



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 813**

**DATA: 04/02/2014**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Muratore**

**MATERIA: Idraulica + Eserc.**

**Prof. Revelli**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# IDRAULICA

30/09/13

L'importanza di questa disciplina si vede fin dall'antichità: infatti le prime civiltà sorgono sott'acqua, come ad esempio le città degli assiri - babilonesi sono nate sui fiumi Tigri ed Eufrate, gli egizi sul Nilo.

I 2 problemi principali dell'idraulica sono:

- interazione fluido - strutture
  - se voglio spostare un fluido quanta energia ci vuole, legame tra fluido ed energia
- L'idraulica moderna è importante nella costruzione delle dighe: in Italia ne troviamo 506!

Il problema più recente legato all'acqua è la sua gestione.

## • I fluidi e il loro movimento

In idraulica distinguiamo 3 categorie di fluidi:

- fluidi che si muovono in un tubo
- correnti a pelo o superficie libera (canale)
- moti di filtrazione dei mezzi porosi

Un fluido è un corpo materiale che, a causa della mobilità delle particelle che lo compongono, può subire delle grandi variazioni di forma sotto l'azione di minime forze di minima entità, che tendono a diventare trascurabili quando la velocità con cui avviene la deformazione tende ad annullarsi.

Le deformazioni di un fluido sono permanenti, esse non scompaiono dopo che sono state annullate le forze che le hanno provocate.

Per quanto riguarda il comportamento di fronte alle forze che tendono a modificare il volume, i fluidi si possono schematicamente distinguere in 2 grandi classi: liquidi e gas.

Liquidi: quei fluidi che oppongono grande resistenza alle variazioni di volume;

Gas: sono sufficienti forze di modesta entità per variarne, in circostanze normali, il volume;

Sinteticamente si dice che i liquidi sono poco comprimibili e i gas invece facilmente comprimibili.

I fluidi sono difficili da studiare perché esiste la turbolenza.

La particella fluida è una porzione di fluido sufficientemente grande da avere proprietà stabili, ma sufficientemente piccola da poter essere considerata come un punto (su cui poter integrare, derivare, ecc.). Le proprietà devono poter variare con continuità.

non fluido



Tra l'uno e l'altro c'è una distanza netta, non ci sono zone di transizione.

modulo di comprimibilità dell'acqua:  $E = 1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$

Questo valore è talmente grande che possiamo trattare l'acqua come un fluido incompressibile.

Non si può trascurare la comprimibilità quando:

- 1) Se  $\Delta p$  diventa molto grande questo non vale, ad es. negli oceani
- 2) Quando un'onda di pressione che si muove all'interno di un mezzo, celerità (comprimibilità) delle onde di pressione all'interno di un fluido

$$celerità c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

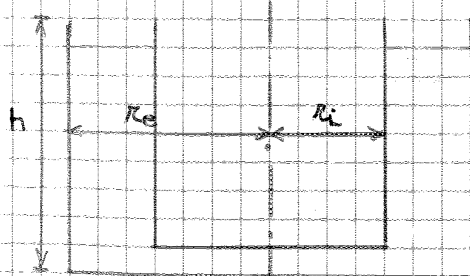
Per un fluido incompressibile  $E \rightarrow \infty$  e la celerità  $c$  è molto alta. In questo caso  $\Delta p$  passa da un fluido all'altro istantaneamente. Dal punto di vista ingegneristico è sempre vero, tranne nei casi d'ariete.

### Viscosità

Qualsiasi fluido in movimento è sempre sede di uno stato di sforzi interni, che ammettono componenti sia normali, sia tangenziali; queste ultime si manifestano esplicitamente durante l'atto di moto, esaurendosi completamente non appena questo cessa.

Per rendersi conto dell'esistenza delle componenti tangenziali e della loro natura, fissiamo l'attenzione sui risultati della seguente semplice esperienza.

Si abbiano due cilindri coassiali in grado di ruotare senza attrito attorno allo stesso asse, ma indipendentemente l'uno dall'altro.



Metto spazio tra i 2 cilindri e riempio il fluido



Si ponga in rotazione con velocità angolare costante  $\omega_e$  il cilindro esterno; al passare del tempo, vedremo prima mettersi in rotazione gli strati più esterni del fluido e successivamente quelli via via più interni fino a che entra in rotazione anche il cilindro interno con velocità angolare  $\omega_i$ .

Perché il cilindro interno inizia a ruotare? Perché trascinato dagli sforzi diretti tangenzialmente al moto e quindi in grado di trasmettere i successivi stati del fluido ed anche il cilindro interno, trasmettendo la coppia applicata al cilindro esterno per mantenerlo in rotazione.

Il fluido è a contatto con la parete, la particella di fluido si attacca alla parete

$$\tau = \mu \frac{du}{dh} \quad \text{legge di Newton}$$

$\frac{du}{dh}$  = velocità in direzione normale al moto, velocità di deformazione angolare

Quando vale questa formula il fluido è detto NEWTONIANO, studiato dalla reologia.

Negli sviluppi della meccanica di fluidi risulta conveniente introdurre un'altra grandezza direttamente legata alla viscosità: essa viene chiamata VISCOSITÀ CINEMATICA  $\nu$  ed è pari al rapporto fra viscosità  $\mu$  e densità  $\rho$ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

È una caratteristica del fluido.

Quella dell'acqua è  $\nu = 100,8 \frac{m^2}{s}$

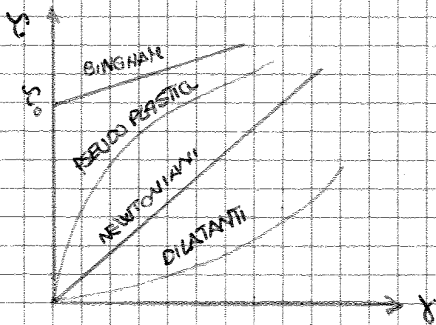
Queste grandezze dipendono da pressione e temperatura; l'influenza della pressione è però assai limitata.

Nel corso la viscosità la consideriamo costante.

01/10/13

## TIPICI DI FLUIDI

Vengono definiti FLUIDI NEWTONIANI quelli per cui viscosità, almeno per una data temperatura, è una costante caratteristica del fluido, indipendente dal movimento ed un particolare della velocità di trasformazione.



Troviamo poi i fluidi NON NEWTONIANI, che vengono classificati in diverse categorie:

- fluidi per cui caratteristiche reologiche sono indipendenti dal tempo:

- fluidi plastici alla Bingham
- fluidi pseudo plastici,  $n < 1$
- fluidi dilatanti,  $n > 1$

$$\tau = \mu \left( \frac{du}{dh} \right)^n$$

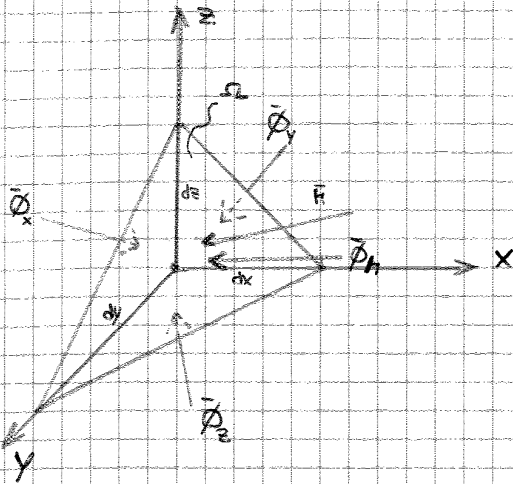
Se  $n \neq 1$  l'equazione diventa non lineare ed è difficile studiare il fluido.

- fluidi per cui il regime tra sforzi e deformazioni dipende dalla durata dello sforzo o della deformazione, dipendenti quindi dal tempo:

- fluidi tixotropici
- fluidi reopectici

- fluidi con alcune proprietà elastiche proprie dei solidi: • fluidi elastoviscosi

Per quantificare quanto valgono questi sforzi dov'è introdurre il TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY:



Il tetraedro è in equilibrio e avrà delle forze di massa e delle forze a contorno.

forze di massa: infinitesimo del terzo ordine

forze di contorno: infinitesimo del secondo ordine



Quindi posso trascurare le forze di massa

\* Lo sforzo  $\bar{P}_n$  ammette, in generale, una componente normale ed una tangenziale alla superficie su cui agisce. La componente normale dicesi di compressione se tende ad avvicinare due parti contigue, di trazione in caso contrario. La maggior parte dei fluidi non supporta, in condizioni usuali, apprezzabile sforzi normali di trazione, di modo che in meccanica dei fluidi almeno si deve fare quasi esclusivamente con sforzi normali di compressione. Per questa ragione  $\bar{m}$  viene considerato entrante.

Le forze al contorno saranno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{P}_n dA \\ -\bar{P}_x \cos m\hat{x} dA \\ -\bar{P}_y \cos m\hat{y} dA \\ -\bar{P}_z \cos m\hat{z} dA \end{array} \right.$$

$m\hat{x}$ ,  $m\hat{y}$  e  $m\hat{z}$  sono angoli d'asse quindi si mette il meno.

Data che posso trascurare le forze di massa la spinta sarà data dalla somma delle forze a contorno all'equilibrio.

$$\bar{P}_n dA - \bar{P}_x \cos m\hat{x} dA - \bar{P}_y \cos m\hat{y} dA - \bar{P}_z \cos m\hat{z} dA = 0$$

$$\bar{P}_n = \bar{P}_x \cos m\hat{x} + \bar{P}_y \cos m\hat{y} + \bar{P}_z \cos m\hat{z} \quad \text{equilibrio alla trazione}$$



l'equazione cardinale dell'equilibrio del tetraedro

È una combinazione lineare degli sforzi agenti nello stesso punto e su tre piani ortogonali.

Quindi se voglio conoscere  $\bar{P}_n$  basta che conosca gli sforzi su tre piani ortogonali.

È un'equazione vettoriale che esprime il cosiddetto TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY, secondo il quale lo sforzo agente in un punto su un elemento di generica giacitura è una funzione lineare e omogenea degli sforzi agenti, nel punto stesso, su tre qualsiasi giaciture fra di loro ortogonali.

- la traccia, con una tensione  $\sigma$  univariante o univariante; la traccia è la somma degli elementi della diagonale principale:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3S$$

- se, indipendentemente dalla posizione del sistema di riferimento, le  $\sigma$  rimangono sempre tutte lo stesso si chiama ISOTROPO.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = S$$

$S$  è chiamato **PRESSIONE**  $p$  e il suo valore è una funzione soltanto dei punti del campo, ed eventualmente del tempo.

La pressione è uno sforzo normale su una qualsiasi giuntura in condizioni isotrope.

$$p = p(x, y, z, t)$$

Basta conoscere  $p$  per conoscere lo stato di sforzo del punto considerato.

Quando un sistema è sicuramente isotropo? Quando il fluido è fermo e quindi quando la distanza non varia rispetto al punto di riferimento.

La statica dei fluidi si occupa quindi della funzione della pressione in cui il tensore degli sforzi ha un andamento particolare ed è del tipo:

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Nella statica il fluido è fermo quindi la funzione  $p$  non varia nel tempo:  $p(x, y, z)$

### • Statica dei fluidi

La statica dei fluidi si studia con un modello di equazioni differenziali di primo ordine.

Nei fluidi in quiete le singole particelle non subiscono nel tempo alcun spostamento relativo. In conseguenza dell'assenza di deformazioni della massa fluida, in ogni punto di essa e rispetto a qualunque elemento piano passante per il punto stesso gli sforzi interni non ammettono componenti tangenziali e sono perciò diretti normalmente all'elemento.

Inoltre lo sforzo in un generico punto di fluido in quiete ha modulo indipendente dall'orientamento passante per il punto stesso.

Definiamo come **pressione**  $p$  nel generico punto di una massa <sup>fluida</sup> in quiete il modulo  $p$  dello sforzo nel punto stesso.

Lo stato di sforzo di un qualsiasi fluido in quiete risulta completamente individuato quando si conosca la distribuzione della pressione nella massa fluida.

Il campo di forze sulla Terra è un campo di forze gravitazionale:

$$\vec{F} = -\rho g \text{ grad } z$$

↳ perché  $g$  va verso e' interno

Sostituiamo questa relazione di  $\vec{F}$  nell'equazione indefinita:

$$-\rho \text{ grad } z = \text{grad } p$$

Il fluido si dice pesante quando il campo di forze da massa è un campo gravitazionale.

$$\text{grad}(\rho g z + p) = 0 \Rightarrow \text{grad}(\gamma z + p) = 0 \Rightarrow \gamma z + p = \text{costante}$$

↳ peso specifico  $\gamma$

Per un fluido pesante e incompressibile:  $z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante}$  LEGGE DI STEVINO  
 La relazione è utilizzata in questa forma perché in questo modo si lavora in termini di altezze.

$$h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante} \quad \rightarrow \text{equazione di una retta}$$

$h$  = carica piezometrica, per un fluido pesante e incompressibile è costante

$z$  = quota geometrica, quota del punto rispetto al S.R.

$\frac{p}{\gamma}$  = altezza piezometrica

↳ perché è una altezza  
 ↳ perché c'entra la pressione

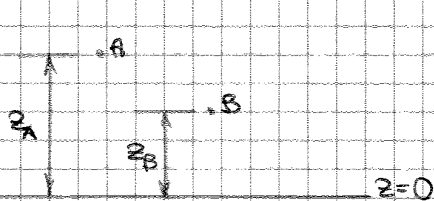
Tutta la statica si riassume in  $h = \text{costante}$

La pressione varia linearmente rispetto alla quota; il coefficiente angolare di questa retta è  $\gamma$ .

Data  $h = \text{cost.}$ , se aumenta la quota, la pressione deve diminuire e viceversa.

### Esercizi

①

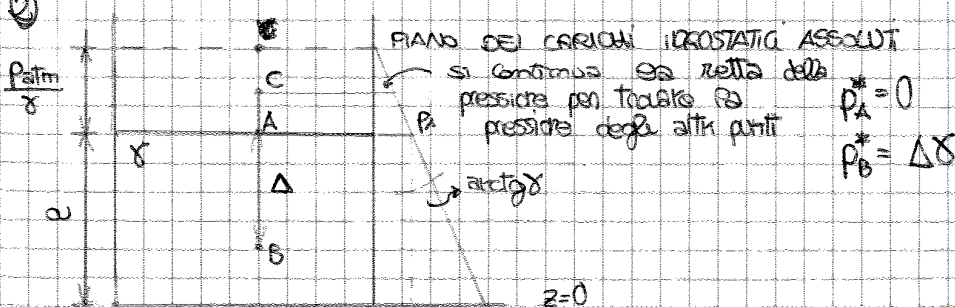


$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} \quad h_A = h_B$$

$$p_B = p_A + \gamma (z_A - z_B)$$

La pressione varia linearmente con la quota.

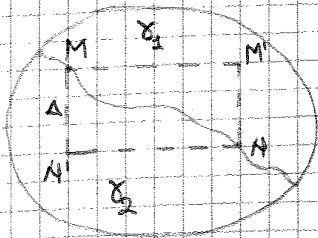
②



Se A è sul pelo libero dell'acqua la sua pressione sarà la pressione atmosferica.

Se  $\frac{p_{atm}}{\gamma}$  vale: Hg 760 mm  
 H<sub>2</sub>O 10.33 cm





$$P_M = P_{M'}$$

$$P_N = P_{N'}$$

$$P_M = P_{M'} + \Delta \gamma_1 \Rightarrow P_{M'} + \Delta \gamma_1 = P_M + \Delta \gamma_2 \Rightarrow \Delta(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$$

$$P_N = P_M + \Delta \gamma_2$$

$\Delta = 0$  i punti sono alla stessa quota

02/10/13

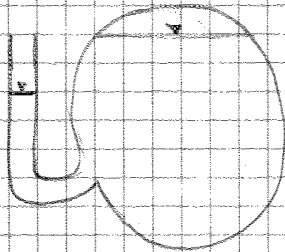
$$h = z + \frac{P}{\gamma} = \text{costante}$$

È sufficiente conoscere la pressione in un punto per individuare con facilità la distribuzione della pressione nell'intera massa fluida.

### APPARECCHI PER MISURARE LA PRESSIONE IN UN PUNTO

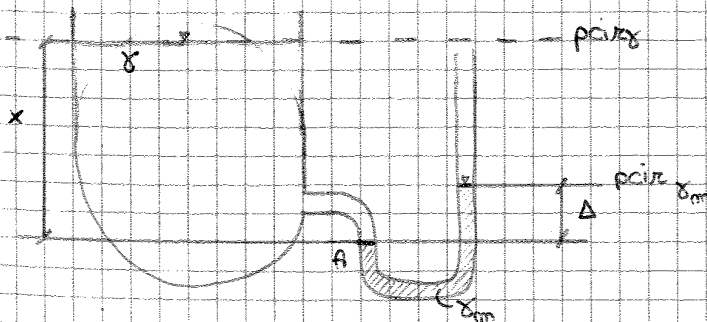
Meglio detto, questi apparecchi servono a individuare la quota piezometrica della massa fluida.

Il dispositivo più semplice e pratico è il PIEZOMETRO, costituito da un tubo, verticale o inclinato, aperto in sommità e collegato all'altra estremità con il recipiente contenente il liquido. Il quale si innalza in esso fino alla quota del centro di gravità dei carichi idrostatici.



Se le pressioni del liquido sono elevate e quindi il piano dei carichi idrostatici è molto alto, il dispositivo risulta di difficile attuazione pratica e conviene invece adottare un MANOMETRO SEMPLICE, che può essere usato con qualsiasi fluido.

Sono costituiti da un tubo a U di cui un'estremità è collegata con il recipiente contenente il fluido e l'altra è in comunicazione con l'atmosfera.



$\Delta$  dipenderà dalla posizione del piano dei carichi idrostatici relativi

$$\gamma_m > \gamma$$

In questo modo ho stratificato il fluido  $\gamma_m$  esattamente e il manometro.

$$P_A = \Delta \gamma_m = \gamma x \Rightarrow x = \frac{\Delta \gamma_m}{\gamma}$$

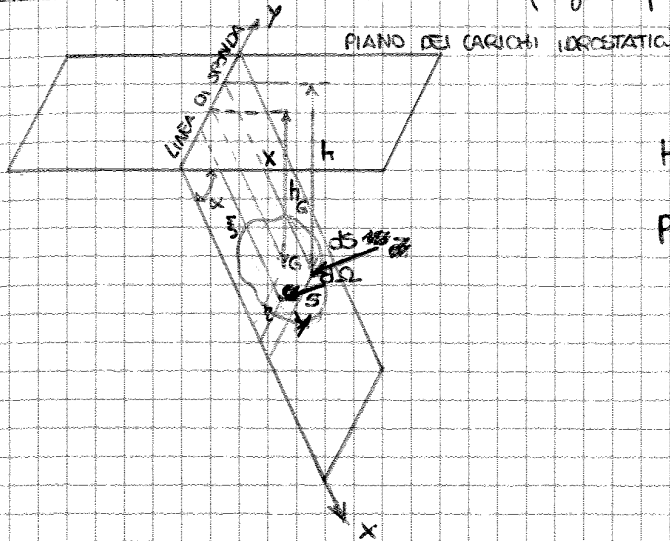
Il manometro può anche essere posizionato in maniera inversa:



### CALCOLO DELLE SPINTE

Il calcolo delle spinte avviene su: - superfici curve  
- superfici piane

Consideriamo il calcolo una  $\rho$  superficie piana:



$$h = x \operatorname{sen} \alpha$$

$$p = \gamma h$$

Due piani si intersecano in una retta, chiamata in questo caso LINEA o RETTA DI SPONDA.

Le spinte elementari  $dS$   $dS$  esercitate dal liquido su ogni elemento infinitesimo della superficie piana valgono:

$$dS = p \, d\Omega \, \vec{n}$$

$$\vec{S} = \int_{\Omega} dS = \int_{\Omega} p \, d\Omega \, \vec{n}$$

momento statico della superficie fatto rispetto a una linea di sponda

$$\vec{S} = \vec{n} \int_{\Omega} p \, d\Omega = \vec{n} \int_{\Omega} \gamma h \, d\Omega = \vec{n} \int_{\Omega} \gamma x \operatorname{sen} \alpha \, d\Omega = \vec{n} \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_{\Omega} x \, d\Omega = \vec{n} \gamma \operatorname{sen} \alpha M =$$

$$= \vec{n} \gamma \operatorname{sen} \alpha x_G \Omega = \vec{n} \gamma \Omega h_G = p_G \Omega$$

affondamento del baricentro rispetto al pcir

$\vec{S} = p_G \Omega$  significa: la spinta su una superficie piana è una forza diretta normalmente alla superficie stessa con modulo pari al prodotto della pressione  $p_G$  nel suo baricentro per l'area della superficie.

Il punto di applicazione della spinta è detto CENTRO DI SPINTA. Coordinate del centro di spinta sono  $\xi$  e  $\eta$  e si trovano uguagliando i momenti della risultante con gli integrali dei momenti delle spinte elementari, rispetto ai 2 assi  $x$  e  $y$ .

momenti d'inerzia della superficie fatto rispetto alla linea di sponda

$$S \cdot \xi = \int_{\Omega} x p \, d\Omega = \int_{\Omega} x \gamma h \, d\Omega = \int_{\Omega} x \gamma x \operatorname{sen} \alpha \, d\Omega = \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_{\Omega} x^2 \, d\Omega = \gamma \operatorname{sen} \alpha I_y$$

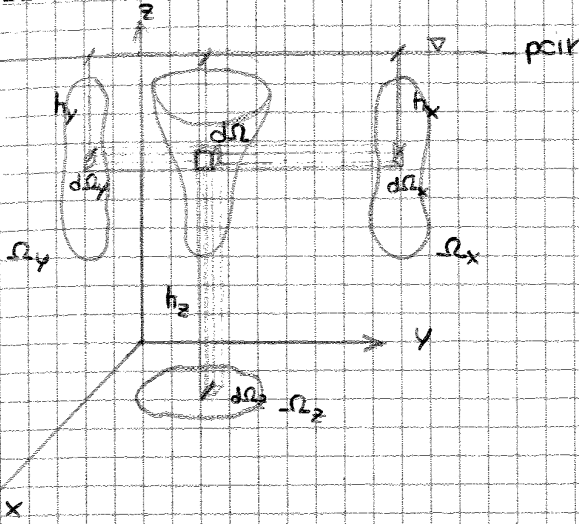
$$\rightarrow \xi = \frac{\gamma \operatorname{sen} \alpha I_y}{S} = \frac{\gamma \operatorname{sen} \alpha I_y}{\gamma \Omega h_G} = \frac{\gamma \operatorname{sen} \alpha I_y}{\gamma \Omega x \operatorname{sen} \alpha} = \frac{I_y}{\Omega x_G} = \frac{I_y}{M}$$

momento statico della superficie fatto rispetto alla linea di sponda

Si vede che la posizione del centro di spinta è indipendente dall'angolo  $\alpha$ .

### SPINTA DI SUPERFICIA CURVE

$$\vec{S} = \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega$$



proiezione di quest'area su yz

$$\begin{cases} dS_x = p \cos \alpha \hat{x} d\Omega \cdot p d\Omega_x \\ dS_y = p \cos \alpha \hat{y} d\Omega \cdot p d\Omega_y \\ dS_z = p \cos \alpha \hat{z} d\Omega \cdot p d\Omega_z \end{cases}$$

$$S_x = \int_{\Omega_x} p d\Omega_x = \gamma \Omega_x = \gamma \Omega_x(h_{0x})$$

$$S_y = \int_{\Omega_y} p d\Omega_y = \gamma \Omega_y = \gamma \Omega_y(h_{0y})$$

$$S_z = \int_{\Omega_z} p d\Omega_z = \gamma \int_{\Omega_z} h d\Omega_z = \gamma W$$

VOLUME DI FLUIDO  
 CONTENUTO TRA  
 LA SUPERFICIE E  
 IL PCIR  
 PESO DI FLUIDO  
 CHE STA SOPRA LA SUPERFICIE

Altre mode per risolvere l'integrale:

$$\vec{F} = \text{grad } p$$

Parto dall'equazione indefinita di equilibrio locale che vale punto per punto:

Ora la integro ad un qualsiasi volume W del fluido:

$$\int_W p \vec{F} dW = \int_W \text{grad } p dW$$

peso di fluido contenuto all'interno di un volume scelto  $\vec{n}$  alla generica area dS

$$\int_W \text{grad } p dW = \int_W \left( \frac{dp}{dx} \hat{i} + \frac{dp}{dy} \hat{j} + \frac{dp}{dz} \hat{k} \right) dW = \int_{\Omega} p \left( i \cos \alpha \hat{x} + j \cos \alpha \hat{y} + k \cos \alpha \hat{z} \right) d\Omega =$$

$$= - \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega$$

passiamo da un integrale di volume ad un integrale di superficie

In conclusione:

$$\int_W p \vec{F} dW = - \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega$$

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO GLOBALE DELLA STATICA DEL FLUIDO

peso

e una forza al contorno

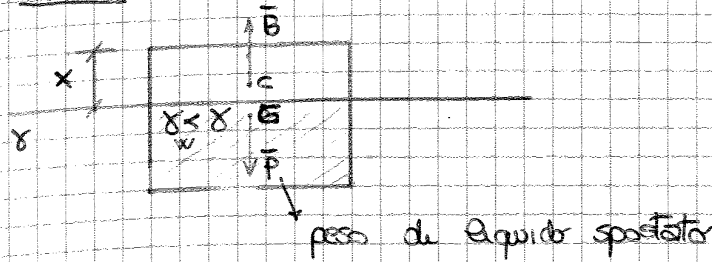
Quest'equazione vale per il volume, non punto per punto, perciò otteniamo meno informazioni. È utile perché in numerosi problemi pratici non risulta necessario svolgere un'integrale così dettagliata.

$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0$$

Sono in equilibrio le forze di massa e le forze di volume.

Prendere le pressioni solo <sup>su</sup> ~~nel~~ contorno è utile nella pratica, in cui non ci

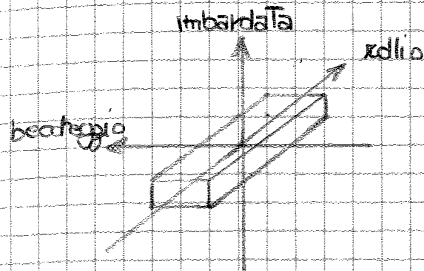
### Genzio



$x$  è l'incognita e dipenderà da  $\delta$  e  $\delta_w$ .  
pensa!

### GALLEGGIAMENTO

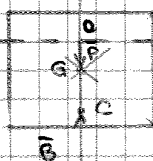
Il galleggiamento è la stabilità all'equilibrio di un sistema di forze.



#### Nomenclatura:

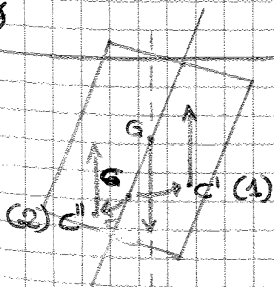
- volume spostato: volume di carena
- piano che taglia il mio volume: piano di galleggiamento
- baricentro del volume di carena: centro di carena
- asse di galleggiamento: asse che contiene G e C, cioè il baricentro e ~~il centro~~ il centro di carena

L'asse fondamentale per il galleggiamento è l'asse di rollio.



Se l'asse di rollio rimane invariato non ho problemi: G e C continuano a rimanere sulla stessa linea (asse di galleggiamento).

Se l'asse di rollio fa variare i punti, posso avere due casi:



① Il centro di carena si è spostato, ma il sistema di forze si raddrizza ed è stabile, si mantiene la sua stabilità. STABILE  $\rightarrow$  C' a destra di G

② Il centro di carena si è spostato e il sistema di forze non riesce a raddrizzarsi, rendendo il sistema stesso instabile. INSTABILE  $\rightarrow$  C'' a sinistra di G

Devo capire dove va a finire il centro di carena da piccoli movimenti di rollio per sapere se la barca si ribalta oppure no.

Le navi possono essere:

- dure, navi militari; hanno una oppia grande, che dà un momento molto grande e quindi una velocità metacentrica maggiore alta (90 cm - 150 cm)
  - morbide: navi passeggeri; velocità metacentrica più piccola (circa 0,5 m)
- $\frac{H}{v}$  è influenzato dai carichi ebbeni.

09/10/13

## CINEMATICA DEI FLUIDI

La cinematica mette in gioco il fatto che le particelle si muovono per effetto di un campo di moto ed esiste un vettore velocità.

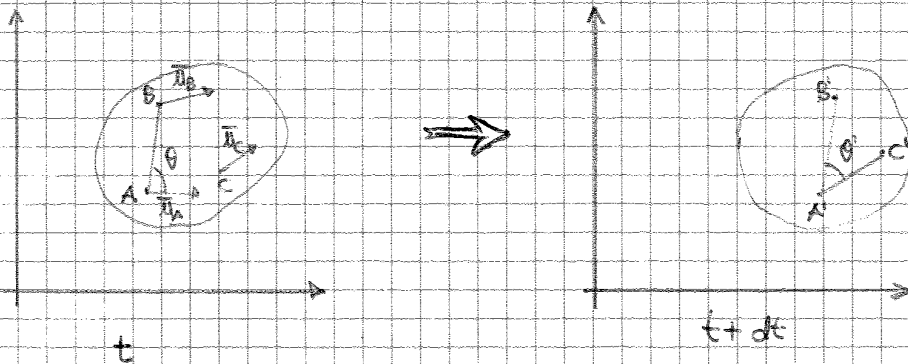
$$\vec{u} = u(u, v, w) \quad \text{vettore velocità}$$

Il campo di moto di un fluido è completamente definito quando sia noto il vettore  $\vec{u}$ , oppure il complesso di funzioni scalari equivalenti:

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$



L'effetto principale da  $t$  a  $t + dt$  è che il volume si è spostato, in realtà si è deformato.

Se le velocità sono uguali, abbiamo una traslazione rigida; se le velocità sono diverse abbiamo una deformazione.

Cambieranno le distanze tra i punti e gli angoli. Per quanto riguarda le distanze il corpo si sta espandendo o comprimendo (massimo tensore  $\sigma$ ), per quanto riguarda gli angoli le particelle stanno ruotando (massimo tensore tangenziali  $\tau$ ).

## TIPICI DI MOVIMENTO

- moto vario: lo troviamo negli ambienti naturali, il moto dipende dallo spazio e dal tempo;
- moto permanentemente: caratterizzato da grandezze cinematiche che non dipendono dal tempo;

IP collegamento tra traiettoria e campo di moto è chiaro:

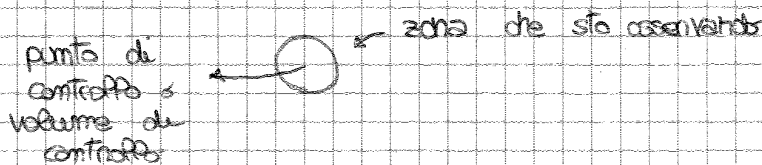
$$\text{velocità} \begin{cases} u = \frac{d}{dt} x(x_0, y_0, z_0, t) \\ v = \frac{d}{dt} y(x_0, y_0, z_0, t) \\ w = \frac{d}{dt} z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

L'accelerazione si trova derivando le velocità.

3) IP punto di vista euleriano assume come incognite fondamentali la  $u, v, w$ .

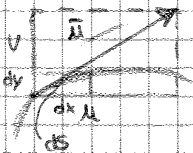
La conoscenza dei valori di  $u, v, w$  per successivi valori di  $t$  consente la formazione di una serie di immagini di stati consecutivi di moto, da cui non è possibile trarre una immediata visione del moto di ogni singola particella di fluido.

Fissiamo l'attenzione su un punto dello spazio:



Le grandezze sono associate al punto dello spazio che sto osservando non ad una particella. Ha un significato locale.

Questo punto di vista è sufficiente per la trattazione dei problemi pratici, per i quali interessa di tornare non tanto la sorte delle singole particelle che prescelta parte al moto, quanto appunto l'individuazione dei valori della velocità, o della pressione, lungo determinate linee o superficie.



LINEA DI CORRENTE: curva tangente, in ciascuno dei suoi punti, al vettore velocità in quel punto.

Per ogni punto del campo di moto passa una sola linea di corrente.

Attraverso l'equazione delle linee di corrente posso recuperare il campo di moto della velocità.

Per il teorema di Talete sui triangoli simili le equazioni delle linee di corrente sono:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

In questo modo ho perso la facilità delle traiettorie, non è più semplice fare la derivata.

Le traiettorie e le linee di corrente coincidono solo se il moto è permanente.

$$dQ = \vec{u} \cdot \vec{m} d\Omega = u_m d\Omega \Rightarrow Q = \int_{\Omega} u_m d\Omega = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{m}) d\Omega$$

portata di un tubo di flusso  $\leftarrow$   $\int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{m}) d\Omega$   $\leftarrow$  diventa il modulo della velocità

Se  $\Omega$  è una superficie trasversale, in cui tutte le  $d\Omega$  hanno la stessa normale

$\vec{m}$ , allora:  $\vec{u} \cdot \vec{m} = |\vec{u}|$   
modulo di  $\vec{u}$

$$Q = \int_{\Omega} |\vec{u}| d\Omega \Rightarrow \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} |\vec{u}| d\Omega = \frac{Q}{\Omega} = \text{velocità media}$$

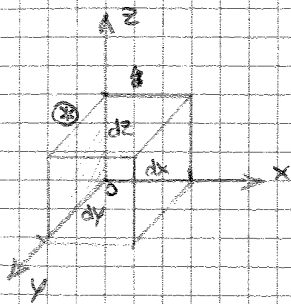
media della velocità

Ho il tubo di flusso, una superficie  $\Rightarrow$  ci saranno tante particelle quante sono le linee che entrano ed escono.

Per la legge di conservazione della massa (deve essere comunque sempre valida anche se il fluido si muove: particelle che entrano = particelle che escono).

### EQUAZIONE DI CONTINUITÀ (legge di conservazione della massa)

massa uscente = massa entrante = variazione di massa del sistema



volume infinitesimo

Se in  $O$  c'è una densità  $\rho \Rightarrow$  massa entrante istante per istante per quella faccia (\*)

$$m_{usc} > m_{ent}$$

$$m_{entrante} = (\rho u dt) dy dz$$

$$m_{usc} = (\rho u + \frac{\partial \rho}{\partial x} u dx) dt dy dz$$

La differenza di massa lungo la direzione  $x$  sarà:  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dt dx dy dz$ ;

analogamente per le altre direzioni avrà:  $-y \rightarrow \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dt dx dy dz$ ;

$$-z \rightarrow \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dt dx dy dz$$

Complessivamente per il vettore:

$$\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dt dx dy dz = \underbrace{- \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz)}_{\text{massa}} dt$$

diminuisce

Se  $m_{usc} > m_{ent}$  (per conservazione)  $\Rightarrow$   $m_{interna}$  del sistema diminuisce

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \textcircled{1} \text{ EQ. DI CONTINUITÀ INDEFINITA per qualsiasi fluido}$$

Affinché ci sia conservazione della massa, deve valere quest'equazione.

Quest'equazione si può sinteticamente scrivere come:

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \vec{u} = 0 \quad \textcircled{3}$$



$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_e \cup \Omega_u \rightarrow$  parte che esce  
 ↓ parte impermeabile  
 ↘ parte che entra

Se è vero  $\int_{\Omega} u_n d\Omega = 0$  è vero anche che:

$$\int_{\Omega_0} u_n d\Omega + \int_{\Omega_e} u_n d\Omega + \int_{\Omega_u} u_n d\Omega = 0$$

↓  
 = 0 per un fluido incompressibile

↓  
 $Q_e$   
 ↓ portata entrante del sistema  
 + positiva quando quando entra

↓ portata uscente dal sistema  
 + negativa quando esce

$Q_e - Q_u = 0 \Rightarrow Q_e = Q_u$  per un fluido incompressibile

Mi interessa solo cosa capita all'interno, cosa succede all'interno non ci interessa.

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ APPLICATA ALLE CORRENTI

Per corrente intendiamo il flusso nel quale c'è una direzione preferenziale o flusso un cui le linee di corrente sono sensibilmente rettilinee parallele.

Se il flusso varia improvvisamente non posso parlare di corrente.

Parlando di equazioni correnti si semplificano le nostre equazioni.



sensibilmente parallele

Si può usare una trattazione monodimensionale, considerando sezioni trasversali della corrente e grandezze che dipendono da s e da t:

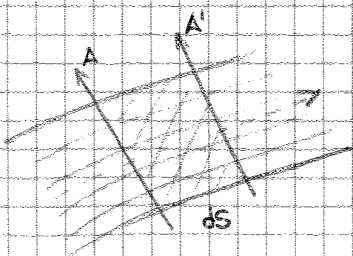
$\Omega = \Omega(s,t)$

$U = U(s,t)$

$Q = Q(s,t)$

⋮

Prendiamo un pezzo di corrente e 2 sezioni trasversali:



massa contenuta all'interno:  $\rho \Omega ds$

massa entrante:  $\rho Q dt$

massa uscente:  $(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds) dt$

variazione:  $-\frac{\partial}{\partial t} \rho \Omega ds dt$

~~$\rho Q dt + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt - \rho Q dt = -\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt ds \Rightarrow \frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} = 0$~~  pari a \*

forma generale dell'equazione di continuità applicata ad una corrente di un qualunque



$$\begin{cases} e \left( \bar{F}_x - \frac{D\bar{u}}{Dt} \right) = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} \\ e \left( \bar{F}_y - \frac{D\bar{v}}{Dt} \right) = \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} \\ e \left( \bar{F}_z - \frac{D\bar{w}}{Dt} \right) = \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \end{cases}$$

$\rightarrow \text{mdr}$

traduce in forma scalare l'equazione indefinita del movimento di un fluido. Queste equazioni, nelle quali ogni termine ha le dimensioni di una forza per unità di volume, debbono essere soddisfatte in ogni istante e per qualunque punto del campo di mdr.

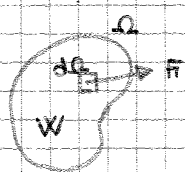
Le incognite sono 10:

- $e$ ;
- $u, v, w$ ;
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ;
- $\tau_{xy}, \tau_{yz}$ ;

- Le equazioni scalari:
- equazione indefinita del mdr: fornisce 3 equazioni scalari;
  - equazione di continuità:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0$
  - equazione di stato: individua il legame fra la densità, lo stato di sforzo a cui si trova sottoposto il fluido e la sua temperatura

Sono 5 equazioni scalari; è evidente che per rendere determinata il problema è necessario scrivere altre cinque equazioni nelle stesse variabili: esse vengono stabilite in base alla modalità di deformazione del fluido, le quali dipendono dalle cosiddette proprietà reologiche del fluido individuabili in generale per via sperimentale. Venrà considerata l'equazione di Newton, per definire i legami esistenti fra sforzi e deformazioni.

L'equazione globale deriva dalla forza:



$$e \left( \bar{F} - \frac{D\bar{u}}{Dt} \right) = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$$

$\Downarrow$

$$\int_W \rho \bar{F} dW - \int_W \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} dW = \int_W \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) dW$$

①                      ②                                      ③

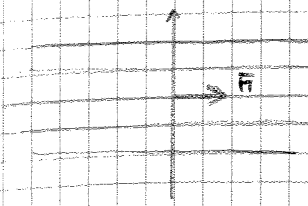
$$\begin{aligned} ③ \int_W \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) dW &= - \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_x \cos \hat{n}_x + \bar{\sigma}_y \cos \hat{n}_y + \bar{\sigma}_z \cos \hat{n}_z) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \bar{\Phi}_m d\Omega \quad \text{sono le spinte al contorno} \end{aligned}$$

$$② \int_W \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} dW$$

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z}$$

CASI PARTICOLARI

- Se il moto è permanente  $\bar{I} = 0$
- Se introdurre il concetto di corrente:  $M_e = M_u$



$$M_e = \bar{m} \int_{\Omega} u^2 \rho \, d\Omega$$

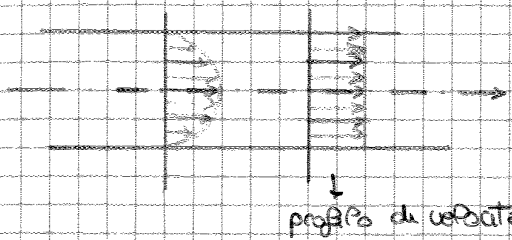
↓  
deriva da

$$M_e = \int_{\Omega} \rho \, u \, \bar{u} \, \bar{m} \, d\Omega$$

questo vale solo se il profilo di velocità è rettilineo

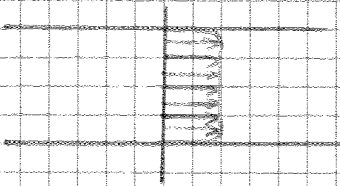
$$\bar{H} = \bar{m} \int_{\Omega} u^2 \rho \, d\Omega \equiv \bar{m} \bar{u}^2 \rho \, \Omega$$

es. supponiamo di avere un tubo rigido:



con  $u = u_{media}$

es. profilo di velocità di un fiume:



Per far vedere che questo uguale non è proprio uguale mette un coefficiente di ragguglio.

$$\bar{M} = \bar{m} \int_{\Omega} u^2 \rho \, d\Omega = \bar{H} \beta \bar{u}^2 \rho \, \Omega = \underbrace{m \beta \bar{u}^2}_{\text{a dice che il flusso è applicato nel baricentro}}$$

di quantità di moto

$\beta =$  coefficiente di ragguglio

$$\beta = \frac{\int_{\Omega} u^2 \rho \, d\Omega}{\rho \bar{u}^2 \Omega} \cong 1 \div 1,05 \div 1,10$$

Più il profilo è piatto più  $\beta \rightarrow 1$

Prendendo  $u_{media}$  commetto un errore di pochi per cento.

affo quale corrisponde la velocità di deformazione angolare:

$$-\frac{dp}{dt} = \frac{du}{dz} \quad \text{valido per } \forall \text{ fluidi}$$

La variazione della velocità lungo  $z$  fa normale alla direzione del movimento comporta la comparsa di uno sforzo tangenziale che, per la relazione di Newton, vale:

$$\tau_y = -\mu \frac{du}{dz} = \mu \frac{d^2 u}{dz^2}$$

che mostra una proporzionalità diretta fra lo sforzo tangenziale e velocità di deformazione angolare.

Si può trovare che gli sforzi tangenziali rispetto agli altri assi sono della stessa forma:

$$\tau_x = \mu \frac{dv_x}{dt}$$

$$\tau_z = \mu \frac{dv_z}{dt}$$

È da SANS dimostrabile i seguenti risultati per i fluidi newtoniani:

$$\begin{cases} \sigma_x - p = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{u} \\ \sigma_y - p = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{u} \\ \sigma_z - p = -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_x = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_y = -\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_z = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Ricordando l'equazione indefinita del momento di un fluido:

$$\rho \left( \bar{F} - \frac{D\bar{u}}{Dt} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

Tras l'equazione indefinita di equilibrio del moto di un fluido viscoso sostituendole le equazioni trovate:

$$\begin{aligned} \rho \left( \bar{F}_x - \frac{Du}{Dt} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{u} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \bar{u}) \end{aligned}$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{laplaciano}$$

$$-\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{3} \operatorname{div} \bar{u} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\mu \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

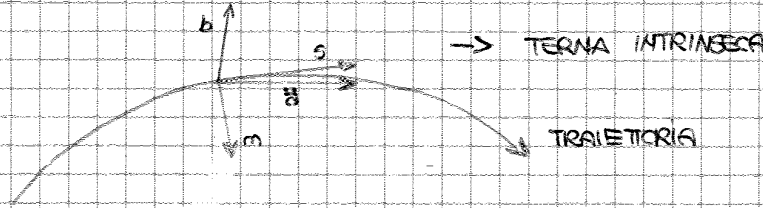
$\rho \vec{F} = -\rho g \text{grad } z = -\gamma \text{grad } z = -\text{grad}(\gamma z)$  (abbiamo introdotto e' ipotesi di incomprimibilità)

$\text{grad}(\gamma z) + \text{grad } p = -\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \Rightarrow \text{grad}(\gamma z + p) = -\rho \frac{D\vec{u}}{Dt}$

$\Rightarrow \text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{\rho}{\gamma} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\rho}{\rho g} \frac{D\vec{u}}{Dt}$

$\Rightarrow \text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g} \frac{D\vec{u}}{Dt}$

Il gradiente della quota piezometrica risulta dunque uguale al rapporto, cambiata di segno, fra l'accelerazione cui è soggetto il generico elemento fluido in movimento e l'accelerazione di gravità.



$\vec{a} = \text{accelerazione} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$

b = binormale

s = tangente alla traiettoria

m = versore normale diretto verso il centro del cerchio osculatore

Proiezioni sulla terna intrinseca:

$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \left(\frac{Du}{ds}; \frac{u^2}{R}, 0\right)$

↳ accelerazione centripeta

$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt}$

3 EQUAZIONI DI EULERO per un fluido pesante

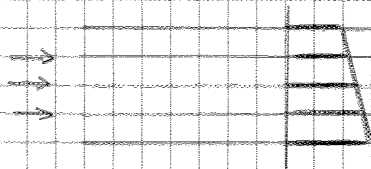
$\frac{\partial}{\partial m}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{u^2}{gR}$

$\frac{\partial}{\partial b}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$

⇒ esiste una direzione in cui non si sente l'effetto della dinamica

Principio piezometrico

π: se le traiettorie sono rettilinee v to una distribuzione idrostatica di pressione



$2u \frac{\partial u}{\partial s}$

↑

$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s}\right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s}\right) = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\underbrace{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}}_H\right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)$

H = carico totale o teorema di Bernoulli = h +  $\frac{u^2}{2g}$

h = carico piezometrico

$\frac{u^2}{2g}$  = altezza cinetica

Al teorema di Bernoulli può però anche essere attribuito un preciso significato energetico (interpretazione fisica).

Si può infatti dimostrare che il carico totale  $H$  rappresenta l'energia meccanica posseduta complessivamente dall'unità di peso del fluido in movimento; viene detta **ENERGIA SPECIFICA**.

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

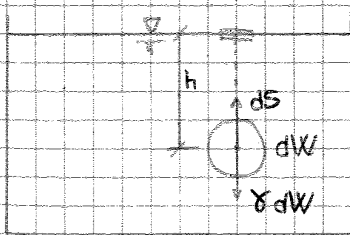
Consideriamo separatamente i tre addendi del trinomio di Bernoulli.

La quota geodetica  $z$  rappresenta dualmente quella parte di energia potenziale che compete all'unità di peso del liquido per il fatto che essa occupa una determinata posizione nel campo gravitazionale; infatti, spostandosi lungo la verticale, cioè lungo la linea di forze, dalla quota  $z$  alla quota zero essa potrebbe compiere un lavoro pari a  $z \cdot 1 = z$ . Potremo indicare questa parte dell'energia specifica come **ENERGIA POSIZIONALE**.  $\Rightarrow \frac{E_{pot}}{mg} = \frac{mgh}{mg} \Rightarrow z = \frac{E_{pot}}{mg}$  energia / unità di peso

È anche facile dimostrare come il termine  $\frac{u^2}{2g}$  rappresenti l'energia posseduta dall'unità di peso del fluido per il fatto che è animata dalla velocità  $u$ : cioè è **ENERGIA CINETICA**.

$$\frac{u^2}{2g} \Rightarrow E_{cin} = \frac{1}{2} m u^2 \Rightarrow \frac{E_{cin}}{mg} = \frac{m u^2}{2mg}$$

Per quanto riguarda l'altezza piezometrica seguiamo il seguente ragionamento: in un recipiente contenente liquido in quiete si isola idealmente un volume infinitesimo  $dW$ .



Al volume vengono applicate 2 forze: il peso  $\gamma dW$  e la spinta idrostatica  $ds$ ; le 2 forze si fanno equilibrio.

Lo sposta piano piano per non avere dissipazioni.



Se vogliamo trasferire il volumetto fuori in prossimità del pelo libero non compiamo lavoro perché spostiamo un sistema di forze a risultante nulla.

A spostamento avvenuto l'energia potenziale del volumetto è aumentata di  $\gamma h dW$  deve essere conseguentemente diminuita un'altra forma di energia, anch'essa di tipo potenziale, che deriva dalla pressione.

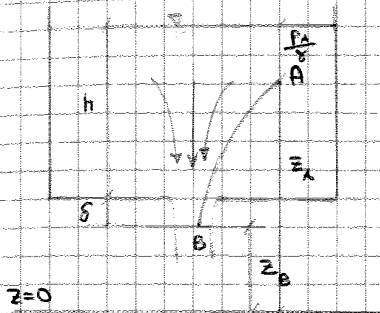
$$h = \frac{\gamma dW \cdot h}{\gamma dW} = \frac{\gamma h}{\gamma} \quad \text{energia potenziale che ho acquisito per unità di peso.}$$

È lecito concludere che l'acquisto di energia potenziale sia avvenuto alle spese di una forma di energia legata alla pressione, la quale deve essere

Altra distribuzione di luci è:

- LUCE A PARETE SOTTILE o LUCE A SAGGIO VIVO, la parete non va a incidere sulla vena effluente
- LUCE IN PARETE GROSSA

Esempio di luce in parete sottile:



Se il serbatoio è molto grande e il tubo molto piccolo, le dissipazioni sono molto piccole  $\Rightarrow$  possiamo quindi considerare un fluido perfetto.

Il moto è permanente se la portata è costante.

Se  $z$  e  $H$  sono costanti,  $p$  è uguale per tutti i punti.  $\Rightarrow$  tutti i punti della sezione contratta hanno la stessa pressione.

$H = \text{costante}$  in direzione normale alle traiettorie.

$$z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2g}$$

Più posso dire che il fluido è perfetto, allora posso dire che  $u=0$ .

Tutti i punti della sezione contratta hanno pressione nulla.

$$\frac{u_B^2}{2g} = z_A - z_B + \frac{p_A}{\rho} = h + s$$

$u_B = \sqrt{2g(h+s)}$  è definita VELOCITÀ TORRICELLIANA

$\hookrightarrow$  la velocità dipende esclusivamente dal carico.

Se  $h \gg s \Rightarrow u_B = \sqrt{2gh}$

$s$  avrà un diametro molto piccolo rispetto al serbatoio, quindi trascurabile.

Troviamo quindi che tutti i punti della sezione contratta hanno la stessa quota, la stessa pressione e la stessa velocità.

La portata sarà data da:  $Q = \Omega_c u_B c_v$

Questa formula ~~è~~ <sup>ha</sup> ~~la~~ <sup>il</sup> ~~coefficiente~~ <sup>coefficiente</sup> ~~correttivo~~ <sup>correttivo</sup> ~~per~~ <sup>per</sup> ~~tenere~~ <sup>tiene</sup> conto di tutto quello che abbiamo trascurato in  $s$ .

$c_v = 0,58 \div 0,99 \rightarrow$  coefficiente correttivo

$\Omega_c = c_c \Omega$

$c_c =$  coefficiente di contrazione  $\cong 0,64$

$\Omega = \frac{\pi D^2}{4}$ ,  $D =$  diametro

Sostituiamo nella formula iniziale:  $Q = c_c c_v \Omega \sqrt{2gh} = \mu \Omega \sqrt{2gh}$

$\mu = c_c c_v \cong 0,61$  (numeri sperimentali)

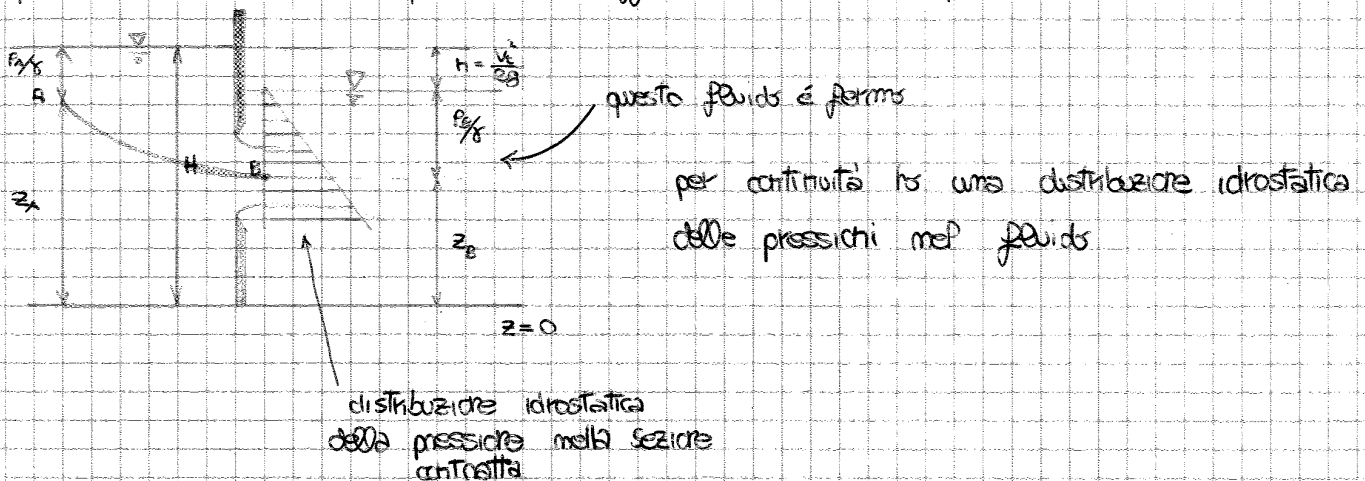
piante verticali, cosicché la luce non dia luogo a contrazione né sui fianchi né sul fondo, ma soltanto in corrispondenza del bordo della paratia.

Si ha allora: 
$$\frac{v_c^2}{2g} = H - \left( z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) = H - C_a$$

Le prove hanno dimostrato che anche in questo caso il coefficiente di contrazione vale all'incirca 0,61, se l'altezza della luce è piccola rispetto alla sua larghezza e al carico. Se diciamo a quest'altezza, quella della sezione contratta risulta  $C_a$ .

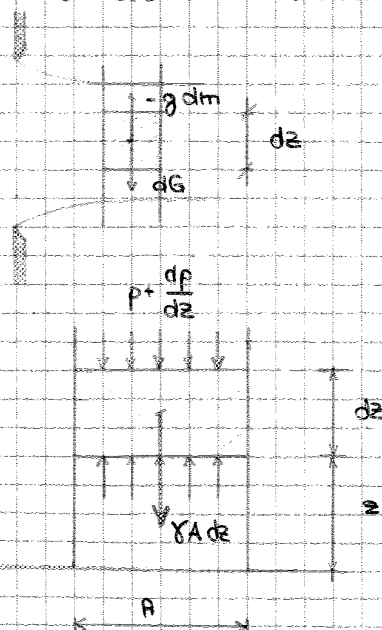
In definitiva per la portata: 
$$Q = \mu_a b \sqrt{2g(H - C_a)}$$

Concettualmente analogo è il caso di una luce a spigolo vivo, di forma qualsiasi, aperto in un setto verticale o inclinato posto fra 2 serbatoi che contengono fluidi sensibilmente in quiete, con differenti livelli di pelo libero.



~~Adottando il solito ragionamento di prima:~~ La sezione contratta è una sezione verticale, quindi i punti di hanno quote diverse.

Ragioniamo su cosa succede nella sezione contratta:



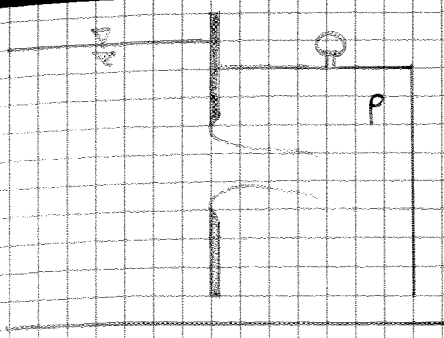
Immaginiamo che il fluido nel volumetto sia fermo: sarà in equilibrio rispetto alla forza peso e alle pressioni.

La spinta compressiva ruotata verso l'alto sarà:

$$A p = \left( p + \frac{dp}{dz} \cdot dz \right) A + \gamma A dz$$

$$\frac{dp}{dz} dz A + \gamma A dz = 0$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante}$$



Studiare bene queste figure!

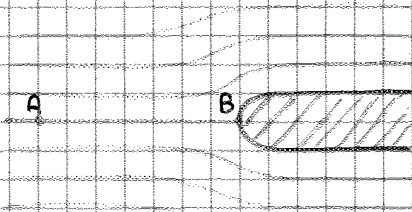
Altra applicazione del teorema di Bernoulli è il TUBO DI PITOT.

È un dispositivo, inventato dal francese Pitot nel Settecento, che trova ancora oggi largo impiego per misure locali di velocità di velocità nelle correnti fluide.

Consideriamo una corrente che investe un ostacolo, costituita da un corpo di rivoluzione a testa tondeggiante: la corrente, a sufficiente distanza o monte dell'ostacolo, abbia traiettorie rettilinee e parallele, e l'asse di simmetria dell'ostacolo abbia la loro direzione.

Avvicinandosi all'ostacolo le traiettorie divergono per poter aggirare; in particolare la traiettoria AB disposta sul prolungamento dell'asse del corpo dopo averlo investito nel punto B si suddivide in infinite traiettorie che ne lambiscono la parete lungo le linee meridiane.

Nel punto B si ha una brusca deviazione ad angolo retto: in simili circostanze il modulo della velocità va a zero, e il punto B è detto PUNTO DI RISTAGNO.



Il teorema di Bernoulli, applicato alla traiettoria AB, dà:

$$\underbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma}}_{h_A} + \frac{u_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{P_B}{\gamma}}_{h_B} + \frac{u_B^2}{2g} = 0$$

$$\Rightarrow u_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

Con questo strumento con una misura di dislivello sono in grado di misurare la velocità.

Per calcolare il dislivello utilizzo due piezometri: uno misura la spinta dinamica ed uno la spinta statica.



Valore  $\alpha$  rapporto  $(\alpha-1) \cong 3(\beta-1)$

Scriviamo quindi le relazioni delle potenze:

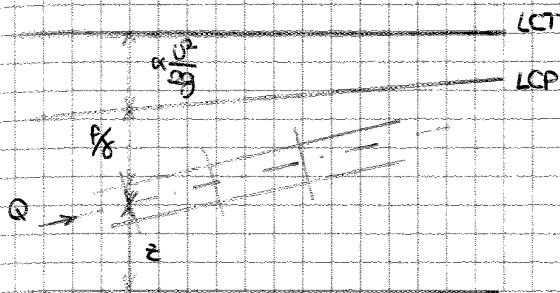
$$P_{CIN} = \alpha \gamma \frac{U^2}{2g} \underbrace{UQ}_Q$$

$$P = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) Q = \text{costante} \quad (\text{lungo la corrente})$$

TRINOMIO DI BERNOULLI DELLA CORRENTE  $H = \text{cost.}$



$$P = \gamma H Q$$

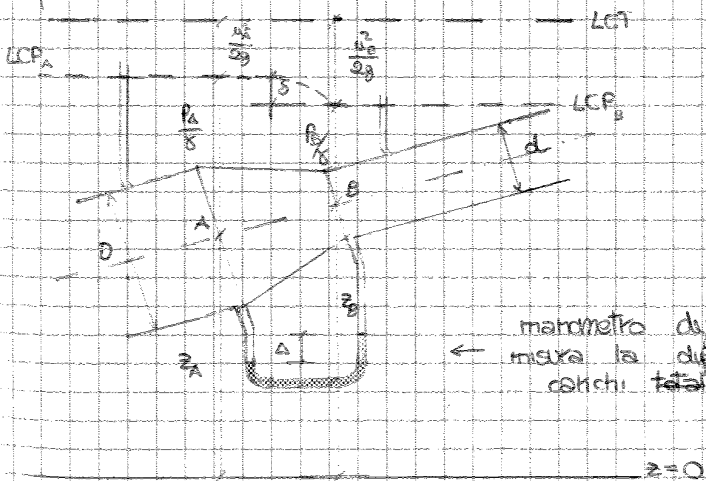


Si prende per comodità l'asse del tubo per trovare la linea dei carichi piezometrica, ma questa è uguale per tutti i punti perché  $\gamma z + \frac{p}{\gamma}$  è costante.

### Applicazioni:

#### ① tubo convergente

Consideriamo un tubo di diametro  $D$  seguito da un breve tratto convergente e quindi da un altro tubo di diametro minore  $d$ .



nel tubo convergente, dove la corrente accelera, la linea piezometrica si abbassa, allontanandosi progressivamente dalla linea dei carichi totali.

← manometro differenziale, misura la differenza dei carichi totali piezometrici

Applicando il teorema di Bernoulli fra le sezioni estreme A e B del convergente, otteniamo subito il rapporto  $\delta$  fra le quote piezometriche:

$$\gamma \left( z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha \frac{U_A^2}{2g} \right) = \gamma \left( z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \alpha \frac{U_B^2}{2g} \right)$$

$$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A} + \alpha \frac{U_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{h_B} + \alpha \frac{U_B^2}{2g} \quad \alpha \cong 1$$

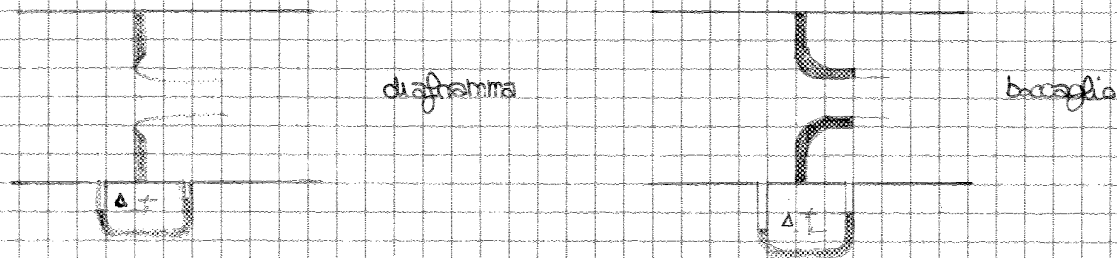
$$\delta = h_A - h_B = \frac{U_B^2 - U_A^2}{2g} \quad \text{ed è l'equazione del motor}$$

Il venturimetro comprende, oltre al convergente, un breve tronco cilindrico a sezione ristretta e poi un divergente, avente il solo scopo di riportare il diametro al suo originale valore e quindi di consentire l'inserimento dell'apparecchio in una condotta a sezione costante.

Il punto di debolezza è il diffusore (tubo divergente), perché le particelle non sono stabili e la misura non è corretta.

Sono stati studiati altri dispositivi: i diaframmi e i boccagli.

Il principio di funzionamento è lo stesso del venturimetro: si tratta in ogni caso di costringere la corrente a passare per una sezione ristretta o strozzata (per questo i dispositivi sono anche detti a strozzamento), in grado di provocare un incremento di altezza curvata a spese della quota piezometrica.



Dai fluidi si può produrre energia idroelettrica:

$$P = \gamma H Q \cdot \eta$$

dove:  $P$  = potenza della corrente  $\left[ \frac{\text{kgw}}{\text{h}} \right] \rightarrow$  energia per unità di tempo

$H$  = dislivello: energia in un punto iniziale rispetto a uno finale (salto)

$\eta$  = coefficiente di rendimento ( $0 \div 1$ ), vale 1 se non ho perdite di energia (fluidi ideali)

La formula vale in caso di fluidi perfetti.

Per produrre energia troviamo diversi tipi di impianti:

- impianti ad alta caduta:  $H$  molto grande
- impianti a bassa caduta: piccolo salto (mini idroelettrico)

### ESTENSIONE AI FLUIDI REALI

$$\rho \left( \vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \text{grad } p - \mu \Delta \vec{u}$$

$$\vec{P} + \vec{\pi}_n + \vec{H}_e - \vec{H}_u + \vec{I} - \mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial m} d\Omega =$$

nei fluidi perfetti avremmo eliminato questi termini, da cui nascono delle dissipazioni.

La conseguenza è che il carico totale di una generica particella, cioè la sua energia meccanica, non si mantiene costante. L'entità della perdita è proprio data dall'incremento della linea dei carichi totali; più incrementata è, più sta spendendo energia.

Vediamo come posso esprimere i vari termini:

$$G_{\text{sen}\alpha} = \gamma \pi r^2 L \text{ sen}\alpha = \gamma \pi r^2 (z_2 - z_1)$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

La spinta sulla superficie piana è data da:  $p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 = (p_1 - p_2) \pi r^2$

$$T = -G_{\text{sen}\alpha} + \pi_1 + \pi_2 = -\gamma \pi r^2 (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) \pi r^2 = \gamma r^2 \pi \left[ \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = \gamma \pi r^2 J L$$

T è la somma di tutte le azioni che le tensioni tangenziali fanno sulla superficie laterale del mio cilindretto.

↓  
differenza carichi  
piezometrici

Dividendo il valore di T per l'area della stessa superficie laterale otteniamo pressamente il sforzo tangenziale:

$$\tau = \frac{T}{\Omega_{\text{cilindro}}} = \frac{\gamma \pi r^2 J L}{\pi r L} = \frac{\gamma r}{2} J$$

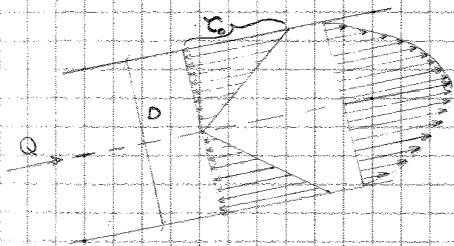
AREA CHE RESISTE IL FLUIDO  
PERIMETRO DELLA SEZIONE CHE STA PASSANDO IL FLUIDO

Considera un moto uniforme:

Le  $\tau$  sono contrarie al moto e variano linearmente con il raggio.

$\tau_0$  è il valore di  $\tau$  per  $D = r \rightarrow \frac{D}{2}$

$$\tau_0 = \gamma \frac{D}{4} J = \gamma \frac{R}{2} J$$



Le  $\tau$  esistono su ogni superficie laterale qualsiasi del mio cilindro.

Il profilo di velocità è dipendente dal raggio: ad esempio sull'asse le  $\tau$  sono nulle e la velocità del flusso è massima.

Le dissipazioni sono anche all'interno del fluido: sono di natura viscosa e nascono dalla viscosità.

$$\tau = \gamma \frac{\text{area del tubo}}{\text{contorno bagnato del fluido}} J$$

↑  
perimetro

$$R = \text{raggio idraulico} = \frac{\text{area del tubo}}{\text{contorno bagnato del fluido}}$$

CASI PARTICOLARI:

- sezione circolare



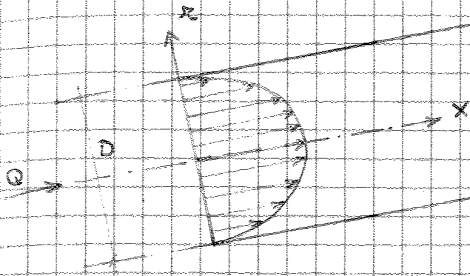
$$R = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$$

$$\tau_0 = \gamma R J$$

Il moto è: - laminare, quando  $Re \leq 2000$   
 - turbolento, quando  $Re > 4000$   
 es. l'acqua nel tubo va molto piano.

## MOTO LAMINARE

23/10/13



Conviene lavorare con le coordinate cilindriche

$$\vec{u} = (u(r), 0, 0)$$

Abbiamo 2 condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(R) = 0; \\ \left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0} = 0; \end{cases}$$

Proietta sulla direzione del moto:  $-\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{\mu \Delta u}{\rho}$

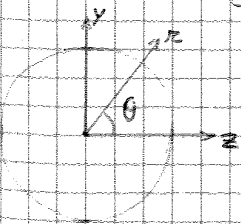
$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

La  $u$  ha solo la componente lungo  $x$  quindi i termini  $v \frac{\partial u}{\partial y}$  e  $w \frac{\partial u}{\partial z}$  sono nulli. Non ci sono variazioni lungo il raggio, quindi  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ; inoltre il moto è uniforme per cui  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

Otteniamo quindi l'equazione:  $\Delta_2 u = -\frac{\delta J}{\mu}$  EQUAZIONE DI POISSON

$\Delta_2$  è il Laplaciano ed è una quantità costante.

Il movimento dell'acqua in un tubo segue quest'equazione; tutte le acque sotterranee sono regolate da un'equazione di questo tipo.



Si può dimostrare che il Laplaciano in coordinate cilindriche si

scrive:

$$\Delta_2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\delta J}{\mu}$$

per simmetria

in questo caso le derivate parziali possono essere scritte come derivate normali.

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\delta J}{\mu} r \Rightarrow r \frac{du}{dr} = -\frac{\delta J}{\mu} \frac{r^2}{2} + \text{cost.}$$

La 2<sup>a</sup> condizione al contorno è  $\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0$ , per cui  $\text{cost.} = 0$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\delta J}{\mu} \frac{r}{2}$$

Applicando la prima condizione al contorno:  $u = +\frac{\delta J}{4\mu} (R^2 - r^2)$  ①

Da questo si sa che il profilo di velocità è parabolico.

$$\frac{d}{dx}(p+\delta z) = -\bar{\gamma} \delta$$

ricordo a questo punto l'equazione di Poisson:  $-\bar{\gamma} \delta - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

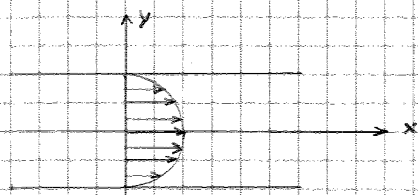
Definiamo le condizioni al contorno: - velocità nulla sulla parete:  $u|_{y=h} = 0$   
 $-\frac{du}{dy}|_{y=0} = 0$   
 $h =$  semispessore della corrente

Ci si aspetta come soluzione una parabola.

Si ottiene:  $u = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta \bar{\gamma}}{\mu} (h^2 - y^2)$

La distribuzione della velocità è di tipo parabolico, em massimo:

$$u_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta \bar{\gamma}}{\mu} \cdot h^2 \quad (\text{ottenuta imponendo } y=0)$$



Otteniamo la portata integrando all'intera sezione:

$$Q = 2 \int_0^h u b dy = \frac{\delta \bar{\gamma} b}{\mu} \int_0^h (h^2 - y^2) dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta \bar{\gamma}}{\mu} b h^3$$

e dividendo per l'area della sezione trasversale troviamo la velocità media:

$$U = \frac{Q}{2bh} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta \bar{\gamma}}{\mu} h^2 = \frac{2}{3} u_{\max}$$

Considerazioni:

In tutte le altre tipologie di sezione vale lo stesso:  $\Delta_2 u = -\frac{\delta \bar{\gamma}}{\mu}$ , però trovare soluzioni approssimate perché le condizioni al contorno non sono più così facili da determinare.

Mettiamo a confronto le soluzioni trovate:

$$\begin{cases} U = \frac{2}{3} u_{\max} & \text{area infinitamente estesa} \\ U = \frac{1}{32} \cdot \frac{\delta \bar{\gamma}}{\mu} D^2 & \text{cerchio} \end{cases}$$

Le soluzioni delle altre sezioni saranno dello stesso tipo:

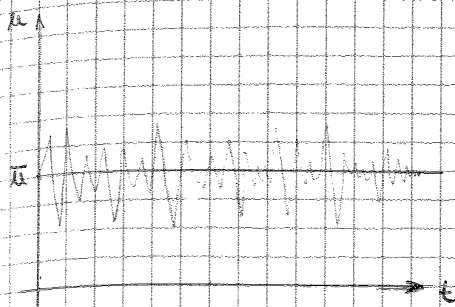
$$U = k \frac{\delta \bar{\gamma}}{\mu} R^2$$

$k =$  coefficiente moltiplicativo, sperimentalmente si può calcolare ma deve sapere come è fatta la sezione

$R =$  raggio caratteristico

# MOTO TURBOLENTO

28/10/13



Questo è un esempio di campo di velocità del moto turbolento.

A strettissima rigore so che il moto vero è tridimensionale e le particelle vanno a disperdersi per tutto il campo di moto.

Al di sotto di questa cosa troviamo delle strutture, studiabile dal punto di vista statistico.

Come calcolo  $\bar{u}$ ? Esiste?

I fenomeni statistici si studiano studiando la media. Io dico che questa media esiste e che il tubo ha una media stazionaria (cioè un valore che non dipende dal tempo); questa caratteristica è detta ERGODICITÀ.

Per calcolare la media io fisso l'orologio 10.000 volte e calcolerò una media d'insieme, indicata come  $\langle \rangle$ ; e' ingegnere invece prenderò una sola moneta e la lancerò 10.000 volte, calcolerò una MEDIA TEMPORALE (-).

Se: - le 2 medie danno lo stesso risultato, il fenomeno è detto ERGODICO  
 - le 2 medie danno risultati diversi, il fenomeno è detto NON ERGODICO.

Noi prenderemo per ipotesi fenomeni ERGODICI e STAZIONARI, e definiremo la media come:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad , T = \text{tempo caratteristico della turbolenza}$$

In genere T si dice che esiste e dipende dalla scala del fenomeno.

Definita così la velocità media, si considera la velocità istantanea  $u(t)$  come somma della velocità media  $\bar{u}$  e di uno scostamento  $u'(t)$  da essa.

$$u(t) = u'(t) + \bar{u}$$

Il  $u'(t)$  si dà il nome di componente di agitazione della velocità, o componente di agitazione turbolenta, o componente di Reynolds.

$$u'(t) = u(t) - \bar{u} \quad \text{è detta SCARTO RISPETTO ALLA MEDIA}$$

$$\bar{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u'(t)^2 dt \quad \text{SCARTO QUADRATICO MEDIO}$$

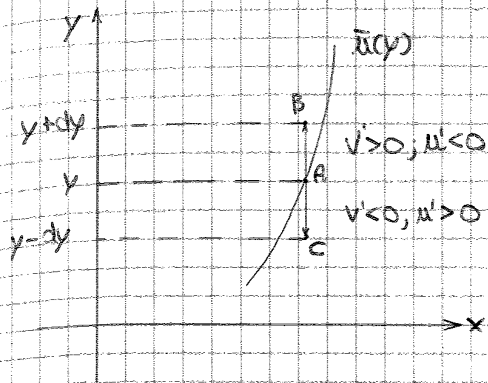
Posso quindi applicare la decomposizione di Reynolds a tutte le grandezze.

$$u(t) = \bar{u} + u'$$

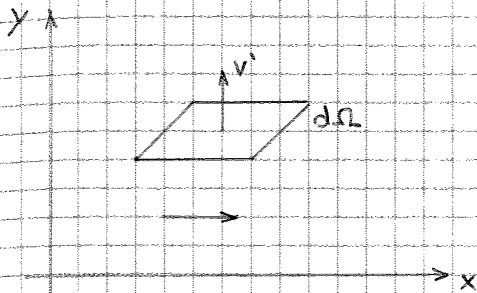
$$v(t) = \bar{v} + v'$$

$$w(t) = \bar{w} + w'$$

Noi a trovarlo nel sembr caso; ad esempio:



Se ci fosse solo moto medio A si sposterebbe in direzioni  $u', v', w'$  (componenti d'agitazione) della curva del moto medio.



densità  $\rho$  volume che è passato  $\Rightarrow$  flusso di massa transitato nella superficie in dt per effetto della  $v'$

$\rho v' dt d\Omega \Rightarrow$  flusso di massa transitato nella superficie in dt per effetto della  $v'$

$\rho v' d\Omega \Rightarrow$  massa (portata in massa) che nell'unità di tempo fluisce attraverso  $d\Omega$

$\rho v' u' d\Omega \Rightarrow$  flusso di quantità di moto attra verso  $d\Omega$  per effetto della  $v'$  di particelle che si stanno muovendo con velocità  $u$

Il flusso di quantità di moto medio sarà:

$$\rho \bar{u} v' d\Omega + \rho \bar{u}' v' d\Omega = 0$$

Il flusso che si oppone al moto estrae energia dal moto medio per effetto dell'energia del moto turbolento.

Il primo effetto è che il flusso si appiattisce e nascono delle forze aggiunte  $\tau_{xy}$ , che valgono:

$$\rho \bar{u}' v' d\Omega = dF'_{xy}$$

$\hookrightarrow$  derivano dalle componenti di agitazione turbolenta

$$\frac{dF'_{xy}}{d\Omega} = \rho \bar{u}' v' = \tau'_{xy} = \rho \bar{u}' v'$$

$\hookrightarrow$  hanno un valore negativo

I termini con diagonali sono  $\tau$  aggiuntive, dette tensioni tangenziali di natura turbolenta.

$$\bar{\tau}_{xy} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \bar{u}' v'$$

$$\bar{\sigma}_x = \bar{p} - 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{u}'^2$$

Questo significa che:  $\tau = \gamma \frac{\tau}{\Omega} = -\mu \frac{d\bar{u}}{dx} + \rho \bar{u}' v'$

1° CONSEGUENZA

Non meno che si la valore  $\rho \bar{u}' v'$  è maggiore dell'altro termine.

In prossimità della parete ci sarà sempre uno strato in cui domina la viscosità (sottostato viscoso).

$$U = \frac{1}{32} \cdot \frac{\gamma \bar{D}^5}{\mu}$$

quest'equazione contiene delle grandezze; dall'analisi dimensionale le grandezze a sinistra devono essere uguali a quelle a destra.

es.  $\gamma = \left[ \frac{N}{m^3} \right]$

$$D^5 = [m^5]$$

Queste grandezze hanno unità di misura del Sistema Internazionale (S.I.):

- grandezze fondamentali: L, M, T (lunghezza, massa, tempo)
- grandezze derivate: v (velocità) =  $\left[ \frac{m}{s} \right]$

Perché abbiamo scelto queste 3 grandezze fondamentali? Grandità, storia, ecc.

Qualsiasi sia il motivo, abbiamo fatto una scelta, e ogni grandezza derivata deriva dalle grandezze fondamentali che ho scelto.

$$[X] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma]$$

Ma se io ne scegliessi altre 3 tra le infinite possibili  $Q_1, Q_2, Q_3$  non da sbagliato.

Quando possono essere considerate grandezze fondamentali?

$$[Q_1] = [L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1}]$$

$$[Q_2] = [L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2}]$$

$$[Q_3] = [L^{\alpha_3} M^{\beta_3} T^{\gamma_3}]$$

Condizione necessaria e sufficiente è che il determinante di questa matrice sia ~~non~~ diverso da zero:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

Se possono essere grandezze fondamentali,  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  sono dimensionalmente indipendenti e il prodotto  $Q_1^m \cdot Q_2^n \cdot Q_3^p$  non può essere un numero puro.

### TEOREMA II O TEOREMA DI BUCKINGHAM:

Supponiamo di aver capito che in un determinato fenomeno una grandezza sia una funzione di altre grandezze.

$$y = f(q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_m, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

dove  $f$  è incognita.

Nessuno mi dice se sono le grandezze giuste.

$f$  deve essere omogenea dal punto di vista dimensionale; se è omogenea posso scegliere 3 grandezze tali che questa grandezza siano dimensionalmente indipendenti.

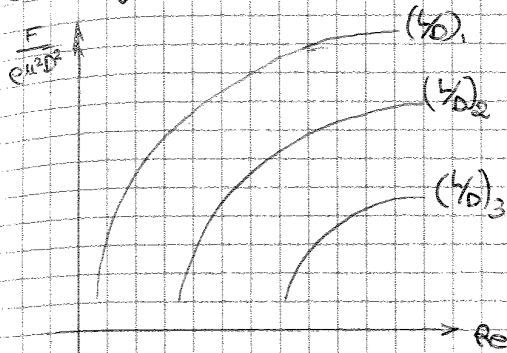


$$\frac{F}{\rho \mu^2 D^2} = f \left( \frac{\rho \mu D}{\rho \mu D}, \frac{L}{D} \right)$$

↑  
numero di Reynolds
↑  
coefficiente di forma

Ho tradotto numeri qui che assumono un significato fisico.

Sono formule che hanno validità generale.



Ma è merit' altro che il grafico della  $f$ .  
 È una curva interpolante di punti sperimentali,  
 non è un'equazione fisica né la soluzione.

Il teorema  $\Pi$  ci semplifica la vita sperimentale, ci consentiamo di tradurre la  $f$  in questo modo.

Usiamo la formula del moto laminare per vedere se moto laminare e turbolento emettono allo stesso risultato.

$$\gamma_0 = \gamma \frac{D}{2} J$$

$$\gamma_0 = f(D, \mu, u)$$

Ho definito le tre grandezze da cui dipende il fenomeno. Ne usiamo 3 perché sono le grandezze fondamentali della meccanica.

$$\frac{\gamma_0}{D^\alpha \mu^\beta u^\gamma} = K \rightarrow \text{sono andate via tutte le grandezze.}$$

$$\gamma_0 = \frac{F}{\text{sporgia}} = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} \right] = [L^{-1} M T^{-2}]$$

$$D = [L]$$

$$u = [L T^{-1}]$$

$$\mu = \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right] = [L^{-1} M T^{-1}]$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} -1 = 1\alpha + 1\beta - 2\gamma \\ 1 = 0\alpha + 0\beta + 1\gamma \\ -2 = 0\alpha - 1\beta - 1\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$$

$$\textcircled{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1$$

$$\textcircled{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1$$

$$\frac{\gamma_0}{D^{-1} \mu^1 u^1} = K \Rightarrow \gamma_0 = K \frac{\mu u}{D}$$

Le prime determinazioni sperimentali nei tubi lisci, ormai classiche, sono dovute a Blasius (circa 1911): furono effettuate in tubi di ottone trafilato di modesto diametro e interessarono il campo dei numeri di Reynolds compreso tra il valore critico e circa  $10^5$ .

⇒ FORMULA DI BLASIUS:  $\lambda = 0,316 Re^{-0,25}$  per  $Re < 10^5$

Diversi anni dopo Nikuradse estese l'indagine di Blasius a valori di  $Re$  molto più elevati, dell'ordine di  $10^7$ .

⇒ FORMULA DI NIKURADSE:  $\lambda = 0,0032 + 0,221 \cdot Re^{-0,237}$  per  $Re < 10^7$

③  $\zeta_0 = f(D, U, \mu, \rho, d)$  MOTO TURBOLENTO IN TUBO SCABRO

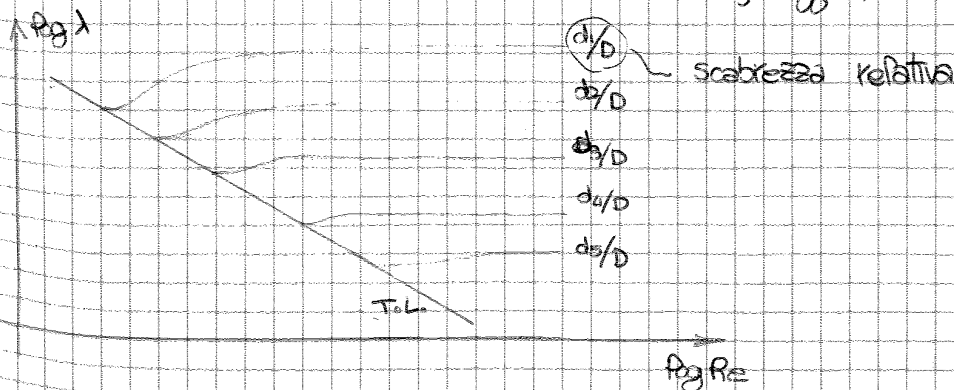
Un tubo NON LISCIO è definito tale quando lo strato laminare è più piccolo della scabrezza.



Le prime ricerche di laboratorio significative sul problema della scabrezza sono state effettuate intorno al 1930 da Nikuradse, che costruì una scabrezza artificiale, molto regolare e quindi facilmente misurabile. Questo risultato fu ottenuto facendo aderire, mediante un collante, alla parete interna di un tubo liscio una stratiella molto uniforme di sabbia con granulato di diametro grossolanamente costante per ogni tubo, ma variante da tubo a tubo. Tale diametro di venne appunto assunto da Nikuradse come misura della scabrezza dei tubi suoi tubi.

La legge del moto è esprimibile come:  $\frac{\zeta_0}{\rho U^2} = f(Re, \frac{d}{D})$

Nikuradse ottenne un grafico, divenuto ormai classico, al quale fu attribuito il nome di ARPA DI NIKURADSE, suggerito dalla sua forma.



Nei tubi commerciali si ha una scabrezza equivalente di Nikuradse.

Se folgt ① trar la formula del moto assolutamente turbolento

Se folgt ② trar la formula del tubo liscio

Il diagramma di Moody è diviso da una retta definita dal parametro  $Re^*$

$$Re^* = \text{Reynolds d'attorta} = \frac{\rho \cdot u_* \cdot \epsilon}{\mu}, \text{ con } u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

### FORMULE UTILI

① D'ARCY  $J = \beta \frac{Q^2}{D^5}$ , con  $\beta = \text{coefficiente della scabrezza}$

Per i tubi in ghisa,  $\beta = 0,00464 + 0,000042/D$

La formula può essere scritta anche come:

$$J = \beta' \frac{Q^2}{D^{5,33}}$$

$$J = \beta'' \frac{Q^2}{D^{4,72}}$$

② CHEZY : formule più generali perché contengono esplicitamente un coefficiente, detto INDICE DI SCABREZZA, che può variare da caso a caso.

$$U = K \sqrt{R \cdot J}$$

$K = \text{coefficiente che tiene conto del materiale del tubo} = CR^{1/6}$

↳ per GAUCKER - STRICKLER

I valori dei coefficienti sono contenuti in Tabelle.

A sans altri modi per determinare  $K$ :

$$K = \frac{49}{n} R^{1/6} \rightarrow \text{MANNING}$$

$$K = \frac{87}{1 + \frac{28}{\sqrt{D}}} \rightarrow \text{COEFF. DI BAZIN}$$

$$K = \frac{100}{1 + \frac{28}{\sqrt{D}}} \rightarrow \text{KUTER}$$

③ HAZEN - WILLIAMS  $J = \frac{10,675 Q^{1,852}}{c^{1,487} D^{4,8704}}$

$c$  vale 100 per tubi in acciaio.

Il coefficiente è spesso dato da un intervallo.

$$\begin{aligned} \Delta H &= -\rho g \left[ \gamma \sin \alpha + \rho Q U_1 - \rho Q U_2 + p_1 \rho_2 - p_2 \rho_2 \right] = \\ &= -\rho g (z_2 - z_1) + \frac{\rho Q U_1}{\rho} - \frac{\rho Q U_2}{\rho} + \rho g \left( \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) = \\ &= \rho g \left[ \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = \frac{\rho}{\gamma} (U_2 - U_1) \end{aligned}$$

$$U_2 - U_1 < 0$$

$$h_2 > h_1$$

$$\rightarrow Q = U_2 \rho_2$$

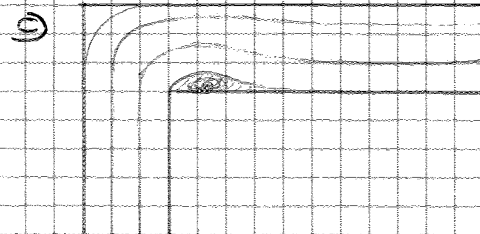
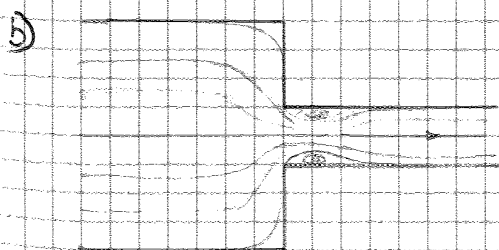
$$\Delta H = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} - h_2 - \frac{U_2^2}{2g} = \frac{Q}{\rho_2 g} (U_2 - U_1) + \frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2) =$$

$$= \frac{U_2 \rho_2}{\rho_2 g} (U_2 - U_1) + \frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2) = \frac{1}{2g} (2U_2^2 - 2U_2 U_1 + U_1^2 - U_2^2) = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

È precisamente questa la formula di Borda, che i risultati sperimentali hanno confermato con particolare precisione, giustificando quindi a posteriori, almeno globalmente, le ipotesi fatte; si interpreta dicendo che la perdita di carico per brusco allargamento è pari all'altezza cinetica della velocità perduta, indicando con tal nome la diminuzione di velocità.

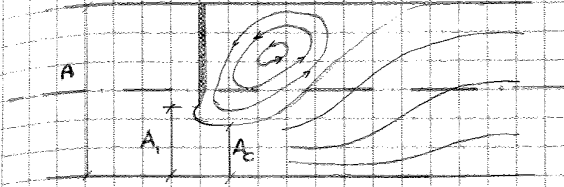
Con l'equazione di continuità (vedi inoltre che:  $\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2$ )

I casi b) e c) si possono risolvere riconducendo al caso del brusco allargamento: in tutti ritroviamo una vena liquida che rallenta e proprio in tale circostanza la perdita è causata principalmente dalla dissipazione di energia.



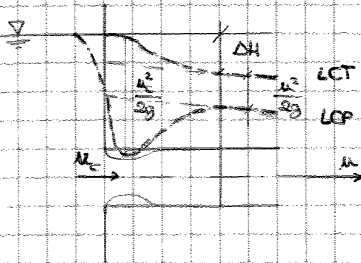
A.B. Nelle condotte in pressione l'increspatura non ha importanza.

strozzamento della corrente liquida: questa è cioè costretta a passare attraverso un'apertura di sezione minore di quella della condotta (e in genere variabile a mezzo di un dispositivo di manovra), a valle della quale si stabilisce una sezione ristretta, seguita da un brusco allargamento che dà luogo ad una perdita tipo Borda.



### IMBOCCO DI UNA CONDOTTA DA UN SERBATOIO

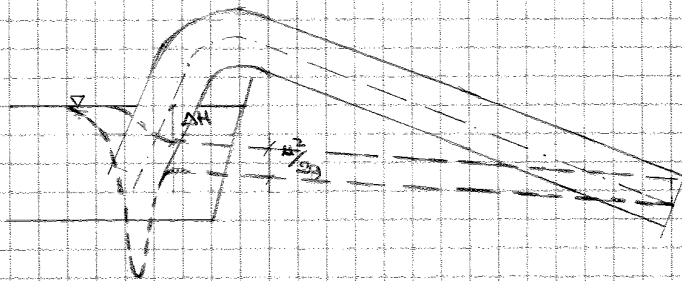
Studiamo il caso di un imbocco realizzato a spigolo vivo.



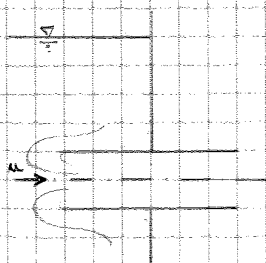
Un imbocco di questo tipo fa perdere circa mezzo termine cinetico.  $\Rightarrow \Delta H = 0.5 \frac{u^2}{2g}$

In verde sono segnate le LCP e LCT che si sottraggono se considerassi una sezione concentrata.

Altro tipo di imbocco è l'attingimento da una vasca mediante sifone:

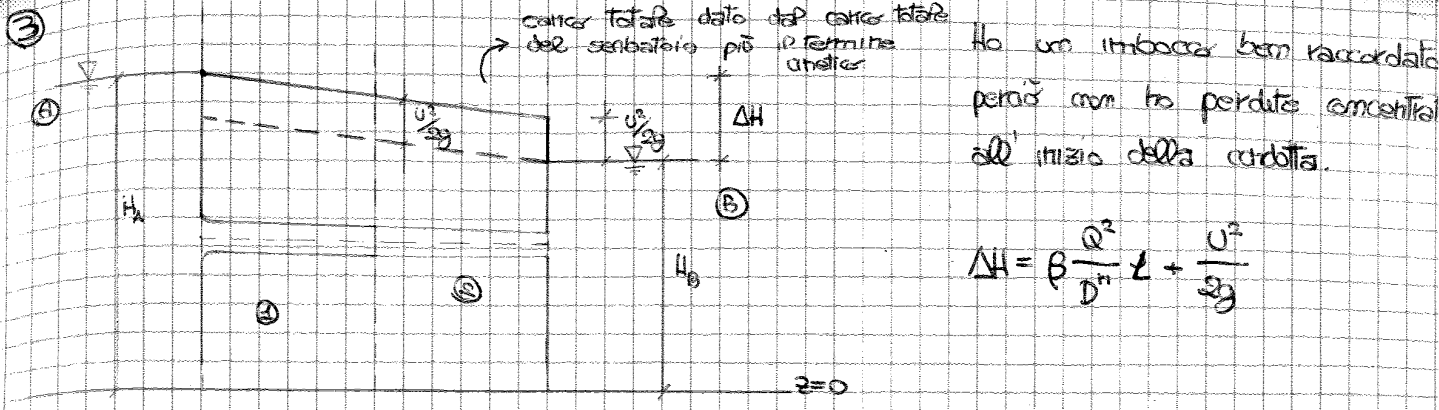


Altro tipo ancora può essere il seguente:



Un sistema di questo tipo perde un termine cinetico.

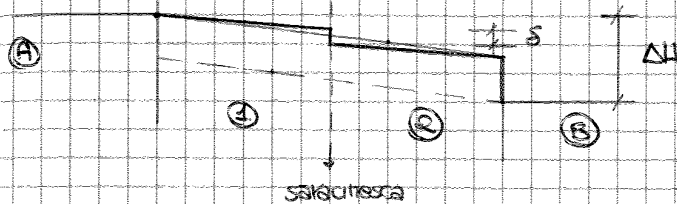
$$\Delta H = 1 \cdot \frac{u^2}{2g}$$



$$\Delta H = \beta \frac{Q^2}{D^5} L + \frac{U^2}{2g}$$

Tra ① e ② posso mettere una sarracinesca (come rubinetta) che mi chiude un po' la condotta ed avrà una perdita di carico concentrata.

In caso di sarracinesca, se Q diminuisce, anche J diminuisce e la linea sarà meno inclinata; inoltre diminuisce anche il termine cinetico.



$$\Delta H = J_1 L_1 + S + J_2 L_2 + \frac{U_{new}^2}{2g} = \beta \frac{Q_{new}^2}{D^5} L_1 + S + \beta \frac{Q_{new}^2}{D^5} L_2 + \frac{U_{new}^2}{2g}$$

Se chiuderò la sarracinesca mi ritrovo in statica e le linee non sono più inclinate ma orizzontali.

### LUNGHE E BREVI CONDOTTE

Sono più grandi le perdite di carico concentrate o distribuite? Dipende!

Le perdite di carico concentrate sono dell'ordine di grandezza di  $\frac{U^2}{2g}$  (termine cinetico), mentre le perdite di carico distribuite sono dell'ordine di  $J \cdot L$ .

I 2 tipi di perdite si equivalgono quando:

$$\frac{U^2}{2g} = J \cdot L$$

Quando succede questo?

$$\lambda = \frac{DJ}{\frac{U^2}{2g}} \Rightarrow J = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \Rightarrow \frac{U^2}{2g} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \cdot L \Rightarrow 1 = \frac{\lambda}{D} \cdot L \Rightarrow L \cong \frac{D}{\lambda}$$

Succede quando  $L \cong \frac{D}{\lambda}$

Ad esempio:  $\lambda = 0,025$  (ordine di grandezza)

$$\frac{1}{\lambda} = 40$$

$$\Rightarrow L = 40 D$$

Se la lunghezza della condotta è almeno circa 40 volte più grande del diametro del tubo, le perdite si equivalgono.

Supponiamo di voler progettare una condotta con i seguenti dati:

$$\Delta H = 10 \text{ m}$$

$$\beta = 0,00464$$

$$e = 200 \text{ m}$$

$$Q = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$n = 5$$

$$\Rightarrow \Delta H = \beta \frac{Q^2}{D^5} e \Rightarrow D^5 = \beta \frac{Q^2}{\Delta H} e \Rightarrow D = \sqrt[5]{\beta \frac{Q^2}{\Delta H} e} =$$

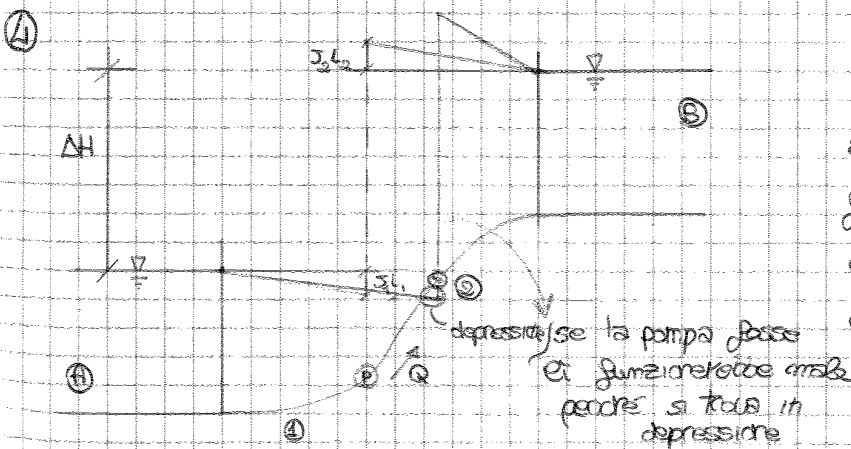
$$D = \sqrt[5]{0,00464 \cdot \frac{0,2^2}{10} \cdot 200} = 0,265 \text{ m}$$

E' tuti non troveremo mai un tubo commerciale di questo diametro, perché i tubi commerciali vanno a classi: più aumenta D, più aumentano le differenze tra le classi.

Potrò quindi scegliere ad esempio  $D = 200 \text{ mm}$  o  $D = 300 \text{ mm}$ : nel primo la portata diminuisce, nel secondo aumenta.

Se non voglio cambiare la portata, allora uso degli accorgimenti, come ad esempio mettere una parte di tubo con diametro più basso e una con diametro maggiore.

Ho 2 fasi a questo punto: - problema di progetto  
- problema di verifica, cioè verificare qual'è il valore di portata tra con i tubi commerciali.

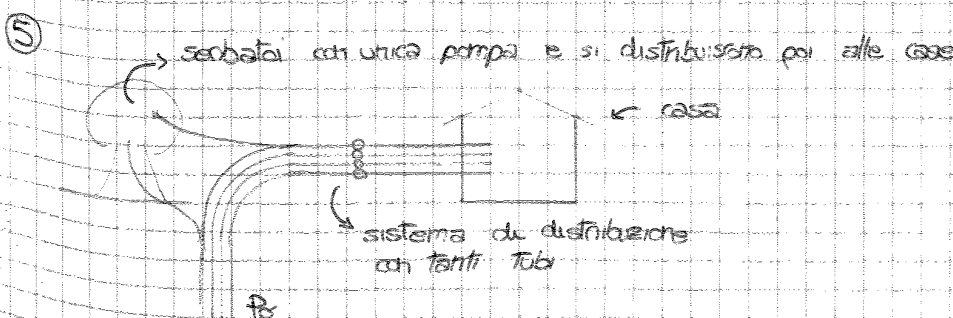


Se devo portare l'acqua da A a B ho bisogno di una pompa per far salire l'acqua. La pompa prende energia dall'esterno e fornisce un carico aggiuntivo al sistema.

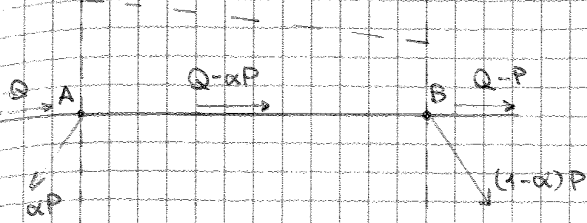
La Q deve salire di un valore ΔH

Il salto totale che deve fare l'acqua è definito PREVALENZA ed è dato da

$$\Delta H + J_1 L_1 + J_2 L_2$$



2. consideriamo erogazione solo in A e B (sistema a portate concentrate): in che modo rende il sistema uguale a quello prima?



Dato totale  $\alpha$  in modo che sia uguale energeticamente a quello prima, con la stessa perdita di carico.

La piezometrica diventa una retta.

La perdita tra A e B è data da:

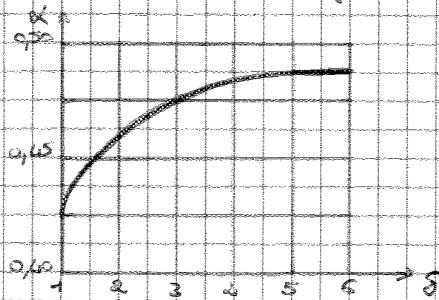
$$\frac{8(Q-\alpha P)^2}{D^5} e$$

Per rendere equivalenti i 2 sistemi:  $Q^2 + \frac{P^2}{3} - QP = (Q-\alpha P)^2$

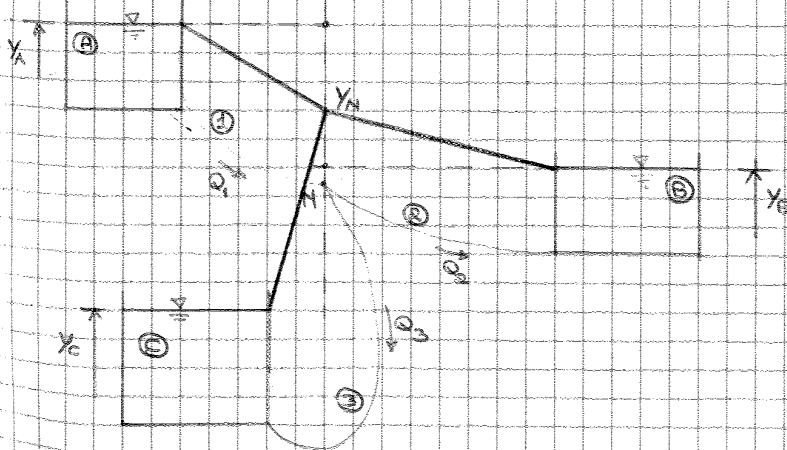
$$\Rightarrow \alpha = 5 - \sqrt{5^2 + \frac{1}{3} - 5} \quad \text{dove } S(\text{def}) = \frac{Q}{P}$$

↳ perché solo la soluzione positiva

La relazione  $\alpha$  può rappresentarsi graficamente: (esempio) Fig. 8.2 citata



### 8) PROBLEMA A TRE SERBATOI



modo = rete

La posizione dei tubi è data dalla topografia del sistema.

Definiamo 1, 2, 3 le tre condotte.

Il punto  $Y_N$  sarà posizionato tra

$Y_A$  e  $Y_B$ , in quanto:

- non può stare sopra  $Y_A$  perché altrimenti A V sarebbe un erogante;
- non può essere sotto  $Y_B$ , perché altrimenti B sarebbe un serbatoio che alimenta.

Dall'andamento delle portate posso dire che:  $Q_1 = Q_2 + Q_3$

Per la condotta 1 vale:  $Y_A - Y_N = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^5} \cdot e_1$

Per la condotta 2 vale:  $Y_N - Y_B = \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^5} \cdot e_2$

Per la condotta 3 vale:  $Y_N - Y_C = \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^5} \cdot e_3$



Il costo della condotta ① è stato tracciato osservando che:

- quando  $Y_N \rightarrow Y_A$  il primo membro va a 0, la piezometrica diventa quasi orizzontale e lo bisogna di diametri sempre più grandi.

4/4/13

Per Definiamo quindi le equazioni del problema di progetto:

$$\begin{cases} Y_A - Y_N = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^5} \cdot e_1 & \text{①} \\ Y_N - Y_B = \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^5} \cdot e_2 & \text{②} \\ Y_N - Y_C = \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^5} \cdot e_3 & \text{③} \\ \frac{dC}{dY_N} = 0 & \text{④} \end{cases}$$

Come si risolve?

Dalla ④ otteniamo:

$$\begin{cases} D_1 = \beta_1 Q_1^2 e_1^{-1/5} (Y_A - Y_N)^{-1/5} \\ D_2 = \beta_2 Q_2^2 e_2^{-1/5} (Y_N - Y_B)^{-1/5} \\ D_3 = \beta_3 Q_3^2 e_3^{-1/5} (Y_N - Y_C)^{-1/5} \end{cases}$$

Sostituendo le relazioni ottenute in ①:

$$C = c_1 \beta_1 Q_1^2 e_1^{-1/5} (Y_A - Y_N)^{-1/5} + c_2 \beta_2 Q_2^2 e_2^{-1/5} (Y_N - Y_B)^{-1/5} + c_3 \beta_3 Q_3^2 e_3^{-1/5} (Y_N - Y_C)^{-1/5} \quad \text{⑤}$$

Ricordando che:

$$\frac{d(Y_A - Y_N)^{-1/5}}{dY_N} = \frac{K}{m} (Y_A - Y_N)^{-1/5 - 1/m}$$

Sostituendo la ⑤ nella ④ e derivando si ottiene:

$$c_1 \beta_1 Q_1^2 e_1^{-1/5} (Y_A - Y_N)^{-1/5 - 1/m} = c_2 \beta_2 Q_2^2 e_2^{-1/5} (Y_N - Y_B)^{-1/5 - 1/m} + c_3 \beta_3 Q_3^2 e_3^{-1/5} (Y_N - Y_C)^{-1/5 - 1/m}$$

nella quale si sono portati a primo membro i valori relativi alle condotte entranti nel nodo N e a secondo membro i valori relativi alle condotte uscenti dal nodo N.

Raggruppando si ottiene:

$$c_1 \beta_1 Q_1^2 e_1^{-1/5} \left( \frac{e_1}{Y_A - Y_N} \right)^{1/m} = c_2 \beta_2 Q_2^2 e_2^{-1/5} \left( \frac{e_2}{Y_N - Y_B} \right)^{1/m} + c_3 \beta_3 Q_3^2 e_3^{-1/5} \left( \frac{e_3}{Y_N - Y_C} \right)^{1/m} \quad \text{⑥}$$

Dalle ①, ②, ③ si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{e_1}{Y_A - Y_N} = \frac{D_1^5}{\beta_1 Q_1^2} \\ \frac{e_2}{Y_N - Y_B} = \frac{D_2^5}{\beta_2 Q_2^2} \\ \frac{e_3}{Y_N - Y_C} = \frac{D_3^5}{\beta_3 Q_3^2} \end{cases}$$

Per risolvere il sistema defornato in prima approssimazione:  $\alpha = 1$

$m = 5$

$\Rightarrow D_i^e = K Q_i^e \Rightarrow D_i = \sqrt[5]{K \cdot Q_i^5} = K' \cdot \sqrt[5]{Q_i} \quad \textcircled{2}$  Il diametro è proporzionale alla radice cubica della portata.

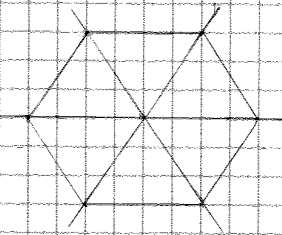
Sostituisci la  $\textcircled{2}$  nella  $\textcircled{1}$ :  $\Delta y = \sum B_k \frac{Q_k^2}{K' \cdot Q_k^{5/3}} \cdot e_i = \sum B_k \frac{Q_k^2}{K''} e_i = \sum B_k \frac{Q_k^{2/3}}{K''} e_i =$   
 $= \frac{B_k}{K''} \sum Q_k^{2/3} e_i$

Da quest'ultima ricavare  $K''$ :  $K'' = B_k \frac{\sum Q_k^{2/3} \cdot e_i}{\Delta y}$

A questo punto da  $K''$  ricavare  $K'$  e conseguentemente  $K$ .

Conoscendo  $K$  sarà in grado di stimare i diametri, ~~in quanto~~  $\Delta y$  è il carico che tocca sull'ultimo utilizzatore ed è un dato noto.

Quando ci sarà tanta persone che chiederà l'acqua il sistema evolve e diventa una RETE, sistema più sicuro. Con il sistema precedentemente visto, se si rompe un pezzo si interrompe tutto il flusso.

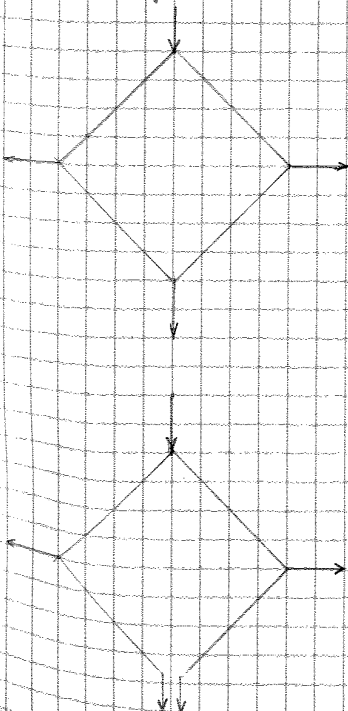


In una rete in caso di problema il flusso non si interrompe, ma cambia la parte della rete per non far rimanere nessuno senza.

- Per la rete affronteremo:
- 1) problema di progetto
  - 2) problema di verifica

Se le reti sono chiuse si risolvono aprendole.

Ad esempio:

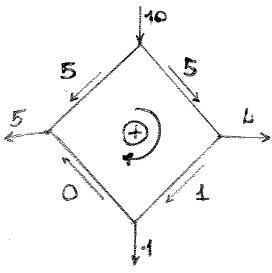


Dato questa rete chiusa, aprirla significa prendere un nodo ed ipotizzare che tutti ci sia.

Non ci sono regole matematiche per scegliere come tagliare, si basa sul buon senso e sull'esperienza.

Le reti si progettano con una serie di tagli opportuni in modo che diventino tante volte il problema studiato prima (per il problema di progetto).

valori a correggere con un -1 ha portata.



⇒

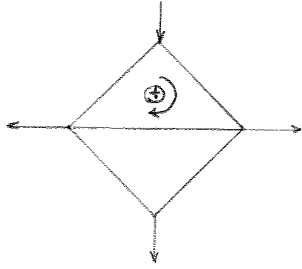
calcolo una  $q_e''$  (2<sup>a</sup> tentativo):

$$q_e'' = \frac{5^2 + 1^2 + 0^2 - 5^2}{2(1+5+0+5)} = \frac{-4}{22} \approx -0,18$$

deve essere  $< q_e'$ .

Posso andare avanti finché voglio, mi fermo quando trovo correzioni minori dell'ordine del problema.

La verifica si fa maglia per maglia.



A sono dei software che risolvono i nostri problemi: uno di questi è EPANET, programma gratuito.

anche la cadente; diminuita la cadente diventa un moto a canaletta, metà aria e metà acqua.

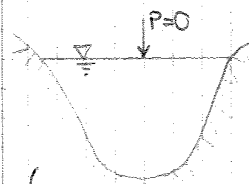
IV) questa situazione differisce dalla precedente soltanto per quanto riguarda l'ammontare, che ora necessita di un abbassamento

VI) Essendo una parte della condotta superiore all'azzeriale per B, nessuna direzione di moto è possibile, data l'impossibilità di ottenere l'abbassamento del movimento.

### CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA cap. 10 Citroni

8/11/13

Si tratta essenzialmente delle correnti idriche che percorrono i corsi d'acqua naturali (fiumi, torrenti) o i canali artificiali (di bonifica, di irrigazione, di fognatura, di impianti idroelettrici, di navigazione interna), il loro studio, soprattutto se indirizzato a fini applicativi, costituisce pertanto un importante capitolo dell'idraulica tecnica.



superficie a contatto con l'atmosfera

↓  
PELO LIBERO

Al fini non so com'è la geometria del mio sistema

Queste correnti sono caratterizzate dall'avere una parte della loro superficie di contorno, e precisamente quella superiore, non a contatto con una parete solida, ma con un gas, che nella più grande generalità è l'atmosfera; questa superficie che si dice appunto SUPERFICIE LIBERA o PELO LIBERO è pertanto una superficie isobarica,  $p = \text{cost.}$ , almeno se si considerano tratti di corrente non eccessivamente estesi, di norma, ma non sempre, il valore costante della pressione è quello atmosferico, e cioè nullo nel riferimento relativo.

L'equazione di continuità  $\rho \left( \vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \text{grad } p - \mu \Delta_s \vec{u}$  è valida anche per correnti a superficie libera; non la usiamo direttamente perché il moto che ha nel nostro campo è turbolento.

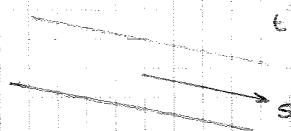
Oggi poniamo dei limiti per la definizione dei casi da trattare e troveremo anche un modello semplificato (Saint-Venant)

Semplificazioni:  $\rightarrow$  N-S: complicata e moto tridimensionale

1) vogliamo considerare correnti  $\rightarrow$  trattazione monodimensionale  $(s, t)$

direzione principale della corrente

$\uparrow$   
 $\rightarrow$  tempo



$$E = h + \frac{v^2}{2g}, \quad \text{con } Y \equiv h, \quad h = Y + \frac{z}{g}$$

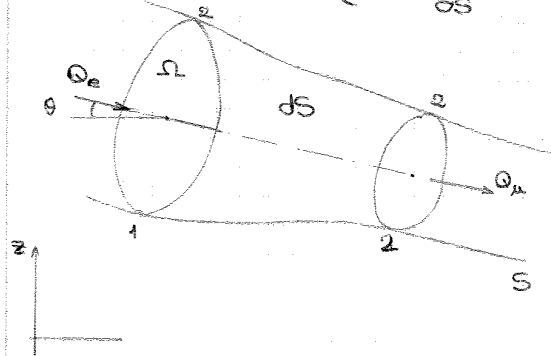
La pendenza del fondo mi dice come varia il punto che sto prendendo un considerazione per le sezioni.

### RICERCA DEL MODELLO SEMPLIFICATO DI N-S

Partiamo dalla legge di conservazione della massa e dalla legge di Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Dalla legge di conservazione della massa so che:

- massa entrante:  $\rho Q$
- massa uscente:  $\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds$



$\Omega$  non è costante dato che può variare la posizione del pelo libero

$$1^{\text{a eq.}} \quad \rho Q - \left( \rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Omega ds) \Rightarrow \frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} = 0$$

(densità uniforme)

per fluido incompressibile  $\rho = \text{cost} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$

2<sup>a</sup> eq)  $\vec{F} = m\vec{a}$  la proietta in direzione del moto

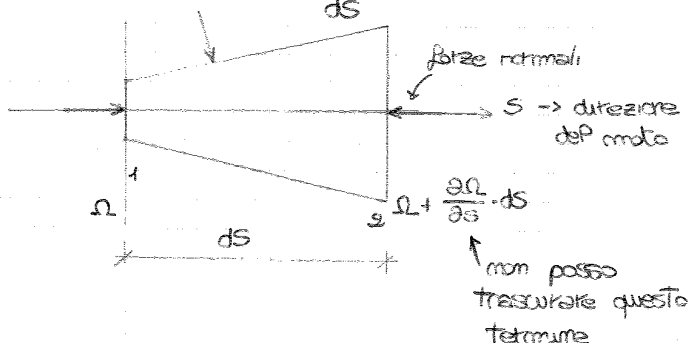
$$\vec{a} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s}$$

$m \rightarrow$  massa contenuta tra la sezione 1 e 2 =  $\rho \Omega ds$

$\vec{F} \rightarrow$  tutte le forze applicate al sistema in direzione del moto (forze di massa più forze di superficie)

$$G = \rho g \Omega ds \sin \theta = \rho g \Omega ds \frac{dz_b}{ds}$$

$$\sin \theta \approx \theta = -\frac{dz_b}{ds}$$



Per le forze di superficie devo considerare sforzi di natura normale e tangenziale sulla superficie di contorno proiettati nella direzione del moto.

non posso trascurare questo termine

18/11/13

Ricordiamo che l'energia specifica è data da:

$$E = Y + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (\alpha \neq 1 \text{ per moto turbolento})$$

E è anche detta carica totale riferita al punto più basso della sezione.

Come ipotesi abbiamo detto che le pendenze sono piccole:  $\theta \leq 5^\circ - 10^\circ$ .

Andando ad applicare l'equazione di continuità e le equazioni del moto si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{Q}{S} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \\ \frac{Y}{S} + \frac{U}{g} \cdot \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = i_p - J \end{cases}$$

Devo risolvere queste equazioni per un moto vario (ad esempio, onde di piena nelle alluvioni). Questo è difficile perché le termini con  $\Omega$  e  $U$  e le geometrie sono sempre più complicate.

Possiamo semplificare queste equazioni:

~~semplici~~ - moto permanente

$$\begin{cases} \frac{Q}{S} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial S} = i_p - J \end{cases} \rightarrow \text{EQUAZIONE DEI PROFILI}$$

- moto uniforme

$$\begin{cases} Q = \text{cost} \\ i_p = J \end{cases} \Rightarrow \text{la pendenza della LCT è uguale alla pendenza del fondo}$$

↳ le tre linee coincidono

⇒  $E = h$

Nella realtà sarà difficile trovare un moto uniforme, ma si usa come confronto, in quanto è più semplice progettare in moto uniforme.

Il moto uniforme è un moto di riferimento a cui tende <sup>un</sup> il canale, particolarmente esteso.

Si studia il moto permanente come deviazione del moto uniforme.

Il legame tra le varie grandezze del moto uniforme è dato dalla

formula di Chézy:  $U = K \sqrt{R} \cdot i_p$

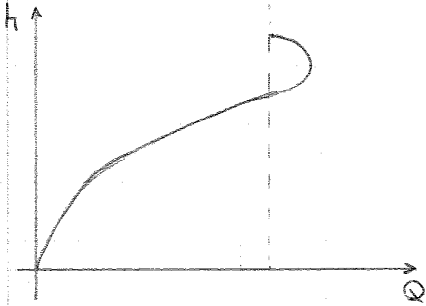
↳ pendenza del fondo ⇒  $i_p = J$

↳ coefficiente di scabrezza

$$Q = \Omega K \sqrt{R} \cdot i_p$$

↳ me la dà la topografia del posto.

scala di deflusso sezioni chiuse



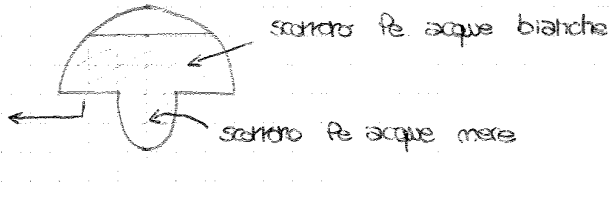
IP massimo della portata è al 95% dell'altezza.

Però della portata quando riempio la sezione, attendo perché è pericoloso arrivare a questi massimi...

Le fogmature possono essere:

- grandi dimensioni

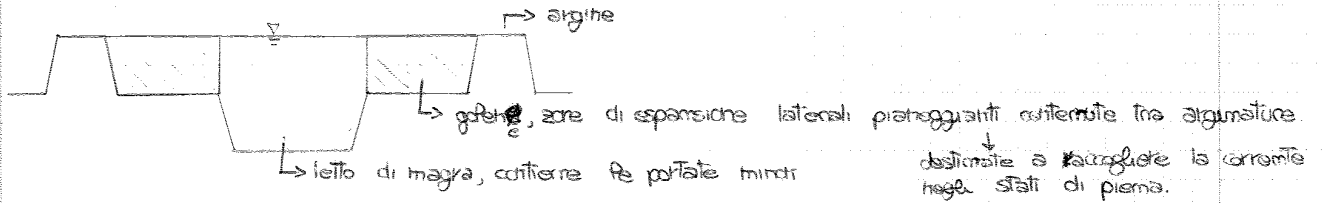
utilizzabile per spezzare la fogmatura



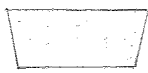
- piccole dimensioni



Di interesse è la conformazione dei fiumi:



Particolarità di questa sezione è la scala di deflusso.



in questa parte la scala di deflusso sarà quella delle sezioni a cielo aperto.



si aumenta il coefficiente bagnato e l'area rimane quasi uguale. IP moto diventa non monodimensionale e il raggio idraulico diminuisce di colpo.

⇒ le considerazioni di sezioni aperte valgono solo quando la cresta è tranquilla.

IP problema si risolve dividendo in 3 parti la sezione.

Se  $E = E_c$ , a parità di portata, il mio sistema potrà defluire in 2 condizioni:

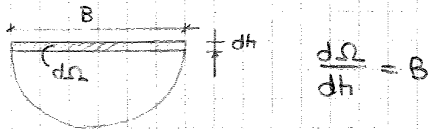
le condizioni al contorno mi faranno scegliere  $h_1$  o  $h_2$ .

Il minimo della funzione  $E(h)$  si calcola come:

$$U = \frac{Q}{\Omega} \Rightarrow E = h + \frac{Q^2}{\Omega^3 g}$$

↳ in questo termine è racchiuso  $h$

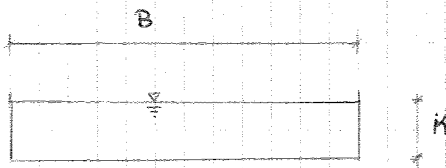
$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g \Omega^3} \cdot \frac{d\Omega}{dh} = 0$$



$$\Rightarrow \frac{dE}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g \Omega^3} B = 0$$

Ho trovato quindi la condizione di criticità:  $\frac{\Omega^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}$

Caso particolare è la sezione rettangolare:



La condizione di criticità è data da:

$$\frac{(KB)^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}$$

$$\frac{K^3 B^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}$$

$$\Rightarrow K^3 = \frac{\alpha}{g} \frac{Q^2}{B^2}$$

↳ portata per unità di larghezza della sezione:  $q = \frac{Q}{B}$

$$\Rightarrow K^3 = \frac{\alpha}{g} q^2 \Rightarrow K = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}$$

↳ questa espressione vale solo per le sezioni rettangolari.

$K$  è l'ALTEZZA CRITICA, e tutto quello che la descrive è detto STATO CRITICO (condizione in cui la corrente viene a trovarsi quando l'altezza assume il valore critico) posso definire quindi una VELOCITÀ CRITICA, cioè la velocità <sup>media</sup>  $V$  di una corrente che sta defluendo dall'altezza critica.

$$U_c = \frac{Q}{\Omega} \Big|_{h=K} \Rightarrow \frac{Q^2}{\Omega^3} = \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{1}{B}$$

Moltiplico entrambi i membri per  $\Omega$ :  $\frac{Q^2}{\Omega^2} = \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{1}{B} \cdot \Omega$

$$\Rightarrow \frac{Q^2}{\Omega^2} = \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{\Omega}{B} \Rightarrow U_c = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \cdot \frac{\Omega}{B}}$$



Tutte le considerazioni appena fatte possono essere riprese osservando i fatti da un altro punto di vista.

Resto  $E = \text{cost.}$ , con quale portata faccio passare certe altezze?

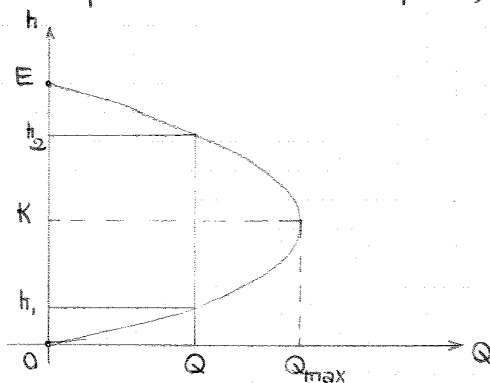
Conviene risolvere l'equazione  $E = h + \frac{\alpha}{2g} \cdot \frac{Q^2}{\Omega^2}$  rispetto a  $Q$ ; si ottiene:

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E-h)}$$

formola che pone in evidenza i 2 fattori costitutivi della portata, cioè l'area  $\Omega$  della sezione liquida e la velocità  $U$  corrispondente all'altezza critica  $E-h$ .

Proviamo a disegnare questa funzione:

si nota che la portata si annulla sia quando  $h=0$ , perché in tal caso si annulla l'area, sia quando  $h=E$ , perché allora si annulla l'altezza critica e quindi la velocità. Variando  $h$  fra i limiti definiti, i valori assunti dalla portata (ovviamente positivi) devono dunque passare per un massimo.



$$h \rightarrow 0 \Rightarrow Q = 0$$

$$h \rightarrow E \Rightarrow Q = 0$$

Ricaviamo per una sezione generica la condizione di massimo:

$$\frac{dQ}{dh} = \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E-h)} \cdot \frac{d\Omega}{dh} - \frac{g \cdot \Omega}{\alpha \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E-h)}} = 0$$

Risolvendo l'equazione e vedo che:  $h = E - \frac{\Omega}{2g}$  CONDIZIONE DI CRITICITÀ

Nei caso di sezione rettangolare:  $K = E - \frac{K}{g}$

Si riconosce che la condizione di criticità si ha proprio in corrispondenza dello stato critico; e si trova quindi che la portata massima compatibile con l'assegnata energia specifica  $E$  si ha proprio quando  $h=K$ .

Ne deriva una seconda definizione di altezza critica: dicesi altezza critica di una corrente (gradualmente variata) di assegnata energia specifica

Ora, dalla formula di Chezy in riferimento alla portata unitaria  $q$ , trova la pendenza critica.

$$q = h_0 K \sqrt{h_0 i_p} \Rightarrow h_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{K^2 i_p}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha q^2}{g} = \frac{q^2}{K^2 i_p} \Rightarrow i_p = i_c = \frac{g}{\alpha K^2} \quad \text{ordine di grandezza di } i_p \text{ nel caso critico}$$

La classificazione diventa:

$$\bullet i_c = \frac{g}{\alpha K^2} \Rightarrow \text{ALVEI CON PENDENZA CRITICA}$$

$$\bullet i_c < \frac{g}{\alpha K^2} \Rightarrow \text{ALVEI A DEBOLE PENDENZA}$$

$$\bullet i_c > \frac{g}{\alpha K^2} \Rightarrow \text{ALVEI A FORTE PENDENZA}$$

La pendenza critica dipende quindi dalla portata, che sta nel termine  $K$ . Valore tipico è  $K=50$ , da cui troviamo come ordine di grandezza del discriminante  $\frac{g}{\alpha K^2} \approx 4\%$ .

La classificazione diventa:

$$i_c < 4\% \Rightarrow \text{ALVEI A DEBOLE PENDENZA}$$

$$i_c > 4\% \Rightarrow \text{ALVEI A FORTE PENDENZA}$$

Siamo quindi in grado di trovare tutte le grandezze.

**CARATTERE CINEMATICO DEI DUE TIPI DI CORRENTE: CELERITÀ PER PICCOLE PERTURBAZIONI**

Lo stato critico delle correnti a pelo libero è stato individuato sulla base di considerazioni energetiche, ma il comportamento fisico dei 2 tipi di corrente è così differente da giustificare in pieno la distinzione.

La differenza sta soprattutto nelle modalità con cui si propagano le perturbazioni di livello: si riconosce preesattamente che la celerità di propagazione delle piccole perturbazioni è superiore alla velocità del movimento delle correnti lente, inferiore invece nelle correnti veloci.

ES: lancio di un sasso in uno stagno  $\rightarrow$  si formano delle onde nel punto di impatto con l'acqua, e con che celerità si muovono queste onde?