NUMERO: 809

DATA: 31/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Marengo

MATERIA: Fisica I

Prof. Scalerandi

① CINEMATICA

① VETTORI, possono essere descritti in 3 modi

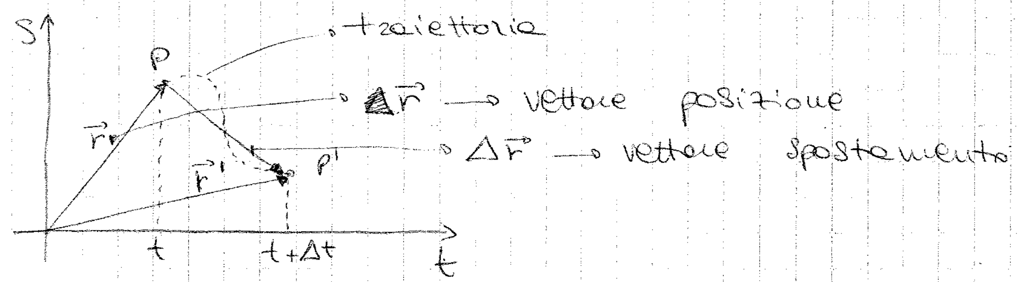
a) CARTESIANE ⇒ componenti lungo gli assi

b) INTRINSECHE ⇒ $\vec{u}_T$, $\vec{u}_N$ (tg e $\perp$ direzione)

c) POLARI ⇒ $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ (direzione radiale e angolare)

② GRANDEZZE ⇒ tempo, $\vec{r}(t)$, $\vec{V}(t)$, $\vec{a}(t)$

① VETTORE POSIZIONE



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

- COORDINATE CARTESIANE ⇒ $\vec{r} = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y$
  - da qui posso descrivere la traiettoria con un sistema

$$\hookrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

- COORDINATE POLARI ⇒ $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$

② VETTORE VELOCITÀ

- DEF ⇒ $\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- COORDINATE CARTESIANE

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y)}{dt} = \left[\begin{array}{l}\text{se SR fisso, allora} \\ u_x \text{ e } u_y \text{ sono cost}\end{array}\right]$$

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\vec{u}_y = V_x\,\vec{u}_x + V_y\,\vec{u}_y$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 83

- COORDINATE INTRINSECHE (NON FISSO!)

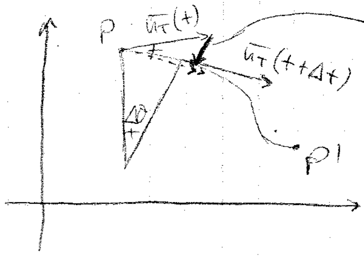
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \vec{V} = V \cdot \vec{u}_T$$

$$\vec{a} = \frac{d(V \cdot \vec{u}_T)}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + V\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$ derivata versore!

$V \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt} \Rightarrow$ ACC. NORMALE

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}_T(t+\Delta t) - \vec{u}_T(t)}{\Delta t}$$

DERIVO IN FORMA GRAFICA



$\vec{U}_{res} = \vec{u}_T(t+\Delta t) - \vec{u}_T(t)$

↳ direzione // Raggio $\vec{u}_N$ (Δ)

↳ modulo ⇒ corda ~ arco = $R \cdot \Delta\theta$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\Delta\theta}{\Delta t}\vec{u}_N$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\frac{\Delta s}{R}}{\Delta t}\vec{u}_N \quad \leftarrow \quad \text{dove } R \cdot \Delta\theta = \Delta s$$

spazio realmente percorso

↳ raggio curvatura traiettoria

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = -\frac{V}{R}\vec{u}_N$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T - \frac{V^2}{R}\vec{u}_N$$

⇒ CASI LIMITE

a) MOTO RETTILINEO
- $R = \infty \Rightarrow \vec{a}_N = 0 \Rightarrow \vec{a} = a_T \vec{u}_T$

b) MOTO CIRCOLARE (con $\|\vec{V}\| = cost$)
- $\vec{a}_T = 0 \Rightarrow \vec{a} = a_N \cdot \vec{u}_N = a_{centripeta}$

c) MOTO CURVILINEO QUALSIASI ($R \neq 0, \infty$)
- se $\|\vec{V}\| = 0 \Rightarrow \vec{a}_N \neq 0$ sempre

MOTO ARMONICO SEMPLICE

- $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ con $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $V(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$
- $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$!

- EQ. DIFFERENZIALE DEL MOTO ARMONICO

  è la cond. necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico

  $\hookrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

- $\int_{x_0}^{x} a(t)\, dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\, dx = \frac{1}{2}\omega^2 (x_0^2 - x^2)$

  $\frac{1}{2}\omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}V_0^2$

  $V^2(x) = V_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$ con $x_0 = 0$ e $V_0 = \omega A$ (riferito al centro)

MOTO CIRCOLARE

- $\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{V}{R}$
- Se m.c.u. $\Rightarrow \vec{a}_T = 0 \Rightarrow \|\vec{a}\| = \|\vec{a}_N\| = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$
- Se non uniforme $\Rightarrow \alpha \neq \cos t$

  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} = \frac{a_T}{R}$

  Se conosco $\alpha \Rightarrow \begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\, dt \\ \vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\, dt \end{cases}$

- Se m.c.u.a $\Rightarrow \alpha = \cos t \Rightarrow a_T = \cos t$

  $\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \\ \vartheta = \vartheta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \end{cases}$

QUANTITÀ DI MOTO

- effetto complessivo di una forza in un Δt finito
  ↳ per calcolarlo sommo le forze che agiscono nel tempo; avendo ∞ valori ⇒ faccio integrale

(impulso) $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt$

TEOREMA DELLA Q.D.M.

$$\vec{J} \overset{def}{=} \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m \cdot \vec{a}\, dt$$

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} m \cdot \frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}} \cancel{dt} \rightarrow \text{posso toglierli con un cambiamento di variabili}$$

$$\vec{J} = m \left[\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)\right]$$

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

$$\left[\text{DEF } \vec{q} = m \cdot \vec{v}\right]$$

$$\vec{J} = \vec{q}_f - \vec{q}_{in} = \Delta\vec{q}$$

QUINDI effetto di una forza nel tempo è di far variare la quantità di moto

OSSERVAZIONI

a) FORMA INFINITESIMA

$$d\vec{J} = \vec{F}\, dt = d\vec{q} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

b) Se m costante

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Se m non è costante

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \text{non vale Newton!}$$

c) SE $\vec{F} = \text{cost} \Rightarrow \vec{J} = \int \vec{F}\, dt = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{q}$ (NB!)

OSSERVAZIONI

a) FORMA INFINITESIMA

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$ se $\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow dW = 0 \Rightarrow W = 0$

b) se $\vec{F} = cost$

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F \cdot dr \cdot \cos\theta = F \int dr \cos\theta\,(t)$

è funzione del tempo!

Se traiettoria rettilinea

↳ $d\vec{r}$ ha dir cost. $\Rightarrow \theta = cost$

$W = F\cos\theta \int_\Gamma d\vec{r} = F\cos\theta\, \ell$

↳ lung. traiettoria

c) Additività dei lavori

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$

$W = \int \vec{F}_1\, d\vec{r} + \int \vec{F}_2\, d\vec{r} + \dots = W_1 + W_2 + \dots$

d) Caso particolare forze CONSERVATIVE
Lavoro non dipende dalla traiettoria

STATICA

- Condizione equilibrio $\vec{V} = 0 \Leftrightarrow \sum \vec{F} = 0$
- estendo a $\vec{V} = cost$ perchè se cambio il sistema di riferimento ritorno a $\vec{V} = 0$

IMP $\Rightarrow$ distinzione tra forze int e esterne per il principio az-reaz

[DATA FORZA TROVARE POSIZIONE
- uso accelerazione
- energie
- q. d. m.]

5) ELASTICA

- sorgente molla (molla ideale ha massa = 0)
- direzione // asse della molla, verso di richiamo
- modulo dipende dalla posizione (quindi implicitamente del tempo
- $F_{el} = -k \cdot \Delta l = m \cdot a$
  $-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \rightarrow \text{MOTO ARMONICO!}$$

6) TENSIONE FUNE

- sorgente fune tesa fra due masse M e m (per essere tesa, se non ci fosse, $V_m > V_M > 0$)
- fune ideale ha massa = 0
- direzione // fune, verso attrattivo
- modulo da calcolare!

ENERGIA POTENZIALE

E_{pot} è funzione della posizione

$E = E(\vec{r}) = E(x, y, z)$

$\Delta E_p \overset{def}{=} -W^{cons!} = E^B - E^A$

a) Definiamo ΔE e non E

- E definita a meno di una costante additiva

$E = f(x, y, z) \qquad E' = f(x, y, z) + k = E + k$

verifico che entrambe soddisfano la def

$\Delta E = -W \rightarrow E^B - E^A = -W$

$(E^{B'} - k) - (E^{A'} - k) = -W$

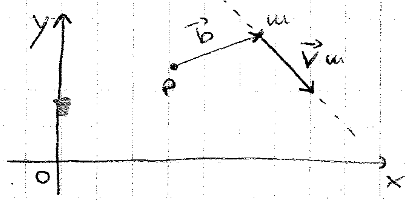
$E^{B'} - E^{A'} = -W$

Quindi c'è ambiguità nella def: per evitare che vada anche bene la k metto un sist. di rif.

↳ fisso un $\vec{r} = \vec{r_0}$ dove $E = 0$
$E(\vec{r_0}) + k = 0 \rightarrow k = -E(\vec{r_0})$

MOMENTO ANGOLARE

- momento = prodotto vettoriale fra braccio e vettore ($\vec{a}$)
- polo = punto rispetto al quale calcolo il momento
- braccio = vettore posizione di $\vec{a}$ rispetto al polo



$$\vec{L} = \vec{b} \wedge m\vec{v} = \vec{b} \wedge \vec{q} \longrightarrow \perp \text{ piano}$$
$$\longrightarrow \text{se } \vec{b} \parallel \vec{q} \Rightarrow \vec{L} = 0$$

Se Polo $\equiv O \Rightarrow \vec{b} \equiv \vec{r}$

a) COORDINATE POLARI ($P \equiv O$)

$$\bar{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \qquad \text{con } \overline{v_\theta} = r \frac{d\theta}{dr} \bar{\mu}_\theta$$

$$\bar{L} = \bar{r} \wedge m(\bar{v}_r + \bar{v}_\theta)$$
$$= \underbrace{\bar{r} \wedge m\bar{v}_r}_{\parallel \Rightarrow 0} + \underbrace{\bar{r} \wedge m\bar{v}_\theta}_{\perp}$$

$$|\bar{L}| = m r v_\theta = m r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

b) FORMA INFINITESIMA

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \wedge m\bar{v} + \bar{r} \wedge \frac{d(m\bar{v})}{dt}$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{v} \wedge m\bar{v} + \bar{r} \wedge \frac{d\bar{q}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \underbrace{\bar{v} \wedge \bar{q}}_{\parallel \Rightarrow 0} + \bar{r} \wedge \bar{F}$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \wedge \bar{F} = \bar{M} \quad \text{(momento della forza)}$$

c) TEOREMA DELLA CONS. DEL MOM. ANGOLARE

Se $\bar{M} = 0 \Rightarrow \bar{L} = \text{cost}$

$\bar{M} = 0$ se $\longrightarrow \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{F}$ applicata nel polo

$\longrightarrow \bar{F} = 0$

$\longrightarrow \bar{F} \parallel \bar{b}$

MOTI RELATIVI

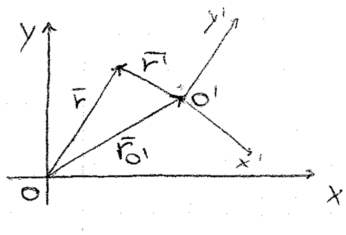
a) DEFINIZIONI

moti rel. = analizzo come cambiano le grandezze cinematiche se cambio sist. rif.

Per definire $(SR)'$ ho bisogno
- del vettore $\bar{r}_{o'}$ che descrive la posizione di o' in funz. tempo
- di θ, angolo tra $\bar{u}_x$ e $\bar{u}_x'$, funzione di t (mi dà rotazione nel tempo)

b) FORMULE

1) Come cambia vettore $\bar{r}$

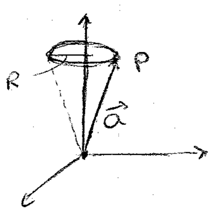


$$\bar{r} = \bar{r}_{o'} + \bar{r}'$$

$$\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$$

$$\bar{r}' = x'\bar{u}_x' + y'\bar{u}_y' + z'\bar{u}_z'$$

2) Derivata di un vettore che ruota (con origine fissa)



Se derivo $\vec{a}$ rispetto al tempo ottengo

$$\vec{V} = \frac{d\vec{a}}{dt} \rightarrow \text{m. circolare} \quad \bar{V} = \bar{\omega} \wedge \bar{R}$$

se $|\vec{a}| = \text{cost.}$! allora:

$$\bar{\omega} \wedge \bar{R} = \frac{d\bar{a}}{dt} \longrightarrow \left|\frac{d\bar{a}}{dt}\right| = \omega \cdot R$$

$$|\bar{\omega} \cdot \bar{a}| = \omega \cdot a \cdot \operatorname{sen}\theta = \omega R$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{a}$$

d) Come trasformo acc da SR a (SR)'

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{v}_{O'} + \bar{v}' + \bar{\omega} \wedge \bar{r}')}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{v}'}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \bar{r}' + \bar{\omega} \wedge \frac{d\bar{r}'}{dt}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_{O'} + \bar{a}' + \bar{\omega} \wedge \bar{v}' + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \bar{r}' + \bar{\omega} \wedge \frac{d\bar{r}'}{dt}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_{O'} + \bar{a}' + \underbrace{\bar{\omega} \wedge \bar{\omega} \wedge \bar{r}'}_{\text{acc. centrifuga}} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \bar{r}' + 2\bar{\omega} \wedge \bar{v}'$$

$$\bar{a}_T = \bar{a}_{O'} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge r' + \bar{\omega} \wedge \bar{\omega} \wedge \bar{r}' \Rightarrow \text{acc. di TRASCINAMENTO}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \wedge \bar{v}' \rightarrow \text{acc di CORIOLIS}$$

e) ESEMPI

a) $\bar{\omega} = 0 \rightarrow$ assi costanti

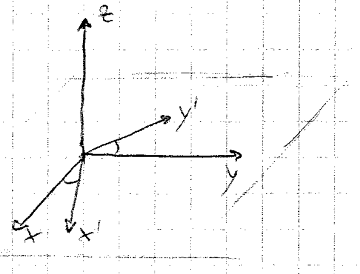
1) $\bar{v}_{O'} = \text{cost} \rightarrow$ m.r.u. di O'
$\rightarrow \bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{O'}$
$\bar{a} = \bar{a}'$

2) $\bar{v}_{O'}(t) \neq \text{cost} \rightarrow \bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{O'}$
$\rightarrow \bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{O'}$

b) $\bar{r}_{O'} = 0 \rightarrow O \equiv O'$ assi ruotano con $\bar{\omega} = \text{cost}$

1) Rotazione in 3D $\rightarrow \bar{v} = \bar{v}' + \cancel{\bar{v}_{O'}} + \bar{\omega} \wedge \bar{r}'$
$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{\omega} \wedge \bar{\omega} \wedge \bar{r}' + 2\bar{\omega} \wedge \bar{v}'$

2) Moto nel piano x,y $\rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} \bar{\omega} \parallel \text{asse } z \\ \bar{v}' \in Oxy \\ \bar{r}' \in Oxy \end{array}\right\} \bar{\omega} \perp \bar{v}', \bar{r}'$$



Oxy

$\rightarrow \bar{a}_{centrifuga} = \bar{\omega} \wedge \bar{\omega} \wedge \bar{r}'$

$|\bar{a}_c| = \omega^2 r' \equiv a_{centr.}$ in modulo ma verso opposto!

f) FORZE APPARENTI

$SR \rightarrow (SR)'$
$\bar{a} \rightarrow \bar{a}' + \bar{a} \Rightarrow$ Non vale più Newton!

La forza è una grandezza fisica che dipende dal sistema di riferimento

ESEMPIO GIOSTRA

① Giostra ferma con una molla sopra, definisco la sua lung. a riposo l_0

② Giostra in moto con $\bar{\omega} = cost$ e $l > l_0$

Come spiegano il fenomeno due osservatori

① Non solidale alla ~~Terra~~ Giostra

$F_{el} = -k\Delta l$

dal punto di vista cinematico, m si muove di moto circolare uniforme

$\hookrightarrow \bar{a}_c = -\omega^2 R \Rightarrow F_{el} = -m \cdot \omega^2 R$

② Solidale giostra

$F_{el} = -k\Delta l$

Dal punto di vista cinematico la molla è ferma! $\Rightarrow \bar{a}' = 0 \rightarrow F_{el} = 0$ NO!

Crea un "escamotage" $\Rightarrow$ FORZA APPARENTE!

$\bar{F}_{el} + \bar{F}_{opp} = m \cdot \bar{a}' = 0$

$F_{opp} = -F_{el} = -m\omega^2 R \rightarrow$ la chiama f. centrifuga

ESEMPIO ASCENSORE $\rightarrow$ LO SAI

CONCLUSIONE

Preso SR fisso (stelle fisse)

a) $\bar{a} = \bar{a}' \rightarrow (SR)'$ INERZIALE $\rightarrow$ è uno solo!
$\rightarrow O'$ muove m.r.u rispetto O

b) $\bar{a}' \neq \bar{a} \rightarrow$ non INERZIALE $\rightarrow \bar{F}' = \bar{F} + \bar{F}_{opp} = m \cdot \bar{a}'$
$F_{opp} = m\bar{a}' - F = m(\bar{a}' - \bar{a})$
$\hookrightarrow$ vale indip da SR

1° EQ CARDINALE

$\vec{F}_{TOT} = \bar{R}^{est} = \Sigma f_i^{est}$

$\bar{F} = \Sigma f_i = \Sigma m_i a_i = \frac{M}{M} \Sigma m_i a_i = M \bar{a}_{CM}$

- $\bar{F}_{TOT} = \bar{R}^{est} = M \cdot \bar{a}_{CM}$
- $\bar{F}_{TOT} = \Sigma \bar{F}_i = \Sigma \frac{d\bar{q}_i}{dt} = \frac{d(\Sigma \bar{q}_i)}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt}$

TEOREMA CONS. Q.D.M

Hp $\bar{F} = \bar{R}^{est} = \frac{d\bar{Q}}{dt}$

Se $\bar{R}^{est} = cost \Rightarrow \vec{Q} = cost \not\Rightarrow \vec{q}_i = cost$!

8) Energia cinetica

- punto $k_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2$
- sistema $k = \Sigma k_i$
- CM $K_{CM} = \frac{1}{2} M \bar{V}_{CM} = \frac{1}{2} M \left(\frac{\Sigma m_i V_i}{M}\right)^2$

$= \frac{1}{2M} (\Sigma m_i V_i)^2$

$= \frac{1}{2M} (m_1 V_1 + ... + m_n V_n)^2 \neq K_{SIST}$!!

9) Lavoro

- massa $m_i \rightarrow dW_i = \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i$
- sistema $dW_{TOT} = \Sigma dW_i = \Sigma \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i =$

$= \Sigma \bar{F}^{est} \cdot d\bar{r}_i + \Sigma \bar{F}_{int} \cdot d\bar{r}_i =$

$= dW^{est} + ?$

legato spostamenti assoluti particelle $\rightarrow \sum_i \sum_j \bar{F}^{int} \cdot d\bar{r}_i \neq 0$!!

$dW_{ij} = \bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_{ij} \rightarrow$ spostamento relativo di j rispetto a i $\neq 0$

OSSERVAZIONI

① Tutto si semplifica se

$$\left.\begin{array}{l} - \text{Polo fisso} \Rightarrow \bar V_P = 0 \\ - P \equiv CM \Rightarrow \bar V_P = \bar V_{CM} \\ - \bar V_P \parallel \bar V_{CM} \end{array}\right\} \Rightarrow -\bar V_P \wedge \bar Q = 0 \Rightarrow \frac{d\bar L}{dt} = \bar M^{est}$$

② Se $\bar M^{est} = 0 \Rightarrow L = cost$

MOM ANGOLARE e MOM DELLE FORZE

① Dipendenza dal SR

a) $\bar L = \sum \bar L_i = \sum \bar b_i \wedge m_i \bar V_i$

in assenza di rotazione il braccio non cambia perché è distanza fra due punti!

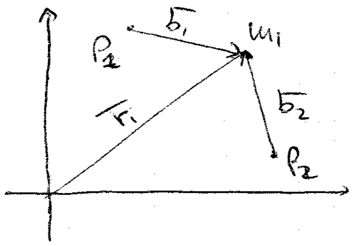
↳ però $\bar V \neq \bar V' \Rightarrow \bar L \neq \bar L'$

b) $\bar M = \sum \bar b_i \wedge \bar F_i$

La forza cambia in (SR)' se e solo se il sist non è inerziale

↳ se non inerziale $\Rightarrow \bar F_i' = \bar F + \bar F_{app} \neq \bar F$

② Dipendono dal polo?



$\bar V_i$ non cambia perché dipende da SR

Braccio cambia

a) $\left.\begin{array}{l} \bar L_1 = \sum b_1 \wedge m_i \bar V_i \\ \bar L_2 = \sum b_2 \wedge m_i \bar V_i \end{array}\right) \neq !$

b) $\bar M \rightarrow \bar F_i$ non dipende dal polo

$\left.\begin{array}{l} \bar M_1 = \sum \bar b_1 \wedge \bar F_i \\ M_2 = \sum \bar b_2 \wedge \bar F_i \end{array}\right) \neq !$

$\overline{R}' = \overline{R}' + \overline{F}_{opp} \rightarrow m \cdot \overline{a}_{trascinamento}$

$\overline{R}'^{est} = \overline{R}^{est} + M \cdot \overline{a}_{CM}$

$\overline{F}_i = \overline{F}_i' + m_i \cdot \overline{a}_{CM}$

b) MOM. ANGOLARE

Polo $\equiv CM \equiv O' \Rightarrow \overline{b}_i \equiv \overline{r}_i'$

$\overline{L}' = \sum \overline{L}_i = \sum \overline{r}_i' \wedge m_i \overline{V}_i$ con $\overline{V}_i = \overline{V}_{CM} + \overline{V}_i'$

$\overline{L}' = \sum \overline{r}_i' \wedge m_i (\overline{V}_{CM} + \overline{V}_i')$

$\overline{L}' = \underset{\substack{\| \\ 0 \Rightarrow CM \equiv O'}}{(\sum m_i \overline{r}_i')} \wedge \overline{V}_{CM} + \sum \overline{r}_i' \wedge \underbrace{m_i \overline{V}_i'}_{QDM \text{ in } (SR)'}$

$\overline{L}_{CM} = \sum \overline{r}' \wedge m_i \overline{V}_i' = L'_{CM}$!!

$\downarrow$

$\overline{M}_{CM} = \overline{M}'_{CM}$

CONSEGUENZA

Preso $\forall$ SR inerziale $\Rightarrow \overline{L}_{SR} = \overline{L}'_{CM}$

$\hookrightarrow \overline{L}_{SR}$ non dipende dal sistema, quindi se $P \equiv CM$ allora $\overline{L}$ è uguale $\forall$ SR inerziale

I TEOREMA KONIG

$\overline{L} = \sum \overline{r}_i \wedge m_i \overline{V}_i = \sum (\overline{r}_i' + \overline{r}_{CM}) \wedge m_i (\overline{V}_i' + \overline{V}_{CM})$

$= \sum \overline{r}_i' \wedge m_i \overline{V}_i' + \sum \overline{r}_i' \wedge m_i \overline{V}_{CM} + \sum \overline{r}_{CM} \wedge m_i \overline{V}_i' + \sum \overline{r}_{CM} \wedge m_i \overline{V}_{CM}$

$= \overline{L}' + \cancel{(\sum m_i \overline{r}_i')} \wedge V_{CM} + \overline{r}_{CM} \wedge \cancel{(\sum m_i \overline{V}_i')} + \overline{L}_{CM}$

$\overline{L} = \overline{L}' + \overline{L}_{CM}$

$\overline{L}$: $\hookrightarrow$ SR polo $\equiv O$

$\overline{L}'$: $\hookrightarrow (SR)'$ polo $\equiv CM$

$\overline{L}_{CM}$: $\rightarrow$ SR CM polo $\equiv O$

Il momento angolare del sistema si può scrivere, nel SR inerziale, come somma del mom ang dovuto al moto del CM e di quello del sistema rispetto al CM

GRAVITAZIONE e ELETTROSTATICA

$$F_g = -\gamma \frac{mM}{d^2} \bar{\mu}_r$$

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \bar{\mu}_r$$

Le studio insieme perché sono simili

↳ ~~forze~~ sono forze centrali e conservative e L = cost

Problema costanti

$\gamma \rightarrow$ non dipende dalla sost. che riempie spazio

$\varepsilon \rightarrow$ cost. dielettrica nel mezzo $= \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

DEFINIZIONI

CAMPO → descrivo il sistema indipendentemente dalla sonda

$$\rightarrow \vec{C} = \frac{\vec{F}}{b} \text{ (sonda)}$$

$\rightarrow \bar{E}$ è un vett $\parallel \bar{F}$ e direzione di E sono fasci di rette con centro M o q

EN. POT.

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{F} = -\vec{\nabla}\mu \\ dU = -dW \end{cases} \longrightarrow U_g = -\gamma \frac{Mm}{r}$$

POTENZIALE → solo sorgente

$$\rightarrow V_g = -\gamma \frac{M}{r}$$

FLUSSO ATTRAVERSO SUP Σ

$$\rightarrow \Phi = \int_\Sigma \underbrace{\bar{E} \cdot d\bar{\Sigma}}_{\text{scalare}} \quad \text{dove} \quad d\vec{\Sigma} = \underbrace{\bar{n}}_{\perp \text{ a } d\Sigma} \cdot d\Sigma$$

→ flusso max se $\bar{E} \parallel \bar{n}$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Il campo generato da più masse è la somma dei campi generati dalle singole masse

Se ho una massa con un certo volume

$\hookrightarrow \vec{F} = \int$ delle forze generate da $dM = \int_V -\gamma \frac{m}{r^2}\, dM\, \bar{\mu}_r$

TEOREMA DI GAUSS CON PIÙ MASSE

1) DISCRETA

$\phi = \sum \phi_i$ però $\begin{cases} \phi_i = 0 & \text{se } M_i \notin \text{Volume} \\ \phi_i = 4\pi\gamma M_i & \text{se } M_i \in \text{Volume} \end{cases}$

$\phi = \sum 4\pi\gamma M_i^{int} = 4\pi\gamma \sum M_i^{int}$

2) CONTINUA

$\phi = \int_V d\phi$ dove $d\phi = 0$ se $dM \notin \Sigma$

$\phi = \int_{V'} d\phi$ dove V' è porzione di vol interno a Σ

$\phi = \int_{V'} 4\pi\gamma\, dM = 4\pi\gamma \int_{V'} dM = 4\pi\gamma M^{int}$

ESEMPI

a) Campo gravitazionale di una massa M sferica di raggio R

[densità $\rho = \frac{dM}{dV} \to$ se $\rho = \text{cost} \Rightarrow M = \rho \cdot V$]

con Σ simmetrica (la rot. non cambia nulla), $\bar{E}_g \parallel \bar{n}$

$$\begin{cases} \phi \overset{DEF}{=} \int_\Sigma d\Sigma\, \bar{E}_G \cdot \bar{n} = \vec{E}_g \int_\Sigma d\Sigma = E_g 4\pi r^2 \\ \phi \overset{GAUSS}{=} 4\pi\gamma M^{int} = 4\pi\gamma M \end{cases}$$

$\vec{E}_g 4\pi r^2 = 4\pi\gamma M$

$\vec{E}_g = \gamma \frac{M}{r^2} \longrightarrow$ campo gravitazionale puntiforme

CAMPO GRAVITAZIONALE

$M \quad \circ\xrightarrow[-\overline{F_g}]{} \qquad \xleftarrow[\overline{F_g}]{}\circ \quad m$

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F_g} = -\gamma \frac{M m}{r^2} \overline{\mu}_r$$

↳ massa inerziale — massa gravitazionale

SONO LA STESSA COSA?

Fisicamente sono due cose diverse (una resistente al moto, l'altra sorgente di forze) però si trova sperimentalmente che sono la stessa cosa!

(1) CONCETTO MASSA RIDOTTA

moto di $m \Rightarrow -\gamma \frac{M m}{r^2} \overline{\mu}_r = m \cdot \overline{a}_m = \overline{F_g}$

SR inerziale anche M si muove

↳ $-\overline{F_g} = M \cdot \overline{a}_M \longrightarrow$ se tengo M fissa ho un SR' NON inerziale

Studio moto relativo M e m

$$\overline{a}_r = \overline{a}_m - \overline{a}_M = \frac{\overline{F_g}}{m} + \frac{\overline{F_g}}{M}$$

$$\overline{a}_r = \overline{F_g}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow \overline{F_g} = \mu \cdot \overline{a}_r$$

↳ massa ridotta tiene conto F_{opp}!!

$SR \rightarrow \overline{F_g} = m \cdot \overline{a}_m$

$SR' \rightarrow \overline{F_g} + F_{opp} = m \cdot \overline{a}_m' \longrightarrow \overline{F_g} = \mu \cdot \overline{a}_r$

(2) CONSERVATIVA $\Rightarrow E_{mec} = cost$

$K = \frac{1}{2} m V^2 \qquad U = -\gamma \frac{M m}{r}$

$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \longrightarrow$ in coord cartesiane

$V = V_r \overline{u}_r + V_\theta \overline{u}_\theta \longrightarrow$ in coord polari

↳ $V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

3) TRAIETTORIA

Formule utili $\longrightarrow$ $\bar{a} = \underbrace{\bar{a}_r}_{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} + \bar{a}_\theta$

$$\longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$$

Come derivo rispetto al tempo?

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right]$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L}{\mu}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{L}{\mu r^2} = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{a}_r = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^3}$$

↳ lo scopo era esprimere a
↳ in funzione L e r per togliere tempo!

Ora uso $r = f(\theta)$ per esprimere traiettoria

$\bar{F}_g = \mu\,\bar{a}_{rel} \longrightarrow$ C.I. $t_0 = 0 \rightarrow r = r_0 \quad \theta = \theta_0$
$\longrightarrow L$

$$-\gamma\frac{Mm}{r^2}\bar{\mu}_r = \mu\,\bar{a}_r\,\bar{\mu}_r + \mu\,\bar{a}_\theta\,\bar{\mu}_\theta$$

$\bar{F}_\theta = 0 \Rightarrow \bar{a}_\theta = 0$

Dunque $\bar{\mu}_r = D$ $\quad -\gamma\frac{Mm}{r^2} = -\mu\left[\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right]$

$$-\gamma\frac{Mm}{r^2} = -\frac{L^2}{\mu r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right) \longrightarrow \text{pongo } \frac{1}{r} = y$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

2) DEFINIZIONE

Insieme continuo di punti che mantengono una distanza fissa tra loro

↳ $M_{tot} = \int_{Vol} dm$ → somma le ∞ masse infinitesime

CONTINUANO A VALERE LE EQ DEI SIST. DI PUNTI

$\overline{R}^{est} = M \cdot \overline{a}_{CM} = \frac{d\overline{Q}}{dt} \longrightarrow \begin{cases} \overline{Q} = M \cdot \overline{V}_{CM} \\ \overline{Q} = \sum \overline{q}_i \end{cases}$

$\overline{M}^{est} = \frac{d\overline{L}}{dt}$

$\overline{L} \neq \overline{L}_{CM} \longrightarrow \overline{L} = \overline{L}_{CM} + \overline{L}'$

PUNTI A DISTANZA FISSA!

Quindi mentre nel sist. di punti $\overline{Q}$, $\overline{L}$ erano proprietà globali del sist che non davano info sulle particelle → nel C.R. noti $\overline{Q}$ e $\overline{L}$ trovo V_{CM} e anche V_{dm}

Nel C.R. $\overline{L}$ non è solo $\sum \overline{L}_i$, ma anche $I\overline{\omega}$!

GRADI DI LIBERTÀ

- incognite necessarie a rappresentare la posizione delle particelle

1- punto materiale → $P(x,y,z)$ DF = 3

2- sist N particelle → $3 \cdot N$ = DF

3 - corpo rigido → 1° particella DF = 3
2° particella so che sta sulla sfera di raggio noto ⇒ DF = 2
3° particella è ∩ 2 sfere ⇒ DF = 1

→ in tutto DF = 6

3) ROTO - TRASLAZIONE $DF = 6$

- combinazione di rotazione e traslazione (quindi γ funzione del tempo $\gamma(t)$)
- Velocità: $\bar{V} = \bar{V}_{TR} + \bar{V}_{TANG}$

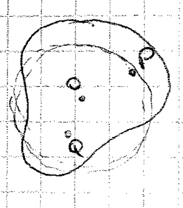
$$\bar{V}_{CM} = \bar{V}_{TR} + \bar{\omega} \wedge \bar{R}_{CM} \quad (\text{se } CM \notin \gamma)$$

$\bar{\omega} \not\Rightarrow$ conoscere $\bar{V}_{CM} \Rightarrow DF = 6!$

- Ho bisogno di 6 EQ

$$\underbrace{\bar{R} = \frac{d\bar{Q}}{dt}}_{\text{descrive } \bar{V}_{CM}} \qquad \underbrace{\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt}}_{\text{descrive } \bar{\omega}}$$

5) COME SCELGO ASSE γ? SE CAMBIO γ CAMBIANO $\bar{\omega}$ e $\bar{V}_{TR}$?



scelgo γ per O $\perp$ al foglio

$$\bar{V}_P = \bar{V}_{TR} + \bar{\omega} \wedge \bar{R}_P \equiv \overline{OP}$$

$$\bar{V}_Q = \bar{V}_{TR} + \bar{\omega} \wedge \bar{R}_Q \equiv \overline{OQ}$$

$\bar{V}_{TR} \equiv$ con V di un punto che non ruota $\to O$
infatti $\bar{V}_O = \bar{V}_{TR} + \bar{\omega} \wedge 0 = \bar{V}_{TR}$

$$\bar{V}_P - \bar{V}_Q = \bar{\omega} \wedge (\overline{OP} - \overline{OQ}) = \bar{\omega} \wedge \overline{QP}$$

$$\bar{V}_P = \underbrace{\bar{V}_Q}_{V'_{TR}} + \bar{\omega} \wedge \underbrace{\overline{QP}}$$

quindi asse γ' per Q!

QUINDI se prendo γ' per Q avrò

$\bar{V}_Q = \bar{V}'_{TR}$ e $\bar{\omega}' = \bar{\omega} \Rightarrow \bar{\omega}$ non cambia!

SCELTA DI γ → per un punto fisso
→ per CM
→ se $CM \equiv P \Rightarrow L$ indip da SR
$\Rightarrow M^{est} = \frac{dL}{dt}$
$\Rightarrow L = L' + \cancel{L_{CM}}$

di solito è $\bar{M}^{est} = \frac{d\bar{L}}{dt} - \bar{V}_{polo} \wedge \bar{Q}$

d) MOMENTO DELLA FORZA

- se $\bar{L}$ ha precessione $\Rightarrow \bar{L}$ cambia direzione e $\bar{M} \neq 0$ sempre
- NO precessione $\Rightarrow \bar{L} = I\bar{\omega}$ $(\bar{L} \parallel \bar{\omega})$

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} = I\bar{\alpha}$$

- $\bar{M} \neq 0$ $\begin{cases} \bar{L} \text{ direzione fissa, cambia solo modulo} \\ \bar{L} \text{ mod fisso cambia diret (cambio } \delta) \end{cases}$
- $\bar{M} = 0 \Rightarrow L$ si conserva $\bar{L}_{in} = \bar{L}_{fin}$

e) ENERGIA

$$k = \int_V dk = \int_V \frac{1}{2} dm\, V_{dm}^2 \quad \text{con} \quad \bar{V}_{dm} = \bar{V}_{TR} + \bar{\omega} \wedge \bar{R}$$

$$k = \int_V \frac{1}{2} dm\, V_{TR}^2 + \frac{1}{2}\int_V dm\, \omega^2 R^2 \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \omega = cost \\ V_{TR} = cost \end{matrix}$$

$$K = \frac{1}{2} V_{TR}^2 \underbrace{\int_V dm}_{M} + \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\int_V R^2\, dm}_{I}$$

$$k = \underbrace{\frac{1}{2} M V_{TR}^2}_{k_{trasl}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \omega^2}_{k_{rot}}$$

f) LAVORO

$$\Delta k = W \longrightarrow dk = dW$$

$$dW = \frac{1}{2} M\, 2\bar{V}_{TR}\, d\bar{V}_{TR} + \frac{1}{2} I\, 2\bar{\omega}\, d\omega$$

$$dW = M \underbrace{\frac{\bar{V}_{TR}}{dt}}_{a_{TR}} \underbrace{dV_{TR}\, dt}_{dr} + I \underbrace{\frac{d\bar{\omega}}{dt}}_{\alpha} \cdot \underbrace{\bar{\omega}\, dt}_{d\theta}$$

$$dW = M\bar{a}_{TR}\, d\bar{r} + I\bar{\alpha}\, d\bar{\theta}$$

$$dW = \underbrace{\bar{R} \cdot d\bar{r}}_{\text{Lavoro ris forze esterne}} + \underbrace{\bar{M} \cdot d\bar{\theta}}_{\text{Lavoro momenti}}$$

LEGAME CON TEOREMA KONIG

$\bar{L} = \bar{L}' + \bar{L}_{CM}$

$\bar{L}_{\gamma} = \bar{L}'_{\gamma' \equiv CM} + \bar{b} \wedge \bar{q}$

↳ distanza CM - polo

$\bar{L}_{\gamma} = L'_{\gamma' \equiv CM} + \bar{b} \wedge m \bar{V}_{CM}$

CM fa moto circolare $\Rightarrow V_{CM} = \bar{b} \wedge \bar{\omega}$

! $I_{\gamma}\omega = I_{\gamma'}\omega + md^2\omega$

$I_{\gamma} = I_{\gamma'} + md^2 \rightarrow$ KONIG = STEINER (per pura rotazione) !

CORPO RIGIDO
- STATICA, URTI, ROTOLAMENTO

STATICA

- non trasla $\Rightarrow \sum \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{a}_{CM} = 0$
- non ruota $\Rightarrow \sum \bar{M} = 0 \Rightarrow \bar{\alpha} = 0$

- moto nel piano con γ direz. cost $\left.\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{array}\right\}$ 3 eq per risolvere problemi

- VINCOLI $\rightarrow$ generano una normale
  - $\rightarrow \bar{M}_N$ dipende dal punto di applicazione
  - $\rightarrow$ hanno direzioni arbitrarie

URTI

a) Q.D.M = p.to materiale $\Rightarrow$ se $\bar{V} = 0$ $q_{tot} = cost$; se $\bar{V} \neq 0$ $F_{media} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

b) MOM. ANG $\Rightarrow$ se polo $\equiv$ vincolo $\Rightarrow \bar{M}_{vincoli} = 0 \rightarrow \bar{L} = cost$

c) CASI PARTICOLARI $\rightarrow$ urto elastico $\Rightarrow K_{TOT} = cost$
  - $\rightarrow$ urto compl anelastico $\Rightarrow V_{f_1} = V_{f_2}$

TERMODINAMICA

studia un insieme di N particelle racchiuse in un volume con delle pareti e gli scambi di energia fra le particelle e con l'ambiente

↳ cosa attraversa pareti?
a) massa → sist. aperto
b) Q e W → sist non isolato

sistema isolato → $\Delta m = 0$ $\Delta E = 0$
sistema adiabatico → scambio lavoro, non calore

PROPRIETÀ PARTICELLE

1) livello microscopico ⇒ m_i, $\overline{V_i}$
2) macroscopico ⇒ 3 variabili : P, V, T
3) approccio statistico ⇒ teoria cinetica

CLASSIFICAZIONE VARIABILI

1) INTENSIVE → valori cambiano in ≠ punti ∈ V
→ NON si sommano
→ P e T
2) ESTENSIVE → sono globali, si sommano
→ V, moli

STATO TERMODINAMICO

- insieme dei valori delle variabili termodinamiche in un certo istante di tempo t
- $S = \{P, V, T, n\}$ in $t = t_0$
- gas perfetto? sistema chiuso, aperto, adiabatico?

EQUILIBRIO TERMODINAMICO

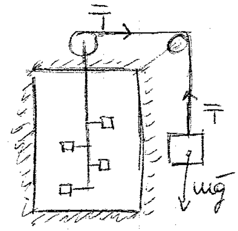
- P, V, t cost. nel tempo se non intervengo
- eq. interno → tutti punti stesso stato
- eq ambiente → meccanico (pareti rigide o P=)
→ termico (isolato T=)
→ chimico (non avvengono reazioni)

EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI

- vale se il sistema è in equilibrio!
- $PV = nRT$ $R = 8,31 \frac{J}{K \cdot mol}$

ESPERIMENTO DI JOULE

- pareti adiabatiche
- massa H_2O



mentre m scende genera un momento $\bar{M}$ che fa girare il mulinello

↳ ci sono attriti che vanno quantificati

$$\bar{M} = TR - \bar{M}_f$$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 + mgh + W^{NC} = \frac{1}{2} m V_2^2 \quad (\text{se } \bar{V} = cost)$$

$W^{NC} = -mgh \longrightarrow$ scalda acqua

si vede che $W \propto T \Rightarrow W = -k\Delta T$

Definisco l'energia interna ΔU perchè il legame ΔT, W non dipende dal tipo di trasformazione

↳ $\Delta U = -W \Rightarrow$ $W>0$ se compiuto dal sistema
$W<0$ se subito

CALORE

Se immergo un corpo caldo $\Rightarrow T\uparrow$, $U\uparrow$, $\underline{W=0}$

↳ $\begin{cases} \Delta U = -W \\ \Delta U = Q \end{cases} \longrightarrow Q = -W$

$Q>0 \rightarrow$ assorbito

TRASFORMAZIONI PARTICOLARI

1) ISOCORA $\Rightarrow V = cost \Rightarrow dW = 0$
2) ISOBARA $\Rightarrow P = cost$
3) ISOTERMA $\Rightarrow T = cost \Rightarrow dU = 0$
4) ADIABATICA $\Rightarrow dQ = 0 \Rightarrow Q = 0$

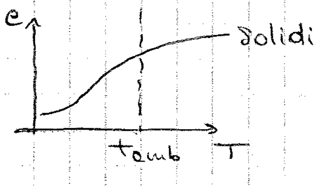
CALORE

- Calore è tutto ciò che non è lavoro

a) Q legato a ΔT

$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ (trovata sperimentalmente)

c → calore specifico
→ è funzione temperatura! ⟹



→ nei gas dipende anche dal tipo di trasformazione → introduco Q infinitesimo

↳ uso calore specifico molare ⟹ $dQ = n \cdot c(T)\, dT$

$Q = \int_f n\, C(T)\, dT$

1) gas perfetto con trasf isocora

$$\left. \begin{array}{ll} c_V \to \frac{3}{2}R & \text{monoat} \\ \quad\to \frac{5}{2}R & \text{biat} \end{array} \right\} Q = m \cdot c_V\, \Delta T$$

2) gas perfetto con trasf isobara

$$\left. \begin{array}{ll} c_p \to \frac{5}{2}R & \text{monoat} \\ \quad\to \frac{7}{2}R & \text{biat} \end{array} \right\} Q = m \cdot c_p\, \Delta T$$

b) Q in assenza ΔT

CALORE LATENTE (nelle trasf. di fase)

Durante la transizione $T = \text{cost} = T_{critica}$, quindi $\Delta T = 0$ però

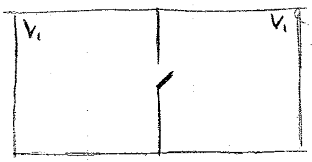
$Q = m \cdot \lambda$

CONCLUSIONE

$Q = 0 \Longleftrightarrow$ ADIABATICA

DEFINISCO ENERGIA INTERNA

ESPERIMENTO → gas espande nel vuoto adiabaticam.



all' inizio non c'è equilibrio perchè $P_{ext} \neq P_{sist}$ → irreversibile

sperimentalmente vedo che $T = cost$

$$\left.\begin{array}{l} Q = 0 \text{ perchè adiabatica} \\ W = \int \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{P_{ext}}\, dV = 0 \end{array}\right\} \Delta U = Q - W = 0$$

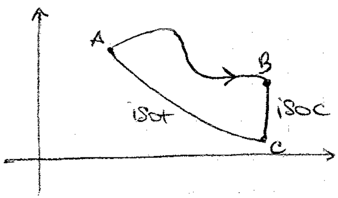
INTERPRETAZIONE

1) Volume cambia, $U = cost$ ⇒ U non dipende da V

2) U non dipende da P

3) U dipende da T ⇒ $T = cost$ ⇒ $U = cost$

CALCOLO ΔU



$$\begin{cases} \text{isocora} \Rightarrow W = 0 \quad Q_{CB} = c_V\, m\, \Delta T \\ \text{isoterma} \Rightarrow \Delta U = 0 \end{cases}$$

$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{ACB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB} = Q_{CB} - \cancel{W_{CB}} = Q_{CB}$$

$\Delta U_{AB} = m\, c_V\, \Delta T$ → VALE SEMPRE!

RELAZIONE DI MAYER

Hp → gas perfetto   Th → $c_p = c_V + R$

DIM (trasf. isobara rev.)

$$\begin{cases} P\,dV = nR\,dT \rightarrow \text{uso I principio} \\ n c_V\, dT = n c_p\, dT - p\, dV \end{cases}$$

$$\cancel{n} c_V\, \cancel{dT} = \cancel{n} c_p\, \cancel{dT} - \cancel{n} R\, \cancel{dT}$$

$$c_V = c_p - R$$

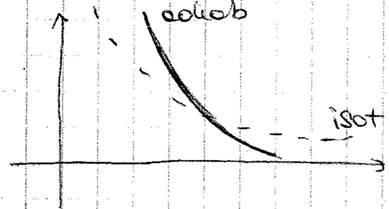
$$c_p = c_V + R \Rightarrow c_p > c_V \Rightarrow \gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1$$

CONSEGUENZE

- $T = \frac{PV}{nR} \Rightarrow PV^{\gamma} = nR \cdot$ costante $= k \Rightarrow P \cdot V^{\gamma} = k$

$P = P_A V_A^{\gamma} V^{-\gamma} \rightarrow$ ho trovato $P = f(V)$

- PV^{γ} è un'iperbole + inclinata di $P \cdot V$



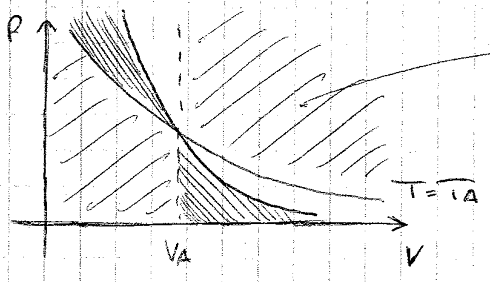
- A parità di $\Delta V > 0 \Rightarrow W_{ADIAB} < W_{ISOT}$
- $\gamma > 1 \Rightarrow \gamma - 1 > 0 \Rightarrow V \uparrow \rightarrow V^{\gamma-1} \uparrow$
  $T \cdot V^{\gamma-1} = cost \rightarrow T \downarrow, P \downarrow$

ADIABATICHE IRREVERSIBILI

$P \cdot V^{\gamma} = cost \rightarrow$ non è + valida

$dQ = 0 \rightarrow dU = -dW$

se $dW > 0 \Rightarrow dV > 0$
$\Rightarrow dU < 0 \Rightarrow dT < 0 \Rightarrow T \downarrow$



non posso finire in queste aree $\rightarrow$ x cons energia

↳ sperimentalmente trovo altre due aree non raggiungibili

la cons. energia non ci consente di dire se una trasf è possibile

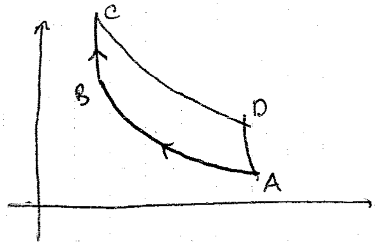
↳ ∃ trasf. che conservano energia ma non avvengono in natura

↳ II PRINCIPIO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 83

CICLO DI CARNOT

- macchina termica che lavora fra due sorgenti a T costante con $T_1 < T_2$
- ciclo REVERSIBILE $\rightarrow$ 2 adiab, 2 isot



senso orario perché $W>0$

Vado su perché $T_2 > T_1$

$Q_{BC} = Q_{DA} = 0$

$Q_{AB} \Rightarrow \Delta U_{AB} = 0$, $W_{AB} < 0$, $Q_{AB} < 0$ ceduto

$Q_{CD} \Rightarrow \Delta U_{CD} = 0$, $W_{CD} > 0$, $Q_{CD} > 0$ assorbito

$$\eta = 1 - \frac{|Q^{CED}|}{Q^{ASS}} = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{CD}}$$

$$\begin{cases} Q_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} < 0 \\ Q_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} > 0 \end{cases} \quad (1)$$

ADIABATICHE REVERSIBILI

$$\left.\begin{array}{l} BC \Rightarrow T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \\ \quad T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \\ DA \Rightarrow T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1} \end{array}\right\} \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Sostituisco nella (1) e trovo

$$\eta = 1 - \frac{|Q^{AB}|}{Q^{CD}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \text{con } T_1 < T_2$$

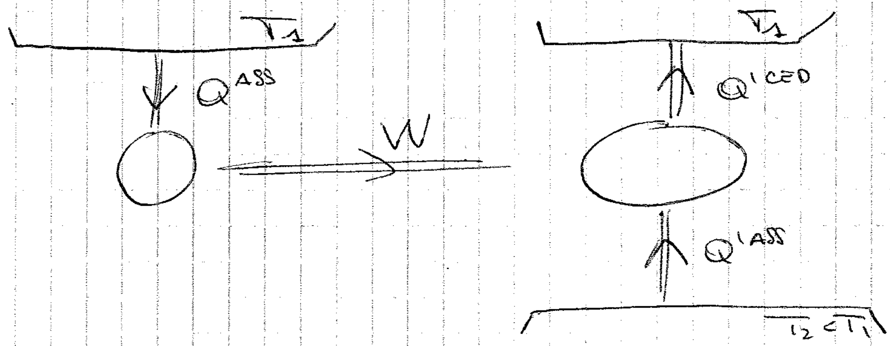
OSSERVAZIONI

- $\forall\ V_C, V_D \Rightarrow \eta$ non cambia
- T in KELVIN
- per ottimizzare rendimento $T_2 \uparrow$

ENUNCIATO DI KELVIN (TEOREMA)

Non esiste un ciclo che produce lavoro scambiando calore con una sola sorgente, deve esistere una sorgente a cui cedo calore

DIM × ASSURDO



Per I PRINCIPIO

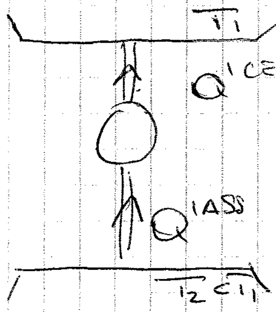
1) $W = Q^{ASS}$
2) $-W = Q'_{ASS} + Q'_{CED}$

$\Rightarrow Q^{ASS} = -Q'^{ASS} - Q'^{CED}$

$Q'^{ASS} = -Q^{ASS} - Q'^{CED}$

$\hookrightarrow > 0$

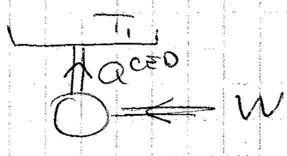
COMPLESSIVAMENTE



$Q'^{CED} + Q^{ASS} = -Q'^{ASS} < 0$

↳ impossibile per CLAUSIUS

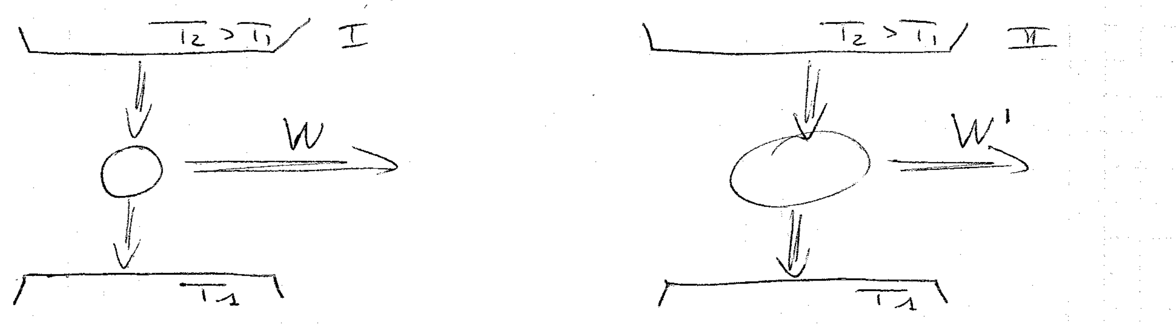
OSS → vale il contrario! ⇒



CONSEGUENZE

Se $W > 0 \Rightarrow |Q^{CED}| > 0 \Rightarrow \eta < 1$ sempre!

DIM $(\eta^{I}_{rev} = \eta^{II}_{rev})$



rifaccio la stessa cosa di prima → inverto la II
ottengo $\eta^{I}_{rev} \leq \eta^{II}_{rev}$

$\eta^{I}_{rev} = \eta^{II}_{rev}$ ⇐ → inverto I
$\eta^{II}_{rev} \leq \eta^{I}_{rev}$

OSS

- $\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ mentre $\eta_{irrev} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$
- $\frac{Q^A}{T_2} = \frac{|Q^c|}{T_1}$ $\forall$ rev
- $\frac{|Q_c|}{T_1} \geq \frac{Q_A}{T_2}$ $\forall$ irrev

c) DIAGRAMMA DI RAVEAU ⇒ macchine possibili?

rev ⇒ $\frac{|Q_c|}{T_1} = \frac{Q_A}{T_2}$ ⟹ $Q_A = -\frac{T_2}{T_1} Q_c$ $\quad \underline{\underline{T_1 < T_2}}$

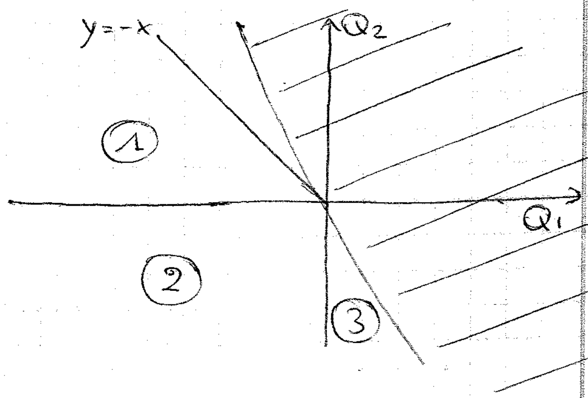
irrev ⇒ $Q_2 \leq -\frac{T_2}{T_1} Q_1$

$W = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \rightarrow Q_2 = -Q_1 \Rightarrow y = -x$

$W > 0 \Rightarrow Q_2 > -Q_1 \Rightarrow Q_2 > 0 \quad Q_1 < 0$ mac. termica

$W < 0 \Rightarrow$ 3 CASI

1) $Q_2 > 0$, $Q_1 < 0$ → inutile
2) $Q_2 < 0$, $Q_1 < 0$ → stufetta
3) $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ → frigo



ENTROPIA

DEFINIZIONE

Presa una trasformazione ciclica reversibile, per il teorema di Clausius con ∞ sorgenti ha

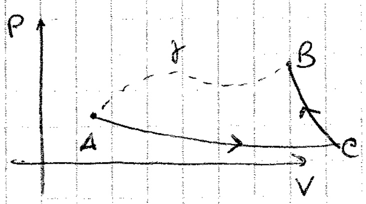
$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_{\gamma_{AB}} \frac{dQ}{T} + \int_{\gamma_{BA}} \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\int_{\gamma'_{AB}} \frac{dQ}{T} = \int_{\gamma''_{AB}} \frac{dQ}{T} \quad \text{con } \gamma' \text{ e } \gamma'' \text{ qualsiasi}$$

ENTROPIA → variabile di stato

$$\Delta S_{AB} = \int_{\gamma_{AB}} \frac{dQ}{T} = S_B - S_A \Rightarrow \text{SOLO REV!}$$

Estendo a trasf. irreversibile



$$S_B - S_A = \int_{REV} \frac{dQ}{T}$$

cambio γ con una adiab e isot

$$T_A = T_C \Rightarrow \Delta S_{AC} = \int_{ISOT} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{\cancel{T_A}}\, nR\cancel{T_A} \ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)$$

$\Delta S_{CB} = 0$ perché $dQ = 0$

CB adiabatica $\Rightarrow T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

$$V_C = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_B \longrightarrow T_C = T_A$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\gamma-1} = \frac{c_V}{R}$$

$$\Delta S_{AB} = nR \ln\left[\frac{V_B}{V_A}\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{c_V}{R}}\right] = \underbrace{nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)}_{\text{VALE } \forall\gamma!}$$

$$\Delta S = \int_{REV} \frac{dQ}{T} \longrightarrow dQ_{REV} = dS\, T$$

$$\int_\gamma \frac{dQ_{sist}}{T_{sorg}} = \int_{\gamma_{rev}} \frac{dQ_{sist}}{T_{sorg}} + \int_{\gamma_{irr}} \frac{dQ_{sist}}{T_{sorg}}$$

↳ invertibile e $T_{sorg} = T_{sist}$

$$\int_{\gamma_{irr}} \frac{dQ_{sist}}{T_{sorg}} - \underbrace{\int_{\gamma_{rev}} \frac{dQ_{sist}}{T_{sist}}}_{\Delta S_{AB}^{sist}} \leq 0$$

$\Delta S_{AB}^{sist} \longrightarrow$ ma entropia è var di stato $\Rightarrow$ trovo $\Delta S_{\gamma_{AB}}$

$$dQ_{sist} = -dQ_{amb}$$

$$\underbrace{-\int_\gamma \frac{dQ_{amb}}{T_{sorg}}}_{\Delta S_\gamma^{AMB}} - \Delta S_{AB_\gamma} \leq 0$$

$$\Delta S^{amb} + \Delta S^{sist} \geq 0 \longrightarrow \Delta S^{UNIV} \geq 0$$

OSSERVAZIONI

1) Trasf rev $\Rightarrow \Delta S^{sist} + \Delta S^{amb} = 0$ $\quad S^{univ} = cost$

2) Trasf ciclica $\Rightarrow \Delta S^{sist} = 0 \Rightarrow \Delta S^{amb} \geq 0$

3) Adiabatica irreversibile $\Rightarrow dQ = 0$

$$\Delta S^{amb} = \int \frac{dQ^{amb}}{T_{amb}} = -\int \frac{dQ}{T_{amb}} = 0$$

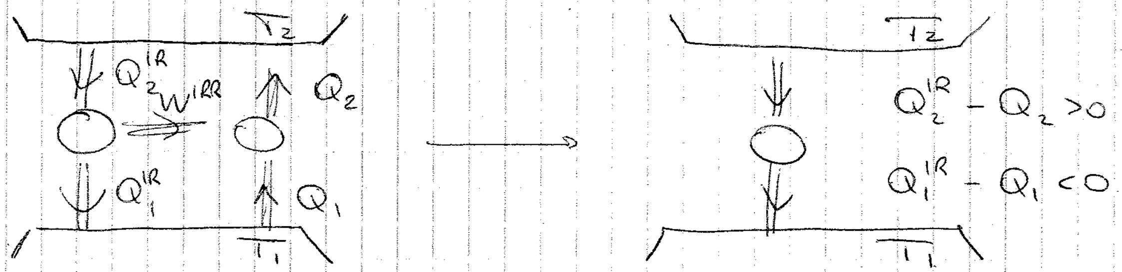
$$\Delta S^{sist} + \int \frac{dQ}{T} \longrightarrow \Delta S^{sist} \geq 0$$

4) $\Delta S^{amb} = \int \frac{dQ^{amb}}{T_{amb}} = -\int \frac{dQ^{sist}}{T_{amb}}$

- $T^{amb} = cost \Rightarrow \Delta S^{amb} = -\frac{\Delta Q^{sist}}{T_{amb}}$
- revers $\Rightarrow \Delta S^{amb} = -\Delta S^{sist}$
- adiab $\Rightarrow \Delta S^{amb} = 0$
- $dQ^{amb} = m\,c\,dT \Rightarrow \Delta S^{amb} = \int_{T_0}^{T_f} \frac{m\,c\,dT}{T} = m\,c \ln\frac{T_f}{T_0}$

CONSEGUENZE

1) $\forall$ trasf irrev $\exists$ energia sprecata



Per tempo $\to \infty \Rightarrow T_1 \to T_2$ eq. termico

2) $\Delta W = T_1 \cdot \Delta S$

per minimizzare $\Delta W \to T_1$ molto fredda
$\to \Delta S \to 0 \Rightarrow$ reversibile

INTERPRETAZIONE STATISTICA ENTROPIA

1) S legata al disordine di un sistema

2) Concetto di CONFIGURAZIONE
- sistema N particelle preso in modi $\neq$ a parità di energia

↳ numero di configurazioni è il num. di modi $\neq$ in cui posso scegliere particelle

- Trasformazione spontanea isolata dall'amb. da A a B legata a N_A e N_B

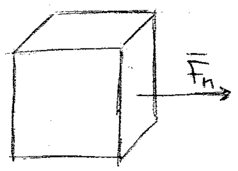
• $N_A >> N_B \to$ molto probabile $A \to B$

3) $S = k_B \ln N \to$ da meccanica statistica

Vado $A \to B$ se $N_A >> N_B \Rightarrow S_A > S_B$

4) Accrescimento entropia $\Rightarrow$ è molto improbabile che diminuisca, ma non è impossibile

PRESSIONE

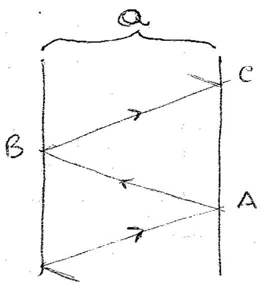


$$P = \frac{\overline{F_n}}{S} \qquad V_x^{\text{prima urto}} = V \operatorname{sen}\theta \qquad V_x^{\text{dopo}} = -V \operatorname{sen}\theta$$

$$\begin{cases} \Delta q_x = -2V \operatorname{sen}\theta = -2V_x \\ \Delta q_y = 0 \end{cases}$$

$$F_x = -\frac{2V_x \cdot m}{\Delta t} \qquad F_y = 0$$

$\Delta t \rightarrow$ tempo fra due urti sulla parete



Lungo x

$- \Delta x = |V_x| \Delta t$

$- 2a = |V_x| \Delta t$

$$F_x = \frac{-\cancel{2} m |V_x|^2}{\cancel{2}a} \qquad F_n \equiv F_x$$

$$P = \frac{|F_n|}{S} = \frac{m V_x}{a S} = \frac{m V_x^2}{\text{Volume}} \longrightarrow \text{di 1 particella}$$

$$F_m = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} F\,dt = \frac{1}{\Delta t}\left[\int_0^{\Delta t - t_0} F\,dt + \int_{\Delta t'}^{\Delta t} 0\right]$$

Ho tante particelle che danno una forza impulsiva che dà una media su un certo Δt; come se avessi una particella che esercita una forza costante su Δt

CONCL.

$$P = \frac{2m|V_x|^2}{Vol} = \frac{2m\left|V_x^{\text{media}}\right|^2}{Vol}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 83

GAS REALE

isoterme a $T = cost$

Gas perfetto $PV = cost$ → vale per $T \uparrow$

per T intermedie inizia la transizione a fluido a $P = cost$

a $V = V_B$ è tutto fluido e la curva cresce velocemente ⇒ ΔV piccoli ⇒ ΔP grandi ⇒ questo caratterizza incomprimibilità dei fluidi!

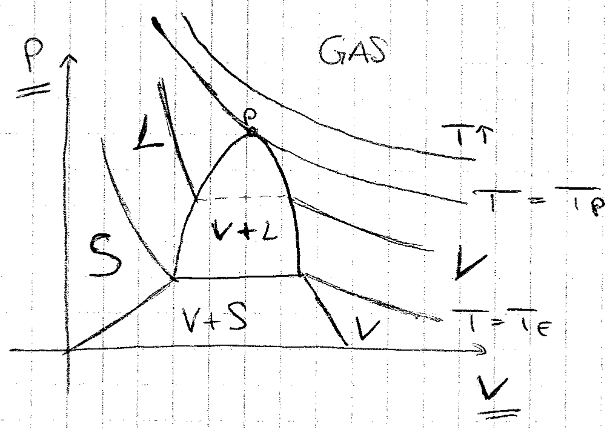
a T basse ho transizione gas - solido; a V_D è tutto solido ⇒ per $V < V_D$ ho ELASTICITÀ → vedo come si deforma il solido che è + comprimibile del fluido

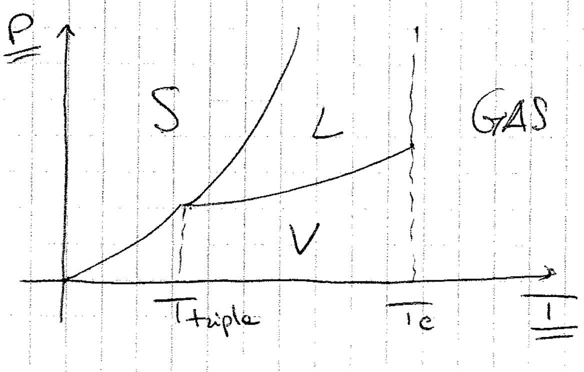
La curva risultante è una campana che ci dà l'area in cui se $T_E < T < T_P$ ho sempre lo stesso comportamento

↳ GAS → GAS + FLUIDO → FLUIDO

Se $T = T_P$ ⇒ temp. CRITICA → transizione istantanea da gas a fluido

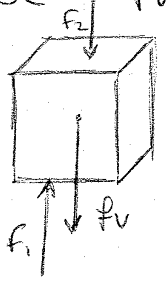
Se $T = T_E$ ⇒ temp. TRIPLA → $V_F < V < V_E$ coesistono gas, solido, liquido





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 83

Se $f_v \neq 0$



lungo $z \rightarrow -F_2 - f_v + F_1 = 0$

$F_1 = P_1 \cdot a^2 \qquad F_2 = P_2 \cdot a^2$

con $P_1 \neq P_2 \rightarrow P = P(z)$ funz altezza

Se a infinitesimo $\Rightarrow a \rightarrow dz$

$$P_1 = P(z + dz) = P(z) + \frac{dP}{dz} dz$$

$$F_1 - F_2 = (P_1 - P_2)\, sup = \frac{dP}{dz} dz\, sup = \frac{\partial P}{\partial z} dV$$

$$F_{v_z} = \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dV \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{F_{v_z}}{dV} = f_z \frac{dm}{dV} = \rho f_z$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial z} = \rho f_{v_z}} \rightarrow \text{vale lo stesso per } dx \text{ e } dy$$

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{f}$$

NB $\rightarrow$ Se $\overline{F_v}$ fosse stata conservativa allora

$$\overline{F_v} = -\vec{\nabla} E_{pot}$$

$$f_v = \frac{\overline{F_v}}{dm} = \frac{-\overline{\nabla E_{pot}}}{dm} \rightarrow \vec{\nabla} P = \frac{-\rho}{dm} \overline{\nabla E_{pot}}$$

ma $\overline{E_{pot}}$ intrinseca $= \frac{E_P}{dm}$

$$\overline{\nabla P} = -\overline{\nabla \rho E_m} \Longrightarrow f_v \neq 0 \Rightarrow \overline{\nabla P} = \rho \overline{f_v}$$

~~APPLI~~ APPLICAZIONI

1) TORRICELLI

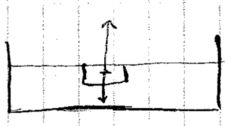
$$z \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \xrightarrow{\text{integro}} P - P_0 = \rho (z - 0) g$$

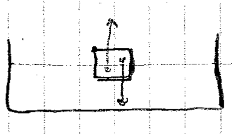
$$P = P_0 + \rho g z$$

6) ARCHIMEDE

Peso → forza di sup dovuta liquido circostante

→ $\vec{F}_{sup} = m \cdot \vec{g}$





→ F_{sup} non cambia ⇒ peso $m \cdot g$ ha nuovo p.to appl, nuovo modulo

F_{sup} ⇒ Spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato, applicata nel cm della parte immersa

$\vec{F}_{arch} = \rho g V_1$

Per avere galleggiamento:

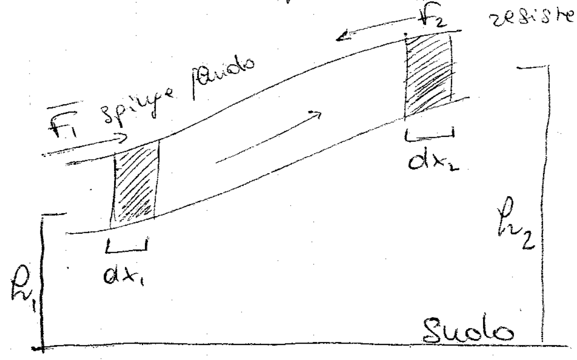
$\rho_{fluido} \cdot g \cdot V_1 = \rho_{solido} \cdot g \cdot V = m \cdot g$

GENERA UN MOTO ARMONICO!

TEORIA BERNOULLI

Cons. energia $\Rightarrow K + E_p + W^{NC} = cost$

$\bar{F}_2$ resiste e toglie fluido



$S_1 dx_1 = S_2 dx_2$

$W^{NC} = f_1 dx_1 - f_2 dx_2 =$

$= P_1 S_1 dx_1 - P_2 S_2 dx_2$

① $E_p = m \cdot g \cdot h_1 = \rho \, Vol_1 \, g h_1$

$K = \frac{1}{2} \rho \, Vol_1 \, V_1^2$

② $E_p = \rho \, Vol_2 \, g \, h_2$

$K = \frac{1}{2} \rho \, Vol_2 \, V_2^2$

$$\rho \cancel{dVol_1} g h_1 + \frac{1}{2} \rho \cancel{dVol_1} V_1^2 + P_1 \overbrace{S_1 dx_1}^{dVol_1} - P_2 \overbrace{S_2 dx_2}^{dVol_2} =$$

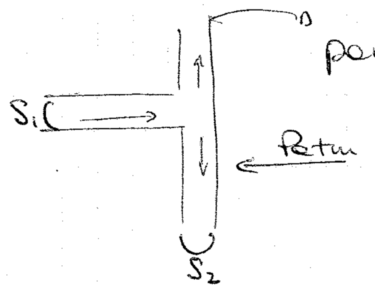
$$= \rho \cancel{dVol_2} g h_2 + \frac{1}{2} \rho \cancel{dVol_2} V_2^2$$

$$\rho_1 g h_1 + \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 + P_1 = \rho_2 g h_1 + \frac{1}{2} \rho_2 V_2^2 + P_2 = \underline{cost}\,!$$

CONSEGUENZE

Se $h = cost \Rightarrow$ tubo orizzontale $\Rightarrow P + \frac{1}{2} \rho V^2 = cost$

① PARADOSSO IDROSTATICO



$S_2 < S_1 \Rightarrow V_2 > V_1 \Rightarrow P_2 < P_1$

$P_2 \downarrow \Rightarrow$ prevale P_{atm}

$\Downarrow$

parete si avvicina

OSCILLATORE ARMONICO

a) RICHIAMO MOTO ARMONICO

DEF → accelerazione proporzionale ma con verso opposto allo spostamento

$$a = -\omega_0^2 x$$

EQ. DIFF → $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

SOLUZ → $x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ → k cost. el. molla, m massa molla

A e φ legati a cond. iniziali

PERIODO $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

SCRITTURE ALTERNATIVE

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(\omega_0 t + \varphi') =$$
$$= \overbrace{A\cos\varphi}^{a} \cos\omega_0 t + \overbrace{A\operatorname{sen}\varphi}^{b} \operatorname{sen}\omega_0 t$$

b) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

2 C.I → $\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$

$x_3 = x_2 + x_1$ è soluzione

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} + \omega_0^2 x_3 = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 = 0$$

c) ENERGIA

$$E_{TOT} = K + E_p = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$\begin{cases} x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) \\ V = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$ $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$E_{TOT} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \text{cost} \Rightarrow$ dipende solo da tipo di oscillatore e cond. iniziale!

CASI PARTICOLARI

1) $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi K \Rightarrow \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$

INTERFERENZA COSTRUTTIVA $\Rightarrow$ ho $A_{MAX} = A_1 + A_2$

2) $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi + 2K\pi \rightarrow \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$

INT. DISTRUTTIVA $\Rightarrow A_{min}^2 = (A_1 - A_2)^2 \Rightarrow A = A_1 - A_2$ se $A_1 > A_2$

(2) Stesso asse ma $\omega_0 \neq \Rightarrow$ oscillatori $\neq$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega_{01} t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega_{02} t + \varphi_2) \end{cases}$$

$x = x_1 + x_2 \Rightarrow$ NO $\Rightarrow$ NON VALE PRINCIP. SOVRAPP!

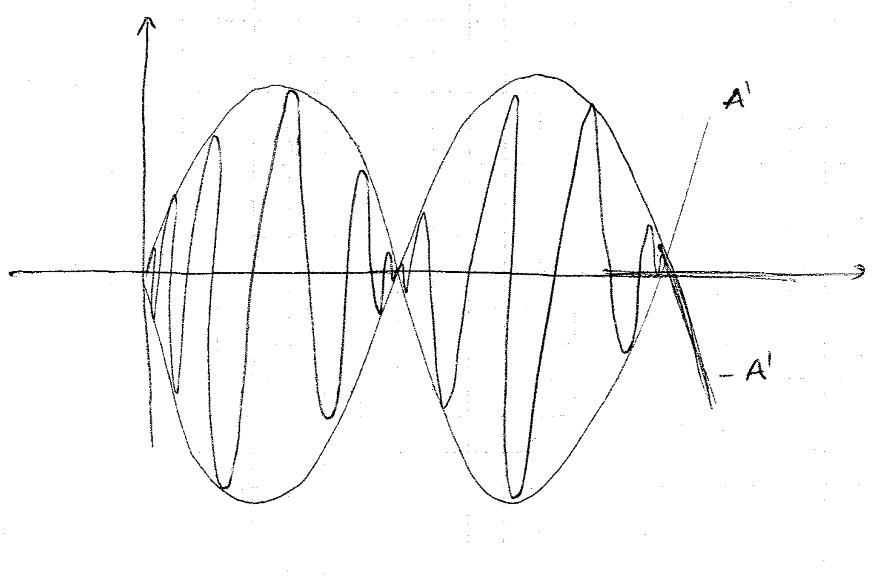
facciamo Hp per semplificare $\Rightarrow A = A_1 = A_2 \quad \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$x = A\cos(\omega_1 t) + A(\cos(\omega_2 t)) =$$
$$= A \cos\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\right)$$

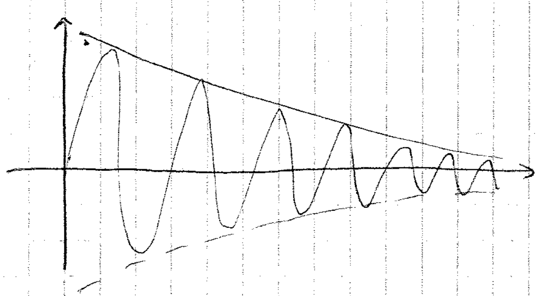
$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$x = A \operatorname{sen}(\Omega t) \cos(\omega_0 t)$$

- $\cos(\omega_0 t) \rightarrow$ solut osc. armonico con ω_0 = media ω
- $A \operatorname{sen}(\Omega t) \rightarrow$ ampiezza varia nel tempo in modo armonico



(2) $\Delta < 0 \qquad \gamma^2 < \omega^2 \Rightarrow$ SMORZ. DEBOLE



$y_{1,2}$ immaginarie

$y_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$

$x = A e^{y_1 t} + B e^{y_2 t}$

sostituisco y_1 e y_2 ottengo

[sapendo $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$]

$$x = e^{-\gamma t}\left[(A+B)\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t\right) + i(A-B)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t\right)\right]$$

$$\begin{cases} A = a + ib \\ B = a - ib \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A + B = 2a \\ A - B = 2ib \end{cases}$$

$$x = e^{-\gamma t}\left[2a\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t\right) - 2ib\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\, t\right)\right]$$

(3) $\Delta = 0 \Rightarrow \gamma^2 = \omega^2 \Rightarrow$ SMORZ. CRITICO

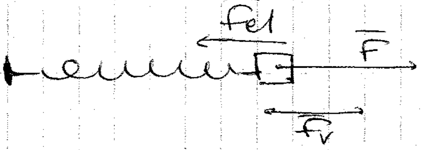
$y_1 = y_2$

$x = A e^{-\gamma_1 t} + B t e^{\gamma_1 t}$

poco interessante ...

c) AGGIUNGO FORZA ESTERNA

$F = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO E FORZATO



$m \cdot a = \sum F = -kx - \lambda v + F$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$x = x_{omogenea} + x_{part.}$

$\hookrightarrow = x_{smorzato} \qquad \hookrightarrow ?$

per $t \to \infty \Rightarrow x_{omog} \to 0 \Rightarrow x \to x_p$

INTERPRETAZIONE SOLUZIONE ⇒ RISONANZA

$A = f(\omega) \longrightarrow$ A è funzione di ω (freq. forza!)
mentre ω_0 è freq. forza elastica!

1) $\omega \to 0 \Rightarrow A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{K}$ e $\varphi = 0$

2) $\omega \equiv \omega_0 \Rightarrow A = \frac{F_0}{m 2\gamma \omega_0}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$

3) $\omega \to \infty \Rightarrow A \to 0$ e $\varphi \to -$ (π!)

MASSIMO DI A

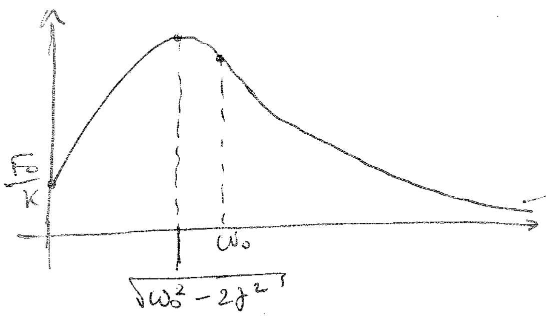
- $\frac{dA}{d\omega} = 0$!
- se denominatore è minimo!

$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 = z$

$\frac{dz}{d\omega} = 0 \Rightarrow 4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\gamma^2\omega = 0$

$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \Rightarrow \omega_{max} \neq \omega_0$!

↳ esiste $\Rightarrow \omega_0^2 > 2\gamma^2 \Rightarrow$ smorz. debole!



→ Curva di RISONANZA

Se $\omega = \omega_{MAX} \Rightarrow$ Sono in condizione risonante!
↳ A è max