{SOLUZIONE: } \boxed{h + Pr \frac{u^2}{2} = h_e + Pr \frac{U_e^2}{2} = \text{COST}}$$

Caso ADIABATICO, $Pr=1$, $\frac{dpe}{dx} \neq 0$

$$\text{ENERGIA} \quad \rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial (\frac{u^2}{2})}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right]$$

SOLUZIONE: $H = \text{COSTANTE}$ lungo y

$$\boxed{h + \frac{u^2}{2} = h_e + \frac{U_e^2}{2} = \text{cost!}}$$

INTEGRALE DI ROSEMANN

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_e + \frac{U_e^2}{2} = c_p T_0 = c_p T_w \rightarrow \text{ADIABATICO } Pr=1 \quad \boxed{T_0 = T_w}$$

È veramente soluzione?

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{\partial u}{\partial y} + c_p \frac{dT}{dy} \quad \text{A PARETE } \begin{cases} u=0 \\ \frac{dT}{dy} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{ADIAB.}$$

Caso NON ADIABATICO : ANALOGIA dei CAMPI

SOLUZIONI ANALITICHE SOLO PER PLACCA PIANA $\alpha=0$

$$\alpha=0 \rightarrow \frac{dpe}{dx} = 0$$

$$Pr = 1$$

$$q_w \neq 0$$



Le equazioni dello strato limite si modificano così:

$$qdm \rightarrow x) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dpe}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$$\text{energie} \rightarrow x) \quad \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u^2}{\partial y} \right) + \frac{1}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right]$$

$\uparrow = 1$

$$\rightarrow \begin{cases} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] & (1) \\ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right] & (2) \end{cases}$$

Sono formalmente identiche

se $u = \text{soluz. di (1)} \rightarrow H \text{ soluz. 2 può essere scritta come}$

$$H = \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} \cdot u$$

Determinaz. costanti \Rightarrow IMPORRE CONDIZIONI AL CONFINO

$$y=0 \rightarrow u=0, H=H_w : H_w = \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} \cdot 0 \rightarrow C_1 = H_w$$

$$y \rightarrow \infty \rightarrow u \rightarrow V_{\infty}, H=H_{\infty} : H_{\infty} = \frac{H_w}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} \cdot V_{\infty} \rightarrow C_2 = \frac{H_{\infty} - H_w}{V_{\infty}}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = H_w + \frac{H_{\infty} - H_w}{V_{\infty}} \cdot u} \quad \text{INTEGRALI DI CROCCO}$$

$$\boxed{\frac{u}{V_{\infty}} = \frac{H - H_w}{H_{\infty} - H_w}}$$

ANALOGIA DEI CAMPI
di velocità e temperatura

$$H_w = c_p T_w + \frac{u_w^2}{2} = h_w$$

$$\frac{u}{V_{\infty}} = \frac{c_p T_0 - c_p T_w}{c_p T_{0\infty} - c_p T_w} = \frac{T_0 - T_w}{T_{0\infty} - T_w}$$

$$= \frac{T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) - T_w}{T_{\infty} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 \right) - T_w}$$

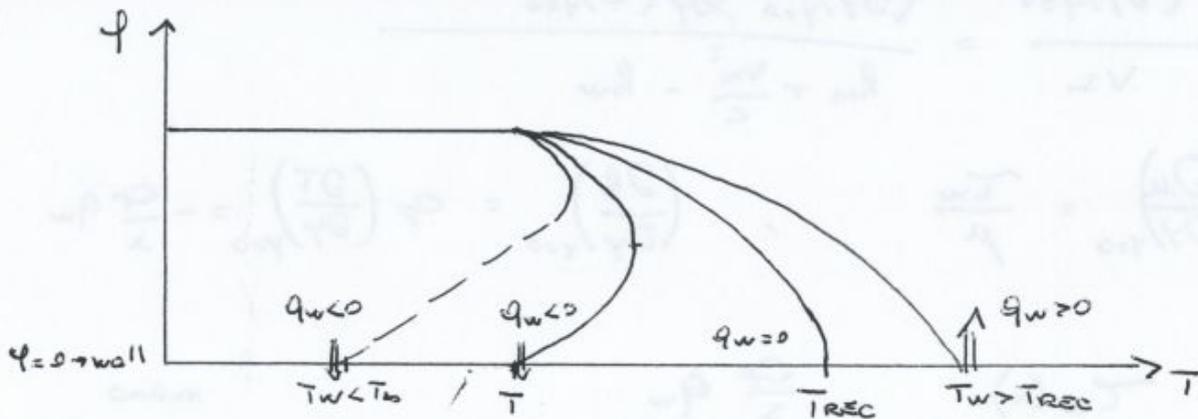
Correzione Analogia dei Compi

$$\boxed{Pr=1} \quad \frac{\mu}{V_{\infty}} = \frac{h + \frac{\mu^2}{2} - h_w}{h_{\infty} + \frac{V_{\infty}^2}{2} - h_w} \quad \underline{\underline{RIGOROSA}}$$

$$\boxed{Pr \neq 1} \quad \frac{\mu}{V_{\infty}} = \frac{h + R \frac{\mu^2}{2} - h_w}{h_{\infty} + R \frac{V_{\infty}^2}{2} - h_w}$$

$$T = T_w(1-f) + T_{\infty} \varphi^2 + T_{REC}(\varphi - \varphi^2)$$

Relazioni generali valide anche per $Pr=1$



$$T_w = T_{\infty} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \neq 0! \quad q_w < 0! \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} > 0 \quad q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) < 0$$

$$T_w = T_{REC} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad \text{Se avessimo } Pr=1 \text{ sarebbe } T = T_{\infty}$$

$$T_w > T_{REC} \quad q_w > 0$$

$$T_w < T_{\infty} \quad q_w < 0$$

Spostandosi verso dx il massimo si abbassa

• ES. isotermico, dov'è T_{max} ? $T_w = T_{\infty}$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -T_w + 2T_{\infty}\varphi + T_{REC} - 2T_{REC}\varphi = 0$$

$$0 = -T_{\infty} + 2T_{\infty}\varphi + T_{REC} - 2T_{REC}\varphi$$

$$\varphi(T_{max}) = \frac{T_{\infty} - T_{REC}}{2T_{\infty} - 2T_{REC}} = \left(+\frac{1}{2}\right)$$

Politecnico di Torino, Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Gasdinamica 27-01-2014

1. Scrivere l'espressione di uno sforzo viscoso
2. Quanti gradi di libertà competono a una molecola triatomica?
3. Primo principio della termodinamica, spiegare il significato dei vari termini
4. Cosa si intende per condizioni di serbatoio?
5. Quali sono le proprietà del trasporto molecolare?
6. A quali numeri di Mach compete il campo ipersonico? Scrivere l'espressione per il coefficiente di pressione per tale campo
7. Definizione di campo omoentropico
8. Come si esprime l'entalpia statica e totale di una corrente?
9. A cosa è associata la condizione sonica che si può verificare nel flusso di Rayleigh?
10. Come è definito il flusso di Fanno e cosa si intende per choking?
11. A valle dell'urto obliquo come variano la pressione statica e totale rispetto a quelle di monte?
12. A parità di Mach la T statica è maggiore a valle di un urto retto o di un urto obliquo?
13. Cosa rappresenta il cono di Mach?
14. Affinchè si generi un'onda d'urto obliqua attaccata come deve essere deflessa la parete rispetto alla direzione del flusso a monte?
15. Cosa si intende per getto sottoespanso?
16. Quali grandezza si diagrammano sul piano dov'è rappresentata la polare? A cosa serve la polare?
17. A valle di un fascio di espansione supersonico la temperatura può aumentare?
18. Dare la definizione di una linea caratteristica
19. Schematizzare il campo di moto della corrente attorno a un profilo alare supersonico posto a incidenza nulla rispetto alla corrente supersonica
20. Quanto vale lo sforzo di attrito nel punto di arresto di un corpo e come varia nel suo intorno? Flusso di calore nel punto di arresto come dipende dalla geometria del corpo? E' minimo o massimo?
21. Se la temperatura di parete è minore della temperatura di recupero della corrente, è presente un flusso di calore? Come è diretto?

GASDINAMICA

DOMANDE

- Cosa esprime concettualmente la grandezza $\beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$?
- Quali sono le proprietà di trasporto molecolare?
- Dare la definizione di un processo isentropico.
- Commentare i vari gradi di libertà energetici di una molecola.
- Indicare quali sono le equazioni di bilancio.
- Indicare a quali campi si possono applicare le equazioni di Eulero e dare una giustificazione.
- Scrivere la relazione che definisce l'entalpia totale.
- Spiegare il concetto di cono di *Mach*.
- Descrivere cosa avviene attraverso un urto retto. Indicare come variano le varie grandezze tra monte e valle.
- Con quale velocità si muove un'onda d'urto retta?
- Scrivere la regola di *Prandtl-Glauert* per la correzione del coefficiente di pressione e commentare brevemente la relazione.
- Scrivere la relazione che esprime il coefficiente di pressione nella forma linearizzata nel caso di un profilo alare immerso in una corrente supersonica.
- Se attorno a un profilo alare sottile posto a bassa incidenza in una corrente supersonica risulta $C_p > 0$ cosa significa?
- Se una placca piana è posta ad incidenza negativa in una corrente supersonica, sul dorso cosa si genera?
- Qual'è il corpo assialsimmetrico di minima resistenza d'onda a parità di lunghezza e di volume?
- Scrivere l'analogia dei campi di velocità e di entalpia.
- Se la temperatura della parete è maggiore della temperatura di recupero della corrente, è presente scambio termico tra parete e corrente?
- Indicare a grandi linee come si procede per il calcolo della resistenza d'attrito di una placca piana investita da una corrente supersonica.
- Quale differenza di temperatura determina il flusso di calore scambiato tra placca piana e corrente in condizioni di elevato numero di mach e nel caso di $Pr=1$ e $Pr \neq 1$?
- Quale condizione deve verificarsi nei confronti del profilo di velocità affinché lo strato limite laminare possa destabilizzarsi? Indicare le cause che possono portare alla destabilizzazione.
- Indicare la geometria più opportuna del bordo di attacco per limitare l'entità del flusso di calore a parete nel punto di arresto in condizioni di elevati numeri di Mach.
- Spiegare perché bisogna tenere in conto gli effetti della compressibilità e della trasmissione termica nella valutazione della resistenza di attrito di una placca piana. Presentare il metodo che consente di tenere in conto tali effetti.
- Impostare la dimostrazione per ricavare il coefficiente di resistenza d'onda di un profilo alare sottile e posto a bassa incidenza in una corrente supersonica. Commentare il risultato finale.
- In condizioni di flusso isoterma a elevato numero di Mach, tra parete e corrente che la lambisce è presente scambio termico? Dare una giustificazione alla risposta.
- Spiegare come si ricava l'analogia di Reynolds e come si modifica se $Pr \neq 1$.

- Schematizzare e descrivere il flusso attorno a un profilo alare biconvesso posto ad incidenza nulla in una corrente supersonica. Diagrammare qualitativamente la distribuzione di pressione motivandone gli andamenti.
- Se un pistone si muove con sequenze di impulsi entro un cilindro:
 - davanti al pistone propagano onde di compressione e dietro onde di espansione;
 - davanti al pistone propagano onde di espansione e dietro onde di compressione;
 - davanti al pistone propagano onde di espansione e dietro ancora onde di espansione.
- Le grandezze di arresto sono costanti attraverso una espansione supersonica:
 - solo la temperatura di arresto;
 - tutte le grandezze;
 - si riduce la pressione totale;
 - si riduce solo la densità.
- Lo sforzo viscoso ha le caratteristiche di:
 - un vettore;
 - un tensore;
 - uno scalare.
- Attraverso una espansione supersonica, la velocità:
 - aumenta;
 - diminuisce;
 - prima aumenta e poi si riduce;
 - resta invariata.
- L'equazione differenziale di Prandtl-Meyer a quale campo di riferisce?
 - ad un'onda d'urto;
 - ad una espansione subsonica comprimibile;
 - ad una espansione supersonica;
 - ad un'espansione supersonica irreversibile.

1. Si consideri un condotto a cui viene fornito calore con condizioni di ingresso definite da:

$$M_1 = 2, P_1 = 1 \text{ atm}, T_1 = 288 \text{ K} . \text{ Trascurando gli effetti dell'attrito, calcolare:}$$

la quantità di calore q necessaria perché si realizzi la condizione di *choking* nel condotto e calcolare la corrispondente pressione e temperatura nella sezione di uscita.

$$q = \text{_____}, P_2 = \text{_____}, T_2 = \text{_____} .$$

2. Una corrente di aria investe il corpo $2D$ schematizzato nella figura riportata con incidenza $\alpha = 10^\circ$. In corrispondenza dei due spigoli posteriori la corrente si separa e le linee di corrente risultando allineate con l'asse del corpo. Considerando la teoria esatta dell'urto-espansione, calcolare: il numero di *Mach* nel campo della parete inclinata inferiore (M_2), il numero di *Mach* nel campo a valle dello spigolo di separazione (M_3), il numero di *Mach* nel campo della parete inclinata superiore (M_4) e il numero di *Mach* nel campo a valle dello spigolo di separazione superiore (M_5). $M_1 = 3.5, P_1 = 1 \text{ atm}$, angolo di apertura del cuneo $\theta_w = 16^\circ$. Assumere urto debole.

ONDE DI ESPANSIONE E ONDE D'URTO

25. Spiegare il concetto di cono di Mach.
26. Descrivere cosa avviene attraverso un urto retto, indicare come variano le grandezze tra monte e valle.
27. La pressione statica a valle di un urto retto rimane costante? No aumenta.
28. Con quale velocità si muove un'onda d'urto retta?
29. Come si individua sulla strofoide la deflessione dell'urto obliquo?
30. Come deve essere inclinata la parete per avere un urto obliquo?
31. Come si individua l'inclinazione di una generica onda di espansione?
32. La normale alla tangente dell'epicloide che direzione ha?

TEORIA LINEARIZZATA

33. Schematizzare e descrivere il flusso attorno a un profilo alare biconvesso posto ad incidenza nulla in una corrente supersonica. Diagrammare qualitativamente la distribuzione di pressione motivandone gli andamenti.
34. Scrivere la regola di *Prandtl-Glauert* per la correzione del coefficiente di pressione e commentare brevemente la relazione.
35. Scrivere la relazione che esprime il coefficiente di pressione nella forma linearizzata nel caso di un profilo alare immerso in una corrente supersonica.
36. Se attorno a un profilo alare sottile posto a bassa incidenza in una corrente supersonica risulta $C_p > 0$ cosa significa?
37. Se una placca piana è posta ad incidenza negativa in una corrente supersonica, sul dorso cosa si genera? Onda d'urto
38. Qual'è il corpo assialsimmetrico di minima resistenza d'onda a parità di lunghezza e di volume?
39. Impostare la dimostrazione per ricavare il coefficiente di resistenza d'onda di un profilo alare sottile e posto a bassa incidenza in una corrente supersonica. Commentare il risultato finale.
40. Cosa si intende per coefficiente di pressione critico?
41. Schematizzare un profilo adatto al transonico e supersonico.

61. Spiegare perché bisogna tenere in conto gli effetti della compressibilità e della trasmissione termica nella valutazione della resistenza di attrito di una placca piana. Presentare il metodo che consente di tenere in conto tali effetti.

DOMANDE APERTE

- 1) Perché la corrente a monte di un urto retto deve essere supersonica e quella a valle è subsonica?
- 2) Dimostrazione Θ - β - M
- 3) Ricavare il profilo di $T=T(\varphi)$ nel caso di strato limite non adiabatico, $\text{grad}P=0$ e $Pr \neq 1$

Variatione di entropia

$$\Delta s = \Delta_i = c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{R}{M} \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

$$\Delta s = \Delta_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \equiv c_p \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)$$

Isoentropiche

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/\gamma-1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\gamma/\gamma-1}$$

Relazione entropia totale + varie

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

$$a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

$$\frac{v_{\text{lim}}}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$\frac{v}{a^*} = \frac{v}{\sqrt{\gamma \frac{R}{M} T^*}}$$

$$\frac{v_{\text{lim}}}{a^*} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\frac{a_0^2}{\gamma-1} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

$$M^{*2} = \frac{M^2(\gamma+1)}{2 + M^2(\gamma-1)}$$

$$\text{per } M \rightarrow \infty \Rightarrow M^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\gamma/\gamma-1}$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left[\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\gamma/\gamma-1}$$

ARIA 0,833

0,528

0,634

Flusso quasi 1D

$$\rho u A = \text{cost}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A}{A^*}$$

$$\frac{dp}{p} = -M^2 \frac{du}{u}$$

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u}$$

ONDE OBLIQUE SUPERSONICHE

• URTO OBLIQUO



$$\text{IN: } M_{1n} = M_1 \sin \beta$$

$$\text{OUT: } M_{2n} = M_2 \sin(\beta - \theta)$$

$$\text{Da urto retto: } M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \left[\frac{2 + (\gamma - 1)(M_1 \sin \beta)^2}{2\gamma(M_1 \sin \beta)^2 - (\gamma - 1)} \right]$$

$$\tan \theta = 2 \frac{1}{\tan \beta} \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]$$

■ ESPANSIONI SUPERSONICHE

$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\nu(M) = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \nu(M_2) - \nu(M_1)$$

$$4 \frac{C_p L^*}{D} = \left[\frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right) \right]$$

Flussi ipersonici $M_1 \rightarrow \infty$

$$\frac{p_2}{p_1} \approx \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2 \beta \quad \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty$$

$$C_p = \frac{4}{\gamma+1} \sin^2 \beta$$

$$\theta = \frac{2\beta}{\gamma+1} \rightarrow \beta = \frac{\gamma+1}{2} \theta$$

Newton: $C_p = 2 \sin^2 \theta$

PIACCA PIANA

Per $M_1 \rightarrow \infty$
 $\gamma \rightarrow 1$

$$\rightarrow C_p = 2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{cases} C_L = 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ C_D = 2 \sin^3 \alpha \end{cases}$$

FATTORE DI RECUPERO E DI ANALOGIA

	R	A
Flusso Couette	Re	Re
S.L. LAMINARE	$Re^{1/2}$	$Re^{2/3}$
S.L. TURBO	$Re^{1/3}$	$Re^{0.6}$
∞ TURBO	1	1

$$R = Re^2$$

$$A = Re^0$$

ANALOGIA SCAMBI INTEGRALI

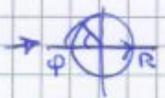
$$\frac{\bar{T}_w}{V_0} = - \frac{A \bar{q}_w}{c_p (T_{resc} - T_w)}$$

$$\bar{q}_w = - \frac{\bar{T}_w}{AV_0} c_p (T_{resc} - T_w) = -K (T_{resc} - T_w)$$

CONVEZIONE FORZATA

$$K = \frac{\bar{q}_w c_p}{AV_0} = C_{Df} \cdot \frac{c_p \rho_0 V_0}{2A}$$

PUNTO D'ARRESTO



$$\varphi = \frac{x}{R}$$

$$U_e(\varphi) = 2V_0 \sin \varphi$$

$$U_e(\varphi) = \frac{3}{2} \dots$$

$$K = \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_{x=0} = \frac{2V_0}{R}$$

CILINDRO
SFERA

SFORZO D'ATTRITO NEI PRESSI DEL PUNTO DI ARRESTO

Cilindro

Sfera

$$\tau_w = 1,2326 \sqrt{\mu^* \rho^* U_e^2(x) \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_0}$$

$$\tau_w = 1,3119$$

$$q_w(\theta) = 0,9570 Re^{-0.67} \left\{ (\rho_e \mu_e K)^{1/2} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_e \mu_e} \right)^{1/2} c_p (T_0 - T_w) \right\}$$

CILINDRO

0,763

SFERA

Si utilizza cmq analogia Reynolds

ROHIG

$$q_w(\theta) = 0,0145 H_0^{3.1} \sqrt{\frac{\rho_0}{R}} \left[\frac{BTU}{ft^2 s} \right]$$

$$1 BTU = 0,250 KCal$$

* CILINDRO

$$K = \frac{4V_0}{D}$$

INCOMP.

$$\frac{KD}{V_0} = 4(1 - 0,416 H_0^2)$$

SUB. COMP.

$$\frac{KD}{V_0} = \sqrt{8} \frac{\rho_0}{\rho_e}$$

SUPERS.