NUMERO: 822

DATA: 10/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Rechichi

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Cortese

• RICHIAMI SUGLI INSIEMI

- Il concetto di insieme è un concetto PRIMITIVO

Un insieme è una collezione di elementi

$A, B, C \ldots$ insiemi

$a, b, c \ldots$ elementi dell'insieme

Possiamo elencare gli elementi in 3 modi:

- $\{1, 2, 3\}$ (dichiarativo)
- $\{a, b, c, d, e\}$ (per tabulazione)
- $A = \{x : x^2 - 1 = 0\}$

NOTA:

$A = \{p, a, o, l, \cancel{x}\}$ $p \in A$; $r \notin A$

$B = \{\forall x \in U, \{1\}\}$

quantificatori
$$\begin{cases} \exists = \text{esiste almeno un} \\ \exists! = \text{esiste unico} \\ \forall = \text{per ogni} \end{cases}$$

$\setminus$ = meno, eccetto ; $\vee$ = vel (o l'… o l'…

$\wedge$ = et; deve essere verificato contemporaneamente

RELAZIONI TRA INSIEMI

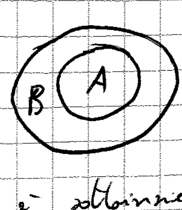
- Una relazione tra insiemi significa operare un confronto tra insiemi

• INCLUSIONE

$A \subseteq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A, a \in B$

↓

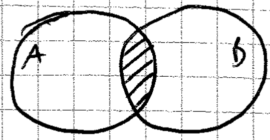
A è incluso in B



A è sottoinsieme di B

- INTERSEZIONE

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

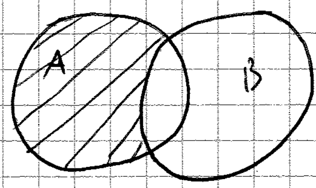


NOTA:

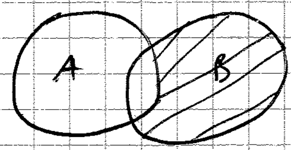
$A \subseteq B \iff A \cap B = A$

- DIFFERENZA INSIEMISTICA

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



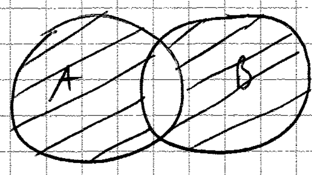
$B \setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$



- DIFFERENZA SIMMETRICA

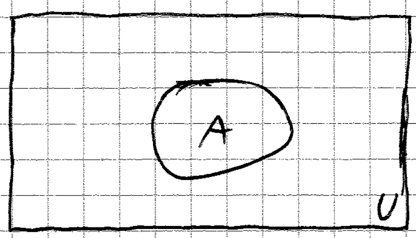
$A \triangle B = \{x : x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



- COMPLEMENTO

$\mathcal{C}_U(A) = U \setminus A$



i) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = A$

i) $\mathcal{C}(\Phi) = U$

$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{C}(A) \supseteq \mathcal{C}(B)$

includerà

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 172

NOTE:

1. se A è un insieme di infiniti elementi allora $P(A)$ avrà infiniti sottoinsiemi;
2. l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme.

INSIEMI NUMERICI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m \text{ ed } n \text{ primi tra loro}\right\}$$

NOTA:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \ (\subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C})$

• ELEMENTI DI LOGICA

p, q, r

- p è una proposizione solo se essa è un enunciato non ambiguo rispetto al valore di verità vero o falso (V/F).

p: "$6 < 10$" $\qquad$ q: "$5 < 3$"

r: "in quest'aula ci sono 315 studenti in questo momento" (sia che sia vera sia che sia falsa, è una proposizione)

s: "il caffè è buono" (non è una proposizione)

LA MATEMATICA SI OCCUPA SOLO DI PROPOSIZIONI

CONNETTIVI LOGICI

- CONGIUNZIONE $\qquad \wedge$

$p \wedge q$ è una proposizione vera solo se lo sono contemporaneamente sia p sia q

- DISGIUNZIONE $\qquad \vee$

$p \vee q$ è una proposizione falsa solo se lo sono contemporaneamente

- DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA LOGICA

p	q	$p \xleftrightarrow{\text{(se e solo se)}} q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

quando una è vera l'altra è vera, quando una è falsa l'altra è falsa

i) p è condizione necessaria e sufficiente (CNS) per q

ii) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$1 \wedge 2$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

NOTA:

1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ ⟶ o non piove o vado in piscina ⟺ se piove vado in piscina

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ ⟶ se un quadrilatero (p) è un quadrato (q) ha 4 angoli interni retti

⇕

se un quadrilatero non ha 4 angoli interni ($\neg q$) retti, non è un quadrato ($\neg p$)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

$$N_p = \{ n \in \mathbb{N} : \exists K \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 2K \}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_p \wedge \mathbb{N}_d$$

PREDICATO $\overset{def}{\iff}$ è una proposizione che contiene variabili libere

$p(n)$: "n è un numero pari" (predicato)

$p(5)$ È UNA PROPOSIZIONE FALSA

$p(10)$ È UNA PROPOSIZIONE VERA

I) USO DEI QUANTIFICATORI UNIVERSALI

$$\forall n : q(n)$$

$$\exists n : q(n)$$

$$\forall n : \neg q(n)$$

ES. $q(n): n^2 + 25 = 10$

$\forall n : q(n)$ F

$q(n): n^2 - 25 = 0$

$\exists n : q(n)$ V

$\forall n : q(n)$ F

II) PREDICATI CON PIÙ VARIABILI LIBERE

$p(x, y) =$ "$x + y = 10$" ← PREDICATO

$p(2, 8) =$ V ← PROPOSIZIONE VERA

$p(1, 8) =$ F ← PROPOSIZIONE FALSA

$\forall x, \forall y : p(x, y)$ F

$\exists x, \forall y : p(x, y)$ F

$\mathbb{Z}$ è estensione nel quale è vero:

$$\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z} : a+b=b+a=0$$

b si dice opposto di a e si indica con $(-a)$

$$\boxed{I_1(+) = i_I)\ i_{II})\ i_{III})\ i_{IV})}$$

PRODOTTO:

$i_I)$ PROPRIETÀ COMMUTATIVA $\forall a,b : a\cdot b = b\cdot a$

$i_{II})$ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\forall a,b,c : a\cdot(b\cdot c) = c\cdot(a\cdot b)$

$i_{III})$ ELEMENTO NEUTRO $\forall a, \exists b \in \mathbb{N} : a\cdot b = b\cdot a = 1$

$b=1 \rightarrow \forall a : a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

$i_{IV})$ $\boxed{?\ \forall a, \exists z : a\cdot z = z\cdot a = 1}$

necessità di estendere N a Q

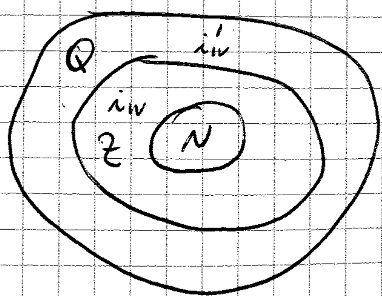
In Q valgono tutte le $I_1(+)$ e vale la $i_{IV})$:

$$\forall a, \exists z : a\cdot z = z\cdot a = 1$$

z si dice reciproco di a e si indica come

$$z = \frac{1}{a}$$

$$\boxed{I_1(\cdot) = i_I)\ i_{II})\ i_{III})\ i_{IV})}$$

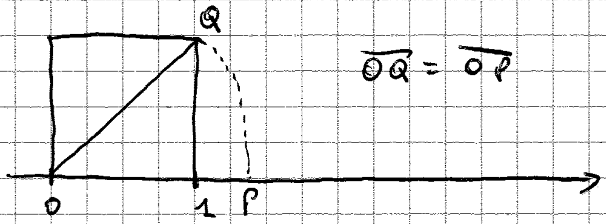


OSSERVAZIONE:

$\forall \left(\frac{m}{n}\right) \in Q \rightarrow P \in$ retta

$\forall P \in$ retta $\rightarrow \exists \left(\frac{m}{n}\right)$ corrispondente? NO!

Dimostrazione:



$\overline{OQ} = \overline{OP}$

esiste $\left(\frac{m}{n}\right)$ corrispondente a P?

$\overline{OQ}^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = \overline{OP}^2$

$\exists \left(\frac{m}{n}\right) \in Q : \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \in N_p \Rightarrow m \in N_p$

$\exists k \in N : m = 2k \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2n^2 =$

$\Rightarrow n^2$ è pari $\Rightarrow n$ è pari $\Rightarrow n \in N_p$

$\left.\begin{array}{l} m \text{ pari} \\ n \text{ pari} \end{array}\right\}$ non possono essere primi tra loro

- $\mathbb{R}$ è l'insieme nel quale $\forall P \in r \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ corrispondente (assioma di completezza).

OSSERVAZIONE:

$\frac{m}{n} \in Q \rightarrow$ allineamento decimale

$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,4\overline{9}$

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$

$\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$

$\frac{1}{4} = 0,25 = 0,24\overline{9}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 172

$\mathbb{R}$ è un campo totalmente ordinato; in esso valgono tutte le operazioni algebriche ordinarie.

- Insieme non ordinato

INSIEME DELLE PARTI

$X = \{a, b, c\}$ $\mathbb{P}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a\,b\}, \{a\,c\}, \{a\,c\}\}$

$\forall_A \in \mathbb{P} \Rightarrow A \subseteq A$

$\forall A, B, C \in \mathbb{P}(X): A \subseteq B \land B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$\forall_{A,B,C} \in \mathbb{P}(X): A \subseteq B \land B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

presi $x, y \in \mathbb{R}$ essi sono sempre confrontabili

cioè:

$\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \lor x \geq y$

· È totale l'ordinamento di $\mathbb{P}(X)$?

$\forall_{A,B} \in \mathbb{P}(X): A \subseteq B \lor B \subseteq A$

$\{a, b\} \leq \{c\}$? NO

$\{c\} \leq \{a, b\}$? NO

• MASSIMI E MINIMI DI UN INSIEME

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

ES. $A = \{1, 2, 3\}$ $\max A = 3$ $\min A = 1$

ES. $B = [2, 5]$ $\max B = 5$ $\min B = 2$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ un insieme di richiamo totalmente ordinato:

$$x_M \text{ è } \max A \overset{def}{\iff} (x_M \in A) \wedge (\forall x \in A : x_M \geq x)$$

$$x_m \text{ è } \min A \overset{def}{\iff} (x_m \in A) \wedge (\forall x \in A : x_m \leq x)$$

ES. $C = [2, 5)$ $\min C = 2$ $\max C \nexists$

ES. $E = \mathbb{N}$ $\min E = 0$ $\max E \nexists$

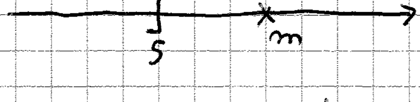
lim. ES. $F = \mathbb{Z}$ $\min F \nexists$ $\max F \nexists$

ill. ES. $G = (-2, 2)$ $\min G \nexists$ $\max G \nexists$

• LIMITATEZZA DI UN INSIEME

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

A è superiormente limitato $\overset{def}{\iff} \forall x \in A \, \exists m \in \mathbb{R} : m \geq x$



A è inferiormente limitato $\overset{def}{\iff} \forall x \in A \, \exists n \in \mathbb{R} : n \leq x$

A è semplicemente limitato $\overset{def}{\iff} \forall x \in A \, \exists m, n \in \mathbb{R} : n \leq x \leq m$

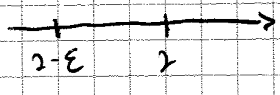
CARATTERIZZAZIONE DEL Sup A:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$$s = \text{Sup}\,A \iff \begin{cases} i)\ s \text{ è maggiorante di } A \\ i_2)\ s \text{ è il minore dei maggioranti} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} i)\ \forall x \in A:\ s \geq x \\ i_2)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A:\ s - \varepsilon < x \leq s \end{cases}$$



$i = \text{Inf}\,A \iff$

NOTA:

$A^+ = \{\text{insieme dei maggioranti di } A\}$

$$\min A^+ \begin{cases} \text{n.e. se } A^+ = \emptyset \Rightarrow A \text{ illimitato} \\ \text{Sup}\,A \Rightarrow A \text{ illimitato} \end{cases}$$

$$\text{Sup}\,A = \begin{cases} +\infty & \text{se } A^+ = \emptyset \\ s & \text{se } A^+ \neq \emptyset \end{cases}$$

$M = (2, +\infty)$ $\quad \text{Sup}\,M = +\infty$ $\quad M^+ = \emptyset$ $\quad \text{Inf}_M = 2$

$N = [3, +\infty)$ $\quad \text{Sup}_N = +\infty$ $\quad \text{Inf}_N = 3$

$S = (-\infty, +\infty)$ $\quad \text{Sup}_S = +\infty$ $\quad \text{Inf}_S = -\infty$

$T = (-2, +4]$ $\quad \text{Sup}_T = 4$ $\quad \text{Inf}_T = -2$

Dimostrazione 2)

$$|x| = |\underbrace{x - y + y}_{\text{aggiungendo e togliendo un termine}}| \overset{1)}{\leq} |x-y| + |y| \qquad 2)$$

$$2) \iff |x| - |y| \leq |x-y|$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |y-x| + |x| \qquad 3)$$

$$3) \iff |x| - |y| \geq -|y-x| = -|x-y|$$

$$2) \text{ e } 3) \quad -|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y| \qquad 4)$$

posto $h = |x-y| \geq 0$

$$4') \iff -h \leq |x| - |y| \leq h \quad , \quad h \geq 0$$

$$K') = 4'') \quad \big||x| - |y|\big| \leq h = |x-y|$$

c.v.d.

PRODOTTO CARTESIANO

$$A, B \subseteq \mathbb{R} \quad ; \quad A, B \neq \emptyset$$

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

$$(x,y) \neq (y,x) \quad \text{(sono coppie ordinate)}$$

NOTA:

Se $A = \{0, 1\}$ $\quad B = \{0, 2, 3\}$ $\quad$ n = n° degli elementi di A, m = n° degli elementi di B

$$A \times B = \{(0,0), (0,2), (0,3), (1,0), (1,2), (1,3)\}$$

FUNZIONI

Per una funzione sono necessari 3 elementi: 2 insiemi e una legge. Una relazione nella quale ad ogni elemento $a \in A$, corrisponde un solo elemento $b \in \mathbb{R}$ si chiama funzione di $A \xrightarrow[\text{su}]{} B$ (o applicazione di $A \xrightarrow[\text{su}]{} B$).

si denota così:

$$f : A \to B$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

NOTA:

La relazione dell' ES. 1* non è una funzione perché per $a = 0$ abbiamo 2 elementi di b:

$$a = 0 \to \begin{cases} b = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

A = dom f → insieme di partenza

B = codom f → insieme di arrivo

ES.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = x^2$$

$(1,3) \notin$

$(1,1) \in$

ES.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \longmapsto y = \sqrt{x}$$

$x_1 = 2 \to y_1 = \sqrt{2}$ $\quad (2, \sqrt{2})$ $\quad x_3 = -3 \to y_3 = \nexists$

$x_2 = 0 \to y_2 = 0$ $\quad (0, 0)$

---

* ES. 1 a pag 22

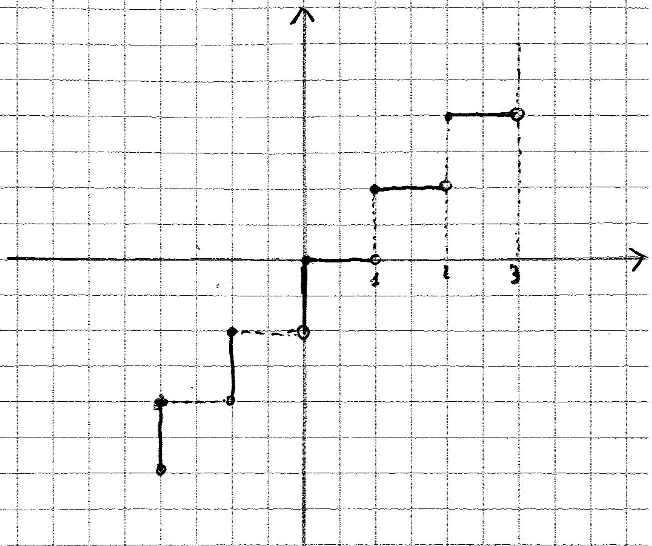
- funzione parte intera di x:

$y = [x]$

$[x] = \max \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq x, \forall x \in A \}$

$[1{,}5] = \max \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq 1.5 \} = 1$

$[2{,}3] = 2 \qquad [3] = 3 \qquad [-1{,}5] = -2$



dom $[x]$

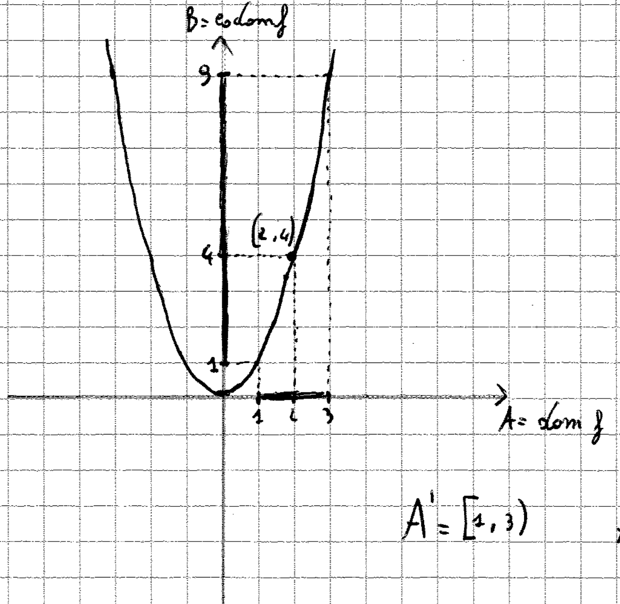
codom $[x] = \mathbb{Z}$

OSSERVAZIONE:

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B$

$A = \text{dom } f$

$y = x^2$



$A' = [1,3) \qquad A' \subseteq A$

$\xrightarrow{2} \boxed{f} \xrightarrow{4}$

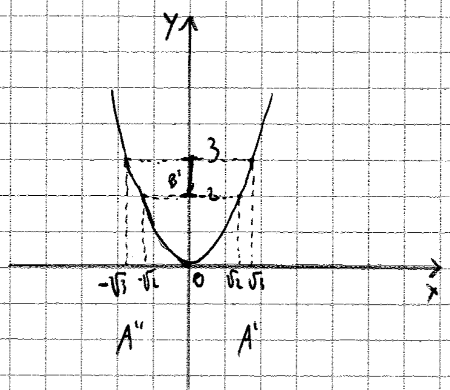
4 e' il trasformato di 2 attraverso f

$\xrightarrow{A'[1,3)} \boxed{f} \xrightarrow{[1,9)}$

- l' intervallo $[1,3)$ si definisce "immagine attraverso f di $A' = [1,3) \subseteq A$ e si indica ... $f(A') = f([1,3)) = [1,9)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 172

CONTROIMMAGINE



Sia $B' \subseteq B$ $\qquad f: A \to B$

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

PROPRIETÀ:

$A' = \{a\} \subseteq A \qquad f(A') = f(\{a\}) = f(a)$

$B' = \{b\} \subseteq B \qquad f^{-1}(B') = f^{-1}(b)$

I $\quad f(f^{-1}(B')) = B' \quad , B' \subseteq B = \text{codom } f$

II $\quad f^{-1}(f(A')) \supseteq A' \quad , A' \subseteq A = \text{dom } f$

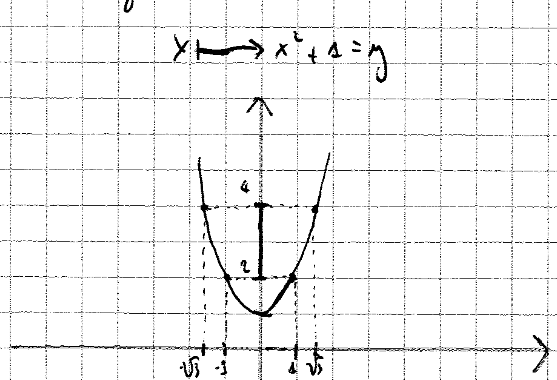
III $\quad f^{-1}(\text{im } f) = \text{dom } f$

$\boxed{f: [x] \qquad \text{im} f = \mathbb{Z}}$

ES.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 + 1 = y$



$$f^{-1}([2,4)) = \{x \in \text{dom} f : 2 \leq (x^2+1) < 4\} = (-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3})$$

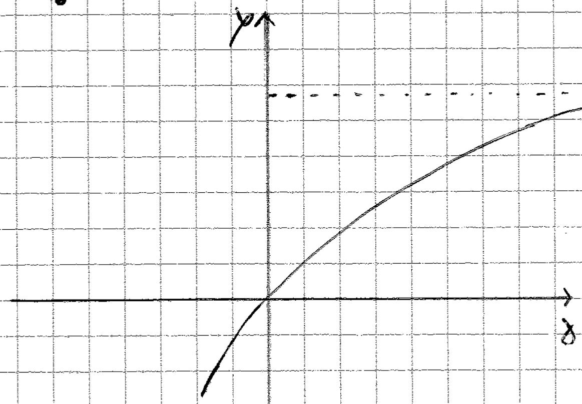
BIETTIVITÀ:

$f: A \to B$ si dice biettiva se è iniettiva e suriettiva. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\forall_y \in B, \exists! x \in A: f(x) = y$

FUNZIONE LIMITATA

$f: A \to B$



(I) f è superiormente limitata se im f è superiormente limitata

$\exists m \in \mathbb{R}: f(x) \leq m, \forall x \in \mathrm{dom}\, f$

ovvero:

$\mathrm{im}\, f \subseteq (-\infty, m)$

(II) f è inferiormente limitata se im f è inferiormente limitata

$\exists m \in \mathbb{R}: f(x) \geq m, \forall x \in \mathrm{dom}\, f$ ovvero: $\mathrm{im}\, f \subseteq (m, +\infty)$

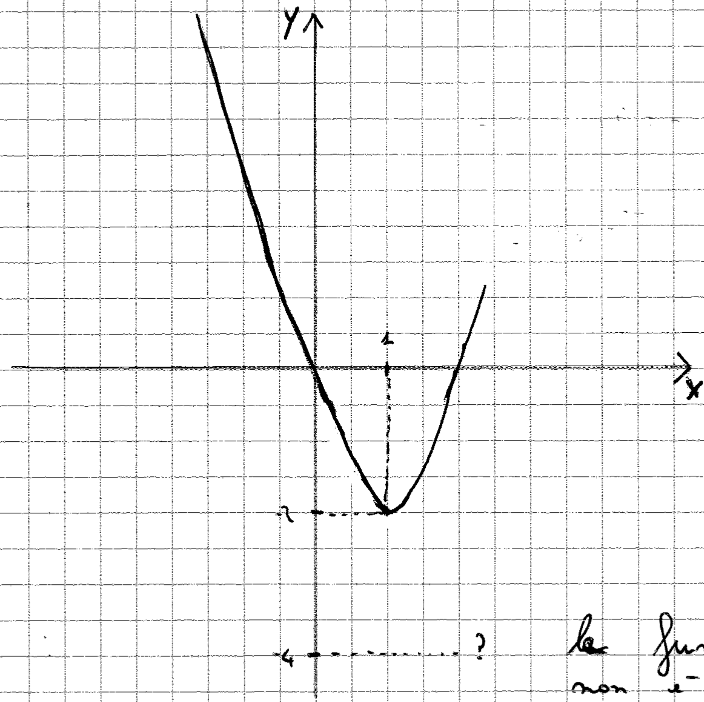
(III) f è limitata se im f è limitata

$\exists m, n \in \mathbb{R}: m \leq f(x) \leq n, \forall x \in \mathrm{dom}\, f$

ovvero:

$\mathrm{im}\, f \subseteq (n, m)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x(x-4),\ x\geq 0 \iff 2x^2-4x \Rightarrow \underline{y=2x(x-2)} & x_v = 1 \quad y_v = -2 \quad V=(1;-2 \\ -x^2+x(x-4),\ x<0 \iff \underline{-4x=y} \end{cases}$$



la funzione non è invertibile perché non è né suriettiva né iniettiva

Se prendiamo le restrizioni più grandi possibili la funzione diventa invertibile:

$f_1 : [1, +\infty) \to [-2, +\infty)$ $\qquad f_1([1,+\infty)) = \text{im} f\, [-2,+\infty)$

$f_2 : (-\infty, 1] \to [-2, +\infty)$ $\qquad f_2((-\infty,1]) = \text{im} f\, [-2,+\infty)$

$f_2^{-1} : [-2,+\infty) \to (-\infty, 1]$

espressione:

- $y = -4x \to x = -\frac{y}{4}$; $x \leq 0$, $y \geq 0$

$x \longleftrightarrow y$

$y = -\frac{x}{4}$, $y \leq 0$, $x \geq 0$

- $y = 2x^2 - 4x$ $\qquad 0 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 0$

$2x^2 - 4x - y = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+2y}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4+2y}}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 172

MONOTONIA:

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to B$

f è monotona crescente (decrescente) su A, se $\overset{def}{\iff}$ *

* $\forall x_1, x_2 \in A \qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

f è monotona strettamente crescente (decrescente) su A, se $\overset{def}{\iff}$ *'

*' $\forall x_1, x_2 \in A \quad , \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

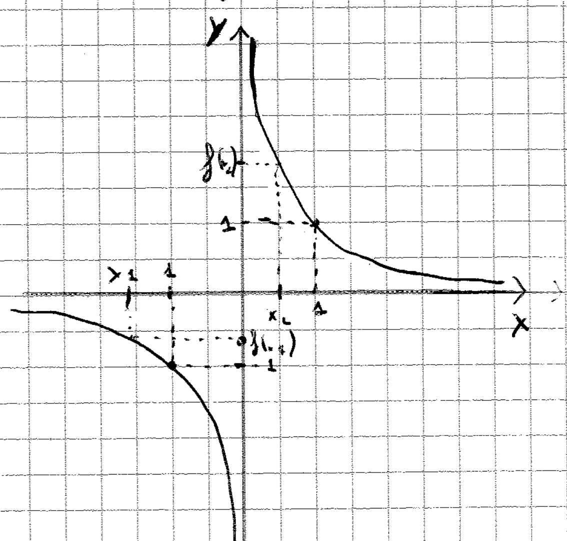
OSSERVAZIONE I:

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad A = \mathbb{R}^-$

$x \longmapsto y = \frac{1}{x}$

$\bar{f}: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad B = \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto y = \frac{1}{x}$



f è strettamente decrescente su dom f

$\bar{f}$ è strettamente decrescente su dom $\bar{f}$

$\tilde{f}: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto y = \frac{1}{x}$

Se $y = f(x)$ è strettamente crescente su A, ed è strettamente crescente su B, <u>allora non è detto che sia strettamente crescente su $A \cup B$.</u>

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 172

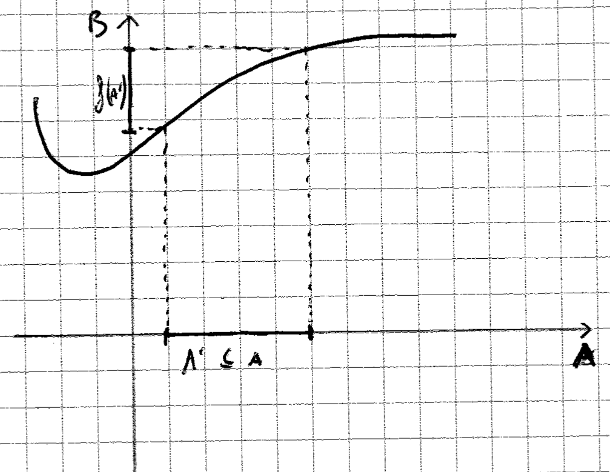
Definizione:

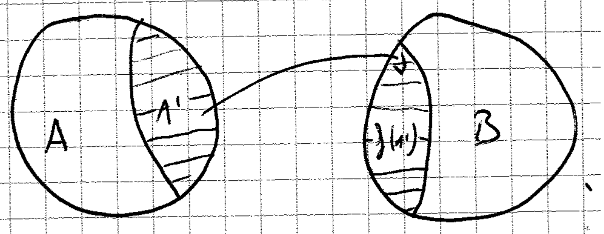
$f: \text{dom } f \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \text{dom } g \to \mathbb{R}$ $\qquad$ ← non costanti

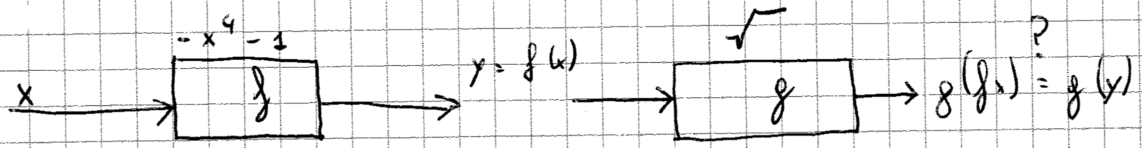
$$f(x)^{g(x)} \Leftrightarrow e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$\text{dom } f(x)^{g(x)} = \{ x \in \text{dom } g \cap \text{dom } f : f(x) > 0 \}$$

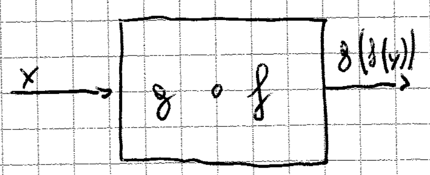
Composizione di funzioni:







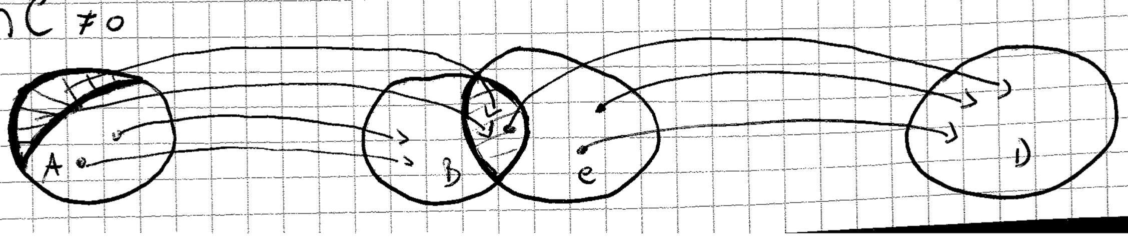
la composizione solo a determinate condizioni



$f: A \to B$ $\qquad$ $g: C \to D$

Condizioni:

- $B \cap C \neq \emptyset$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 172

$I = \text{im} f \cap \text{dom}\, g = [0,+\infty) \cap [-1,1] = [0,1]$

$\text{dom}\, g \circ f = f^{-1}(I) = f^{-1}([0,1]) = [0,1]$

$\text{im}\, g \circ f = g(I) = g([0,1]) = [0,1]$

$g \circ f : [0,1] \to [0,1]$

$x \longmapsto y = g(f(x)) = \sqrt{1 - f^2(x)} = \sqrt{1 - x}$

OSSERVAZIONE 1:

FUNZIONE IDENTICA (identità)

$i_A = f : A \subseteq \mathbb{R} \to A$

$x \longmapsto x$

OSSERVAZIONE 2:

$f : A \to f(A)$ ← invertibile (biettiva su A)

$f^{-1} : f(A) \to A$
$y \to x$

$f \circ f$ = identità$_{f(A)}$ $= x$ su $f(A)$

$f^{-1} \circ f$ = identità$_A$ $= x$ su A

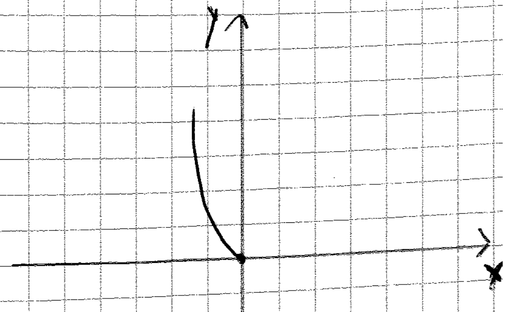
ES.

$f(x) = x^2$ su $(-\infty, 0)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g = f|_{(-\infty,0]} : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$x \longmapsto x^2$

$g^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^- \cup \{0\}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$



$y = x^2$ $x = \pm\sqrt{y}$
$y = -\sqrt{x}$

è definita in $x=0$, allora passa per l'origine.

OSSERVAZIONI:

I) La somma di funzioni pari è una funzione pari.
II) La somma di funzioni dispari è una funzione dispari.
III) Il prodotto di due funzioni pari è una funzione pari.
IV) Il prodotto di due funzioni dispari è una funzione dispari.

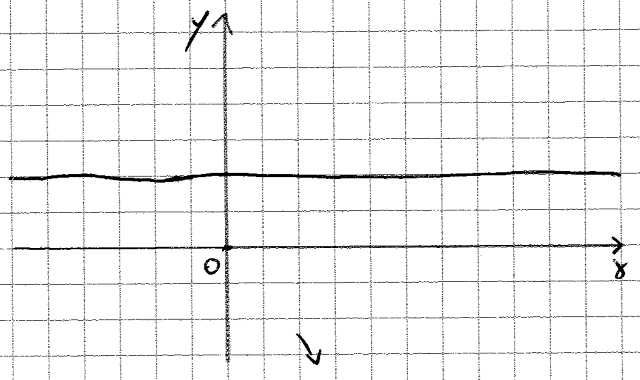
FUNZIONI PERIODICHE

$f: A \to \mathbb{R}$ $\qquad T > 0$

i) se $x \in A$ allora $(x+T) \in A$

ii) $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in A$

Per periodo intendiamo il periodo minimo che soddisfa la ii) [per convenzione



funzione periodica di qualsiasi periodo ($T=0$, caso limite)

1) Se $f(x)$ è periodica di periodo T, allora $f(ax)$ è periodica di periodo $\frac{T}{a}$.

$y = \operatorname{sen}(2x)$ $\qquad T = \frac{2\pi}{\pi} = \pi$

$y = tg\left(\frac{x}{3}\right)$ $\qquad T' = 3\pi$

FUNZIONI ELEMENTARI

- $f(x) = x^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

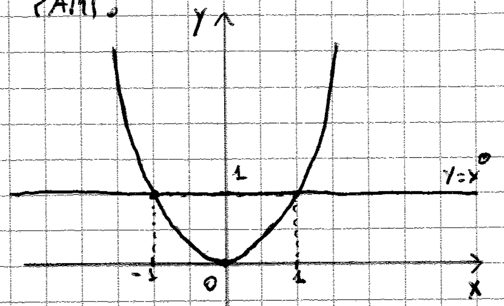
n pari

$n = 0$

n dispari

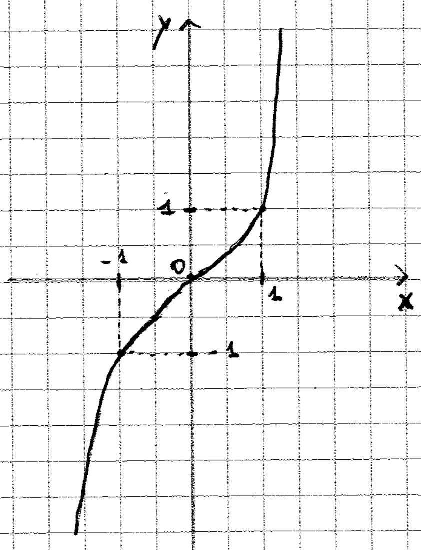
$f(x)$ = funzione costante per x^0

n PARI:



per n pari, $f(x)$ è pari

n DISPARI:



per n dispari, $f(x)$ è dispari

dom $f = \mathbb{R}$

codom f $\begin{cases} n \text{ pari } [0, +\infty) \\ n \text{ dispari } (-\infty, +\infty) \end{cases}$

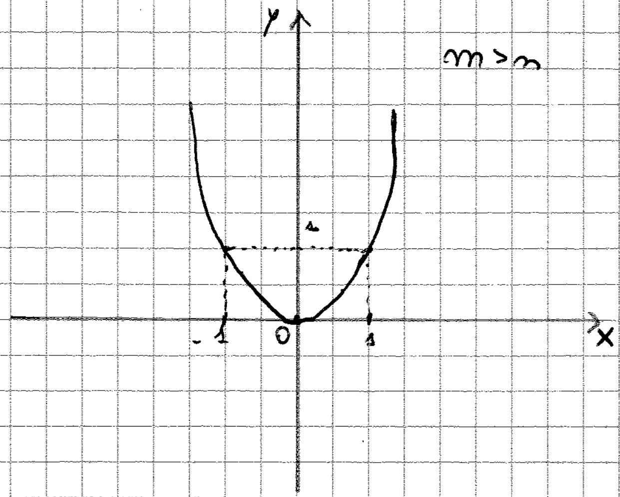
Sia che n sia pari, sia che sia dispari, all'aumentare di n la funzione si stringe verso l'asse y.

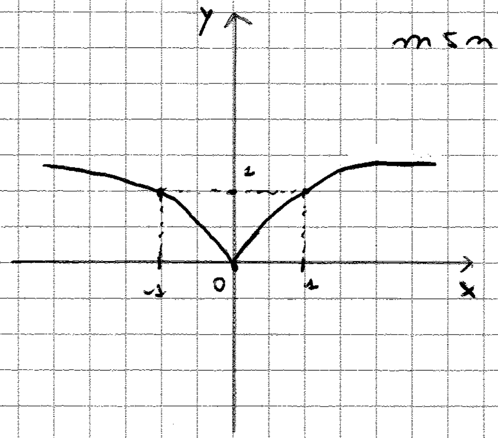
- $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ $\quad \sqrt[m]{x^n}$

n PARI:

$D = \mathbb{R}$

$\operatorname{im} f = [0, +\infty)$



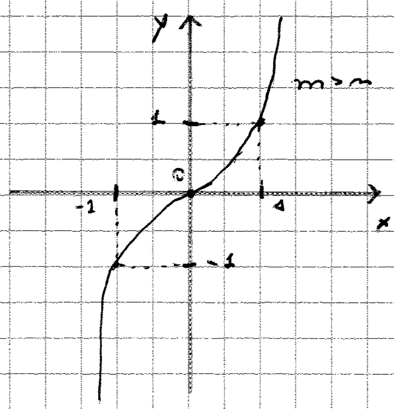


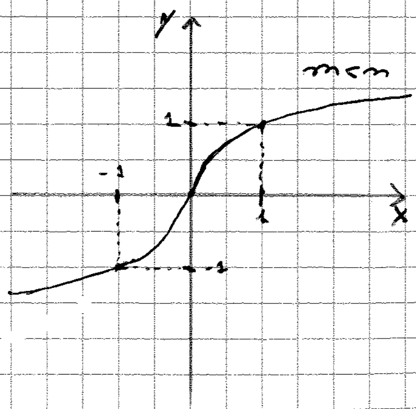
n DISPARI:

- m dispari

$D = \mathbb{R}$

$\operatorname{im} f = \mathbb{R}$

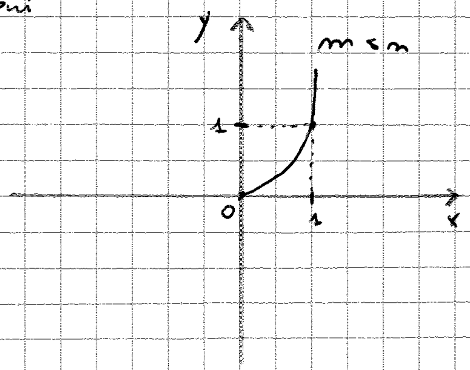


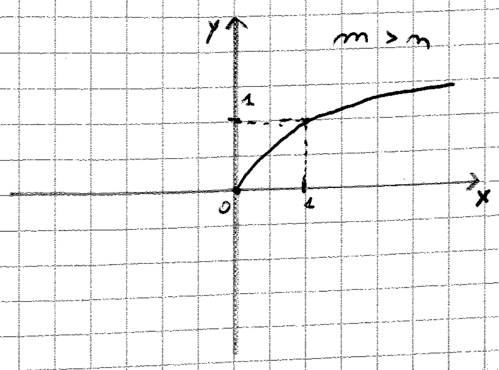


- m ~~dispari~~ pari

$D = [0, +\infty)$

$\operatorname{im} f = [0, +\infty)$

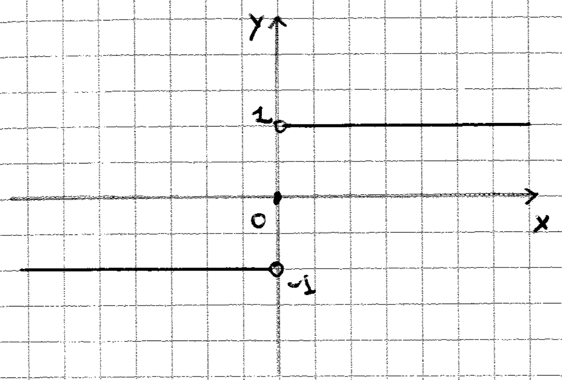




FUNZIONI DEFINITE A TRATTI

- $f(x) = sgn(x)$ ← SEGNANTE

$$sgn(x) = \begin{cases} +1 & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x=0 \\ -1 & \text{per } x \end{cases}$$

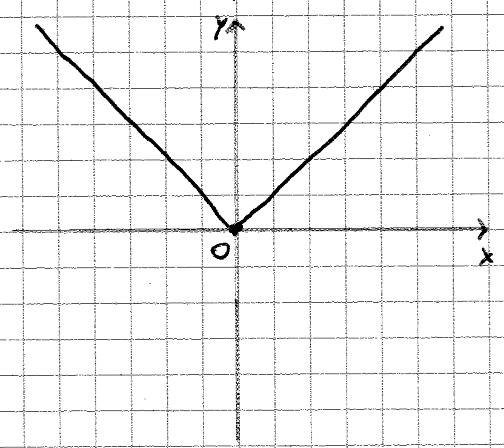


$D = \mathbb{R}$

$im\, f = \{-1, 0, 1\}$

- $f(x) = |x|$ ← VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x=0 \\ -x & \text{per } x<0 \end{cases}$$



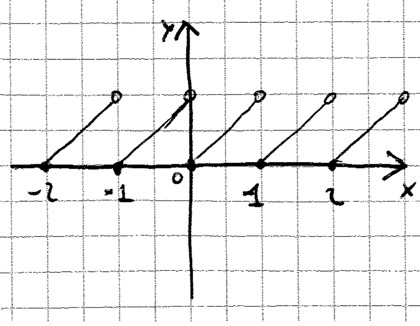
$D = \mathbb{R}$

$im\, f = [0, +\infty)$

- $f(x) = [x]$ ← PARTE INTERA

vedi pag 25

- $f(x) = x - [x]$ ← MANTISSA

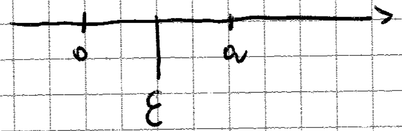


PROPRIETÀ:

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : a < \varepsilon \,, \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \quad a = 0$$

Dimostrazione per assurdo:

$a \neq 0$



$$\varepsilon = \frac{a}{2}$$

Successioni:

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \to a_n = f(n)$

NOTA:

$$\text{dom } a_n = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \}_{n_0 \in \mathbb{N}}$$

$$a_n = \sqrt{n-4} \quad , n \geq 4 \; (n_0)$$

CONVERGENZA di una successione

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \underbrace{(n \geq n_0)^{\text{dominio}}}_{\text{sottointeso}} \wedge n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

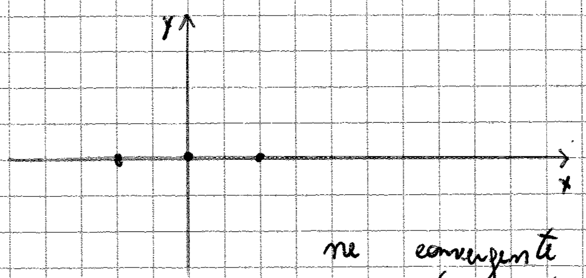
$\downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow I_\varepsilon(l)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(l)$$

INDETERMINATEZZA di una successione

$a_n = (-1)^n$



né convergente
né divergente

$b_n = \sin(n)$

$\lim_{n \to +\infty} \sin(n) = n.e.$

MONOTONIA

Sia a_n $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione

a_n è crescente (strettamente) $\overset{def}{\iff} \forall n : a_{n+1} \geq a_n$
$a_{n+1} > a_n$

a_n è decrescente (strettamente) $\overset{def}{\iff} \forall n : a_{n+1} \leq a_n$
$a_{n+1} < a_n$

NOTA:

Una proprietà si dice __definitivamente__ __verificata__ se esiste un $n_0 : p(n)$ vera $\forall n \geq n_0$

__ES.__

a_n è definitivamente crescente $\iff \forall n \geq n_0 : a_{n+1} \geq a_n$

__ES.__

a_n è definitivamente positiva

$n \geq n_0$, $a_n > 0$

$a_n = \frac{(n-15)}{n+15}$ $n_0 = 16$

$a_n = \frac{n-15}{n+15}$ è definitivamente positiva

NOTA:

Una $\{a_n\}$ è detta regolare se è convergente o divergente.

50

CASO NOTEVOLE:

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\geq 1$

i) a_n è monotona crescente

ii) a_n è superiormente limitata; $a_n \leq \varepsilon$, $\forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=l$

TEOREMI relativi alle successioni:

- TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE
  - se a_n è una successione e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l\in\overline{\mathbb{R}}$, allora l è unico.

- TEOREMA DI LIMITATEZZA
  - sia $\{a_n\}$ una successione convergente, allora a_n è limitata.

<u>Dim</u>:

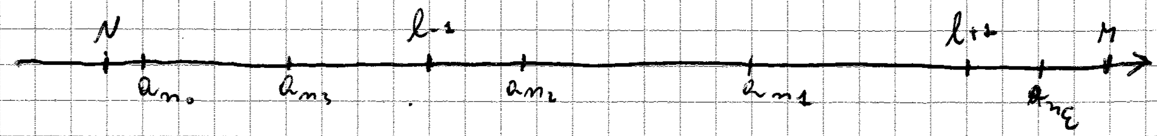
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon : n>n_\varepsilon \Rightarrow |a_n-l|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$

se scelgo $\varepsilon=1$

$\forall n>n_\varepsilon \Rightarrow l-1<a_n<l+1$



$\max=\{l+1, a_0, a_1, \dots a_{n_\varepsilon}\}=M$

$\min=\{l-1, a_0, a_1, \dots a_{n_\varepsilon}\}=N$

$\forall n: N\leq a_n\leq M$

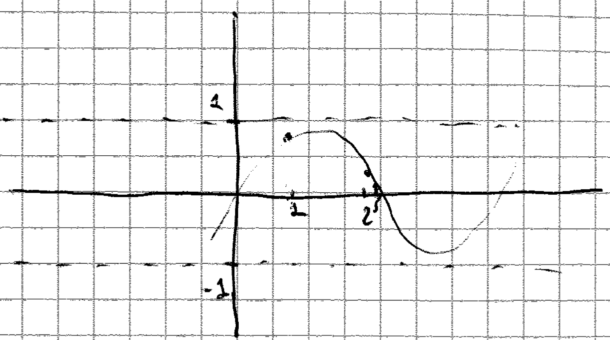
la convergenza implica la limitatezza, non vale però il viceversa

ES.

$a_n = \sin(n) + (-1)^n$

$b_n = \frac{1}{n+3}$

$|a_n| \leq 2, \forall n$



$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n + (-1)^n}{n+3} = 0$

CONSIDERAZIONE:

Se avessimo il prodotto di una limitata per un infinitesimo

$a_n \cdot b_n$

$a_n = n^2 \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$b_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$b_n =$	1	0	-1	0	1	0	-1	0

$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \to$ il coseno si annulla infinite volte quindi il limite non esiste

La funzione illimitata non si deve annullare infinite volte in un intorno di $+\infty$.

ES.

- $\lim_{n\to+\infty} n^3 \left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + 3\right] = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} n^3 \left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\right] = $ n. e.
- $\lim_{n\to+\infty} n^4 \left[\sin\left(\underset{\downarrow 0}{n\pi}\right)\right] = 0$

53

Dimostrazione:

Se esiste $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1 \qquad \text{scelgo } \varepsilon / q + \varepsilon < 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \boxed{a_{n+1} < a_n \quad , \quad n > n_\varepsilon} \Rightarrow a_n \text{ è monotona strettamente crescente}$$

$a_n > 0$ definitivamente $\Rightarrow \{a_n\}$ è inferiormente limitata da zero

Per il teorema di regolarità, essendo a_n monotona decrescente e inferiormente limitata, è convergente.

cioè:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

Per dimostrare che $l = 0$, ipotizzo per assurdo che $a_n \to l \neq 0$.

cioè:

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} a_n = l \neq 0 \\ \lim_{n \to 1} a_{n+1} = l \neq 0 \end{cases}$$

allora $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\lim_{n \to +\infty} a_{n+1}}{\lim_{n \to +\infty} a_n} = \frac{l}{l} = 1$ | in contrasto con l'ipote $q < 1$

In caso $q > 1$

$$\{b_n\} = \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} = \frac{1}{q} \longrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = q < 1 \Rightarrow b_n \to 0 \Rightarrow a_n \to +\infty$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 172

ES. 3

$$b_n = \frac{n!}{n^n} \qquad b_n > 0 \quad \forall n$$

Criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot n^n =$$

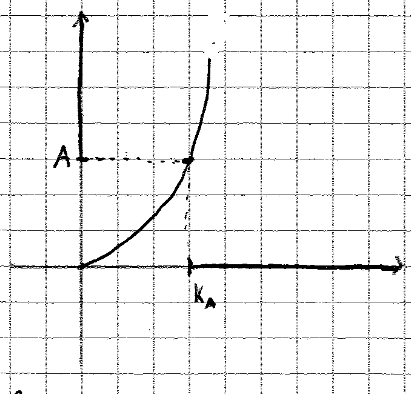
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \quad b_n \to 0$$

$\{a_n\}$ è SUPERIORMENTE LIMITATA se esiste $b \in \mathbb{R} : b \geq a_n, \forall n$

$\{b_n\}$ è INFERIORMENTE LIMITATA se esiste $c \in \mathbb{R} : c \leq b_n, \forall n$

$\{c_n\}$ è LIMITATA se esiste $K \in \mathbb{R} : |a_n| \leq k, \forall n$

LIMITI DI f

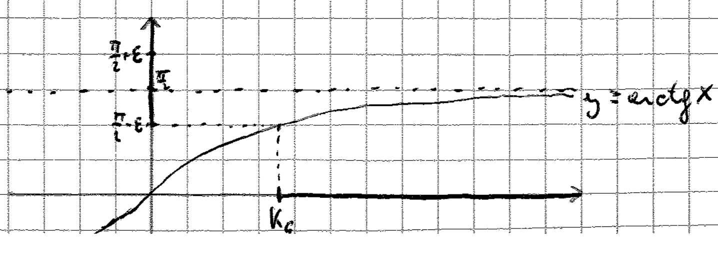


$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall A > 0, \exists K_A > 0 : x \in dom f \wedge x > k \Rightarrow f(x) > A$

$\forall A > 0, \exists k_A > 0 : x \in \mathcal{I}_k(+\infty) \Rightarrow y \in \mathcal{I}_A(+\infty)$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 172

ES.

$x_0 = 0 \qquad f(x) = x^2 + 1 \qquad f(0) = 1$

scelto un $\varepsilon > 0$

- $f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$

$$\begin{cases} f(x) > f(0) - \varepsilon \\ f(x) < f(0) + \varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 1 > 1 - \varepsilon \\ x^2 + 1 < 1 + \varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 > -\varepsilon \\ x^2 < \varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} = \delta \end{cases}$$

$$0 - \sqrt{\varepsilon} < x < 0 + \sqrt{\varepsilon} \rightarrow I_{\sqrt{\varepsilon}}(0)$$

$$\forall x \in I_{\sqrt{\varepsilon}}(0) \Rightarrow f(x) \in I_{\varepsilon}(\underset{1}{\underbrace{f(0)}})$$

- $g(x)$

$$\lim_{x \to 0} \{[\cos x] + 2x\} = 0 \neq g(x) = 1$$

- $h(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq h(x)$$

Nel caso di continuità $(f(x))$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \qquad \lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1 = f(0)$$

Definizione di limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in dom f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

differenza con la continuità

$$|x - x_0| > 0 \Leftrightarrow x \neq x_0$$

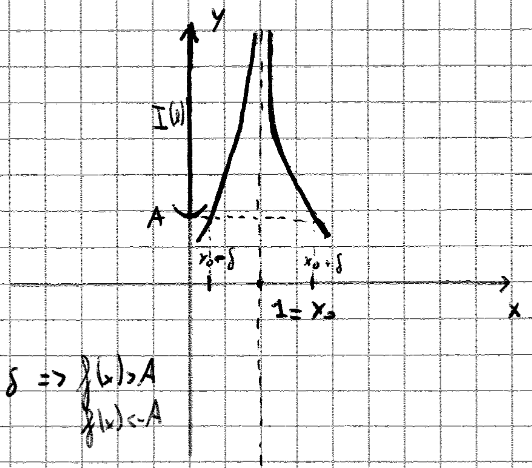
NOTA:

Dire $f(x)$ continua in $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, nel limite il punto x_0 è escluso.

CASI PARTICOLARI DELLA DEFINIZIONE GENERALE

ES.

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^4}$$

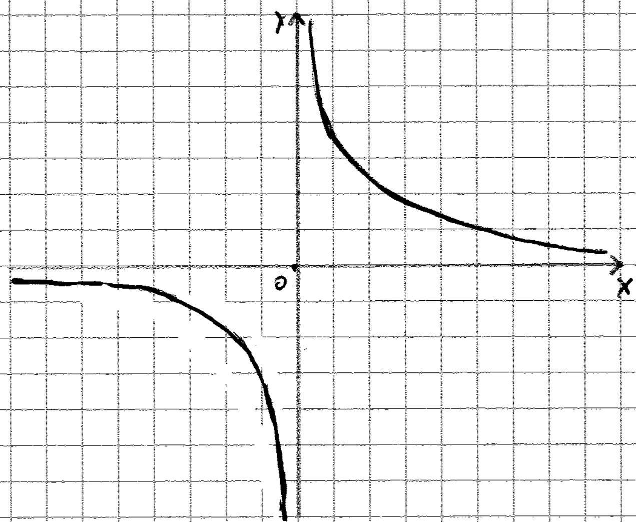


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

$\forall A > 0 ; \exists \delta(x_0) : x \in dom f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$
$f(x) < -A$

OSSERVAZIONE:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$



$\lim_{x \to 0} f(x)$ = non esiste

In questo caso si definisce $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

cioè:

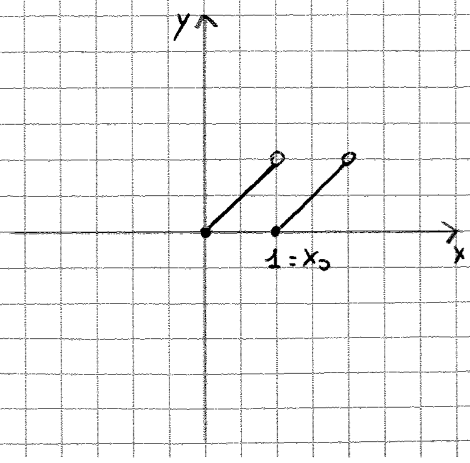
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \stackrel{def}{\iff} \forall A > 0, \exists \delta > 0 : x \in dom f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > A$

(per convenzione)

LIMITI LATERALI

ES. $y = M(x)$

$$M(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



esiste $\lim_{x \to 1} M(x)$? NO!

DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE

Quando in x_0 la $f(x)$ presenta una discontinuità $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)\right)$ che non sia di prima specie o eliminabile, si dice che presenta discontinuità di seconda specie.

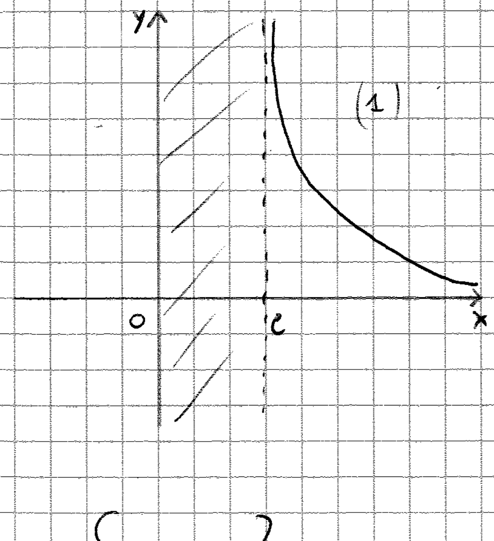
ES.

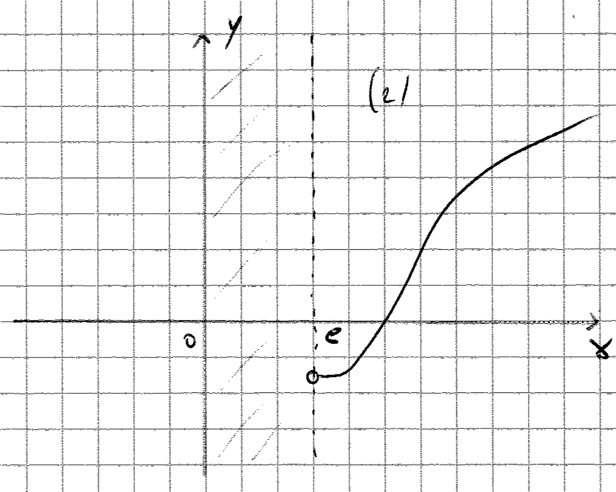
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = n.e.$ DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE in $x_0 = 0$

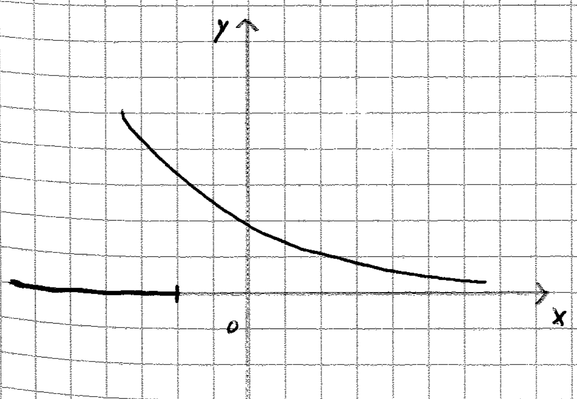
LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE

(T) Sia f una funzione definita in un intorno $I^+(c) \setminus \{c\}$ e ivi monotona.





$c \in \{x_0, -\infty\}$



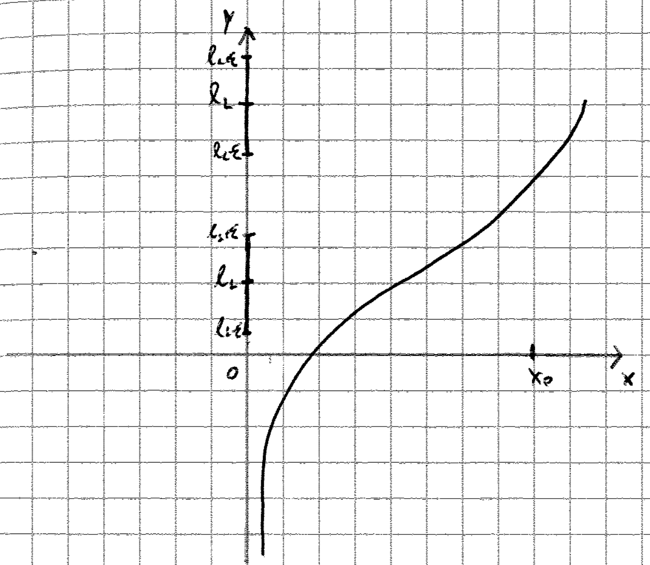
Dimostrazione:

$c = x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

TH. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Per assurdo immagino che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \qquad l_1 < l_2 \Rightarrow l_1 \neq l_2$



Essendo ε arbitrario, lo scelgo in modo che i due intorni $I_\varepsilon(l_1)$ e $I_\varepsilon(l_2)$ siano tali per cui $I_\varepsilon(l_1) \cap I_\varepsilon(l_2) = \emptyset$

cioè: $l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \dfrac{l_2 - l_1}{2}$

scelgo $\varepsilon = \dfrac{l_2 - l_1}{3}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon \qquad (1)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon \qquad (2)$

se scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ la (1) e la (2) sono vere contemporaneamente:

$\dot{I}(c) \quad \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \wedge f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ segue...

i) esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

ii) esiste $\dot{I}(x_0)$ nel quale $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \dot{I}(x_0)$

TH.

$l \geq 0$

TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE

Se $\lim_{x \to c} f(x) = l$ finito, allora esiste $\dot{I}(c)$ nel quale $f(x)$ è limitata

Dimostrazione:

$\lim_{x \to c} f(x) = l \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \dot{I}(c) : \forall x \in \dot{I}(c) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\iff \forall x \in \dot{I}(c) : \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$m < f(x) < M$

1° TEOREMA DEL CONFRONTO

f, g definite in $\dot{I}(c)$

i) esiste un intorno di c tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad , \quad \forall x \in \dot{I}(c)$$

ii) esistono $\lim_{x \to c} f(x) = m \qquad \lim_{x \to c} g(x) = l$

TH. allora $m \leq l$

Dimostrazione sul CANUTO - TABACCO a pag. 94

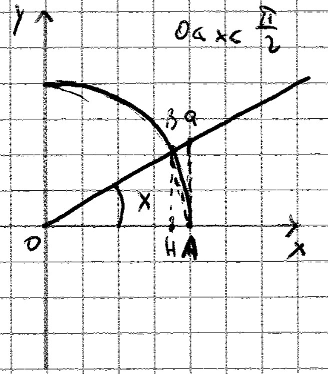
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 172

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

La $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è pari. $(x \to 0^+)$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



Si può osservare che:

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} < S_{\overset{\frown}{OAB}} < S_{\overset{\triangle}{OAQ}} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{r \cdot r \sin x}{2} = \frac{1}{2} r^2 \sin x$$

$$S_{\overset{\frown}{OAB}} = \frac{1}{2} r^2 x \; *$$

$$S_{\overset{\triangle}{OAQ}} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AQ} = r \cdot r \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x$$

(1') $\cancel{\frac{1}{2} r^2} \sin x < \cancel{\frac{1}{2} r^2} x < \cancel{\frac{1}{2} r^2} \operatorname{tg} x$

$\sin x > 0 \qquad x \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

(3) $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

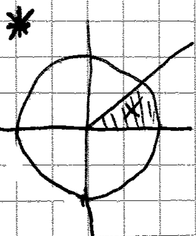
$\lim_{x\to 0} (1) = 1$

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

per il teorema del confronto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*



$S_{sett} : S_{cerchio} = x : 2\pi$

$S_{sett} = \frac{\pi r^2 \cdot x}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 x$

$$\begin{cases} x \to 0 \overset{f}{\Rightarrow} y \to 0 \\ \lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} |sgn(y)| = 1 \neq 0 \end{cases}$$

ERRORE

TEOREMA DI SOSTITUZIONE (cambiamento di variabile, limite di funzioni composte)

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

tali che $f(X) \subseteq Y$ e $x_0, y_0 \subseteq \mathbb{R}$

Se f è definita in $\dot{I}(x_0)$ ed esiste

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

e se g è definita in $\dot{I}(y_0)$ e per essa vale una delle due ipotesi seguenti:

i) g sia definita e continua in y_0

ii) $f(x)$ sia diversa da y_0 $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ ed esista $\lim_{y \to y_0} g(y)$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y)$$

OSSERVAZIONE:

Se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$

allora

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{x \to x_0} [g \circ f] = g[f(x_0)]}$$

- f continua in x_0, g continua in y_0, allora $g \circ f$ continua in x_0

CRITERIO DI NON ESISTENZA

Se esistono due successioni tali che

$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$

e se

$\lim_{n\to+\infty} g(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} g(b_n)$ dove

g è una funzione continua, allora non esiste

$\lim_{x\to l} g(x)$.

ES.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sin x-4)}{x+1}$ $a_n = n\pi$ (annulla sempre il seno)

$b_n = \frac{\pi}{2}+2n\pi$ (seno sempre 1)

$a_n \to \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (n\pi) = +\infty$

$b_n \to \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\pi(\sin n\pi - 4)}{n\pi+1} = -4$

$\downarrow$ 1

$\lim_{n\to+\infty} g(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}+2n\pi\left(\sin \frac{\pi}{2}+2n\pi - 4\right)}{\frac{\pi}{2}+2n\pi+1} = -3$

$\downarrow$ 1

II) $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

$$f(c_1) = \begin{cases} f(c_1) > 0 & a_2 = a_1 \quad b_2 = c_1 \\ f(c_1) = 0 & c_1 = \bar{c} \quad \text{è lo zero cercato} \\ f(c_1) < 0 & a_2 = c_1 \quad b_2 = b_1 \end{cases}$$

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b] \wedge f(a_2) \cdot f(b_2) < 0 \qquad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$$

Se ritero il procedimento attraverso: $[a_n, b_n] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$ (1)

$$f(a_n) f(b_n) < 0 \qquad (2)$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2} \qquad (3)$$

1) $\{a_n\}$ è crescente ed è limitata superiormente da b.

$\{b_n\}$ è decrescente ed è limitata inferiormente da a.

Allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l_1 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = l_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (\underset{\substack{\downarrow \\ l_1}}{b_n} - \underset{\substack{\downarrow \\ l_2}}{a_n}) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{b-a}{2}\right) = 0 \quad \to \quad l_1 - l_2 = 0$$

$$l_1 - l_2 = l$$

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{f(a_n) f(b_n)}_{(2)\ <0} = f(l_1) f(l_2) = f(l)^2$$

$$\xrightarrow{\text{TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO RONESCIATO}} f(l)^2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{f(l) = 0}$$

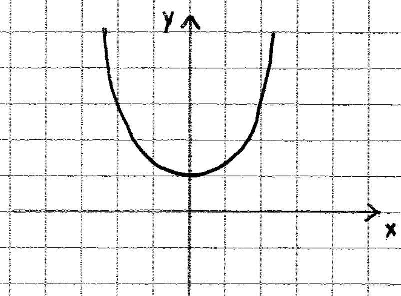
$$\boxed{\Rightarrow l = \bar{c} \qquad \text{c.v.d.}}$$

VARIANTE AL TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

ii) f è continua su $\mathbb{R}$



TH.

f ammette minimo

TEOREMA

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

i) f, g continue su $[a, b]$

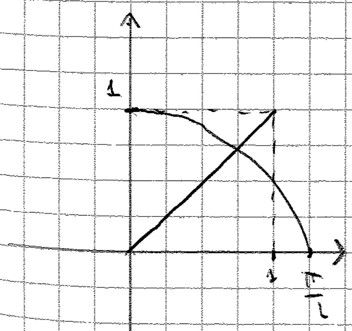
ii) $f(a) > g(a) \land f(b) < g(b)$

TH.

esiste un punto $c \in (a, b) : f(c) = g(c)$

ES.

$f(x) = \cos x$ $\quad g(x) = x$ $\quad$ su $[0, 1]$



$f(0) = \cos 0 = 1 > g(0) = 0$

$f(1) = \cos 1 < g(1) = 1$

Dimostrazione:

$h(x) = f(x) - g(x)$

h è continua su $[a, b]$ perché è differenza di funzioni continue su $[a, b]$

$\longrightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 172

PROPRIETÀ

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

i) f è continua su $[a, b]$

TH.

Allora $f([a, b]) = [m, M]$

$$[\ ] \longrightarrow \boxed{f \text{ continua}} \longrightarrow [\ ]$$

NOTA:

Ogni intervallo I, sia esso chiuso oppure no, sia esso limitato o no, attraverso una funzione continua si trasforma in un intervallo di estremi $\inf_{x \in I} f(x)$, $\sup_{x \in I} f(x)$ che possono o no appartenere all'immagine che possono o no essere finiti.

TEOREMA (CONT./INV.)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I, allora vale l'equivalenza logica:

f strettamente monotona su $I \iff f$ invertibile su I

PROPRIETÀ

Se f è continua e invertibile su I, allora la f inversa è continua

ES.

$y = \operatorname{arctg} x$ è continua

$y = \cos x$ è continua

NOTA:

$f = o(g)$ per $x \to c$ $\Rightarrow$ $f = O(g)$ per $x \to c$

$f \sim g$ per $x \to c$ $\Rightarrow$ $f = O(g)$ per $x \to c$

$f \asymp g$ per $x \to c$ $\Rightarrow$ $f = O(g) \wedge g = O(f)$ per $x \to c$

$f \sim g$ per $x \to c$ $\Rightarrow$ $f \asymp g$ per $x \to c$

OSSERVAZIONE:

se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

se $l = +\infty$ allora $g = o(f)$ per $x \to c$

NOTA:

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ finito e $\lambda \neq 0$ $\lambda \neq 1$ $\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\lambda g(x)} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \sim \lambda g(x)$ per $x \to c$

RILETTURA DEI LIMITI FONDAMENTALI

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Longrightarrow \sin x \sim x$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \Rightarrow \sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$

$\boxed{\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$

OSSERVAZIONE

Se $f \sim g$ per $x \to c$ $\Longrightarrow$ $f = g + o(g)$ per $x \to c$

Dimostrazione:

$f \sim g$ per $x \to c$ $= \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$

$f(x) - g(x) = o(g(x))$ per $x \to c$ $\boxed{f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{per } x \to c}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

$e^x - 1 = x + o(x)$ per $x \to 0$

$\boxed{e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

$\boxed{\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$

$\sinh x \sim x$ per $x \to 0$

$\boxed{\sinh x = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad x \in \mathbb{R}$

$\lim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1 \qquad \alpha \neq 0$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$\boxed{(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + o(x)}$

NOTA:

$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{e^x}{|x|^\alpha} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \Rightarrow x^\alpha = o(e^x)$ per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0 \Rightarrow \ln x = o(x^\alpha)_{\alpha > 0}$ per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^\alpha} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{\ln x} = 0 \Rightarrow x^\alpha = o(\ln x)_{\alpha > 0}$ per $x \to 0^+$

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)} = 0 \Rightarrow \ln x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)_{\alpha > 0}$ per $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to c} \frac{\psi}{(f+g)} = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{x\to c} \frac{\psi}{(f+g)} = \lim_{x\to c} \frac{\psi}{f\left[1+\underbrace{\frac{g}{f}}_{0}\right]} = \lim_{x\to c} \frac{\psi}{f}$$

$\psi = o(f)$ per $x \to c$

cioè:

$$\psi = o(f+g) = o(f+o(f)) = o(f).$$

4) $o(f)\cdot o(g) = o(f\cdot g)$ per $x\to c$

5) $f\cdot o(g) = o(f\cdot g)$ per $x \to c$

Dimostrazione 4:

$o(f)\cdot o(g) = o(f\cdot g)$ per $x\to c$

$\psi = o(f\cdot g)$ $\qquad \varphi = o(f)$ $\qquad h = o(g)$

$\lim_{x\to c}\frac{\psi}{f\cdot g} = 0$ $\qquad \underbrace{\lim_{x\to c}\frac{\varphi}{f} = 0 \qquad \lim_{x\to c}\frac{h}{g} = 0}$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to c}\frac{h}{g}\cdot\frac{\varphi}{f} = 0 \Rightarrow \varphi\cdot h = o(f\cdot g) \Rightarrow$$

$$\varphi\cdot h = o(g\cdot f) = o(f)\cdot o(h) = o(g\cdot f)$$

6) $o(f)^n = o(f^n)$ $\qquad n>0$

7) $\frac{o(f)}{g} = o\left(\frac{f}{g}\right)$ per $x\to c$

8) $(f+o(f))^k = f^k + o(f^k)$ per i k per i quali ha senso la scrittura

ES.

1) $x^n = o(x^m)$ per $x\to 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}$ $\qquad n>m$

$x^3 = o(x^2)$ per $x\to 0$

NOTA:

se $f(x) \sim f_1(x)$
$g(x) \sim g_1(x)$ per $x \to c$

NON È VERO CHE $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} [f_1(x) + g_1(x)]$

ES.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{\ln(1+3x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + o(x) - 1 + x + o(x)}{3x + o(x)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + \cancel{o(x)}}{3x + \cancel{o(x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{2}{3}$$

ES.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh 2x}{\operatorname{arctg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$$

$\sinh x = x + o(x)$ $\qquad \sinh x \sim x$

$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$ $\qquad \operatorname{arctg} x \sim x$

INFINITESIMI

siano $f, g : \dot{I}(c) \to \mathbb{R}$ $\qquad c \in \overline{\mathbb{R}}$

i) $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

$\lim_{x \to c} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \text{i) } l \text{ finito } \neq 0 \Rightarrow f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ \text{ii) } l = 0 \Rightarrow f \text{ è infinitesimo di ordine superiore a } g \\ \text{iii) } l \text{ infinito} \Rightarrow g \text{ è infinitesimo di ordine superiore a } f \\ \nexists \text{ limite} \Rightarrow f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi non confrontabili} \end{cases}$$

INFINITI

siano $f, g : \dot{I}(c) \to \mathbb{R}$

i) $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$

$\lim g(x) = +\infty$

ASINTOTICITÀ

Siano $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

si dice che $f(x)$ è asintotica per $x \to +\infty$ a $g(x)$ $\overset{def}{\iff}$

$f(x) = g(x) + o(1)$ per $x \to +\infty$

ES.

$$f(x) = x^3 + 5e^x \underbrace{+ \frac{1}{x^4} + 3e^{-x}}_{o(1) \text{ per } x\to+\infty}$$

$$g(x) = x^3 + 5e^x$$

$f(x) = g(x) + o(1)$ per $x \to +\infty \Rightarrow f$ e g sono asintotiche a $+\infty$

OSSERVAZIONE:

Se due funzioni sono asintotiche a $+\infty$ allora sono anche equivalenti a $+\infty$ (non vale il viceversa, vedi nota *'). Infatti se

$f(x) = g(x) + o(1)$ per $x \to +\infty$

$$\text{allora } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)+o(1)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left\{ 1 + \overset{\to 0}{\frac{o(1)}{g(x)}} \right\} = 1$$

NOTA *'

ES.

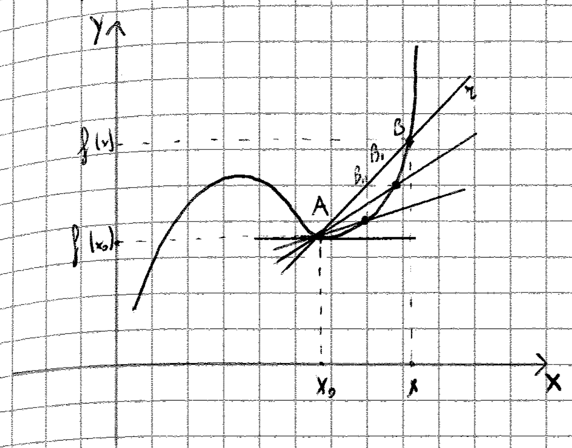
$f(x) = x^5 + \sqrt[3]{x}$ $\qquad g(x) = x^5$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + \sqrt[3]{x}}{x^5} = \lim_{x\to} \left\{ 1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{x^5} \right\} = 1$$

$f(x) = g(x) + o(1)$ per $x \to +\infty$? NO!!

SONO EQUIVALENTI a $+\infty$ ~~MA~~ MA NON ASINTOTICHE

DERIVATA



$$m_{AB} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ ← coefficiente angolare della retta r. $= \underbrace{\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0}}_{\text{rapporto incrementale in } x_0}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$ ← DERIVATA PRIMA DELLA FUNZIONE in x_0

DEFINIZIONE

Sia f definita su $I_\varepsilon(x_0)$, se esiste finito $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$.

Il numero $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione $y = f(x)$ nel punto x_0.

NOTA:

L'equazione della retta tangente a $y = f(x)$ in x_0 sarà:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

OSSERVAZIONE:

Si può, data una funzione $f(x)$, definire la derivabilità su un insieme I come:

$f(x)$ è derivabile su $I \overset{def}{\iff} \forall \bar{x} \in I$, f è derivabile in $\bar{x}$, cioè se $\forall \bar{x} \in I$

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x})$$

Si può passare a una nuova funzione $f' : \text{dom} f' \to \mathbb{R}$ $\bar{x} \in I \mapsto f'(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}$

il dominio di $f' = \{\bar{x} \in \text{dom} f : f \text{ derivabile in } \bar{x}\}$

Derivata di funzioni elementari

1) $f(x) = c \Rightarrow \boxed{f'(x) = 0}$, $\forall x$

2) *

---

* 1ª FORMULA dell'INCREMENTO FINITO

Una funzione derivabile in x_0 è tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f \qquad x - x_0 = \Delta x$$

$$\underline{\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)} \qquad \Delta x \to 0$$

---

2) $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{x - x_0}$$

$x \to x_0$
$t = x - x_0$
$t \to 0$
$x = t + x_0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{(t + x_0)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{t}$$

$$(x_0 + t)^{\alpha} = x_0^{\alpha}\left(1 + \frac{t}{x_0}\right)^{\alpha} = x_0^{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha t}{x_0} + o(t)\right) = x_0^{\alpha} + \alpha x_0^{\alpha - 1} t + o(t)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cancel{x_0^{\alpha}} + \alpha x_0^{\alpha-1} t - \cancel{x_0^{\alpha}} + o(t)}{t} = \alpha x_0^{\alpha - 1} + o(1) = \boxed{\alpha x_0^{\alpha - 1} = D\left(x^{\alpha}\right)_{x_0}}$$

$\alpha \geq 1$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

ovunque $x^{\alpha - 1}$ sia definita

ALGEBRA DELLE DERIVATE

$f(x)$, $g(x)$ siano definite su $I(x_0)$

i) f, g siano derivabili in x_0

Allora le funzioni

1) $y = f(x) \pm g(x)$

2) $y = f(x) \cdot g(x)$

3) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x_0) \neq 0$

sono derivabili in x_0, e risulta

1') $D\left(f(x) \pm g(x)\right)_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2') $D\left(f(x) \cdot g(x)\right)_{x_0} = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$

3') $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)_{x_0} = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

<u>Dimostrazione 2:</u>

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0} = \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0) + f(x)\,g(x_0) - f(x)\,g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ f(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)}_{g'(x_0)} + \underbrace{g(x_0)}_{\text{costante}} \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}_{f'(x_0)} \right\}$$

se è derivabile è continua, quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \quad f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0) \qquad \text{c.v.d.}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 172