



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 821**

**DATA: 10/02/2014**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Frison**

**MATERIA: Idraulica Formulario**

**Prof. Ridolfi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

**EQ. INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI:**

$$\nabla \vec{F} = \text{grad } P$$

**EQ. GLOBALE DELL'EQUILIBRIO STATICO:**

$$\int_V \rho \vec{F} \, dV + \int_A P \vec{n} \, dA = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{G} + \vec{\Pi} = 0$$

**LEGGE DI STEVINO:**

$$z + \frac{P}{\gamma} = \text{cost}$$

l'eq. fondamentale della statica dei fluidi pesanti e incomprimibili sta ad indicare che a tutti i pti di un fluido pesante incomprimibile in quiete compete la stessa quota piezometrica.

**PRINCIPIO DI ARCHIMEDE:**

$$\vec{S} = -\vec{G}$$

Un corpo immerso in un liquido riceve una spinta verticale diretta verso l'alto, di modulo pari al peso di un volume di liquido uguale a quella del corpo immerso (essa passa per il baricentro del fluido stesso).

**APPROCCIO EULERIANO:**

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}|$$

**EQ. DIFFERENZIALE**

**DELLE TRAIETTORIE:**

$$\begin{cases} dx = u(x, y, z, t) \, dt \\ dy = v(x, y, z, t) \, dt \\ dz = w(x, y, z, t) \, dt \end{cases}$$

EQ. GLOBALE DELLA

DINAMICA DEI FLUIDI:

$$\int_{\omega} \rho \vec{F} d\omega - \int_{\omega} \rho \vec{A} d\omega = \int_{\omega} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) d\omega$$

$$\int_{\omega} \rho \vec{F} d\omega - \int_{\omega} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\omega + \int_A \rho \vec{V} v_n dA + \int_A \vec{\Phi}_w dA = 0$$

$$\vec{G} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi} = 0$$

$$\vec{G} + \vec{I} + \vec{M}_E - \vec{M}_U + \vec{\Pi} = 0$$

(Per qualunque volume finito  $\omega$  di fluido in movimento, è nulla la risultante delle seguenti forze)

TH. BERNOULLI:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{COST.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{LUNGO UNA} \\ \text{TRAIETTORIA} \end{array} \right\}$$

ESTENSIONE DEL TH

BERNOULLI ALLE

CORRENTI:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{v^2}{2g} = \text{COST.} \quad \left. \begin{array}{l} \forall \text{ SEZ.} \\ \text{CORRENTE} \end{array} \right\}$$

TUBO DI VENTURI

(VENTURIMETRO):

$$Q = \frac{\Omega_A \cdot \Omega_B}{\sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_B^2}} \cdot \sqrt{\frac{2g}{\alpha} \Delta \frac{\gamma_{\text{mm}} - \gamma}{\gamma}}$$

$$P \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } P$$

$$\vec{F} = -\gamma \text{ grad } z \quad \text{CAMPO GRAVITAZIONALE} \quad (\text{unica forza di massa è il peso})$$

$$P \cdot (-\gamma \text{ grad } z - \vec{A}) = \text{grad } P$$

$$-\gamma \text{ grad } z - \rho \vec{A} = \text{grad } P$$

$$\text{grad} \left( \frac{P}{\gamma} + z \right) = \frac{\rho \vec{A}}{\gamma} = \frac{1}{g} \vec{A}$$

eq. nett.  $\text{grad} \left( z + \frac{P}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \vec{A}$

$$\vec{A}_s = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial s}$$

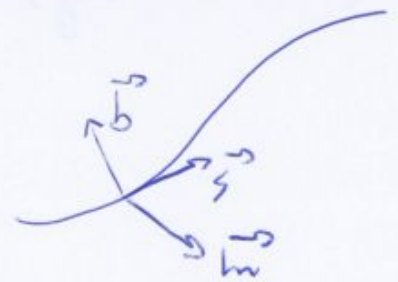
$$\vec{A}_w = \frac{v^2}{r} \quad (\text{acc. centripeta})$$

$$\vec{A}_b = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{P}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{HP.} \quad \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) =$$

MOTO FERM.



energia meccanica fornita dall'unità di peso di fluido che attraversa la sezione

$$P = \int_P dP = \gamma h Q + \frac{\gamma}{2\alpha} \alpha U^2 Q = \text{COST}$$

$$= \gamma \cdot Q \cdot \left( h + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = \text{COST}$$

$$= \gamma \cdot Q \cdot \left( z + \frac{P}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = \text{COST}$$

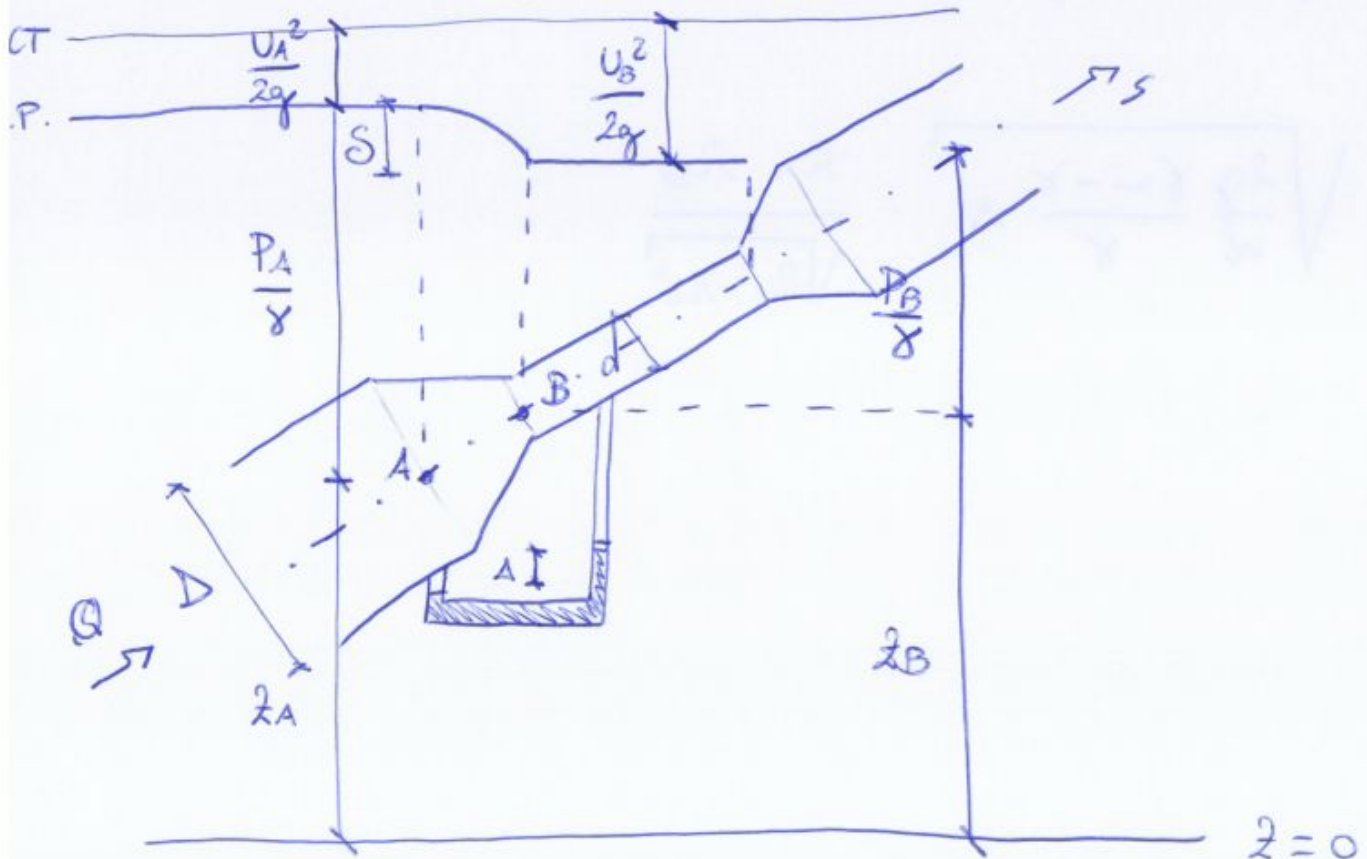
$\alpha = 1 \rightarrow$  M. TURBOLENTO

$\alpha = 2 \rightarrow$  M. LAMINARE

V. SEZ.  
CORRENTE

**VENTURIMETRO:**

permette di determinare la portata di una corrente in presenza o meno di un semplice manom. diff.



**P.C.I.** è il luogo dei punti a pressione nulla.

Lo si riferisce unicamente ad una condizione IDROSTATICA

→ Se il fluido è in movimento si parla di LINEA PIEZOMETRICA

**P.C.I.R.** → se non viene considerata la  $P_{atm}$ .

È rapp. dalla superf. di separazione tra il fluido considerato e l'aria presente nell'atm.

**P.C.I.A.** → se viene considerata la  $P_{atm}$ , e, di conseguenza, le pressioni calcolate prendendo questo punto come riferimento sono quelle assolute.

$$z_0 = z_N + \frac{P_N}{\gamma}$$

$z_N$  definita per  $z_N$   
 $z_0$

→ è POX che un fluido si trovi al di sopra del suo P.C.I.R. → è in depressione, cioè ad una pressione minore di quella atm

→ non è POX che il fluido si trovi al di sopra del P.C.I.A. che significherebbe che il fluido si trova ad una pressione minore della  $\neq$  ASS. (IMPOSSIB.)

**LUNGHE**

$$j = 1, \dots, m \quad (\text{NODI})$$

**CONDOTTE :**

$$i = 1, \dots, m \quad (\text{LATI})$$

→ VERIFICA :

NOTI :  $l_i, B_i, D_i$

$$Q_j$$

$$H_{SERB.}$$

RIC. :  $Q_i$

$$H_j$$

→ DIMENSIONAMENTO :

NOTI :  $Q_j, Q_{SERB}$

$$l_i, H_{SERB.}$$

RIC. :  $D_i$

$$H_j$$

(Eq MIN PASSIVITÀ)



$$W(z) = \frac{h\pi}{2\pi} \ln z$$

$$W(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$W(z) = U \cdot \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$z = \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = x + iy$$

$$U_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

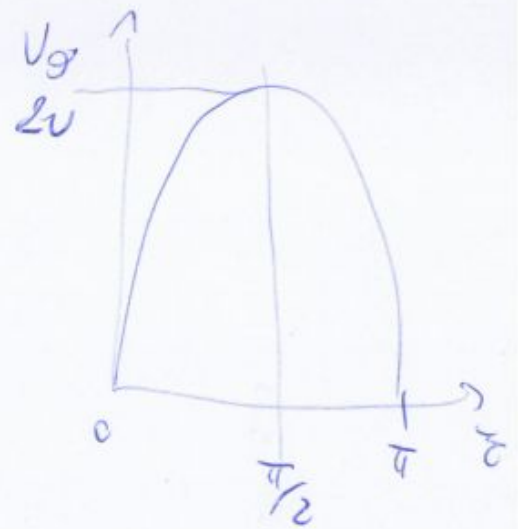
$$U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow U_\theta \Big|_{r=a} = -2U \sin \theta$$

variazione del coeff di premice in presenza del cilindro

$$C_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

*coeff premice*

$$\frac{P_{\infty}}{\rho} + \frac{U^2}{2\rho} = \frac{P}{\rho} + \frac{|U|^2}{2\rho}$$



**REAZIONE D'EFFLUSSO:** la differenza fra la spinta che si esercita sul recipiente da cui effluisce il fluido e quella (IDROSTATICA) che si si eserciterebbe qualora mancasse la luce.

**FLUIDO IDEALE:** un fluido che si muove in modo irrotazionale e senza attrito interno. In un fluido ideale la viscosità è nulla e le particelle si muovono in modo ordinato.

La forza che agisce sul recipiente che lo contiene è la risultante delle forze di pressione che si esercitano sulle sue pareti.

**PERDITE DI CARICO LOCALI:** si verificano in corrispondenza di ostacoli o variazioni brusche di sezione della condotta.

**PERDITE DI CARICO LOCALIZZATE:** si verificano in corrispondenza di ostacoli o variazioni brusche di sezione della condotta.

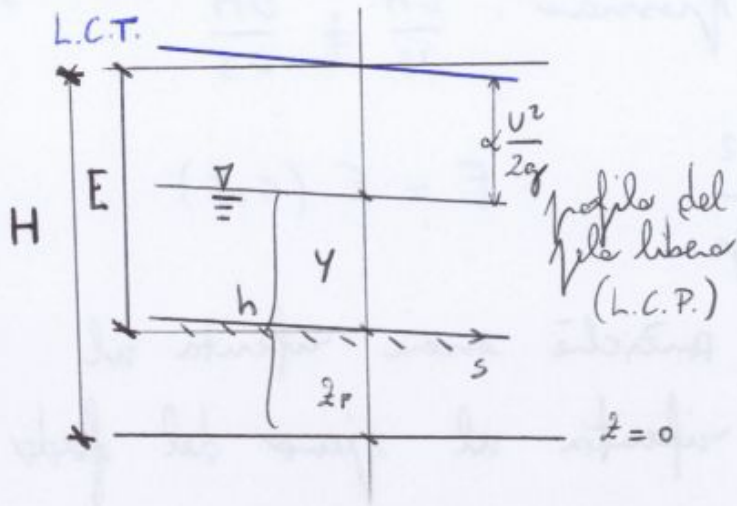
la cadente della L.C.T. non sarà più uguale alla pendenza  
 dell'alveo  $\rightarrow$  sia verso monte che verso valle saranno  
 presenti 2 tratti di corrente più o meno estesi  
 in moto pendente ma uniforme.

$\rightarrow$  Il moto uniforme si ricostituisce soltanto in via ASINTOTICA

$\rightarrow$  MOTO UNIFORME  $\rightarrow$  L.C.T.  $\approx$  L.C.P.

ONDE  $\rightarrow$  di GRAVITÀ: propagazione di una forma (es. mare)  $\rightarrow$  NO!  
 $\downarrow$  di CORRENTE: spostamento di una massa

Eq. Navier-Stokes descrivono anche le correnti a pelo libero, ma non  
 consentono in modo esplicito le grandezze che caratterizzano una  
 superf. libera:  $\gamma = \gamma(x, y, z, t)$



pendenza del fondo  $\rightarrow i_F = -\frac{dz_f}{ds}$

$h = h(s, t) \quad -i = \frac{\partial h}{\partial s} \rightarrow i = -\frac{\partial h}{\partial s}$

$H = H(s, t) \quad -J = \frac{dH}{ds}$

$\gamma = \gamma(s, t) \rightarrow$  en. potenziale riferita al fondo dell'alveo

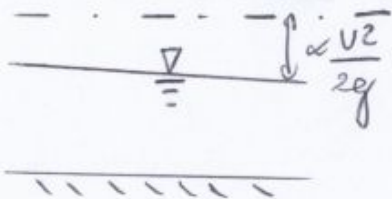
$\rightarrow$  il profilo del pelo libero può essere ascendente e discendente rispetto all'orizzontale.

$\rightarrow$  la L.C.T. è sempre discendente verso valle.

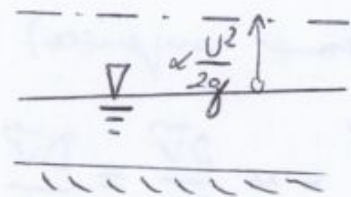
La sua generica quota di una sua parte rappresenta l'en. meccanica tot dell'unità di peso del liquido, valore che può solo diminuire nel senso del moto.

$\rightarrow$  L.C.T.  $\approx$  L.C.P.  $\rightarrow$  MOTO UNIFORME

Lo si allontana dal pelo libero procedendo verso valle se il moto è accelerato, mentre si avvicina alla L.C.P. se il moto è ritardato.



MOTO ACCELERATO



MOTO RITARDATO

$\rightarrow$  Caratteristiche a pelo libero:  $\frac{\partial h}{\partial s} \approx \frac{\partial H}{\partial s}$   $\underline{shc}$   $U$  precede  $\underline{shc}$   $i$  hanno

→ forza peso lungo  $S$ :

$$F_{P,S} = P g ds r \sin \alpha = P g ds r \left( - \frac{dz_f}{ds} \right)$$

→ spinte su ① e ②:

$$P r - \left( P r + \frac{\partial(P r)}{\partial s} ds \right) = - P \frac{\partial r}{\partial s} ds - r \frac{\partial P}{\partial s} ds$$

→ forze di attrito e sul centro:

$$- \tau_0 P ds + P \frac{dr}{ds} ds$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 attrito                      premice



$$\Rightarrow - P g ds r \frac{dz_f}{ds} - P \frac{\partial r}{\partial s} ds - r \frac{\partial P}{\partial s} ds - \tau_0 P ds + P \frac{dr}{ds} ds =$$

$$= P ds r \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mu \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad / \quad P g r$$

$$- \frac{dz_f}{ds} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\tau_0 P}{r} = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mu \frac{\partial v}{\partial s} \right)$$

$$\frac{dz_f}{ds} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\tau_0 P}{r} + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mu \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 0$$

she

$$\frac{P_0}{r} = \frac{1}{R}$$

$$J = \frac{\tau_0}{\gamma R} \quad \rightarrow \quad \tau_0 = J \gamma R$$

$i_f \equiv j = i$  **MOTO UNIFORME**  $\rightarrow$  Anche se a rigide non si  
 osserva MAI, rappresenta ang  
 una buona approssimazione.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial}{\partial s} = 0$$

(\*)

$i_f = j \rightarrow$  L.C.T.  $\simeq$  sup. libera

$\rightarrow Q = \text{cost}$

**X MOTO PERMANENTE**

eq. Saint-Venant:

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} = i_f - j \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$  **moto permanente**  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  ( $\frac{\partial}{\partial s} \neq 0$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} = i_f - j \\ \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \rightarrow Q = \text{cost} \rightarrow \text{invariante del moto, sia rispetto al tempo che alle spazie.} \end{cases}$$

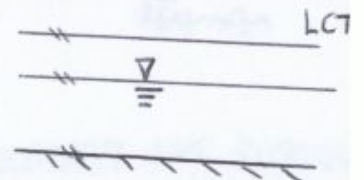
$$\frac{dE}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{1}{2g} \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial U}{\partial s}$$

in totale  
 non si  
 osserva! che  
 dimpa.

$$E = \gamma + \frac{U^2}{2g} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial s} = i_f - j = \frac{\partial \gamma}{\partial s} - j \rightarrow \frac{\partial H}{\partial s} = -$$

$\rightarrow$  conferma di quanto detto precedentemente (\*):

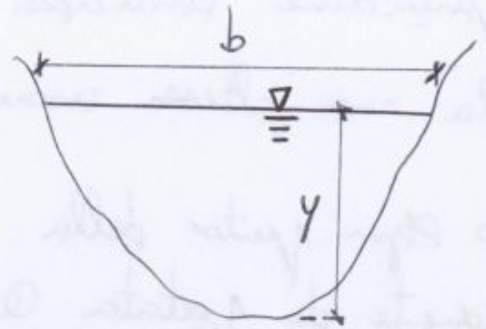
se  $i_f = j \rightarrow \frac{\partial E}{\partial s} = 0 \rightarrow$  **MOTO UNIFORME**



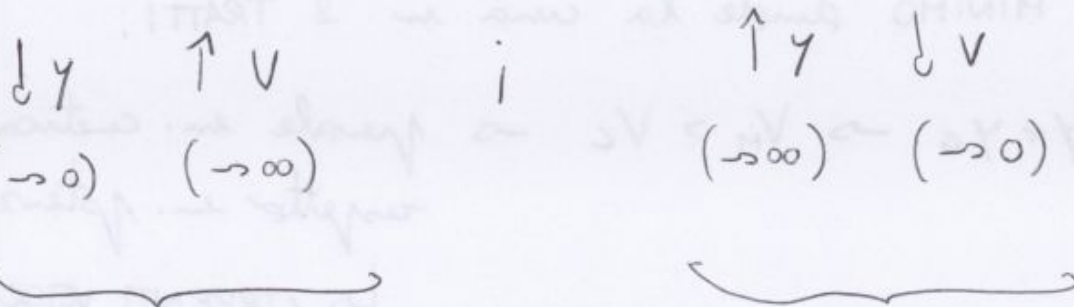
ENERGIA SPECIFICA DELLA CORRENTE: Q PREFISSATA = COST.

$$E = \gamma + \frac{\alpha U^2}{2g} = \gamma + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2}$$

$\downarrow$  en. potenziale       $\downarrow$  en. cinetica

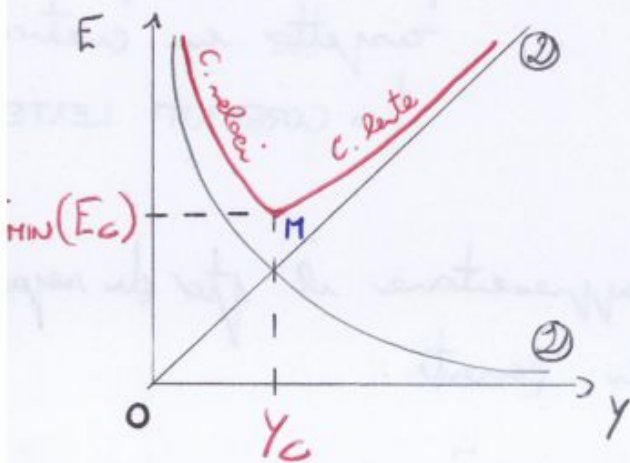


Studiamo come varia E al variare di  $\gamma$   
 HP. SEZ. CORRENTE GRADUALMENTE VARIATA!



①  $E = \frac{\alpha U^2}{2g} \rightarrow$  sola parte cinetica

②  $E = \gamma \rightarrow$  sola parte potenziale



- un minimo  $\equiv$  con l'asse E
- un minimo nella retta bisettrice del quadrante di eq.  $E = \gamma$ .

$E_c$ : energia critica

$\gamma_c$ : altezza critica

MINIMO DELLA FUNZIONE:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_b \rightarrow A = A(y)$

condizione di minimo

$$1 = \frac{\alpha Q^2 b}{gA^3} \rightarrow \gamma_c: \text{altezza critica}$$

Lo diciamo altezza critica di una corrente a pelo libero assegnata portata Q quell'altezza  $\gamma_c$  per cui risulta MINIMA l'energia specifica E rispetto al fondo dell'alveo.

$$\frac{A}{b} = y_M \rightarrow \text{altezza media}$$

$$Q = UA = U y_M b$$

$$\frac{\propto Q^2 b}{g A^3} = \frac{\propto U^2 y_M^2 b^2 b}{g y_M^3 b^3} = \frac{\propto U^2}{g y_M}$$

$$\rightarrow V_c = \sqrt{\frac{g}{2} \cdot y_M}$$

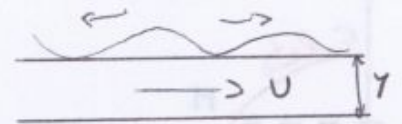
Velocità critica

ATT.  $\frac{U^2}{g y_M} = Fr \rightarrow \text{N}^\circ \text{ FROUDE} \quad \left( Fr = \frac{U}{\sqrt{g y_M}} \right)$

→ significato fisico:  $\frac{1}{2} Fr = \frac{U^2/2g}{y_M} = \frac{U^2}{2g y_M}$

→ è il rapporto tra en. cinet. ed. en. potenz.

→  $y = y_c \rightarrow Fr = 1$



→ considerando gli studi di Lagrange sulla celerità di propagazione dell'onda, si ha:  $c = \pm \sqrt{g y}$

→ per  $\sqrt{g y} > U \rightarrow \frac{U}{\sqrt{g y}} < 1 \rightarrow Fr < 1$  C. LENTE  
(l'onda riesce a risalire l'onda)

→ per  $\sqrt{g y} < U \rightarrow \frac{U}{\sqrt{g y}} > 1 \rightarrow Fr > 1$  C. VELOCE  
(l'onda non riesce a risalire la corrente)



$$\gamma = E - \frac{A}{2b} = E - \frac{\gamma_M}{2}$$

Altezza definitrice di altezza critica:

diciamo altezza critica di una corrente di assegnata energia specifica  $E$  rispetto al fondo dell'alveo, quell'altezza cui corrisponde il MASSIMO valore della portata.

→ Il punto di MASSIMO divide la curva in 2 TRATTI:

→  $\gamma < \gamma_c$  → CORRENTI VELOCI

→  $\gamma > \gamma_c$  → CORRENTI LENTE

## ALVEI A FORTE PENDENZA e A DEBOLE PENDENZA:

Altezza  $y_0$  del moto uniforme

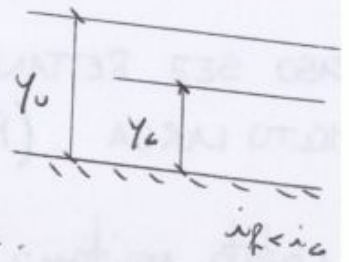
Altezza critica  $y_c$

$$y_0 \geq y_c$$

→ Alveo a debole pendenza:  $y_0 > y_c$

↳ la corrente uniforme è una corrente lenta.

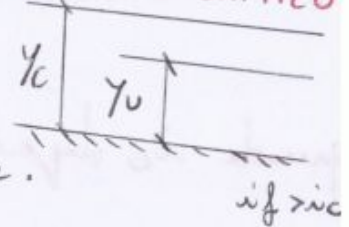
ALVEO SUBCRITICO



→ Alveo a forte pendenza:  $y_0 < y_c$

↳ la corrente uniforme è una corrente veloce.

ALVEO SUPERCRITICO



→ Situazione intermedia:  $y_0 = y_c$  → alveo con pendenza critica

↳ il moto uniforme si svolge allo stato critico.

$$Q = A \times \sqrt{R \cdot i_f} \quad (*) \quad (y_0 \text{ per il moto uniforme})$$

$$\frac{Q^2 b}{g A^3} = 1 \quad (**) \text{ sostituendo (*) in (**) si ottiene:}$$

$$\frac{A^2 \cdot x^2 \cdot R \cdot i_f \cdot b}{g A^3} = 1$$

$$\frac{x^2 \cdot R \cdot i_f \cdot b}{g \cdot A} = 1$$

$$A^3 = b^3 y_c^3 \quad (***) \quad \rightarrow y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2 b}{g b^3}}$$

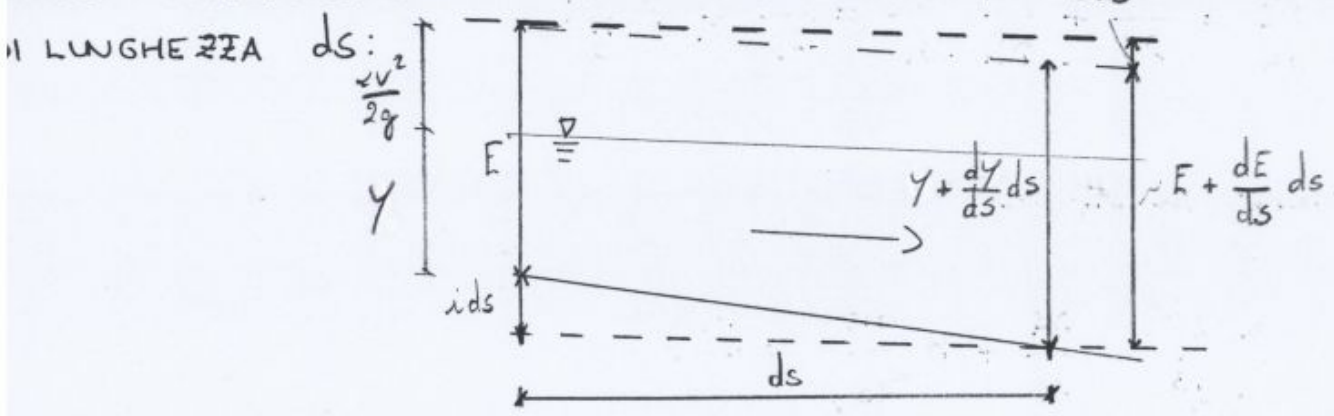
$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}}$$

# CORRENTI IN MOTO PERMANENTE

## PROFILI DEL PELO LIBERO

- Alvee :
- pendenza piccola
  - variazioni di sezione gradualmente
- ) → corrente lineare
- $Q = \text{COST.}$  → cioè la corrente non varia né per la perdita lungo il percorso.

### TRONCO INFINITESIMO



- > Alvee declive → si abbassa di  $i ds$ .
- > la linea dei canchi totali si abbassa di  $J ds$ .

Lo  $J$ : cadute → cioè la perdita di carico per unità di percorso dovuta alle resistenze continue.  
 → dissipazione di energia specifica per unità di percorso della corrente.

$$i ds + E = E + \frac{dE}{ds} ds + J ds$$

l'energia specifica totale rispetto al fondo aumenta per l'abbassamento del fondo stesso (cioè del riferimento) e diminuisce per effetto delle resistenze.

$$\frac{dE}{ds} = i - J$$

→ 1° integrazione → far cose Bresse (1860)

→ alla base della soluzione c'è l'Hp molto restrittiva che il coeff.  $\lambda$  di Chezy possa considerarsi indipendente da  $y$ , il che non è praticamente mai accettabile, se non per escursioni di  $y$  molto limitate; sicché al risultato di Bresse non possiamo attribuire che un risultato / significato qualitativo.

11C. coeff. scabrezza  $\lambda$  dipende dal raggio idraulico  $R$  e quindi deve pur considerarsi funzione di  $S$ .

→ Può essere più pratico procedere alla integrazione con un metodo per differenze finite, il quale risulta adottabile per i alvei (anche per i casi d'acqua naturali  $\times$  ES.).

$$\frac{V}{S} = i - J \rightarrow \Delta S = \frac{\Delta E}{i - J} \quad \left( \begin{array}{l} \text{stituiti ai differenziali} \\ \text{gli incrementi finiti} \end{array} \right)$$

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dh} \left( \frac{dy}{ds} \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{i - J}{\frac{dE}{dy}}$$

~~$$\frac{dy}{ds} = \frac{i - J}{\frac{dE}{dy}}$$~~

e considerazioni fatte senza di base alla discussione dei possibili profili.

$$\frac{dy}{ds} = \frac{i - J}{\frac{dE}{dy}}$$

→ Quando l'altezza d'acqua si avvicina a quella del moto uniforme, da  $\frac{dy}{ds} \rightarrow 0$ , cioè il profilo tende a disporsi parallelamente al fondo e quindi al profilo del moto uniforme.

Questo significa che il moto uniforme può essere raggiunto soltanto in via asintotica.

→ Quando l'altezza si avvicina al valore critico  $h_c$ ,  $\frac{dE}{dy}$  tende ad annullarsi e pertanto il profilo tende a disporsi perpendicolarmente al fondo (cioè sensibilmente verticale nell'Hp fatta che  $i$  sia molto piccola). → INTESA COME ASTRAZIONE ANALITICA che

quando si avvicina, cadrebbe l'Hp basale della LINEARITÀ DELLA CORRENTE!!

l'esperienza mostra che nel passaggio graduale attraverso lo stato critico il profilo del pelo libero, senza disporsi verticalmente, assume una forte pendenza rispetto all'orizzontale.

↳ Se ci si spinge verso monte si trovano valori di  $\gamma$  decrescenti, e quindi sempre più prossimi ad  $\gamma_0$ .

↳ il moto viene dunque raggiunto asintoticamente verso monte

↳ Verso valle le  $\gamma$  crescono e, teoricamente, possono tendere all'infinito

↳ la resistenza tende ad annullarsi ed il NUM tende a  $i$

↳ il DEN tende all'unità.

$\Rightarrow \frac{d\gamma}{ds} \rightarrow \frac{i}{2} \rightarrow i$  → significa che il profilo tende a disporsi orizzontalmente, giacché il peso d'acqua si sdruccia rispetto al fondo di altrettanto quanto il fondo si sdruccia rispetto all'orizzontale

### CONCLUSIONI:

PROFILO D1 presenta 2 ASINTOTI → verso MONTE esso tende asintoticamente al moto uniforme

→ verso VALLE ad un asintoto orizzontale.

PROFILO D3:

↳  $Y_0 > Y_c > Y$  → la corrente risulta recessa → siamo di fronte ad una corrente recessa in alveo a debbole pendenza.

$$\frac{dY}{dS} = \frac{i - S}{\frac{dE}{dY}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{NUM. -} \\ \text{DEN. -} \end{array} \rightarrow \frac{dY}{dS} > 0 \rightarrow \underline{\text{moto ritardato.}}$$

↳ Verso valle le alture  $Y$  crescono e tendono a  $Y_c$ , alture che il profilo teorico raggiungerebbe con tangente verticale.

↳ il profilo è quindi ascendente non solo rispetto al fondo, ma anche rispetto all'orizzontale.

↳ Verso monte le  $Y$  decrescono.

↳ il profilo teorico, dopo aver tagliato il fondo dell'alveo, presenterebbe valori di  $Y$  negativi, privi ovviamente di significato fisico. → È ASINTOTO ORIZZONTALE.

3) Verso valle, per profondità crescenti tendenzialmente fino all'infinito, di un asintoto orizzontale.

### PROFILO F2:

1)  $Y_c > Y > Y_0 \rightarrow$  costante release  $\rightarrow$  altezza maggiore di quella del moto uniforme.

$$\frac{dy}{ds} = \frac{i - s}{\frac{dy}{ds}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{NUM. } + \\ \text{DEN. } - \end{array} \rightarrow \frac{dy}{ds} < 0 \rightarrow \underline{\underline{\text{il moto risulta accelerato.}}}$$

2) Verso monte le  $Y$  tendono a  $Y_c$  che il profilo raggiunge con tangente verticale.

3) Verso valle le  $Y$ , decrescendo, tendono ad  $Y_0$ , mentre la pendenza del profilo tende ad  $i$  ( $\frac{dy}{ds}$  tende a zero); il moto uniforme nei ripristinati asintoticamente verso valle.



dal confronto fra i 6 profili di moto presente che abbiamo individuati e descritti, si può trarre qualche osservazione di natura generale.

) Negli alvei a debole pendenza il moto uniforme, che è di carattere lento, viene sempre raggiunto anticamente verso monte.

) Negli alvei a forte pendenza il moto uniforme, di carattere veloce, viene raggiunto anticamente verso valle.

) Allo stato critico si tende sempre verso valle negli alvei a debole pendenza, verso monte negli alvei a forte pendenza, qualunque sia il tipo della corrente.

) 6 PROFILI  $\rightarrow$  4 corrispondono a correnti ritardate

$\rightarrow$  2 corrispondono a correnti veloci  $\rightarrow$  si svolgono nell'intervallo di altezze comprese fra quella critica e quella del moto uniforme,  $\forall$  sia la pendenza dell'alveo.

RACCIAMENTO DEI PROFILI DI MOTO PERMANENTE

15

PROFILI DI MOTO PERMANENTE  $\rightarrow$  Analiticamente rappresentabili a mezzo di una eq. diff. ordinaria del 2° ORD.

$$Ls \frac{dE}{ds} = i - s$$

$\rightarrow$  C.C.  $\rightarrow$  impone che in una determinata sezione  $s = s^*$ , si abbia una determinata altezza  $Y = Y^*$

$\neq$  altezza di moto uniforme.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ls questa condizione al contorno va ricercata in} \\ \text{corrispondenza della causa perturbatrice, che passa,} \\ \text{in una certa sezione, una altezza } Y \text{ che anche} \\ \text{stabilita proprio in base al modo di agire della} \\ \text{causa perturbatrice.} \end{array} \right.$

F.1) La causa perturbatrice può esercitare la propria influenza verso monte altante se la corrente su cui agisce è lenta (e diventa lenta per causa sua).

F.2) La causa perturbatrice può esercitare la propria influenza verso valle altante se la corrente è veloce (e diventa veloce per causa sua).

!B. Aff. 2 è anima: le perturbazioni si propagano con celerità relativa inferiore alla velocità della corrente.  $\rightarrow$  Se questa è veloce, sicché in queste cose non per viale d'altro: la corrente veloce non può quindi subire influenza da valle.

La ricerca da causa perturbatrice viene passata un abbassamento di livello (linea b), esse darebbe più attenuarsi verso valle, cioè sarebbe zero  $\frac{dy}{ds} > 0$  e quindi anche  $\frac{dE}{ds} > 0$ ; anche qui in stato ed fatto che la corrente, con altezza  $Y < Y_0$ , deve dissipare più energia che nel moto uniforme ( $s > i$ ).

→ Con questa precisazione circa le posizioni localizzate della causa perturbatrice, tutti i 6 profili visti tendono a ricostruire il moto uniforme allontanandosi dalla causa stessa.

→ LE CONDIZIONI AL CONFINO PER LA PRECISAZIONE DELL'INTEGRALE ARTICOLORE DELL'EQ. DEL PROFILO (e quindi il punto di partenza per il materiale tracciante del profilo stesso) VANNO CERCATI ALL'ESTREMO A VALLE, SE LA CORRENTE È LENTA, ALL'ESTREMO A MONTE, SE LA CORRENTE È VELOCE!

↳ In questa sezione estrema sarà ritenersi moto e l'altezza  $Y^*$  determinata dalla causa perturbatrice e quindi sarà moto anche il dislivello  $Y^* - Y_0$  rispetto al moto uniforme: dislivello che può essere positivo e negativo e che viene chiamato

**RIGURGITTO.** → **PROFILO DI MOTO PERMANENTE.**



**D<sub>2</sub>: PROFILO DI RIGURGITTO.**

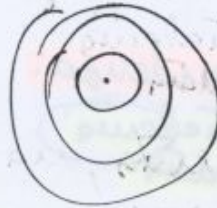
si presenta ogni volta che viene ostacolato il deflusso di una corrente lenta.

① **Distinzione correnti lenta/veloce attraverso definizione dell'altessa critica  $h_c$**   
 queste due tipologie di corrente si differenziano per come si propagano le perturbazioni di livello: la celerità di propagazione delle piccole perturbazioni è superiore alla velocità del movimento nelle correnti lente, inferiore nelle correnti veloci.

Celerità di propagazione delle perturbazioni:  $c = \pm \sqrt{gh}$

es. • **acqua stagnante**: l'immissione di un bastone genera onde circolari

~~corrente lenta~~

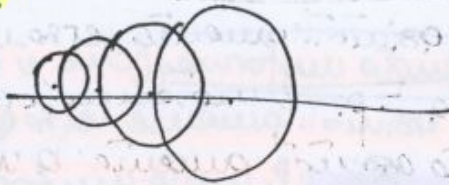


• **corrente lenta**



il centro dell'onda circolare si sposta verso valle: propagazione verso valle, ma anche verso monte con celerità minore

• **corrente veloce**: la velocità della corrente è  $>$  della celerità  $c$   
 $\Rightarrow$  il fronte d'onda, diretto controcorrente è costretto a spostarsi verso valle.



②  $\frac{dE}{ds} = i - j$  : l'energia specifica Tot. rispetto al fondo aumenta con l'abbassamento del fondo stesso (cioè del riferimento) e diminuisce per effetto delle perdite.

③ **Passaggio attraverso lo stato critico**: passaggio da corrente lenta a veloce e viceversa.

**FLUIDO** → corpo materiale che, a causa della mobilità delle particelle che lo compongono, può subire delle grandi variazioni di forma sotto l'azione di forze di minima entità, che tendono a diventare trascurabili quando la sollecitazione con cui avviene la deformazione tende ad annullarsi.

→ fluido in quiete non oppone alcuna resistenza ai cambiamenti di forma.

→ le deformazioni di un fluido sono permanenti, cioè non scompaiono dopo che sono state annullate le forze che le hanno provocate.

**FLUIDI** → **LIQUIDI** → poco comprimibili  
 ↘ **GAS** → facilmente comprimibili

**DENSITÀ**  $\rho$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] →  $\rho = \rho(\theta, p)$   
 ↳ temperatura

**PESO SPECIFICO**  $\gamma = \rho \cdot g$  [ $\text{N}/\text{m}^3$ ]

**FLUIDI REALI:**  
 $\text{H}_2\text{O}$  ( $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ ;  $\gamma = 9806 \text{ N}/\text{m}^3$ )  
 $\text{H}_2$  ( $\rho = 23546 \text{ kg}/\text{m}^3$ ;  $\gamma = 233000 \text{ N}/\text{m}^3$ )

**CELERITÀ** :  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  → il suono si muove a gradienti di pressione e propaga un'onda.

**VISCOSITÀ CINEMATICA** :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  [ $m^2/s$ ]

**TENSIONE SUPERFICIALE** : la tensione superf. fa un liquido e un altro fluido (liquido e gas) non miscibile con esso si comporta, a causa delle forze di attrazione molecolare, come se fosse una membrana elastica in stato unifase di tensione.

$\sigma = \frac{F}{L}$  [ $N/m$ ]  $\sigma = \sigma$  (natura dei fluidi a contatto, temperatura)

→ fascini candolati → forma pseudosferica assunta dalle gocce di liquido.

**SFORZI NEI SISTEMI CONTINUI** → **FORZE DI MASSA** : tutte le forze esterne che si esercitano a distanza su tutte le particelle del sistema.

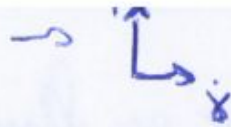
2 ↓

**FORZE DI SUPERFICIE** :

tutte le forze che vengono esercitate su una parte  $V$  del sistema continuo attraverso la sua superficie di contorno.

ES. forze di gravità

## FLUIDI NEWTONIANI



una costante per il righe  
e fronte coeff. angolare  $\dot{\gamma}$ .

## FLUIDI NON NEWTONIANI:

$$\tau = f(\dot{\gamma})$$

3 CLASSI

### 1) FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO:

#### 1) FLUIDI PLASTICI ALLA BINGHAM:

- una rettilinea con pendenza per l'origine.
- ES. vernici, pasta dentifricia, feghi di fegga

#### 2) FLUIDI PSEUDO PLASTICI:

- una rettilinea pessa per l'origine ed è concava verso il basso

$$\tau = k \cdot \dot{\gamma}^m \quad (\text{eq. rettilinea invarianza})$$

- $k$ : misura della consistenza del fluido, ed è tanto più elevata quanto esso è più viscoso.

- $m$  [ $m < 1$ ]: indice del comportamento non newtoniano del fluido

Lo tanto più essa differisce dall'unità tanto più sarà pronunciata la dep. non newtoniana del fluido

- ES. sostanze macromolecolari derivati della cellulosa

### C) FLUIDI ELASTO VISCOSI.

Fluidi che possiedono alcune caract. dei solidi e che in genere mostrano una parziale reversibilità delle deformazioni  
 → si tratta di sostanze nelle quali si riscontrano accanto alle propr. viscose proprie dei fluidi, anche alcune propr. elastiche caract. dei solidi; naturalmente trattandosi di fluidi risultano predominanti gli effetti viscosi.  
 → ES. emulsioni, bitumi.

#### PROPOSTA DI MAXWELL :

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\nu}$$

$\nu$ : viscosità

$G$ : modulo di elasticità tangenziale

$\frac{\dot{\tau}}{G}$ : contributo cinematico

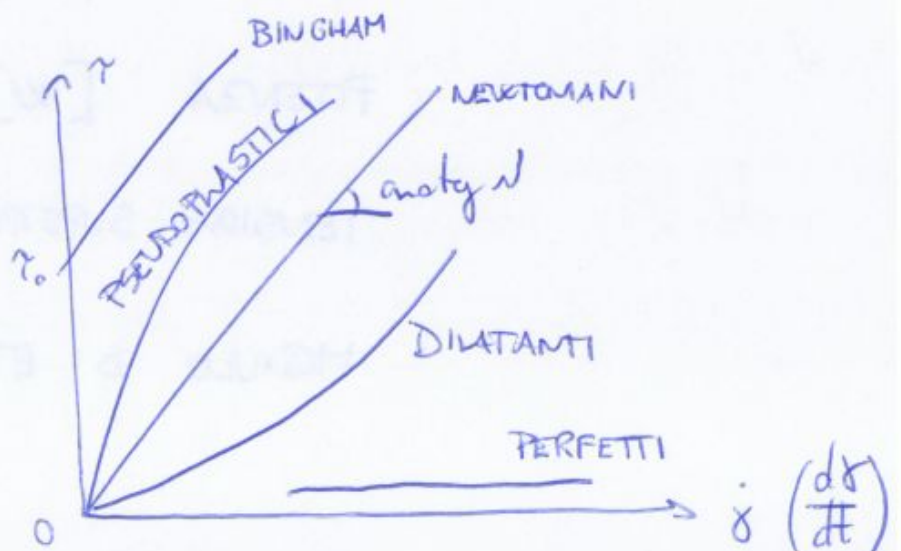
$\frac{\tau}{\nu}$ : contributo dei fluidi newtoniani

Al cessare del moto, annullandosi  $\dot{\gamma}$ , gli sforzi all'interno del fluido non cessano ma si estinguono gradualmente nel tempo con legge esponenziale.

#### PIANO REOLOGICO :

$\tau$ : sforzo tangenziale

$\dot{\gamma}$ : velocità di deformazione angolare





DROSTATICA:

→ Fluidi in stato di quiete → le singole particelle non subiscono nel tempo alcun spostamento relativo.

$$\vec{u} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$$

→ Non esistono tensioni tangenziali ( $\tau = 0$ ).

→ Gli sforzi ammettono solo componenti normali.

$$\vec{F}_m = \sigma_m = \phi_{xx} = \sigma_x$$

$$\vec{F}_m = \sigma_m = \phi_{yy} = \sigma_y$$

$$\vec{F}_m = \sigma_m = \phi_{zz} = \sigma_z$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_m$$

$$\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = \text{PRESSIONE}$$

$$\rightarrow P = P(x, y, z)$$

la pressione dipende da  $x, y, z$  e non dal tempo che in statica si trascura

lo stato di sforzo di un  $V$  fluido in quiete risulta completamente individuato quando si conosca la DISTRIBUZIONE della  $P$  nella massa fluida

Quindi: lo sforzo in un generico punto di un fluido in quiete oltre ad essere sempre diretto normalmente all'elemento di superficie sul quale si esercita, ha modulo indipendente dall'orientamento per il punto stesso.

RIS. SPINTE: (x)

$$P dy dz \vec{i} - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dz \vec{i} = - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \vec{i}$$

direzione y:  $-\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \vec{j}$

direzione z:  $-\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz \vec{k}$

RIS. di tutte le forze superficiali:

$$- \left( \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz = - \text{grad } P dx dy dz$$

$$\boxed{P \vec{F} = \text{grad } P} \quad \rightarrow \quad \boxed{P \vec{F} - \text{grad } P = 0}$$

deve essere soddisfatta in ogni pto della massa fluida in quiete

) indica che la pressione cresce nel verso delle forze di massa.

$$\vec{F} = \text{grad } U \quad \rightarrow \quad \vec{F}_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \vec{F}_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \vec{F}_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\textcircled{P \text{ grad } U = \text{grad } P}$$

Le superfici equipotenziali

Le superfici di uguale pressione e densità.

$P \vec{F} = \text{grad } P \rightarrow$  è una condizione locale di equilibrio, idonea ad individuare, opportunamente completata con l'eq. di stato del fluido ( $P = P(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \rightarrow P = \text{cost}$ ) e con le c.c., la distrib. delle pressioni in tutti i pti della massa di un fluido in quiete.

$\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{F} d\mathcal{V} = \vec{G}$  → risultante delle forze di massa agenti sulle singole particelle del fluido che occupa il volume  $\mathcal{V}$ .

↳ Nel caso di un fluido pesante soggetto unicamente al campo gravitazionale, esso è pari al volume  $\mathcal{V}$  in termini di peso.

$\int_A \vec{P}_m dA = \vec{\Pi}$  → risultante di tutti gli sforzi elementari  $\vec{P}_m dA$  agenti sui singoli elementi della superf. di contorno  $A$ .

↳ si parla di  $\vec{\Pi}$  che detta superf.  $A$  esercitata sul volume  $\mathcal{V}$ .

J.B. La forza  $(-\vec{\Pi})$  rappresenta la spinta che il volume di fluido  $\mathcal{V}$  esercita sulla sua superficie di contorno.

ATT. Non compaiono gli sforzi relativi ai punti interni del volume  $\mathcal{V}$ , cosicché l'equilibrio del fluido risulta indipendente dalla distribuzione delle pressioni all'interno di  $\mathcal{V}$ , ma è funzione esclusivamente dei valori che la pressione assume al contorno.

## MISURA DELLA PRESSIONE:

Apparecchi atti a misurare la pressione in un pte.

1) PIEZOMETRO

2) MANOMETRO SEMPLICE

3) MANOMETRO METALLICO

4) MANOMETRO DIFFERENZIALE → utilizzato x determinare il dislivello fra P.C.I e cioè la diff. fra le quote piez di 2 masse liquide contenute in recipienti ≠.

$$S = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

## SPINTA SU UNA SUPERF. PIANA:

$$S = \gamma \cdot h_0 \cdot A = P_0 \cdot A$$

→ forza diretta normalmente alla superf. stessa con modulo pari al prodotto della pressione  $P_0$  nel suo baricentro x l'area della superficie.

→ centro di spinta:

$$\xi = \frac{I}{M}$$

$$\eta = \frac{I_{xy}}{M}$$

è sempre più distante del baricentro dalla linea di sposta

**CINEMATICA:**

→ **APPROCCIO LAGRANGIANO:**

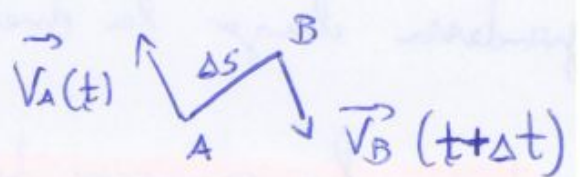
Per successivi istanti di tempo  $t$ , ne determinata la posizione assunta da ogni singola particella (coord.  $x, y, z$ )

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

→ **APPROCCIO EULERIANO:**

Determinare, in ogni istante di tempo  $t$ , della velocità in ogni punto del campo

$\vec{A}$ ? **DIM.** Particella P che nel tempo  $\Delta t$  si muove da A verso B



$$\vec{a}_P = \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_B(t) + \vec{V}_B(t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}_B(t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

lim  
 $\Delta t \rightarrow 0$   
 $\Delta S \rightarrow 0$

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial S} |\vec{V}|$$

**Acc. x APPROCCIO EULERIANO**

Vettore:

$$\vec{x} = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0) \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0) \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

$(x_0, y_0, z_0)$  riferiti all'istante iniziale  $t_0$

Vettore:

$$\vec{V} = (u, v, w)$$

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

## Descrizione del fluido dal pto di vista cinematico:

### 3 FAMIGLIE DI LINEE

#### 1) TRAIETTORIE:

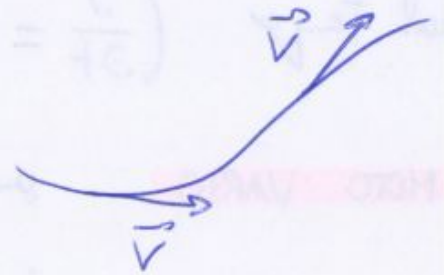
luogo dei punti successivamente occupati dalle singole particelle fluide in moto.

Eq. delle traiettorie:

$$\begin{cases} dx = u(x, y, z, t) dt \\ dy = v(x, y, z, t) dt \\ dz = w(x, y, z, t) dt \end{cases}$$

#### 2) LINEE DI CORRENTE (& FLUSSO):

una  $t_0$ , in ciascuno dei punti, al vettore velocità in quel pto.



Eq. diff. della linea di corrente:

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t^*)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t^*)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t^*)}$$

$t^*$ : istante generico in cui sia noto in ogni pto del campo del moto il vettore velocità.

#### 3) LINEE DI FUMO (& di EMISSIONI):

luogo dei punti occupati dalle particelle transitanti tutte per un stesso punto (ES. fumo sigaretta)

J.B. Moto pesante (moto indipendente dal tempo); traiettorie, linee di corrente e linee di fumo coincidenti ( $\equiv$ ).

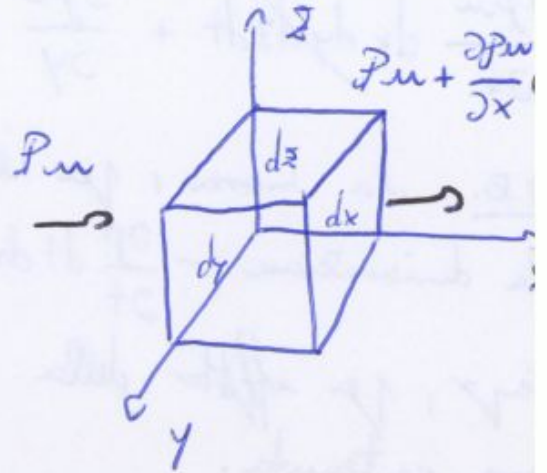
EQ. DI CONTINUITÀ (e EQ. DIFF. DI CONTINUITÀ LOCALE)!

→ Applicazione del principio di conservazione della massa

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$V = dx dy dz$$



$$m = \rho dx dy dz$$

$$(x) \quad u = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad dx = u dt \quad \rightarrow \quad m_E = \rho u dy dz dt$$

$$m_U = \left( \rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz dt$$

$$(y) \quad v = \frac{dy}{dt} \quad \rightarrow \quad dy = v dt \quad \rightarrow \quad m_E = \rho v dx dz dt$$

$$m_U = \left( \rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy \right) dx dz dt$$

$$(z) \quad w = \frac{dz}{dt} \quad \rightarrow \quad dz = w dt \quad \rightarrow \quad m_E = \rho w dx dy dt$$

$$m_U = \left( \rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz \right) dx dy dt$$

**EQ. GLOBALE DI CONTINUITA'**

Considerando un volume finito di fluido



$$dQ = \vec{v} \cdot \vec{n} dA = v_n dA$$

$$m = \rho v_n dA dt = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA dt$$

$$m = \int_A \rho v_n dA (dt) = \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA (dt) \quad \left. \begin{array}{l} > 0 \text{ presa } M_E \\ < 0 \text{ presa } M_U \end{array} \right\}$$

$$\cancel{dt} \int_A \rho v_n dA = \cancel{dt} \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_w \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} dw \right) dt$$

cioè la differenza fra  $m_E$  e  $m_U$  attraverso la superficie di controllo è compensata dalla variazione che la massa

$\int_w \rho dw$  ha subito nello stesso intervallo di tempo  $dt$

per effetto dei cambiamenti di densità.

$$\int_A \rho v_n dA = \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_w \frac{\partial \rho}{\partial t} dw$$

Equaz di tip. integrale valido per volume del corpo di moto.

→ CASO moto permanente e fluido incompressibile

$$\int_A \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \rightarrow Q_E = Q_U$$

(portata in ingresso = portata in uscita)

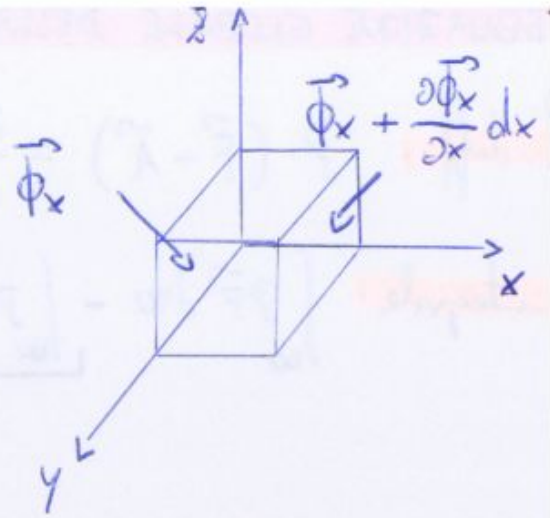


**DINAMICA:**

2° eq. dinamica:  $\vec{F} = m \cdot \vec{A}$

$\vec{R} = \rho m \cdot \vec{A}$

$\vec{R} \rightarrow$  forze di massa:  $\vec{F} \rho dx dy dz$



forze di superficie: sforzi che interessano ciascuna faccia dell'elemento

x):  $\vec{\Phi}_x dy dz - (\vec{\Phi}_x + \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} dx) dy dz = - \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} dx dy dz$  (lungo x)

y):  $\vec{\Phi}_y dx dz - (\vec{\Phi}_y + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} dy) dx dz = - \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} dx dy dz$  (lungo y)

z):  $\vec{\Phi}_z dx dy - (\vec{\Phi}_z + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} dz) dx dy = - \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} dx dy dz$  (lungo z)

$\vec{F} \rho dx dy dz - (\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}) dx dy dz = (\rho dx dy dz) \vec{A}$

$\vec{F} \rho - (\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}) = \rho \vec{A}$

$\rho \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$

**EQ. INDEFINITA DELLA DINAMICA DEI FLUIDI**

Lo **Empire** il **principio di conservazione** della **quantità di moto**.

Del caso di **fluidi perfetti**  $\rightarrow$  **stato di sforzi** identica a quelle di un **fluido in quiete**.

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$   
 $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$

$\rho \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } P$

**EQUAZIONE DI EULERO**

$$P\vec{A} = p \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial (p u \vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial (p v \vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial (p w \vec{V})}{\partial z} \right] + \vec{V} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$p \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p \vec{V}}{\partial t}$$

$$P\vec{A} = \frac{\partial p \vec{V}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial (p u \vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial (p v \vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial (p w \vec{V})}{\partial z} \right]$$

$$\int_{\mathcal{W}} P\vec{A} d\mathcal{W} = \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial p \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{W} + \int_{\mathcal{W}} \left[ \frac{\partial (p u \vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial (p v \vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial (p w \vec{V})}{\partial z} \right] d\mathcal{W}$$

$$\int_{\mathcal{W}} P\vec{A} d\mathcal{W} = \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial p \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{W} - \int_A \left[ p \vec{V} \cdot (u \cos \hat{n}_x + v \cos \hat{n}_y + w \cos \hat{n}_z) \right] dA$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{v}_m}$

$$\int_{\mathcal{W}} P\vec{A} d\mathcal{W} = \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial p \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{W} - \int_A p \vec{V} v_m dA$$

quindi riassumendo:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{W}} P\vec{F} d\mathcal{W}}_{\vec{G}} - \underbrace{\int_{\mathcal{W}} \frac{\partial p \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{W}}_{\vec{I}} + \underbrace{\int_A p \vec{V} v_m dA}_{\vec{M} = \vec{M}_E - \vec{M}_U} + \underbrace{\int_A \vec{\Phi}_m dA}_{\vec{\Pi}} = 0$$

$\vec{G} + \vec{I} + \vec{M}_E - \vec{M}_U + \vec{\Pi} = 0 \rightarrow$  per qualunque volume finito  $\mathcal{W}$  di fluido in movimento, è nulla la risultante delle seguenti forze

# I. BERNOULLI.

→ relazione tra le ≠ forme di energia in gioco.

→ nale Hp:

1) fluido perfetta

2) campo gravitazionale (unica forza di massa è il peso)

$$F = -g \text{ grad } z$$

3) fluido incompressibile ( $\rho = \text{cost}$ )

4) moto permanente

eq. vett. :  $\rho \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } P \quad (\text{Eq. EULERO})$

$$\rho \cdot (-g \text{ grad } z - \vec{A}) = \text{grad } P$$

$$\rho = \rho \cdot g \iff \frac{\rho}{g} = \rho \iff \frac{\rho}{\rho} = \frac{1}{g}$$

$$-\rho \text{ grad } z - \rho \vec{A} = \text{grad } P$$

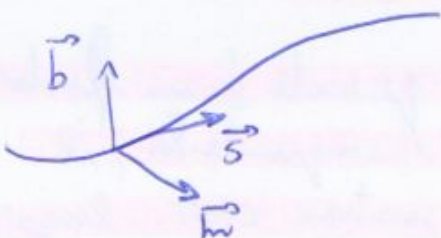
$$\text{grad} \left( \frac{P}{\rho} + z \right) = -\frac{\rho}{\rho} \vec{A} = -\frac{1}{g} \vec{A}$$

questa eq. può essere individuata anche mediante eq. scalari:

$$\vec{A}_s = \frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$\vec{A}_m = \frac{U^2}{r} \quad (\text{acc. centripeta})$$

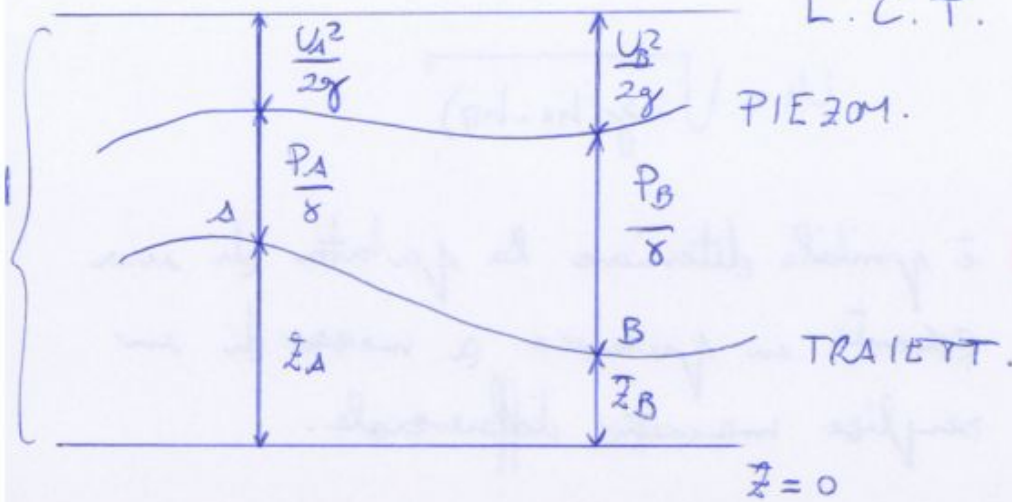
$$\vec{A}_b = 0$$



**INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:**

He è un invariante sulla  
singola traiettoria

L.C.T.



$$z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{U_B^2}{2g} = \text{cost}$$

**SIGNIFICATO ENERGETICO:**

$$H = z + \frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2g}$$

H: energia meccanica complessiva posseduta dall'unità di peso del fluido in movimento.

z: energia potenziale per unità di peso  $\rightarrow z = \frac{mgh}{mg} = z$

$\frac{U^2}{2g}$ : energia cinetica  $\rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{g} v^2 = \frac{v^2}{2g}$

$\frac{P}{\rho}$ : energia legata alla pressione  $\rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{\rho gh}{\rho} = h \rightarrow$  e. pot. guadagnata  
 $\frac{P}{\rho} = \frac{\rho h}{\rho} = h \rightarrow$  e. pot. persa.

## ESTENSIONE DEL T. BERNOULLI ALLE CORRENTI:

→ individuazione della velocità delle correnti e non quella della singola particella.

→ valga tutte le Hp precedenti

→ eq. diff. di continuità (x le correnti):  $\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0$

→ MOTO PERMANENTE e

FLUIDO INCOMPRESSIBILE

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

→ peso che attraversa la sezione dA nell'unità di tempo

$$\gamma dQ = \rho g v dA = \frac{\gamma}{g} g \frac{s}{t} dA = \frac{\gamma s}{t}$$

(potenza in  
watt)

→ energia nell'unità di tempo (potenza):  $dP = \gamma dQ H$

→ x corrente di SEZ. FINITA:

$$\int_P dP = \int_Q \gamma H dQ = \int_A \gamma H v dA = \int_A \gamma \cdot \left( z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) v dA \quad \Rightarrow P_{\text{cost}}$$

cost.

nel moto permanente di una corrente di un fluido perfetto incompressibile la potenza si mantiene cost, ossia assume lo stesso valore in tutte le SEZ. TRASVERSALI successive.

## ESTENSIONE DEL T. BERNOULLI AI FLUIDI REALI:

→ fluido non perfetto

→ non è più presente conservazione di energia meccanica

↳ la viscosità del fluido provoca, durante il moto, l'insorgere di sforzi  $\tau$ , il cui lavoro (resistente al moto) provoca / costituisce dissipazione di en. meccanica, cioè trasformazione di en. meccanica in calore.

↳ conseguenza: il carico tot di una generica particella cioè la sua energia meccanica, non si mantiene COST.

→ SERB. A (+ alto) collegato SERB. B (+ basso) da una condotta → DISLIVELLO  $\gamma$  →

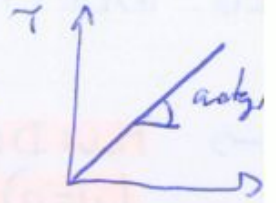
per effetto di questo dislivello si stabilisce nella condotta il MOTO PERMANENTE di una corrente che l'eccezione di EN. POTENZ. esistente in A tende a trasformarsi in EN. CINETICA.

→  $J = -\frac{\partial H}{\partial s}$  ) Espressione differenziale del T. B. x in liquido reale. (2)

↳ cadente  $J$ : abbassamento della linea dei carichi totali per unità di percorso della corrente.

**FLUIDI REALI**

→ Analisi limitata al caso dei fluidi Newtoniani



↓  
 Caratterizzati da un valore della viscosità  $\mu$  indipendente dagli sforzi e quindi dal moto.  
 Lo si partecolore dalla velocità di deforz.

**EQ. INDEFINITA DI EQUILIBRIO DEL MOTO DI UN FLUIDO VISCOSO**

$$\rho \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } P - \mu \nabla^2 \vec{V} - \frac{1}{3} \mu \text{grad}(\text{div } \vec{V})$$

Se fluido è incomprimibile ( $\rho = \text{const}$ );

**EQ. DI**

**JAVIER - STOKES :**

$$\rho \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } P - \mu \nabla^2 \vec{V}$$

con ammissioni di velocità di deforz. piccole.

$$\nabla^2 \cdot = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

→ **LAPLACIANO**

→ operatore lineare (somma di derivate 2°)

e operatore DIFFUSIVO  $\frac{\partial}{\partial t}$

immessa i gradienti spaziali

↓  
 → Descrive tutto i moti guidati da gradiente

→ L'azione di  $\vec{A}$  volta a cambiare il campo di moto non è limitata dall'operatore LAPLACIANO  $\nabla^2$ .

AZIONI DI TRASCINAMENTO DI UNA CONETE

→ L'interazione della viscosità nel moto dei fluidi reali fa sì che gli sforzi che agiscono sulla parete del condotto in cui si muove una conete presentano componenti tangenziali. Lo si dice AZIONE di TRASCINAMENTO della conete sull'inducere il risultante di queste componenti  $t_g$ .

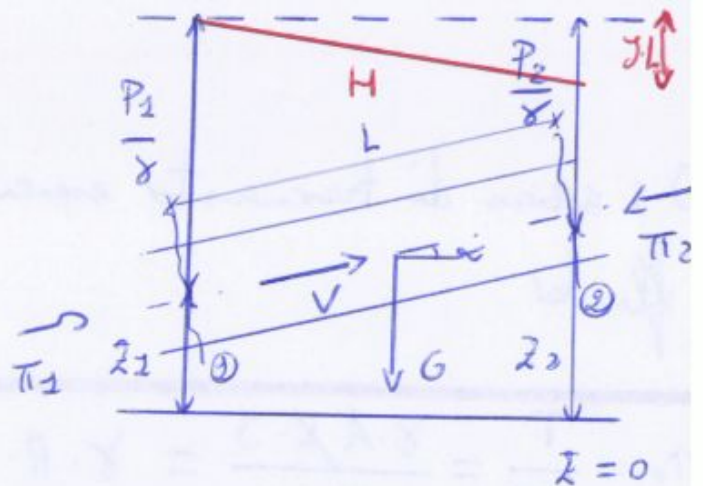
→ la forza ad essa opposta rappresenta la resistenza dell'inducere.

→ moto uniforme in un condotto cilindrico.

$$\vec{S} + \vec{\pi}_u + \vec{M}_E - \vec{M}_U + \vec{I} - \vec{T} = 0$$

$$\vec{M} = M_E - M_U = 0$$

$$\vec{G} = -G \cdot \sin \alpha = -\gamma \cdot A \cdot L \cdot \sin \alpha$$



$$\vec{\pi}_u \rightarrow \vec{\pi}_1 = P_1 \cdot A$$

$$\vec{\pi}_2 = P_2 \cdot A$$

$$\vec{\pi}_1 - \vec{\pi}_2 = (P_1 - P_2) \cdot A$$

$$\vec{I} = 0 \text{ (Hp. moto permanente)} \rightarrow Q = \text{cost.}$$

⇓

$$-\gamma \cdot A \cdot L \cdot \sin \alpha + A \cdot (P_1 - P_2) - T = 0$$

$$L \cdot \sin \alpha = z_2 - z_1 \rightarrow \sin \alpha = \frac{z_2 - z_1}{L}$$



**CORRENTI IN PRESSIONE.**

$$\tau = \frac{\gamma \cdot \pi r^2 L \cdot J}{2\pi r L} = \gamma \frac{r}{2} J \quad \rightarrow \quad \tau \text{ proporzionale al raggio del cilindretto } r$$

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \tau_0 : \text{sforzo tangenziale alla parete} \\ r_0 : \text{raggio del conduttore} \end{array}$$

**CONDOTTO CILINDRICO:**

$$T = \int_{A_0} \tau \, dA \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$T = - \int_{A_0} \tau \, dA = - \int_{A_0} \frac{\partial u}{\partial z} \, dA = - \frac{du}{dz} A_0 = - \frac{du}{dz} 2\pi r L$$

$$T = - 2\pi r L \frac{du}{dz} = \gamma \pi r^2 L J$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\gamma}{2\mu} r J$$

Eq diff. 1° ORD.

Definire la distribuzione della velocità nella sez. trasversale della corrente.

$$u = -\frac{\gamma J}{4\mu} r^2 + (C) \rightarrow C.C.$$

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu} \left( \frac{D^2}{4} - r^2 \right)$$

$$u_{\text{MIN}} (r_0 = r) = 0 \quad ; \quad u_{\text{MAX}} (r = 0) = \frac{\gamma J}{16\mu} D^2$$

alla parete

x lastre piane e parallele:

$$P \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } P - \sqrt{N} \nabla^2 \vec{V}$$

proiettata sull'asse  
" al vettore velocità

$$P \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (-g z) - \frac{dm}{dt} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} - \sqrt{N} \nabla^2 m$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} v + \frac{\partial m}{\partial y} w + \frac{\partial m}{\partial z} w = 0$$

$$\nabla^2 m = \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \quad \underline{\text{che } m \text{ è } f(y)}$$

$$P \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (-g z) \right) = \frac{\partial P}{\partial x} - \sqrt{N} \frac{\partial^2 m}{\partial y^2}$$

/ g

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{P}{g} \right) = \frac{\sqrt{N}}{g} \frac{d^2 m}{dy^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\gamma \quad (\text{pendenza costante})$$

$$-\gamma = \frac{\sqrt{N}}{g} \frac{d^2 m}{dy^2}$$

Eq.  
Poisson

$$\frac{d^2 m}{dy^2} = - \frac{\gamma g}{\sqrt{N}}$$

eq di una  
parabola