NUMERO: 819 DATA: 10/02/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Frison

MATERIA: Idraulica

Prof. Ridolfi

IDRAULICA: ARGOMENTI DEL CORSO

- PARTE INTRODUTTIVA (1)
- IDROSTATICA (2)
- CINEMATICA (3)
- DINAMICA (4)
- TEOREMA DI BERNOULLI (5)
- FLUIDI REALI (6)
- CORRENTI IN PRESSIONE (7)
- LUNGHE CONDOTTE (8)
- CORRENTI A PELO LIBERO (9)
- MOTI A POTENZIALE (10)
- FORONOMIA (11)
- MOTI DI FILTRAZIONE (12) + ESERCITAZIONI DA PORTARE ALL'ESAME (15
- REGIME TURBOLENTO (13) + ESERCIZI (14)

FLUIDI → LIQUIDI, GAS) per quanto riguarda il comportamento di fronte alle forze che tendono a modificarne il volume.

LIQUIDI → fluidi che oppongono grande resistenza alle variazioni di volume.
Presentano una superficie libera a contatto con la sovrastante atmosfera.

GAS → comportamento opposto rispetto ai fluidi:
sono suff. forze di modesta entità per variarne, in circostanze normali, il volume.
N.B. un gas occupa tutto lo spazio del recipiente entro cui esso si trova.

LIQUIDI → POCO COMPRIMIBILI
GAS → FACILMENTE COMPRIMIBILI

A scala ~~microscopica~~ un fluido è considerato come un insieme costituito da masse concentrate.
Al di sotto di una certa scala si considera un fluido come un continuo (semplificando i calcoli)

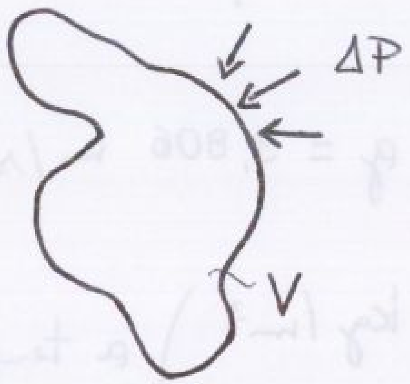
COMPRESSIBILITÀ: → o COMPRIMIBILITÀ

Qualsiasi fluido modifica il suo volume (e quindi la sua densità) al variare della pressione alla quale è assoggettato.

→ LIQUIDI:

$$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon} V \Delta P$$

) $\Delta P > 0$, il volume diminuisce.



$\frac{1}{\varepsilon}$ → costante di proporzionalità

ε → modulo di elasticità a compressione cubica e modulo di elasticità di volume

Ambito differenziale:

V: volume occupato da una massa liquida.

P: pressione nei punti della sua superficie di contorno.

→ Se si da a P un incremento dP (costante su tutta la superf il volume V subisce una diminuzione dV proporzionale a dP e al volume stesso.

$$dV = -\frac{1}{\varepsilon} V dP \quad \text{segue:} \quad \frac{dV}{V} = -\frac{1}{\varepsilon} dP$$

) variazione unitaria di volume

La relazione scritta, deriva dal seguente ragionamento:

Se si desidera mantenere in quiete il cilindro interno, occorre applicare una coppia resistente a mezzo, per esempio, di una forza tangenziale T. Si riconosce allora, da un attento esame del campo del moto, che la velocità del fluido alla parete del cilindro esterno risulta pari a $w \cdot r_e$, mentre essa è nulla alla parete del cilindro interno; ciò indica che alle pareti il fluido si muove con la stessa velocità di queste e cioè che non esiste alcun slittamento fra fluido e pareti solide a contatto.

Consideriamo ora una qualsiasi superficie cilindrica di generico raggio r ($r_i < r < r_e$), il fluido che si trova all'esterno di questa superficie per poter far muovere quello posto all'interno, deve esercitare sulla superficie stessa un'azione di trascinamento risultante da sforzi che non possono essere che diretti, in ogni punto, tangenzialmente al moto, nello stesso verso della velocità; viceversa un'azione identica ma di verso opposto, viene esercitata dal fluido interno su quello esterno che risulta perciò frenato nel suo movimento.

Attesa la simmetria del processo, detti sforzi tangenziali hanno modulo costante in tutti i punti della superficie cilindrica.

In particolare l'azione di trascinamento che si esercita sulla parete del cilindro interno è uguale e contraria alla forza T che abbiamo applicato ad esso per tenerlo fermo.

Per strati di spessore infinitesimo:

$$\tau = \nu \frac{du}{dn}$$ LEGGE DI NEWTON

n è la direzione normale a quella del moto.

La legge di Newton mostra che le componenti tangenziali degli sforzi in un punto di una massa fluida in moto, dipendono unicamente dal gradiente di velocità nel punto, al quale è direttamente legata la velocità di deformazione angolare della massa fluida. Ciò in netta differenza con i solidi elastici per i quali gli sforzi tangenziali sono invece direttamente proporzionali alla deformazione angolare.

Per la maggior parte dei fluidi che interessano le pratiche applicazioni, la viscosità ν presenta un valore praticamente costante per date condizioni di temperatura, cioè, più precisamente, indipendente dagli sforzi sia tangenziali che normali.

I fluidi per i quali si verifica questa proprietà vengono chiamati NEWTONIANI. → tutti i GAS e quasi tutti i LIQUIDI OMOGENEI NON MACROMOLECOLARI.

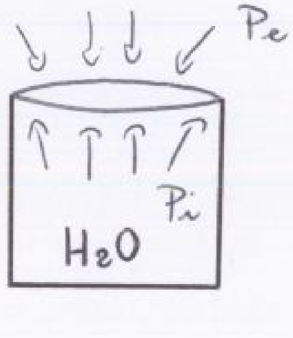
TENSIONE SUPERFICIALE:

La superficie di separazione fra un liquido e un altro fluido (liquido o gas) non miscibile con esso si comporta, a causa delle forze di attrazione molecolare, come se fosse una membrana elastica in stato uniforme di tensione: definiamo tensione superficiale questa proprietà

TENSIONE SUPERFICIALE $\rightarrow \sigma = \dfrac{F}{L} \quad [N/m]$

La relazione esplicitata deriva dal seguente ragionamento:

Immaginiamo di tagliare la superficie lungo un segmento di linea di lunghezza L; per mantenere a contatto fra loro i due labbri del taglio, occorre esercitare, su ciascuno di essi, una forza F".



$P_i \neq P_e \rightarrow$ perché si deve considerare la tensione superficiale.

$$P_i > P_e \rightarrow \Delta P = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

curvature principali dell'ellissoide osculatore alla superficie del fluido nelle 3D

SFORZI NEI SISTEMI CONTINUI:

Nello studio dei sistemi continui conviene distinguere due tipi di forze:

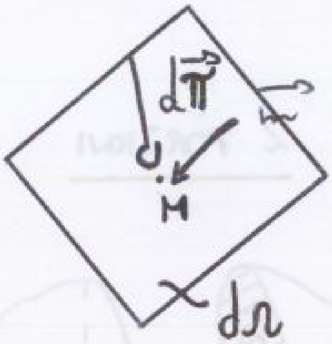
→ FORZE DI MASSA

→ FORZE DI SUPERFICIE

Le FORZE DI MASSA comprendono tutte le forze esterne che si esercitano a distanza su tutte le particelle del sistema, proporzionalmente alla loro massa, e di norma sono espresse come forze per unità di massa.

ES. forza di gravità

Le FORZE DI SUPERFICIE comprendono tutte le forze che vengono esercitate su una parte qualsiasi del sistema continuo attraverso la sua superficie di contorno.
Tali forze richiedono un esame più dettagliato in considerazione dell'importanza che esse assumono nello studio di qualsiasi processo di movimento di un fluido.



ATT. in IDRAULICA $\vec{n}$ entrante è positiva!

$$\lim_{d\Omega \to 0} \frac{d\vec{\pi}}{d\Omega} = \vec{\phi}_n \qquad [N/m^2]$$

Quando $d\Omega$ tende a zero, il vettore $\frac{d\vec{\pi}}{d\Omega}$ tende ad un vettore finito $\vec{\phi}$ che viene chiamato SFORZO UNITARIO nel punto M e sull'elemento superficiale considerato.

Lo sforzo ϕ, pur essendo comunque orientato rispetto a $d\Omega$, dipende in generale sia dalla posizione ① del punto M, sia dalla giacitura ② dell'elemento $d\Omega$ al quale è applicato.

Per mettere in evidenza quest'ultimo fatto si usa far riferimento al versore normale n all'elemento $d\Omega$ e si adotta perciò il simbolo $\vec{\phi}_n$ per indicare lo sforzo che agisce su $d\Omega$.

$d\vec{\pi} = d\Omega \cdot \vec{\phi}_n$ → SPINTA ELEMENTARE SU $d\Omega$

$\vec{\pi} = \int_\Omega \vec{\phi}_n \, d\Omega$ → SPINTA SU Ω → è il sistema di tutte le spinte elementari sulla superficie finita Ω

SFORZO $\vec{\phi}_n$ → COMP. NORMALE (compressione, trazione) → alla superficie su cui agisce.
↳ COMP. TANGENZIALE

1° EQUAZ. EQ. CARDINALE DEL TETRAEDRO dà luogo alla relazione vettoriale:

$$\vec{\phi}_n = \vec{\phi}_x \cos \widehat{nx} + \vec{\phi}_y \cos \widehat{ny} + \vec{\phi}_z \cos \widehat{nz}$$ → esprime il TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY!

(per ∀ GIACITURA)

IL TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY afferma che lo sforzo agente in un punto su un elemento di generica giacitura è una funzione lineare e omogenea degli sforzi agenti, nel punto stesso, su tre qualsiasi giaciture fra di loro ortogonali.

→ 3 RELAZIONI SCALARI → proiettando la relazione vettoriale secondo i 3 assi della terna cartesiana.

$$\phi_{nx} = \phi_{xx} \cos \widehat{nx} + \phi_{yz} \cos \widehat{ny} + \phi_{zx} \cos \widehat{nz}$$

$$\phi_{ny} = \phi_{xy} \cos \widehat{nx} + \phi_{yy} \cos \widehat{ny} + \phi_{zy} \cos \widehat{nz}$$

$$\phi_{nz} = \phi_{xz} \cos \widehat{nx} + \phi_{yz} \cos \widehat{ny} + \phi_{zz} \cos \widehat{nz}$$

3 RELAZIONI → 9 COMPONENTI DI SFORZO

$$\begin{cases} \phi_{xx},\ \phi_{yy},\ \phi_{zz} \\ \phi_{xy},\ \phi_{yx},\ \phi_{xz},\ \phi_{zx},\ \phi_{yz},\ \phi_{zy} \end{cases}$$

nel loro complesso definiscono completamente la distribuzione degli sforzi sulla terna di elementi piani che ha centro nel punto considerato.

$$\begin{vmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{vmatrix}$$

ANALISI:

$\vec{\phi}_n = \vec{\phi}_x \cos \hat{nx} + \vec{\phi}_y \cos \hat{ny} + \vec{\phi}_z \cos \hat{nz}$

conduce alle seguenti importanti proprietà della distribuzione degli sforzi intorno ad un punto:

→ ∀ punto ∃ 3 elementi piani, tra loro perpendicolari, che si chiamano PIANI PRINCIPALI, i quali godono della proprietà che gli sforzi ad essi relativi non ammettono componenti tangenziali.

→ se per qualsiasi piano passante per un punto lo sforzo ammette soltanto una componente normale, e cioè è diretto perpendicolarmente al relativo piano, lo sforzo ha modulo unico costante per tutte le direzioni uscenti dal punto; in tal caso il sistema è isotropo nei riguardi degli sforzi.
Il modulo dello sforzo è chiamato pressione P ed il suo valore è una funzione soltanto dei punti del campo (ed eventualmente del tempo).

$\vec{\phi}_n = P\,\vec{n}$ $\qquad \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \rightarrow P$ scalare nel campo della statica dei fluidi

ϕ_{nx} → proiezione secondo l'asse x dello sforzo $\vec{\phi}_n$.

quindi: 1° indice: direz. della normale all'elem. su cui agisce lo sforzo.
2° indice: direz. secondo cui si proietta.

FLUIDI NON NEWTONIANI → sempre più largo impiego in campo tecnico

vengono classificati in 3 CLASSI:

1) FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO:

$\tau = f(\dot{\gamma})$

3 CATEGORIE → fluidi plastici alla Bingham
→ fluidi pseudoplastici
→ fluidi dilatanti

FLUIDI PLASTICI ALLA BINGHAM:

curva reologica rettilinea non passante per l'origine.
Un comportamento di questo genere è approssimativamente seguito da vernici, pasta dentifricia, fanghi di fogna e dalla boiacca di cemento usata per iniezioni impermeabilizzanti.

FLUIDI PSEUDOPLASTICI:

curva reologica passa per l'origine ed è concava verso il basso.
presenta una forte resistenza al moto per piccole velocità, che va però diminuendo man mano che il moto si fa più veloce.
per caratterizzare i fluidi di questo tipo è usata una

3) FLUIDI A COMPORTAMENTO DIPENDENTE DAL TEMPO:

Fluidi per cui il legame fra sforzi e deformazioni dipende dalla durata dello sforzo e della deformazione, oppure dalla precedente storia.

Molti fluidi reali non possono essere descritti con una semplice equazione reologica del tipo $\tau = f(\dot{\gamma})$, perché la loro viscosità apparente dipende dalla durata del moto.

→ 2 CLASSI: → fluidi tixotropici → la viscosità diminuisce perché si rompono dei legami strutt. → un nuovo stato di quiete, dopo il moto, ricrea i legami!

→ fluidi reopectici → la viscosità aumenta perché si formano dei legami strutturali che si oppongono al movimento.

INDURISCONO SCORRENDO (STATO DI MOTO)

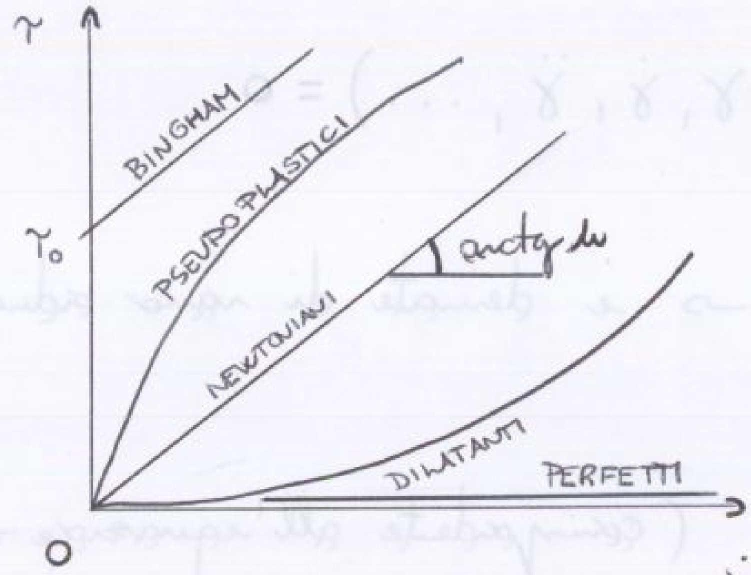
C) FLUIDI ELASTO VISCOSI:

Fluidi che possiedono alcune caratteristiche dei solidi e che in genere mostrano una parziale reversibilità delle deformazioni.

Si tratta di sostanze nelle quali riscontriamo accanto alle proprietà viscose proprie dei fluidi, anche alcune proprietà elastiche caratteristiche dei solidi; naturalmente trattandosi di fluidi risultano predominanti gli effetti viscosi.

ES. emulsioni, bitumi.

PIANO REOLOGICO :



$\dot{\gamma} \ \left(\frac{d\gamma}{dt}\right) \rightarrow$ velocità di deformazione angolare.

DILATANTI → COLATE DETRITICHE → fenomeni alternati di accelerazione, deposizione e rallentamento.

STATICA DEI FLUIDI : CAP. 2

FLUIDI IN STATO DI QUIETE → LE SINGOLE PARTICELL NON SUBISCONO NEL TEMPO ALCUN SPOSTAM RELATIVO.

$\vec{u} = 0$ cioè $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$

⇒ Non esistono tensioni tangenziali (il fluido è fermo)

$\tau = \nu \frac{d\vec{u}}{dn} = 0$

quindi $\phi_{xy} = \phi_{xz} = \phi_{yz} = 0$

⇒ Gli sforzi ammettono soltanto componenti normali.

⇒ Tutto questo in conseguenza dell'assenza di deformazioni della massa fluida.

$\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz}$ → PRESSIONE

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_n$ → componente normale dello sforzo ϕ_n agente sull'elemento di normale n.

$\Uparrow$

$\phi_{nx} = \sigma_n \cdot \cos \widehat{nx} = \sigma_x \cdot \cos \widehat{nx}$

$\phi_{ny} = \sigma_n \cdot \cos \widehat{ny} = \sigma_y \cdot \cos \widehat{ny}$

$\phi_{nz} = \sigma_n \cdot \cos \widehat{nz} = \sigma_z \cdot \cos \widehat{nz}$

semplificando i vari termini si ottiene quanto sopra precedentemente scrit

$\vec{\phi}_n = \sigma_n = \phi_{xx} = \sigma_x$

$\vec{\phi}_n = \sigma_n = \phi_{yy} = \sigma_y$

$\vec{\phi}_n = \sigma_n = \phi_{zz} = \sigma_z$

→ si deduce che la PRESSIONE dipende da x, y, z e non dal tempo, xké in STATICA si trascura.

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI:

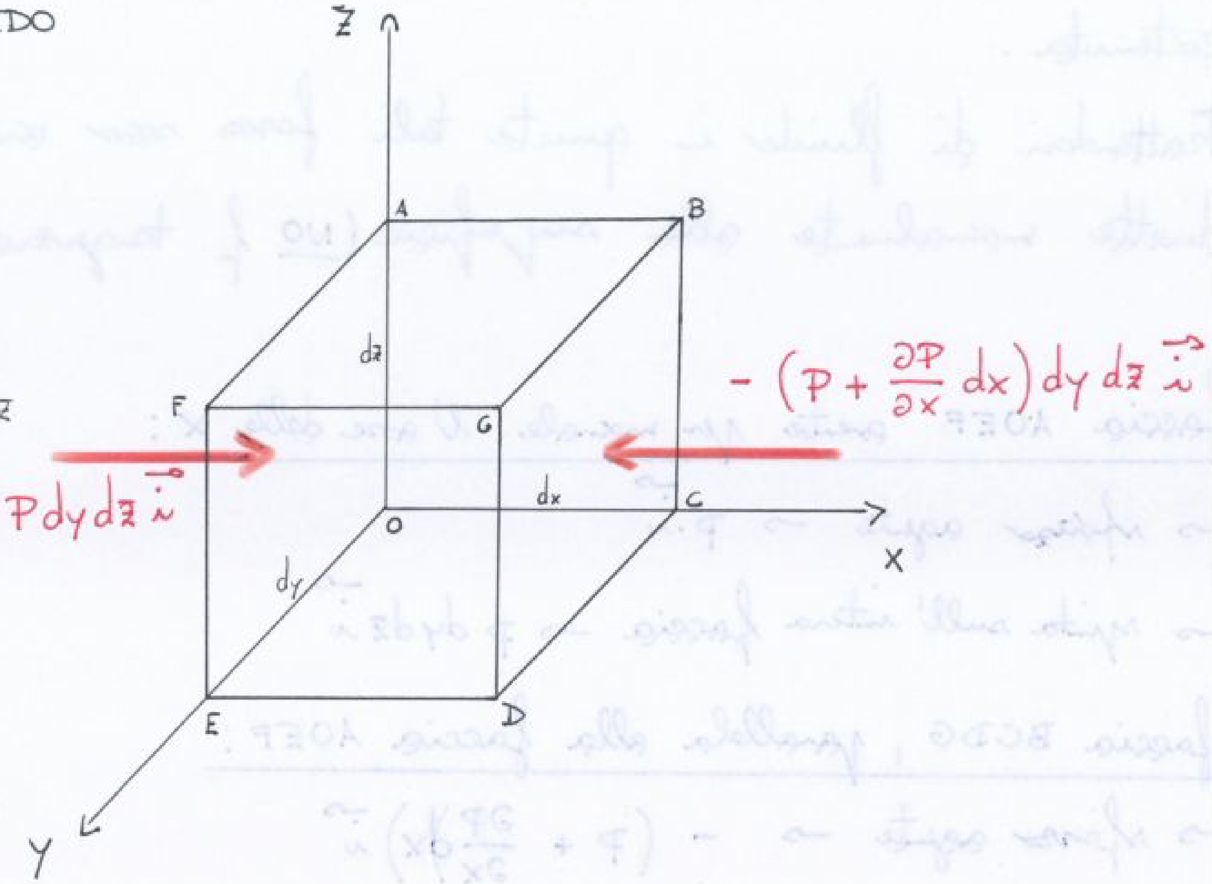
PARALLELEPIPEDO ELEMENTARE

vertice in O

densità ρ

pressione P

lati dx, dy, dz



Nella meccanica dei sistemi continui si dice EQUAZIONE INDEFINITA una relazione (cinematica e dinamica) fra grandezze caratteristiche caratterizzanti l'equilibrio e il moto, la quale valga per un qualsiasi punto del sistema: più precisamente, per l'elemento infinitesimo all'interno del punto.

Sull'elemento infinitesimo di volume agiscono:

1) forza di massa (cioè proporzionale alla massa), risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

→ ELEMENTO INFINITESIMO DI MASSA → $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$

→ COMPLESSIVA FORZA DI MASSA AGENTE SUL VOLUME INFINITESIMO CONSIDERATO

$$\vec{F}\, dm = \vec{F} \cdot \rho\, dx\, dy\, dz$$

In definitiva la risultante di tutte le forze superficiali vale:

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) dx\,dy\,dz = -\,\text{grad}\,P\,dx\,dy\,dz$$

Per l'equilibrio del volume infinitesimo considerato, deve essere nulla la risultante delle 2 forze:

$$\rho\vec{F} - \text{grad}\,P = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho\vec{F} = \text{grad}\,P}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI

L'equazione indefinita della statica dei fluidi deve essere soddisfatta in ogni punto della massa fluida in quiete; essa indica generalmente CHE LA PRESSIONE CRESCE NEL VERSO DELLE FORZE DI MASSA.

Le forze di massa derivano da un potenziale U.

$$\vec{F} = \text{grad}\,U \rightarrow \vec{F}_x = \frac{\partial U}{\partial x}\ ;\ \vec{F}_y = \frac{\partial U}{\partial y}\ ;\ \vec{F}_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

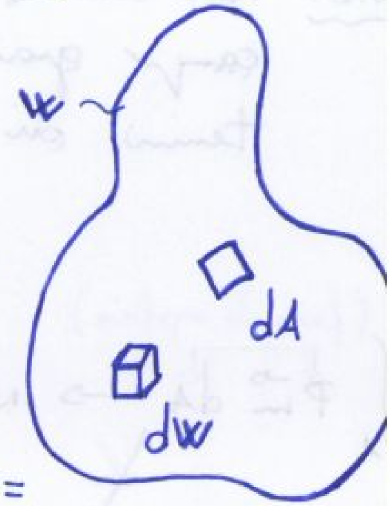
$$\rho\vec{F} = \text{grad}\,P \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho\,\text{grad}\,U = \text{grad}\,P}$$

seguono proprietà:

1) Le superfici equipotenziali ($U = \text{COST}$; $\text{grad}\,U = 0$) sono anche superfici di ugual pressione (SUPERFICI ISOBARICHE)
2) Le superfici equipotenziali sono anche superfici di ugual densità (SUPERFICI ISOCORE). $\rightarrow P = f(U)$ ecco xké!

All'equazione globale si perviene facilmente integrando ad un qualsiasi volume W del fluido, l'equazione indefinita.

$$\rho \vec{F} = \text{grad}\, p \quad \Longrightarrow \quad \int_W \rho \vec{F}\, dW = \int_W \text{grad}\, p\, dW$$



integrale di volume → integrale di superficie

versore n della normale alla superficie risulta diretto verso l'interno del volume.

$$\int_W \text{grad}\, p\, dW = \int_W \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dW =$$

$$= - \int_A p \cdot \left(\vec{i} \cos \widehat{nx} + \vec{j} \cos \widehat{ny} + \vec{k} \cos \widehat{nz} \right) dA = - \int_A p \vec{n}\, dA$$

T. Green

A è la superficie di contorno del volume W considerato.

Quindi:

$$\rho \vec{F} = \text{grad}\, p$$

$$\int_W \rho \vec{F}\, dW = \int_W \text{grad}\, p\, dW =$$

$$\underbrace{\int_W \rho \vec{F}\, dW}_{\vec{G}} + \underbrace{\int_A p \vec{n}\, dA}_{\vec{\Pi}} = 0$$

$G + \pi = 0$ Commenti:

Non compaiono gli sforzi relativi ai punti interni del volume W, cosicché l'equilibrio del fluido risulta indipendente dalla distribuzione delle pressioni all'interno di W, ma è funzione esclusivamente dei valori che la pressione assume al contorno. **IMP.**

$\vec{\pi}$ si presenta con il carattere di una reazione vincolare esercitata sulla porzione di fluido considerata dalla parete che la delimita, che può essere una parete solida o una semplice superficie di separazione fra fluido e fluido

L'equazione fondamentale della statica dei fluidi pesanti e incomprimibili sta ad indicare che a tutti i punti di un fluido pesante incomprimibile in quiete compete la stessa quota piezometrica, il cui valore è determinato quando sia assegnata la pressione in un punto di data quota z

Con ciò risulta completamente individuata la distribuzione della pressione in tutta la massa fluida.
Dalla legge di Stevino si riconosce inoltre che le superfici isobariche (p = COST.) sono piani orizzontali.
La costante di integrazione rappresenta la quota del piano orizzontale nei cui punti la pressione è nulla.

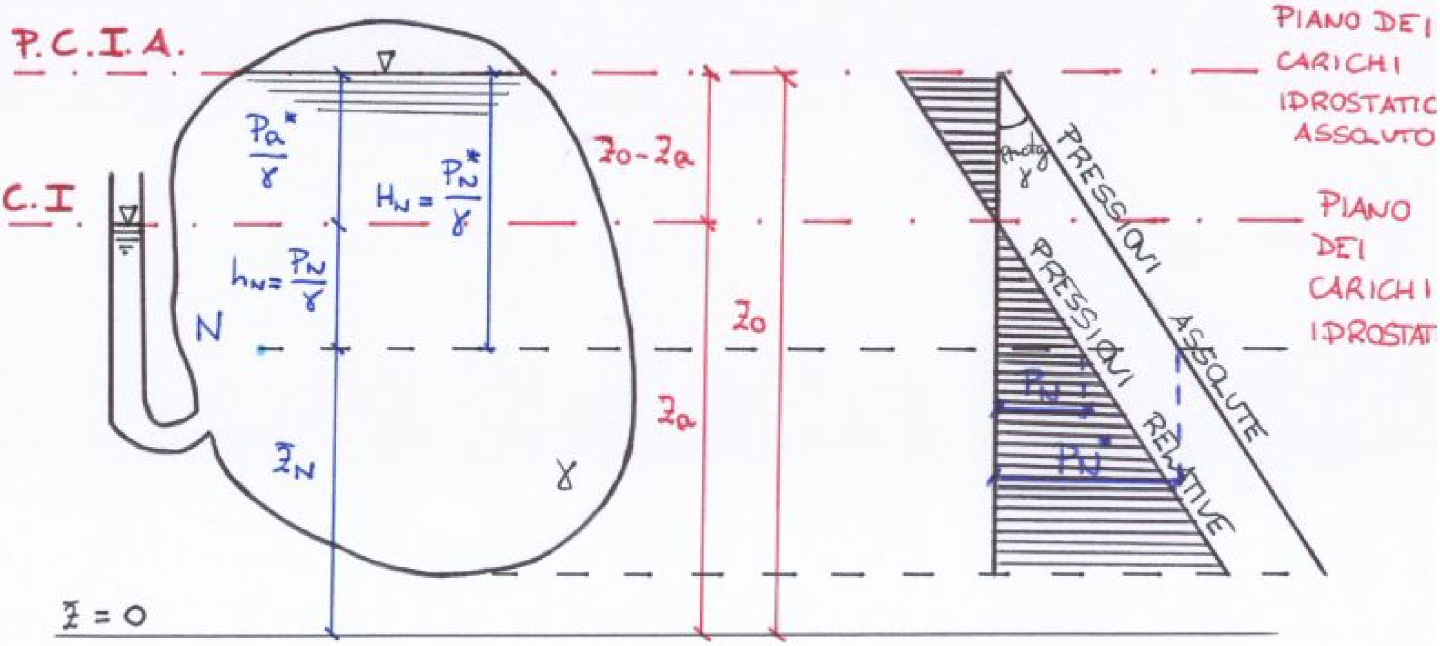
Se A e B sono 2 punti qualsiasi giacenti rispettivamente su 2 piani orizzontali di quota z_A e z_B, il legame fra le pressioni p_A e p_B in essi risulta dall'applicazione della legge di Stevino:

$$p_B = p_A + \gamma \cdot (z_A - z_B)$$

→ la pressione aumenta con la profondità!

Questo piano (PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO), dovrebbe corrispondere alla superficie libera del liquido contenuto nel recipiente, e al disopra di esso si dovrebbe avere il vuoto. → perché i fluidi non resistono a sforzi di trazione e perciò non possono essere assoggettati a pressioni assolute negative

ATT. In realtà la superficie libera coincide non esattamente con il piano dei carichi idrostatici assoluti, ma si trova a quota inferiore, perché lo spazio al disopra di esso risulta sempre occupato dai vapori del liquido, con una certa tensione di vapore.



La distanza fra i 2 piani dei carichi idrostatici vale:

$$z_0 - z_a = \frac{p_a^*}{\gamma}$$ → pari all'altezza piezometrica corrispondente alla pressione atmosferica.

ES. liquido H_2O

$p_a^* = 102\,000$ Pa

$\gamma = 9\,806$ N/m^3

$$z_0 - z_a = \frac{102\,000}{9\,806} = 10,33 \text{ m}$$

PRESSIONE RELATIVA P → $P = P^* - P_a$

Ne risulta la possibilità di pressioni relative negative (cioè inferiori all'atmosferica) → DEPRESSIONI!

Supposto noto il piano dei carichi idrostatici (e quindi anche quello assoluto che si trova ad una quota più alta di $\frac{P_a^*}{\gamma}$), la pressione nel generico punto di quota z vale:

PRESSIONE ASSOLUTA → $P^* = \gamma \cdot (z_0 - z) = \gamma \cdot h^*$

PRESSIONE RELATIVA → $P = \gamma \cdot (z_a - z) = \gamma \cdot h$

e cioè la pressione assoluta e relativa in un punto è pari al prodotto del peso specifico del fluido per l'affondamento del punto stesso sotto il corrispondente piano dei carichi idrostatici.

→ Ne deriva immediatamente che, nota la pressione in un punto, il piano dei carichi idrostatici sovrasta il punto stesso dell'altezza piezometrica $h = \frac{P}{\gamma}$.

TRACCIARE IL DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI LUNGO UNA VERTICALE → INDIVIDUATO IL PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI

↓

PRESSIONI IN QUALUNQUE PUNTO DEL FLUIDO Xhè i piani orizzontali sono superfici isobariche!

MISURA DELLA PRESSIONE:

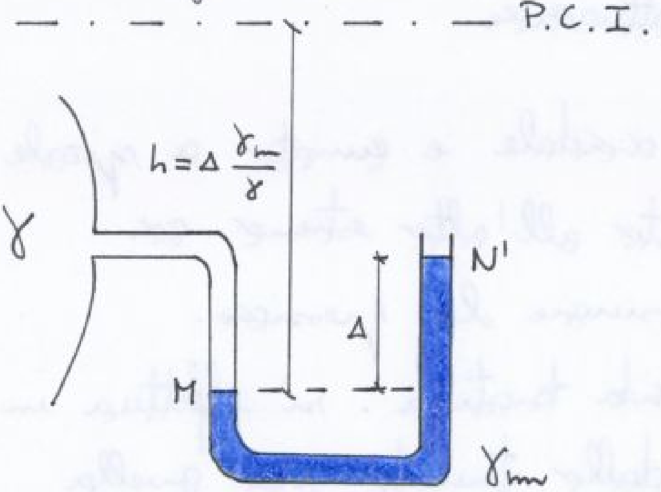
APPARECCHI ATTI A MISURARE LA PRESSIONE IN UN PUNTO.

1) PIEZOMETRO: semplice e pratico → NO per pressioni elevate, xchè P.C.I. è alto.

Costituito da un tubo, verticale o inclinato, aperto in sommità e collegato all'altra estremità con il recipiente contenente il liquido

2) MANOMETRO SEMPLICE:

Costituito da un tubo ad U di cui una estremità è collegata con il recipiente contenente il fluido e l'altra è in comunicazione con l'atmosfera.

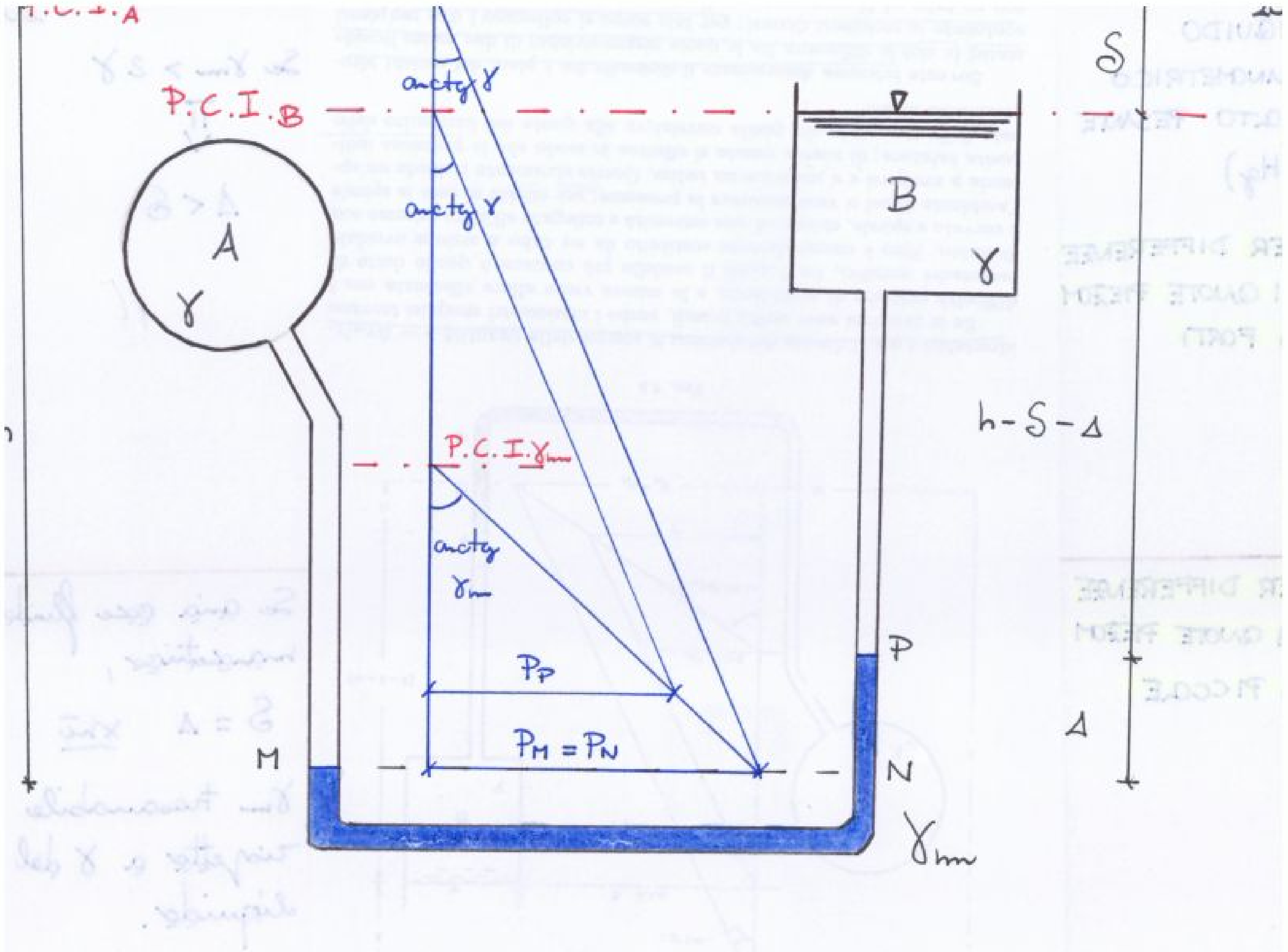


Nella parte inferiore del tubo ad U si dispone un liquido con peso specifico γ_m superiore a quello γ del fluido nel recipiente. (normalm. mercurio $\gamma_m = 133 \cdot 10^3\ N/m^3$)

Per effetto dello stato di pressione del fluido nel recipiente, il liquido manometrico si porta a quote diverse nei 2 rami del manometro, e si può leggere facilmente il dislivello Δ fra i 2 menischi M ed N'.

$p_M = p_N = \Delta \gamma_m$

$h = \frac{p_M}{\gamma} = \frac{\Delta \gamma_m}{\gamma}$ → affondamento del menisco M sotto il piano dei carichi idrostatici del liquido nel recipiente.



Recipiente A, B → γ

$$P_M = \gamma \cdot h = P_N = P_P + \Delta \gamma_m = \gamma \cdot (h - \delta - \Delta) + \Delta \gamma_m$$

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

DISLIVELLO PIEZOMETRICO δ FRA LE QUOTE PIEZOMETRICHE DEI LIQUIDI CONTENUTI NEI RECIPIENTI A e B.

Il dislivello δ è dunque deducibile dalla sola lettura manometrica Δ indipendentemente dalla quota dei piani dei carichi idrostatici.

SPINTA SU UNA SUPERFICIE PIANA:

Superficie qualsiasi giacente su un piano inclinato di α sull'orizzontale. → a contatto con un liquido di peso specifico γ

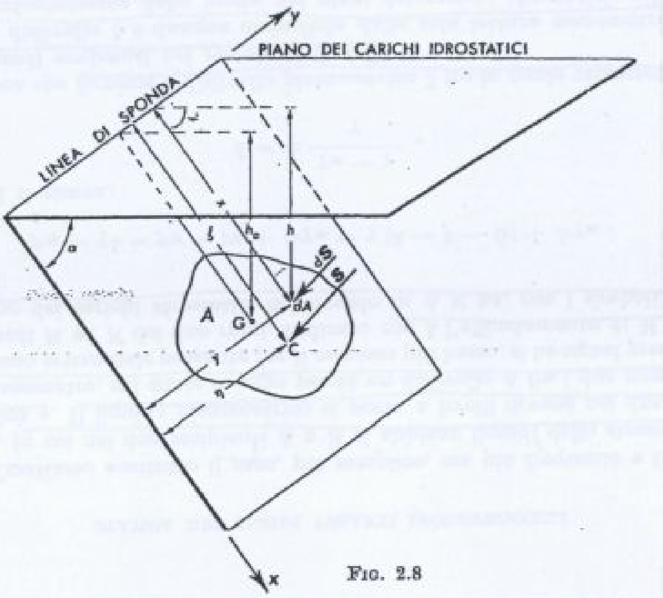


FIG. 2.8

$$d\vec{S} = p\,\vec{n}\,dA = \gamma \cdot h\,\vec{n}\,dA$$

SPINTE ELEMENTARI dS ESERCITATE DAL LIQUIDO SU OGNI ELEMENTO INFINITESIMO DELLA SUPERFICIE PIANA.

→ Sono tutte parallele fra loro

→ Ammettono una risultante S diretta normalmente alla superficie.

$$S = \int_A p\,dA = \int_A \gamma \cdot h\,dA$$

La retta di intersezione del piano dei carichi idrostatici col piano della superficie premuta viene detta RETTA DI SPONDA; più in generale si dice LINEA DI SPONDA l'intersezione del piano dei carichi idrostatici con la superficie premuta (eventualmente non piana)

x: distanza del generico elemento di area dA dalla retta di sponda.

x_0: distanza del baricentro G dell'area della figura premuta dalla retta di sponda

h_0: affondamento del baricentro

$$\int_A \gamma \cdot h\,dA = \int_A \gamma x \sin\alpha\,dA = \gamma x_0 A \sin\alpha = \gamma h_0 A$$

$$S = \gamma \cdot h_0 \cdot A = \gamma \cdot \underbrace{x_0 \cdot A}_{} \cdot \sin\alpha = \gamma \cdot M \cdot \sin\alpha$$

M → MOMENTO STATICO di A rispetto alla retta di sponda.

x_0 : ascissa del baricentro

quindi:

$$S \cdot \xi = \gamma \sin\alpha \int_A x^2 \, dA$$

$$\gamma \cdot M \cdot \sin\alpha \cdot \xi = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot I \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\xi = \frac{I}{M}}$$

$$S \cdot \eta = \gamma \cdot \sin\alpha \int_A x \cdot y \, dA$$

$$\gamma \cdot M \cdot \sin\alpha \cdot \eta = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_{xy} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\eta = \frac{I_{xy}}{M}}$$

COMMENTI:

1) La posizione del centro di spinta è indipendente dall'inclinazione α! (rimane inalterata al ruotare del piano della superficie intorno alla retta di sponda)
- se $\alpha = 0$ → LA RETTA DI SPONDA TENDE A ∞ e $C \equiv G$
- se $\alpha \neq 0$ → C NON CAMBIA MAI POSIZIONE.

2) η si annulla se l'asse delle X è di simmetria della superficie A
il centro di spinta si trova cioè sull'eventuale asse di simmetria di A se questo coincide con una linea di massima pendenza.

il centro di spinta giace sulla mediana di massima pendenza e giace inoltre sulla normale alla superficie che passa per il baricentro del diagramma delle pressioni.

→ In particolare se il lato superiore del rettangolo giace sul piano dei carichi idrostatici ($h_1 = 0$):

$$S = \frac{\gamma \cdot L \cdot h_2^2}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot L \cdot b^2 \cdot \sin\alpha$$

$$\int_0 = \frac{b}{6}$$

→ la spinta è applicata all'estremo inferiore del nocciolo centrale d'inerzia.

$$x_0 + \int_0 = \frac{2}{3} b$$

RICORDA:

Quanto finora esposto vale anche quando si considerano le pressioni assolute, anziché quelle relative, purché si faccia riferimento al piano dei carichi idrostatici assoluto (P.C.I.A.); poiché questo non può mai secare la superficie premuta, il centro di spinta assoluta cade sempre entro il nocciolo centrale d'inerzia, a quota inferiore a quella del baricentro.

h_x, h_y : affondamenti dei baricentri delle 2 superfici piane A_x e A_y
sotto il piano dei carichi idrostatici.

S_x, S_y : 2 forze orizzontali non complanari.
Sono applicate ai centri di spinta, i quali non
giacciono su un unico piano orizzontale.

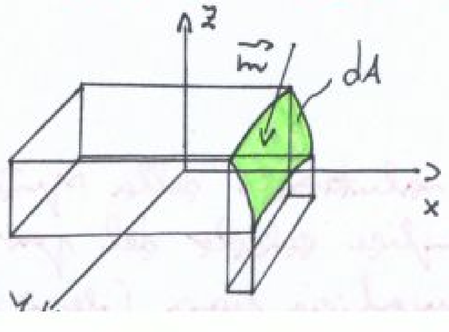
La componente verticale S_z è uguale al peso del volume W di fluido
S_z passa per il baricentro del volume W.
Equivale al peso della colonna di fluido di area trasversale dA_z
e di altezza h $(dS_z = \gamma \cdot h \cdot dA_z)$
↳ affondamento rispetto P.C.I.R.

3 FORZE → S_x, S_y, S_z → composizione delle forze → 2 sole forze
ORIZZONTALE VERTICALE

OR. → $S_o = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$
VERT. → $S_v = S_z$
→ Punti di applicazione delle 2 forze definiti dall'equilibrio dei momenti delle forze.

N.B. $S_v = S_z$ non passa per il baricentro del volume fluido W. Ciò accade soltanto quando le 2 forze S_x e S_y giacciono su uno stesso piano oriz.

La spinta su una superficie curva è in definitiva ricondotta al calcolo di 2 spinte su superfici piane e alla determinazione del peso di un volume fluido. **IMP.**



SPINTA SOPRA CORPI IMMERSI:

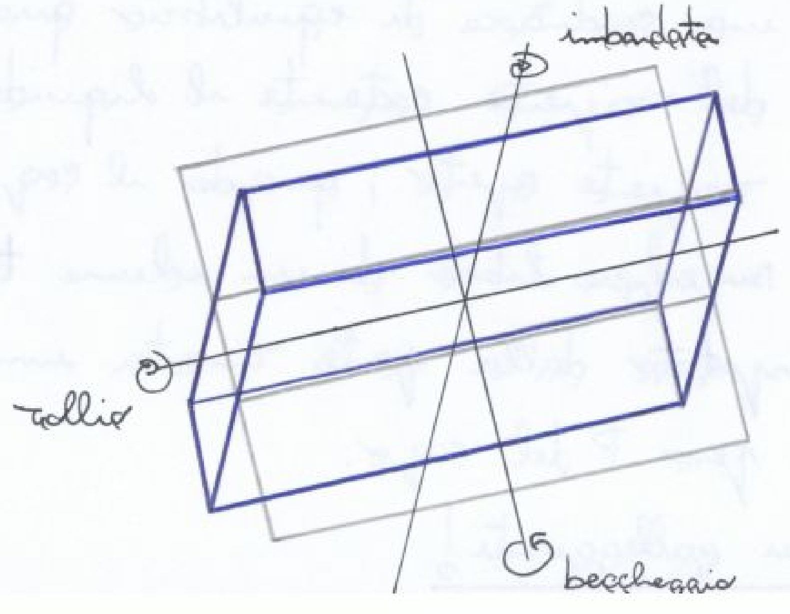
Corpo solido di forma qualsiasi completamente immerso in un liquido di peso specifico γ: questo esercita sulla superf. chiusa di contorno del corpo una spinta che può valutarsi applicando l'eq. globale dell'equilibrio al volume W occupato dal corpo, immaginato riempito di liquido.

EQ. GLOBALE DELL'EQUILIBRIO STATICO $\rightarrow$ $\vec{G} + \vec{\pi} = 0$

La spinta π è uguale alla spinta S che il liquido circostante esercita sul corpo immerso.

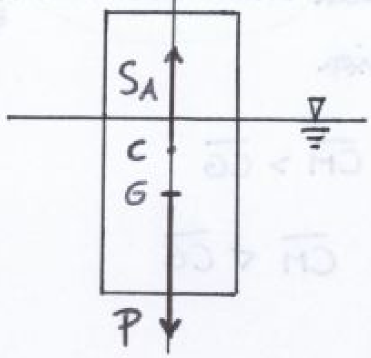
$$\boxed{\vec{S} = -\vec{G}}$$

Un corpo immerso in un liquido riceve una spinta verticale, diretta verso l'alto, di modulo pari al peso di un volume di liquido uguale a quello del corpo immerso; esso passa per il baricentro del volume fluido stesso. $\rightarrow$ PRINCIPIO DI ARCHIMEDE!



VOLUME DI CARENA (volume immerso)

CASO 1:

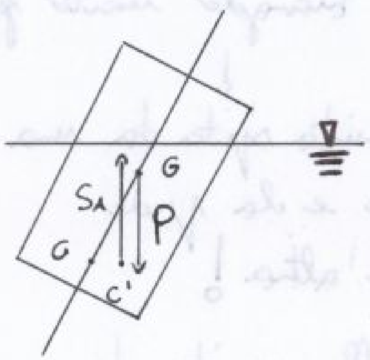


Il centro di carena C dove è applicata la spinta di Archimede corrisponde con il baricentro del volume di liquido spostato.
G è il baricentro delle masse.

CASO DI COPPIA NON STABILIZZANTE:

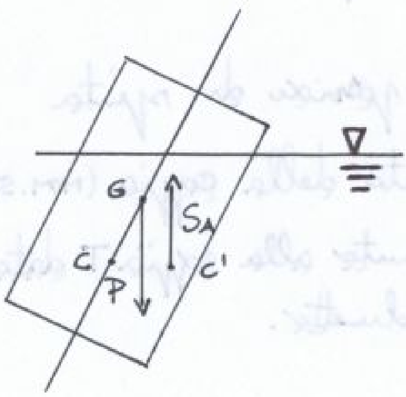
(Analogo caso 3)

ES. bottiglia (non sta diritta quando si immerge nell'acqua)



CASO DI COPPIA STABILIZZANTE:

(Analogo caso 2)



$S_A = V_c \cdot \gamma$ → V_c : volume di carena

$x' = \overline{CM} \cdot \sin d\theta = \overline{CM}\, d\theta$

quindi: $\cancel{\gamma}\, d\cancel{\theta}\, I = \underbrace{V_c\, \cancel{\gamma}\, \overline{CM}\, d\cancel{\theta}}_{S_A \cdot x'}$ → $\overline{CM} = \dfrac{I}{V_c}$ → il rollio è più forte del beccheggio perché I è minore!

STATICA DEI FLUIDI PESANTI COMPRIMIBILI: (cenno)

Nei FLUIDI COMPRIMIBILI la densità varia da punto a punto.

EQ. INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI INCOMPRIMIBILI $\rightarrow \rho \vec{F} = \text{grad}\, p \rightarrow \rho\, \text{grad}\, U = \text{grad}\, p$

L'EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO DI UN FLUIDO COMPRIMIBILE IN QUIETE UNICAMENTE SOGGETTO AL CAMPO GRAVITAZIONALE, diventa:

$$\boxed{\text{grad}\, p + \gamma\, \text{grad}\, z = 0}$$

poiché

Trattandosi di un fluido pesante, le superfici isobariche sono piani orizzontali; proiettando questa equazione vettoriale lungo la verticale si ricava:

$$\frac{dp}{dz} + \gamma = \frac{dp}{dz} + \rho g = 0$$

EQ. DIFF. che definisce la distribuzione delle pressioni nel fluido, nota che sia la funzione $\gamma = \gamma(p)$ oppure la $\rho = \rho(p)$.

L'integrazione dell'equazione verrà condotta separatamente per i liquidi e per i gas, atteso il loro differente comportamento nei riguardi della comprimibilità.

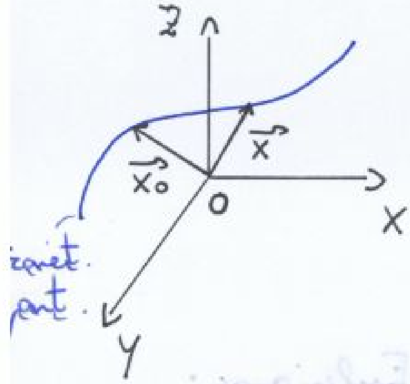
$\rightarrow$ CASO DEI LIQUIDI: $p = \gamma_0 \cdot h \cdot \left[1 + \frac{\gamma_0 \cdot h}{2\varepsilon} + \dots\right]$

$\rightarrow$ CASO DEI GAS: $p^* = p_0^* \cdot \left[1 - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0^*} \cdot z\right]^{m/(m-1)}$

(legge politropica) | (legge isoterma - [m = 1]) | (legge adiabatica - [m = 1,40])

CINEMATICA DEI FLUIDI: CAP. 3

APPROCCIO LAGRANGIANO: prende in esame le vicende delle singole particelle assumendo come incognite principali le coord. dei punti raggiunti dalle particelle stesse nei successivi istanti t. → traiettorie delle particelle del fluido.



Vettore $\vec{x} = (x, y, z)$

$$\vec{x} = (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0) \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0) \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

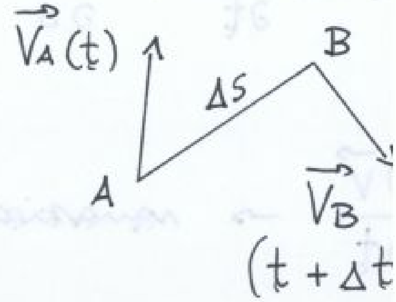
(x_0, y_0, z_0) riferiti all'istante iniziale t_0

→ utile nello studio dei processi di diffusione di particelle eterogenee in un fluido in moto.

→ nello studio del moto fornisce equazioni complesse.

NEI SUCCESSIVI ISTANTI DI TEMPO t, VIENE DETERMINATA LA POSIZIONE ASSUNTA DA OGNI SINGOLA PARTICELLA (coord x, y, z)

onsideriamo una particella P che nel tempo Δt si muove da A verso B.



$$\vec{A}_P = \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta t} =$$

somma e sottrazione di $\vec{V}_B(t)$: velocità che al tempo t muove una particella in B

$$= \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_B(t) + \vec{V}_B(t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}_B(t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

e calcolando il limite:

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta S \to 0}} \left(\frac{\vec{V}_B(t+\Delta t) - \vec{V}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}_B(t) - \vec{V}_A(t)}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right)$$

si ottiene:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \cdot |\vec{v}|}$$

Descrizione del fluido dal punto di vista cinematico mediante

3 famiglie di linee:

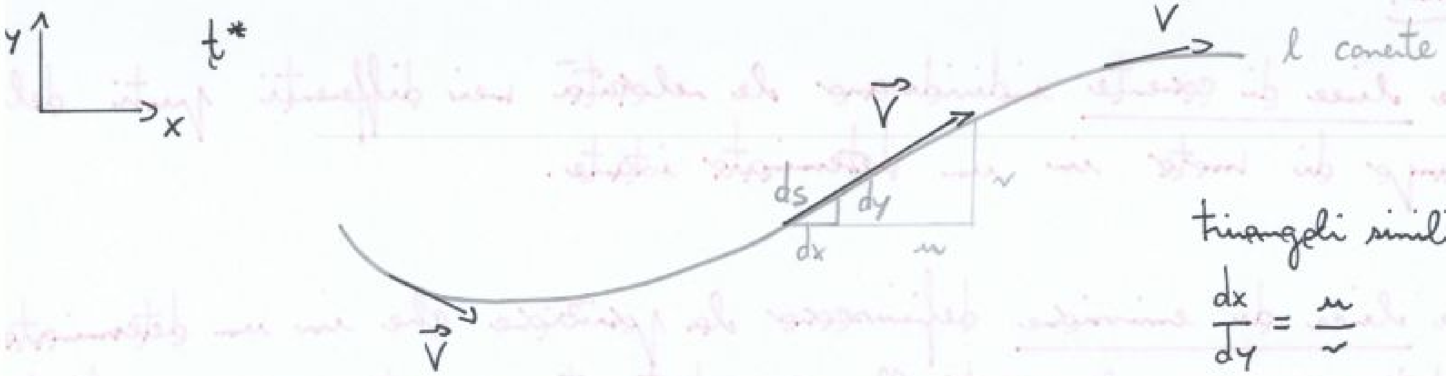
1) TRAIETTORIE: luogo dei punti successivamente occupati dalle singole particelle fluide in moto.

Eq. delle traiettorie:

$$\begin{cases} dx = u\,(x, y, z, t)\,dt \\ dy = v\,(x, y, z, t)\,dt \\ dz = w\,(x, y, z, t)\,dt \end{cases}$$

2) LINEE DI CORRENTE (o di flusso):

all'istante generico t^* sia noto in ogni punto del campo del moto il vettore velocità. Si chiama LINEA DI CORRENTE la curva tg, in ciascuno dei punti, al vettore velocità in quel punto.



triangoli simili

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$$

Equazione differenziale della linea di corrente:

$$\boxed{\frac{dx}{u\,(x, y, z, t^*)} = \frac{dy}{v\,(x, y, z, t^*)} = \frac{dz}{w\,(x, y, z, t^*)}}$$

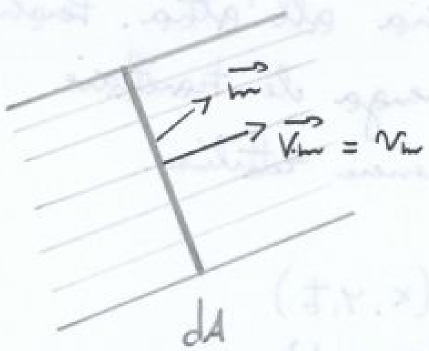
PORTATA (Q):

→ linea chiusa

→ tempo t^*

→ linee di corrente che passano per tutti i punti della linea chiusa → lo spazio delimitato dalla linea di flusso prende il nome di <u>TUBO DI FLUSSO</u>

Tagliamo il tubo di flusso con una generica superficie dA (con versore normale $\vec{n}$)

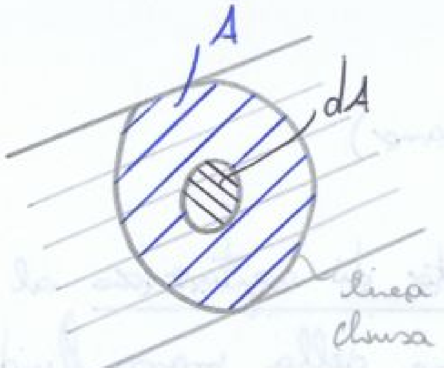


Il volume di fluido che passa nell'unità di tempo è:

$$\boxed{dQ = V_n \, dA = \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}$$

PORTATA ELEMENTARE

Integrando all'intera porzione di superficie



$$\boxed{Q = \int_A \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}$$

PORTATA

$$\boxed{V = \frac{Q}{A} = \frac{Q_{A_T}}{A_T} = \frac{1}{A_T} \int_{A_T} |v| \, dA_T}$$

VELOCITÀ MEDIA

⬇

Qualora si scelga, anziché un'area generica, la <u>superficie trasversale</u> cioè normale in ogni punto alla linea di flusso passante per il punto stesso, detto $|v|$ il modulo della velocità si ha: $\boxed{Q = \int_{A_T} |v| \, d A_T}$

Tutto ciò che studiamo si basa su 4 principi fondamentali:

1) principio di conservazione della massa;

2) principio di conservazione dell'energia;

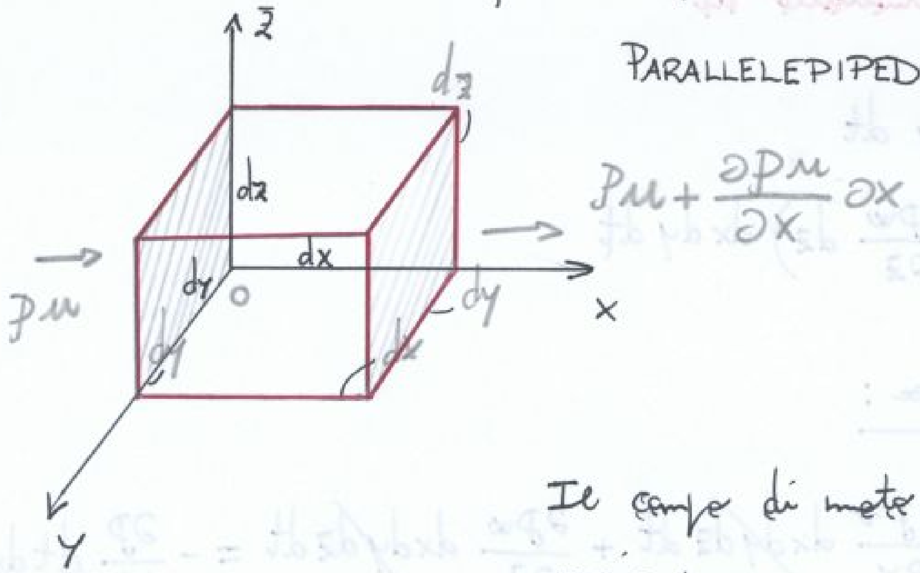
3) principio di conservazione della quantità di moto;

4) principio di conservazione del momento della quantità di moto.

Applichiamo dunque questi principi fondamentali ai fluidi.

Dal principio di conservazione della massa, si ottengono le EQUAZIONI DI CONTINUITÀ: il fluido è continuo, non nascono cioè nella massa dei buchi.

Consideriamo un elemento indefinito infinitesimo del fluido:



PARALLELEPIPEDO INFINITESIMO (dati dx, dy, dz)

Il campo di moto fa entrare ed uscire massa.

ρ: densità del fluido nel vertice O

u, v, w: componenti della velocità

della densità, dalla massa in esso contenuta.

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx\, dy\, \cancel{dz}\, dt = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, \cancel{dz}\, dt$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{V}) = 0}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI CONTINUITÀ (LOCALE)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{V}) = 0 \qquad (**)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho\, \mathrm{div}\, \vec{V} = 0 \qquad (***)$$

(*), (**), (***) relazioni equivalenti tra loro.

Definiscono la condizione alla quale deve soddisfare il vettore velocità e la densità del fluido in ogni punto del campo di moto: esse vengono perciò anche chiamate equazioni locali di continuità.

Uguagliando bilancio e variazione di massa, si ottiene:

$$\cancel{dt} \int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = \int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} dW \right] \cancel{dt}$$

$$\boxed{\int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = \int_A \rho V_n \, dA = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW}$$

EQUAZIONE GLOBALE (o INTEGRALE DI CONTINUITÀ

Valida per qualunque volume del campo di moto.

Se $\rho = \text{COST}$ (1) e il moto è permanente (2) → $\boxed{\int_A \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = 0}$

fluido incomprimibile

è nullo il flusso della velocità attraverso una ∀ superficie chiusa

$$\left[\int_Q dQ = 0 \right] \rightarrow Q_E = Q$$

↳ portata in massa entrante = portata in massa uscente (ρdQ)

xché $\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0}$.

(moto permanente)

Se il moto è permanente: $\boxed{\dfrac{\partial \rho Q}{\partial s} = 0}$

Se il fluido è incomprimibile ($\rho = \text{cost.}$) e uniforme:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0}$$

Se il fluido è incomprimibile ($\rho = \text{cost.}$) ed il moto è permanente

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \rightarrow Q = \text{cost}}$$

ar.

Sostituendo nell'equazione fondamentale, si ottiene:

$$d\vec{R} = dm\,\vec{A}$$

$$\vec{F}\,\rho\,dx\cancel{dy}dz - \left(\frac{\partial\vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\phi}_z}{\partial z}\right)dx\cancel{dy}dz = (\rho\,dx\cancel{dy}dz)\,\vec{A}$$

$$\boxed{\rho\cdot(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial\vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\phi}_z}{\partial z}}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

Esprime il principio di conservazione della quantità di moto.

È un'equazione vettoriale composta da 3 equazioni scalari:

$$\rho\left(F_x - \frac{Du}{Dt}\right) = \frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\phi_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\left(F_y - \frac{Dv}{Dt}\right) = \frac{\partial\phi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\phi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\phi_{zy}}{\partial z}$$

→ che esprime le condizioni di equilibrio dinamico in ogni punto del campo

$$\rho\left(F_z - \frac{Dw}{Dt}\right) = \frac{\partial\phi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\phi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\phi_{zz}}{\partial z}$$

$$\boxed{\rho\cdot(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}\,p}$$

EQUAZIONE DI EULERO (fluido perfetto)

perché:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$$

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

→ le altre 2 equazioni dipendono dalla tipologia di fluido considerato. 4

FLUIDI PERFETTI: è caratterizzato un fluido perfetto da uno stato di sforzo identico a quello del fluido in quiete.

→ componenti tangenziali degli sforzi comunque nulle $(\tau_x = \tau_y = \tau_z) = 0$

$(\phi_{xy} = \phi_{xz} = \phi_{yz} = 0)$

→ componenti normali: $(\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z)$

$\vec{\phi}_{xx} = \vec{\phi}_{yy} = \vec{\phi}_{zz} = \vec{p}$ (pressione p)

fluidi in quiete: $\dfrac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} = \dfrac{\partial p}{\partial x}\vec{i}$

ecc. - - - $\vec{j}, \vec{k}$!!

Queste condizioni costituiscono le 5 relazioni necessarie a rendere definito il problema dinamico. Esse infatti portano sostanzialmente ad esprimere lo stato di sforzo del fluido mediante l'unica variabile p, anziché mediante le 6 componenti del tensore degli sforzi.

Dunque si hanno: (per un generico processo di movimento)

1) EQ. STATO (che individua il legame fra la densità, lo stato di sforzo a cui si trova sottoposto il fluido e la sua temperatura)

→ $\rho = \text{COST}$ (Hp. f. incomprimibile)

2) EQ. DI CONTINUITÀ (che riflette il principio di conservazione della massa) → $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$

3) EQ. INDEFINITA DELLA DINAMICA / DEL MOTO (che esprime le condizioni di equilibrio dinamico in ogni punto del campo) → $\rho \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}\, p$

EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA DEI FLUIDI.

$$\rho \cdot (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \quad \text{f. diff.}$$

$$\int_W \rho \vec{F}\, dW - \underbrace{\int_W \rho \vec{A}\, dW}_{(B)} = \int_W \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}\right)}_{(\alpha)} dW$$

f. integrale

Passando da f. differenziale a f. integrale si perdono alcune informazioni

α) Teorema di Green:

$$\int_W \left(\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}\right) dW = -\int_A \left(\vec{\Phi}_x \cos \hat{nx} + \vec{\Phi}_y \cos \hat{ny} + \vec{\Phi}_z \cos \hat{nz}\right) dA =$$

$$= -\int_A \vec{\Phi}_n\, dA$$

B) $$\rho \vec{A} = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

Sapendo che: $\rho u \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \dfrac{\partial (\rho u \vec{V})}{\partial x} - \vec{V} \dfrac{\partial \rho u}{\partial x}$ si ottiene sostit.

$$\rho \vec{A} = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left[\frac{\partial (\rho u \vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v \vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w \vec{V})}{\partial z}\right] +$$

$$- \vec{V} \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right]}_{\mathrm{div}\,(\rho \vec{V})}$$

$$\int_W \rho \vec{F}\, dW - \int_W \rho \vec{A}\, dW = \int_W \left(\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} \right) dW$$

$$\boxed{\int_W \rho \vec{F}\, dW - \int_W \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t}\, dW + \int_A \rho \vec{V} V_n\, dA + \int_A \vec{\phi}_n\, dA = 0}$$

1 2 3 4

EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

RISULTANTE delle

1) forze di massa agenti sulle singole particelle che occupano il volume W considerato.

$$\vec{G} = \int_W \rho \vec{F}\, dW$$

Se il fluido è sottoposto esclusivamente al campo gravitazionale questo integrale fornisce il peso del fluido contenuto nel volume W; il vettore $\vec{G}$ è verticale, diretto verso il basso, applicato al baricentro del volume (f. omogeneo) e ha modulo pari a γW.

2) $\vec{\Pi} = \int_A \vec{\phi}_n\, dA$ → integrale di superficie → RISULTANTE degli sforzi che vengono esercitati sul fluido attraverso la superf. di contorno.

Denota la spinta che la superficie di contorno trasmette al fluido; essa è uguale e contraria alla spinta che il fluido esercita sulla sua superficie di contorno A.

(2) $\vec{I} = -\int_W \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dW$ → RISULTANTE DELLE INERZIE LOCALI

dipendono dal modo con cui la velocità e la densità variano col tempo nei singoli punti del volume W.

Questo integrale ha valore nullo in condizioni di MOTO PERMANENTE.

$\left(\text{perché } \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$

Adottando i simboli introdotti, si può scrivere:

$$\vec{G} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi} = 0$$

$$\vec{G} + \vec{I} + \underset{\underset{M_E}{\parallel}}{\vec{M_1}} - \underset{\underset{M_U}{\parallel}}{\vec{M_2}} + \vec{\Pi} = 0 \quad (4.9)$$

→ ES. applicativo: spinta di un getto su una piastra.

si tratta di una relazione vettoriale fra quantità che hanno le dimensioni di una forza; dei diversi termini, **G** e **I** dipendono dai valori che le grandezze in gioco assumono nei punti all'interno del volume *W*, mentre gli altri **Π**, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ dipendono unicamente dalle condizioni che si verificano alla superficie di contorno.

Riassumendo l'equazione globale dell'equilibrio dinamico dice:

per qualunque volume finito W di fluido in movimento, è nulla la risultante delle seguenti forze; forza di massa **G**, *risultante* **I** *delle inerzie locali, spinta* **Π** *esercitata dall'esterno sulla superficie di contorno, quantità di moto* $\mathbf{M}_1$ *posseduta dalla massa entrante in W nell'unità di tempo e quantità di moto* $\mathbf{M}_2$ *(cambiata di segno) posseduta dalla massa uscente.*

La soluzione di numerosi problemi pratici può essere condotta con semplicità a mezzo dell'applicazione dell'equazione globale dell'equilibrio dinamico in considerazione di queste sue fondamentali caratteristiche:

1 — dato il modo con cui l'equazione è stata dedotta, non esiste alcuna limitazione al suo impiego; in particolare essa vale per fluidi sia comprimibili che incomprimibili, per moti in regime laminare oppure turbolento;

2 — ogni problema dinamico viene ricondotto ad un problema di equilibrio statico, purché alle forze (di massa e di superficie) effettivamente agenti sul volume fluido si aggiunga un sistema di forze fittizie che metta in conto le inerzie (forze di inerzia locali e flussi di quantità di moto);

3 — in condizioni di moto permanente (**I** = 0) per fluido incomprimibile la (4.9) risulta completamente indipendente dalle caratteristiche del moto all'interno del volume considerato, ma dipende soltanto dalla distribuzione degli sforzi e della velocità sulla superficie di contorno.

ar.

2

(C) : Per qualsiasi traiettoria $\exists$ sempre una direzione (quella binormale) per cui la variazione del gradiente della quota piezometrica è nulla $\Rightarrow$ $grad\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)=h$ e la pressione risulta quindi distribuita con legge idrostatica. (statica dei fluidi)

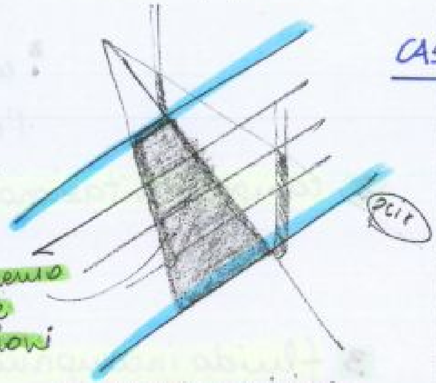
(curvatura $\frac{1}{r}$ nulla)

(B) : se le traiettorie sono rettilinee $\Rightarrow$ $\exists$ un piano definito dai versori normale e binormale (piano trasversale per le correnti) per il quale il carico piezometrico è costante (la pressione è lineare come accade in statica dei fluidi) poiché $\boxed{r\to\infty}\Rightarrow$ anche

CASO B1

$$\boxed{\frac{d}{dn}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)=0}$$

CASO B1

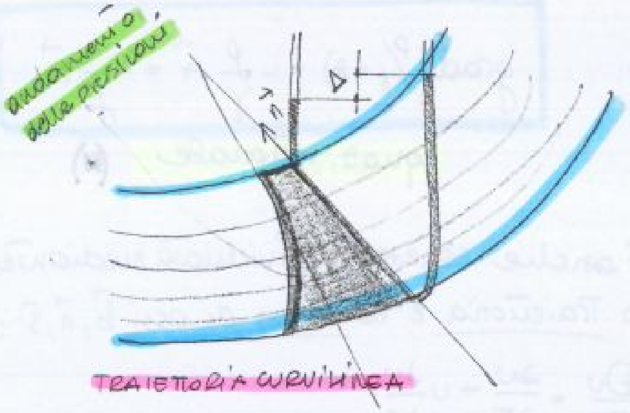


TRAIETTORIA RETTILINEA

(corrente fluida che si muove entro un condotto cilindrico)

CASO B2

Quando invece $\boxed{r\neq\infty}$ (la corrente descrive una curva), la quota piezometrica varia lungo la normale principale (diminuisce nel verso del versore $\vec{n}$)

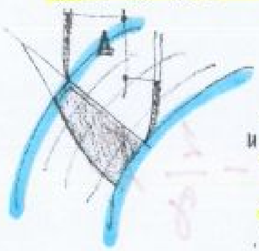


CASO B2

TRAIETTORIA CURVILINEA

OSS Δ tanto maggiore quanto più elevata è la velocità e la curvatura $1/r$ -

nota Se la concavità delle traiettorie è rivolta verso l'alto:



Dunque il piezometro che ha il punto di attacco situato sulla parete "più interna" indica una quota piezometrica ~~maggiore~~ minore di quella indicata dal piezometro della "parete esterna".

nota Quando i raggi di curvatura delle singole traiettorie sono molto grandi la variazione della quota piezometrica lungo $\vec{n}$

2 4

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} \cdot v^2 = \frac{v^2}{2g}$

$\frac{1}{g}$ = m) massa dell'unità di peso.

→ nota **Significato energetico** del T. di Bernoulli

$$\boxed{H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}}$$

energia meccanica complessiva posseduta dall'unità di peso del fluido in movimento

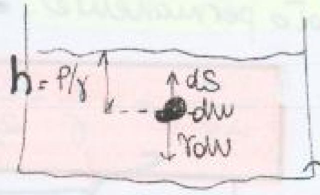
→ energia cinetica: $\frac{\frac{1}{2}\cancel{m}v^2}{\cancel{mg}} = \frac{v^2}{2g}$) è l'energia posseduta dall'unità di peso del fluido

→ energia legata alla pressione, ma come dimostrarlo?

ALTEZZA PIEZOMETRICA $\frac{p}{\gamma}$

ENERGIA POSIZIONALE alla quota z alla quota 0, LAVORO compiuto pari a $z \cdot 1 = z$.

energia potenziale per unità di peso: $z = \frac{\cancel{mg}z}{\cancel{mg}}$



liquido in quiete.

Isoliamo un volume di fluido (dW) soggetto alla pressione $p = \gamma h$ (sappiamo già che $h = p/\gamma$ è altezza piezometrica) in quiete.
Per il T. di Archimede il volume è in equilibrio poiché il peso γdW è equilibrato dalla spinta idrostatica dS.
Trasferiamo ora dW fino in prossimità del pelo libero: non compiamo lavoro perché il sistema spostato ha risultante nullo.

A spostamento avvenuto l'elemento dW ha aumentato la sua en. potenziale di $h\gamma dW$ → deve essere diminuita un'altra forma di energia, anche essa di forma potenziale poiché il liquido è sempre in quiete.
L'unica grandezza ad essere mutata è la pressione (passata dal valore p a 0) → sul pelo libero
* → energia che stiamo considerando viene detta en. di pressione

En. potenziale guadagnata: $\frac{\rho dW g h}{\rho dW g} = h$ → $(\gamma = \rho \cdot g)$

||

En. potenziale persa: $p = \gamma h \rightarrow \frac{p}{\gamma} = \frac{\gamma h}{\gamma} = h$ → $P = \gamma h \rightarrow \frac{P}{\gamma} = h$

OSS Equaz. di conservazione di energia poiché il fluido è perfetto (→ no attriti interni) ed incomprimibile (ρ = cost → no sviluppo di calore a seguito della compressione del fluido).

* L'acquisto di energia posizionale è avvenuto alle spese di una forma di energia legata alla pressione, la quale deve essere diminuita, per l'unità di peso, di $h = P/\gamma$. → ENERGIA DI PRESSIONE.

SEZIONE CONTRATTA:

1. • $\boxed{A_c < A}$;
2. • dista $\boxed{\sim (0,5 \div 1) d}$ dal piano della luce (con d = diametro foro circolare)
3. • poiché le traiettorie sono sensibilmente // ⇒ corrente gradualmente variata → distribuzione idrostatica delle pressioni.
4. • Poiché la sez. considerata è orizzontale ⇒ pressione nulla essendo nulla al contorno che è a contatto con l'atmosfera : $p_B = 0$.

Consideriamo una generica traiettoria da A a B. **caso A**

Scopo di questa trattazione è individuare la portata Q.

(velocità del fluido → Q)

È ancora valido il T. di Bernoulli:

→ fluido perfetto: la viscosità non ha modo di far sentire il proprio effetto poiché in corrispondenza del foro il fluido accelera e tale accelerazione implica una riduzione degli urti fra le particelle → → minor dissipazione di energia.

→ campo di gravità: il fluido esce dal foro per l'azione della gravità

→ fluido incomprimibile: ρ = cost.

→ moto permanente: dimensioni contenute del foro → Q contenuta.

$$\boxed{H_A = H_B} \; : \; \underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = z_B + \cancel{\frac{p_B}{\gamma}} + \frac{v_B^2}{2g}$$

TRASCURABILE (poiché A abbastanza lontano dal foro) $(p_B = 0)$

$$\begin{cases} h - z_B = \dfrac{v_B^2}{2g} \\ h - z_B = h_s + (0,5 \div 1)\, d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v_B^2}{2g} = h_s + (0,5 \div 1) d \;\rightarrow\; v_B^2 = 2g\left[h_s + (0,5 \div 1) d\right]$$

$$v_B = \sqrt{2g\left[h_s + (0,5 \div 1) d\right]}$$

$$Q = v_B \cdot A_c = A_c \sqrt{2g\left[h_s + (0,5 \div 1) d\right]}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \qquad A_c / A \sim 0,6 \qquad \frac{A_c}{A} \cong 0,6$$

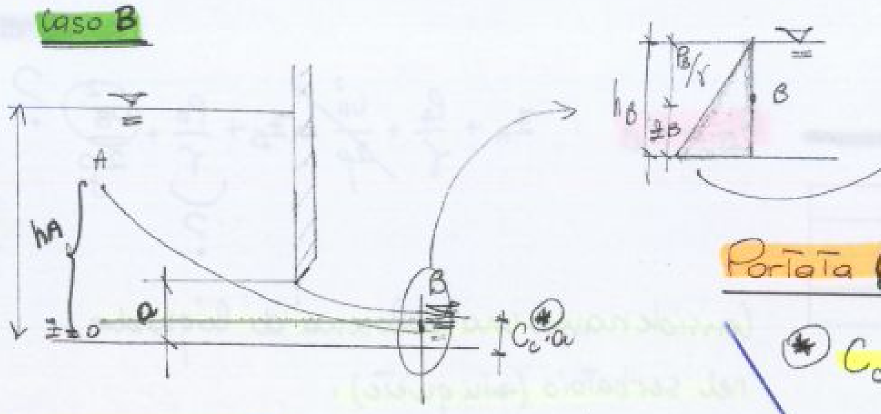
c_c: coeff. contrazione

$$A_c \cong 0,6 \cdot A$$

$$Q = \underbrace{0,6 \cdot \frac{\pi d^2}{4}}_{A_c} \sqrt{2g\left[h_s + (0,5 \div 1) d\right]}$$

ok.

ES. 2: caso B



Portata Q?

(*) C_c = coefficiente di contrazione

$C_c = \frac{A_c}{A}$

$\boxed{A_c = C_c \cdot A}$

T. di Bernoulli

$$H_A = H_B \;:\; \underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A} + \underbrace{\cancel{\frac{v_A^2}{2g}}}_{\text{TRASCURABILE}} = \overbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}^{h_B} + \frac{v_B^2}{2g}$$

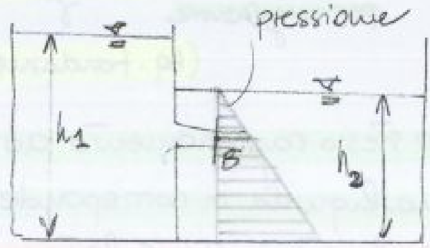
$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)} = \sqrt{2g(h_A - C_c a)}$$

$$Q = v_B A_{FORO} = C_c a\, \ell \sqrt{2g(h_A - C_c a)} \rightarrow (a \cdot \ell = A)$$

ℓ: larghezza (profondità) foro

ar.

ES. 3: caso C

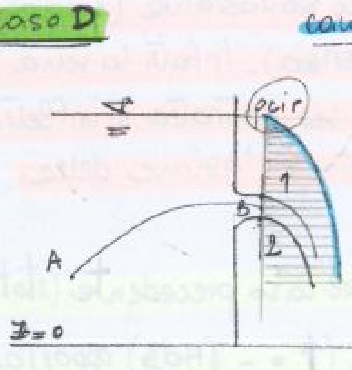


$$v_B = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$Q = \underbrace{C_c \cdot \underbrace{\frac{\pi d^2}{4}}_{A}}_{A_c} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

ar.

ES. 4: caso D



È presente anche in questo caso una sez. contratta con traiettorie prevalentemente rettilinee, ma la distribuzione delle pressioni non segue la legge idrostatica: la pressione è infatti nulla in tutti i punti del contorno del fluido (che però non sono alla stessa quota)

$p_1 = p_2 = 0 \; ; \; z_1 \neq z_2$

→ impossibile avere h = cost.
(le traiettorie presentano infatti dei punti di flesso)

Consideriamo una generica traiettoria AB: vogliamo determinare la velocità in B: v_B (→ portata Q).