



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 807

DATA: 31/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lombardo

MATERIA: Dinamica dei Sistemi Meccanici + Eserc. + Temi d'esame

Prof. Fasana_Marchesiello

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

SISTEMI A UN GRADO DI LIBERTÀ
1 DOF

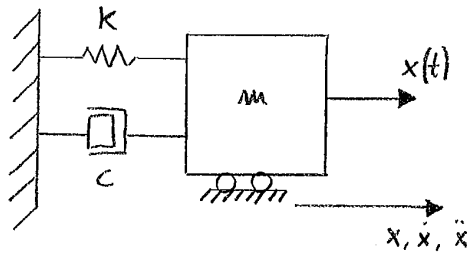
PROBLEMA

La dinamica studia la descrizione del moto di un corpo in relazione alle cause che l'hanno prodotto

- ⊙ es. = Calcolare l'accelerazione di una vettura da parte del motore (cause del moto).
- = Studiare la frenata
- = Problema degli urti
- ⋮

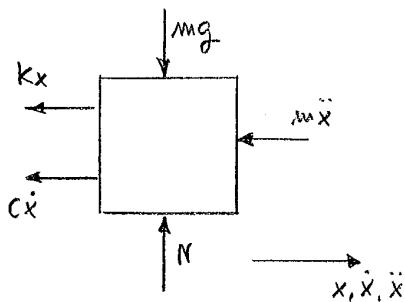
La spinta libera è l'aumento nel tempo del moto di una massa m a partire da precise condizioni iniziali.

Si considera il sistema a un grado di libertà in cui la massa m è vincolata a muoversi orizzontalmente e sono ad essa collegate una molla di rigidità k e uno smorzatore viscoso di costante c .



In assenza di fenomeni dissipativi, le oscillazioni tra k e c diverrebbero all'infinito; nelle realtà vi sono sempre delle dissipazioni e affinché il moto possa essere mantenuto è necessario che ci sia una forza agente sul sistema dall'esterno, detta forzante.

Indicando con $x(t)$ lo spostamento della massa m dalla posizione di riposo, con $\dot{x} = dx/dt$ la velocità e con $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ l'accelerazione, è possibile definire le equazioni del moto e tracciare il diagramma di corpo libero:



- $c\dot{x}$ = reazione dello smorzatore viscoso
- kx = reazione della molla
- mg = forze peso
- $m\ddot{x}$ = forze d'inerzia
- N = forze di contatto

Immediato con:

$$\begin{array}{ll}
 c_{02} = 2\sqrt{km} & \text{SMORTAMENTO CRITICO (valore dello smorzamento che rende nullo il discriminante)} \\
 \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} & \text{PULSAZIONE NATURALE} \\
 \xi = \frac{c}{c_{02}} & \text{FATTORE DI SMORTAMENTO}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} c_{02} \\ \omega_m \\ \xi \end{array}} \right\} \text{PARAMETRI MODALI}$$

Le soluzioni del polinomio caratteristico possono essere esatte come:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_m \pm \omega_m \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Con tale notazione è evidente che l'appartenenza delle soluzioni all'insieme dei reali (\mathbb{R}) o dei complessi (\mathbb{C}) dipende dal fattore di smorzamento.

Se: $\bullet \Delta > 0 \Rightarrow \xi > 1$ il sistema si dice **SOVERISMORTATO** ed entrambe le soluzioni del polinomio caratteristico sono reali, distinte e negative

$$s_{1,2} \in \mathbb{R}^-$$

$\bullet \Delta = 0 \Rightarrow \xi = 1$ il sistema si dice **CRITICAMENTE SMORTATO** e le soluzioni del polinomio sono reali, coincidenti e negative

$$s_1 = s_2 \in \mathbb{R}^-$$

$\bullet \Delta < 0 \Rightarrow \xi < 1$ il sistema si dice **SOTTO SMORTATO** e le soluzioni del polinomio sono complesse, coniugate e negative

$$s_{1,2} \in \mathbb{C}^-$$

NB: la parte reale delle soluzioni è sempre **NEGATIVA** e questo indica un andamento decrescente, nel tempo, dell'ampiezza. Questo caratterizza comunque un sistema stabile, ovvero un sistema che si allontanato dalla posizione di equilibrio tende a ritornarvi.

Per studiare la risposta di un sistema bisogna fare il seguente procedimento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

dividere per la massa m :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

posto $\frac{c}{m} = 2\xi\omega_m$ e $\frac{k}{m} = \omega_m^2$ si ottiene:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_m\dot{x} + \omega_m^2x = 0$$

NB: ω_m , definita precedentemente come la pulsazione naturale, indica che in assenza di smorzamento il sistema oscilla liberamente con questa pulsazione.

SISTEMA SOTTO SMORZATO ($\xi < 1$)

È il caso di più interesse poiché più frequente nella pratica. Essendo il discriminante $\xi^2 - 1 < 0$, gli zeri del polinomio sono:

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \text{con } i = \sqrt{-1} \text{ (unità immaginaria)}$$

Indicando con $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ la PULSAZIONE DELLE OSCILLAZIONI LIBERE SMORZATE (O PULSAZIONE SMORZATA), si esprime l'equazione dei poli come:

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm i \omega_d \quad (\text{parte reale e parte immaginaria sono ora separate})$$

Sostituendo nella soluzione generale:

$$x(t) = A_1 e^{(-\xi \omega_n - i \omega_d)t} + A_2 e^{(-\xi \omega_n + i \omega_d)t} \Rightarrow x(t) = (A_1 e^{-i \omega_d t} + A_2 e^{i \omega_d t}) e^{-\xi \omega_n t}$$

Applicando la forma esponenziale dei numeri complessi (formula di Eulero) alla soluzione precedente

$$A e^{i \omega t} = A \cos \omega t + i A \sin \omega t$$

si ottiene:

$$x(t) = ((A_1 + A_2) \cos \omega_d t + i(A_2 - A_1) \sin \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t}$$

Ponendo $A_1 + A_2 = a$ e $i(A_2 - A_1) = b$, si esprime $x(t)$ come:

$$x(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t} \quad (1)$$

termine oscillatorio termine esponenziale decrescente

NB: Questa espressione di $x(t)$ esprime una funzione PSEUDOPERIODICA, ovvero gli zeri sono periodici.

Cosa accade se la massa che sta oscillando parte dalla posizione iniziale con certe condizioni iniziali?

$$\begin{cases} m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}, \quad \xi < 1$$

PROBLEMA DI CAUCHY

Perme di applicare le condizioni iniziali è necessario effettuare le derivazioni:

$$\dot{x}(t) = \omega_d (-a \sin \omega_d t + b \cos \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t} + (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) (-\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t})$$

$$\dot{x}(t) = \omega_d (-a \sin \omega_d t + b \cos \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t} - \xi \omega_n (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\xi \omega_n t}$$

Applicando le condizioni iniziali si ottiene:

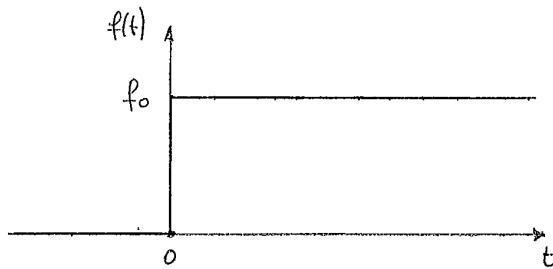
$$\begin{cases} x(0) = a \\ \dot{x}(0) = v_0 = b \omega_d - \xi \omega_n a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x_0 \\ b = \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

RISPOSTA AL GRADINO

Considerando il sistema precedente ora soggetto a una forzante si vuole determinare la risposta del sistema. Si considera una forzante con caratteristiche:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= f_0 \, u(t) \\ u(t) &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ f_0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Un gradino è una sollecitazione che vale zero fin quando il tempo è zero e assume valore costante per tempi positivi:



Bisogna risolvere l'equazione differenziale:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f_0 \, u(t)$$

che, per $t \geq 0$, diventa:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f_0$$

Si pone per ipotesi $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0 = 0$; la soluzione dell'equazione di equilibrio è data dalla risposta a regime (soluzione particolare, x_p) e dell'integrale generale dell'equazione associata (soluzione generale, x_g), detta anche soluzione transitoria.

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

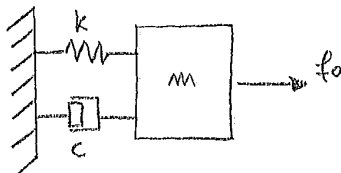
► Integrale generale

$$x_p(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\zeta \omega_n t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) = 0$$

► Integrale particolare

Utilizzare un approccio fisico:



Si consideri un sistema forzato con forzante armonica generica (sin oppure cos):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= f(t) \\ f(t) &= F_0 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Anche in questo caso si sommano l'integrale generale e l'integrale particolare ed, inoltre, se $c > 0$ vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) = 0$$

perciò è possibile trascurare l'integrale generale e studiare solo l'integrale particolare.

Si immagina uno smorzamento per cui la funzione si avvicina a zero facendo sì che converga, alla fine, saltato la risposta a regime.

NB: ω_n, ω_d si riferiscono a un sistema libero; $\omega(0, \infty)$ si riferisce alla presenza della forzante in considerazione.

Ovunque funzione può essere espressa tramite una sommatoria di funzioni armoniche; avendo il sistema lineare, è necessario applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Un metodo per rappresentare le funzioni armoniche è la "notazione esponenziale" in cui si considerano trascurabili la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso:

$$\begin{cases} f(t) = F_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(F_0 e^{i\omega t}) \\ f(t) = F_0 \sin \omega t = \operatorname{Im}(F_0 e^{i\omega t}) \end{cases}$$

perciò, si serve (da Eulero):

$$F_0 e^{i\omega t} = F_0 \cos \omega t + i F_0 \sin \omega t$$

Ritornando l'eq. del moto

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \operatorname{Re}(F_0 e^{i\omega t}) \quad (1)$$

e considerando la stessa equazione con la forzante complessa, si ottiene:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (2)$$

NB: la (2) è più semplice da risolvere ed inoltre comprende la info su sin e cos.

Risolve la (2), considerando $F_0 \in \mathbb{R}$; le soluzioni sono:

$$x(t) = x_p(t) = x_0 e^{i\omega t}, \quad x_0 \in \mathbb{C} \quad (x_0 \text{ è complesso})$$

Derivando:

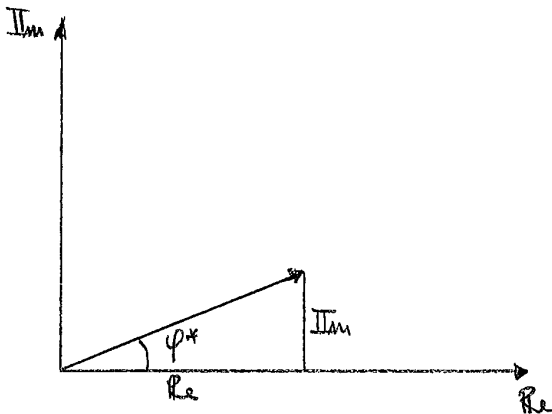
$$\begin{aligned} \dot{x} &= i\omega x_0 e^{i\omega t} \\ \ddot{x} &= -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

► FASE DEL GUADAGNO

Si calcola la tangente della fase ($= \frac{\text{parte immaginaria}}{\text{parte reale}}$):

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\operatorname{Im} Q}{\operatorname{Re} Q}$$

Dal diagramma di ARGAND-GAUSS:



$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\operatorname{Im} Q}{\operatorname{Re} Q} = - \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Si può rappresentare Q in modulo e fase come segue:

$$Q = |Q| e^{i\varphi^*}$$

NB: Si osserva che la risposta del sistema è sempre in ritardo rispetto alla forzante, per cui l'angolo φ^* è sempre negativo.

Per questo motivo si utilizza la CONVENZIONE DEGLI ANTICIPA ($\varphi^* = -\varphi$), da cui:

$$Q = |Q| e^{-i\varphi}$$

In tal modo cambia anche il segno della tangente della fase:

$$\operatorname{tg} \varphi^* = -\operatorname{tg} \varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Si osserva quindi come il modulo e la fase sono funzioni della pulsazione di eccitazione, della pulsazione naturale e del fattore di smorzamento. Gli andamenti del modulo e della fase iniziale, in funzione della pulsazione delle forzanti, sono rappresentati sul DIAGRAMMA DI BODE.

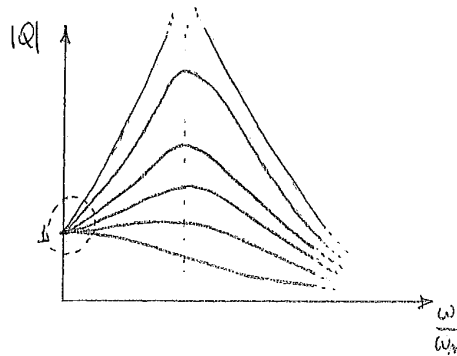
Riprendendo le formule di $|Q(i\omega)|$ e $\arg \varphi$

$$\begin{cases} |Q(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[4 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \\ \arg \varphi = - \frac{2 \zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{4 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{cases}$$

è possibile analizzare alcuni casi che descrivono i vari tratti del diagramma di Bode:

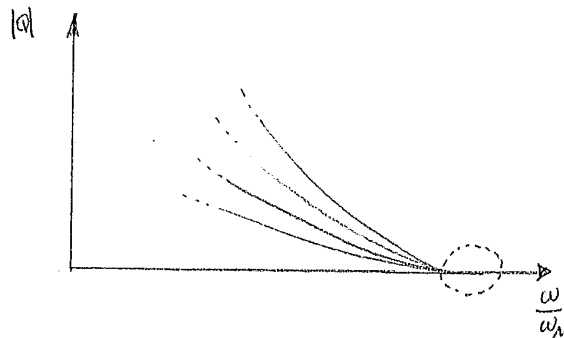
• $\forall \zeta, \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} |Q| = 1$

L'ampiezza $|Q|$ tende sempre a 1 poiché se $\omega \rightarrow 0$ allora anche $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 0$ e rimane il rapporto $\frac{1}{1} = 1$. Quindi, per ogni valore di ζ , se $\omega \rightarrow 0$ allora $|Q| = 1$.



• $\forall \zeta, \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} |Q| = 0$ (asintoticamente)

L'ampiezza $|Q|$ tende a 0 poiché se $\omega \rightarrow \infty$ allora $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \infty$ e rimane il rapporto $\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$. Quindi, per ogni valore di ζ , se $\omega \rightarrow \infty$ allora $|Q| = 0$.



Semplificando:

$$-(1-\varrho^2) + 2\xi^2 = 0$$

$$1-\varrho^2 = 2\xi^2$$

$$\varrho_{1,2} = \pm \sqrt{1-2\xi^2}$$

Delle due soluzioni (+ e -) trovata, quella con segno negativo non si considera; resta:

$$\varrho = \sqrt{1-2\xi^2} \quad \text{RISONANZA}$$

Da questa, è ora possibile definire la pulsazione di risonanza (ω_r) come:

$$\omega_{max} = \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad \text{PULSAZIONE DI RISONANZA}$$

NB: può capitare che ω_n e ω_r si confondano e, poiché ciò avviene molto spesso, nella realtà vale $\xi < 1$ ($\xi \approx 0,005$), per cui:

$$\omega_n \approx \omega_r \quad (\text{simili in valore ma molto diversi concettualmente})$$

NB: la risonanza esiste se $1-\xi^2 > 0$ perché in caso contrario ci sono un numero immaginario (se $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ il sistema è molto ingovernabile!!)

Per avere il fenomeno dell'amplificazione dinamica il valore di ξ deve essere pari a:

$$\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 70,7\%$$

Solo per valori minori di $\frac{\sqrt{2}}{2}$ della smorzamento si ha risonanza; però essendo, nella realtà, $\xi \approx 0,05 = 5\%$ allora si ha sempre risonanza

$$Q_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Osservazione:

Lo sfasamento tra la forzante e la risposta del sistema è sempre negativo, pertanto il sistema risulta sempre in ritardo rispetto alla forzante. Si dice che INGRESSO e USCITA sono:

- In FASE quando $\varphi = 0$
- In CONTRIFASE quando $\varphi = -\pi$
- In QUADRATURA quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$

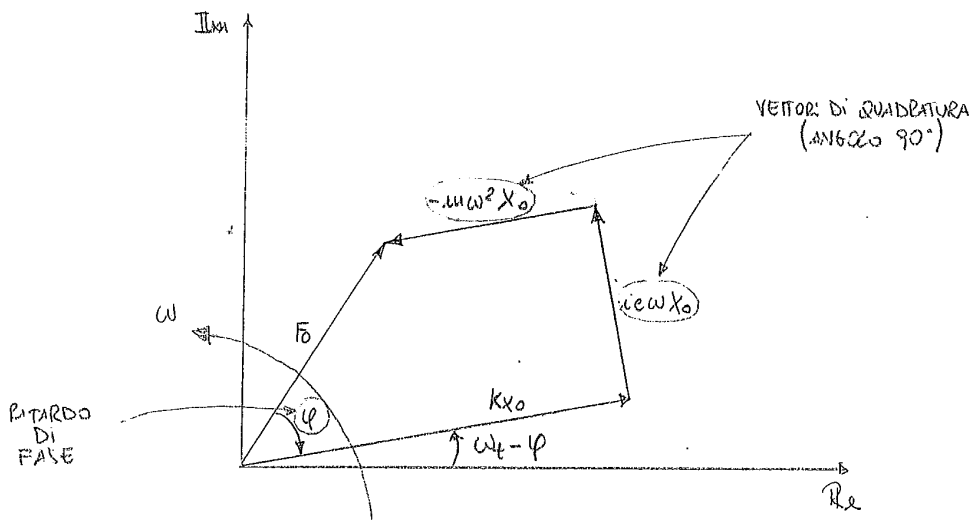
VECTORI ROTANTI

Si vuole definire un metodo utile a esprimere il diagramma di fase. Partendo dall'espressione del moto complesso e sostituendo la soluzione di tentativo $X_0 e^{i\omega t}$, si ottiene:

$$-m\omega^2 X_0 e^{i\omega t} + i c \omega X_0 e^{i\omega t} + k X_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

da i più state eccitate precedentemente.

Si vuole ora rappresentare graficamente tale sistema di forze sapendo che X_0 è un numero complesso (si utilizza il piano di Argand-Gauss):

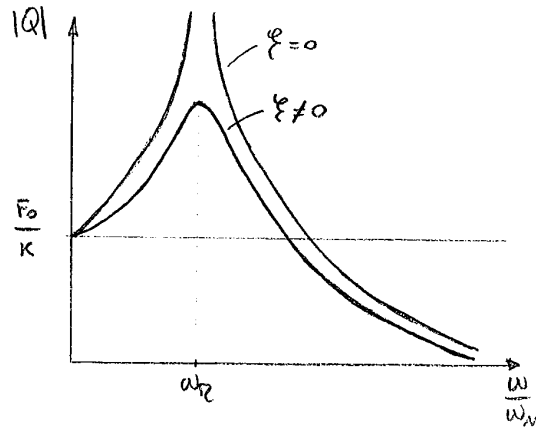


NB: I vettori "si rincorrono" → derivare un vettore sempre ruotato di 90° nel verso della velocità angolare ω

$$\begin{cases} i c \omega X_0 \text{ ruotato di } 90^\circ \text{ rispetto a } k X_0 \text{ (↑)} \\ -m \omega^2 X_0 \text{ ruotato di } 90^\circ \text{ rispetto a } i c \omega X_0 \text{ (←)} \end{cases}$$

All'aumentare del tempo il complesso ruota di ω :

- ciò accade per $\omega < \omega_n$
- se aumenta ω tutto diventa più grande fino a che la fase arriva a 90°
- se $\omega \rightarrow \infty$ allora la fase arriva a 180°



l'espressione delle risposte dirette:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$$

A tale risposta si applica il teorema di De L'Hospital (derivare di numeratore e denominatore rispetto a ω):

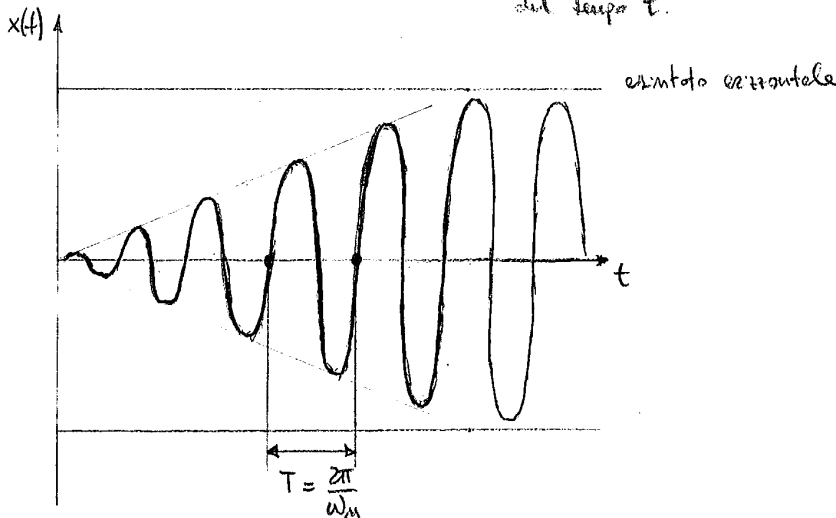
$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} x(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{F_0 (-\sin \omega t) t}{m(-2\omega)}$$

Semplificando e applicando il limite per $\omega \rightarrow \omega_n$, si ottiene:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_n} t \sin \omega_n t$$

coefficiente amplore della retta

funzione armonica di cresce linearmente con l'andare del tempo t.



$$\begin{cases} \xi = 0 \\ \xi \neq 0 \end{cases}$$

NB: Se $\xi \neq 0$ allora servono un tot di cicli affinché la risposta giunga all'asintoto; questo è deducibile anche dal grafico dell'ampiezza.

Conclusioni:

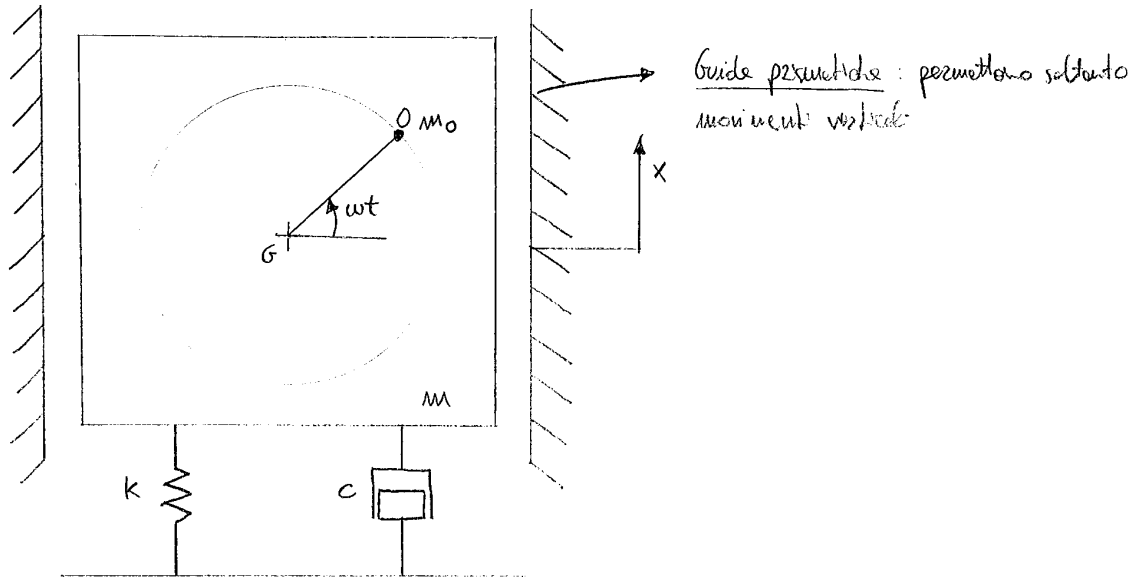
- il battimento si verifica quando due oscillazioni di frequenze simili interferiscono e si sommano
es. due nastri cellophane, di piano e cioè alle stesse velocità, emettono onde sonore alla stessa frequenza e interferiscono.
- nelle fasi iniziali, le due oscillazioni interferiscono; dopo, quando si creano e ripuliscono, tale effetto scompare.

Riepilogando quanto trattato fino ad ora, soprattutto riguardo le pulsazioni, si può scrivere che:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) Pulsazione propria $\rightarrow \omega_m$ | } | Pulsazioni in assenza di forzante |
| 2) Pulsazione smorzata $\rightarrow \omega_d = \omega_m \sqrt{1 - \xi^2}$ | | |
| 3) Pulsazione relativa a forzante $\rightarrow \omega (0 - \infty)$ | } | Pulsazioni con forzante esterna \rightarrow forzanti modali |
| 4) Pulsazione risonzante $\rightarrow \omega_r = \omega_m \sqrt{1 - 2\xi^2}$ | | |

NB: Queste quattro pulsazioni sono tutte diverse tra loro!!

Per imbeddere tale concetto e: si ovale di un esempio pratico; si considere una lavatrice;



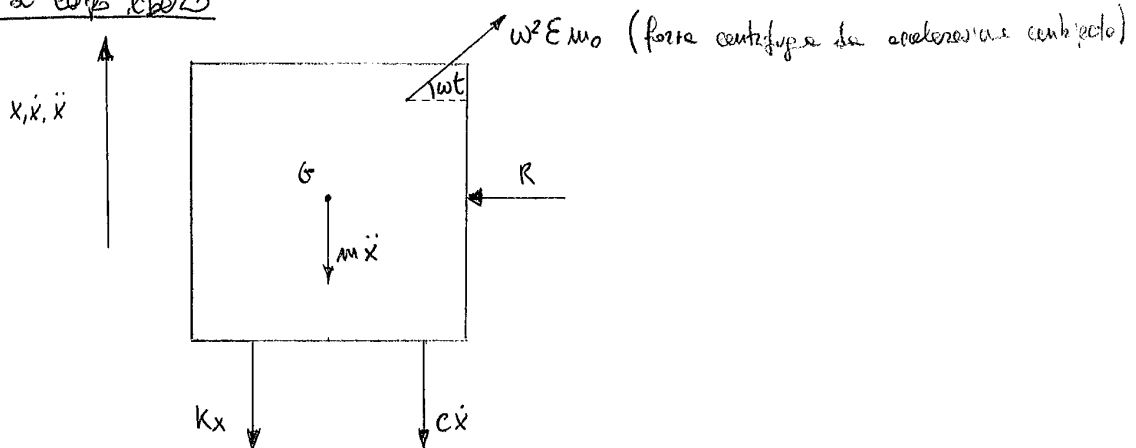
Ipotesi: $\omega = \text{cost}$ (velocità di rotazione)
 $\vec{O}G = \varepsilon$ (eccentricità)
 $m_0 =$ frazione di m ("panni")
 k, c (come sono e una nella realtà, scelti a piacere)
 Pivottamento fermo

Obiettivo: Calcolare lo spostamento di G .

Bisogna studiare la dinamica della lavatrice, tramite i successivi passaggi:

- 1) Tracciare il diagramma di corpo libero
- 2) Scrivere le equazioni del moto (per poi definire la "trasmissibilità")

1) Diagramma di corpo libero



NB: Non si considere la forza peso poiché bilanciata da una pressione opposta della forza elastica

$$\frac{X_0}{E} = \frac{m_0}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i 2 \zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

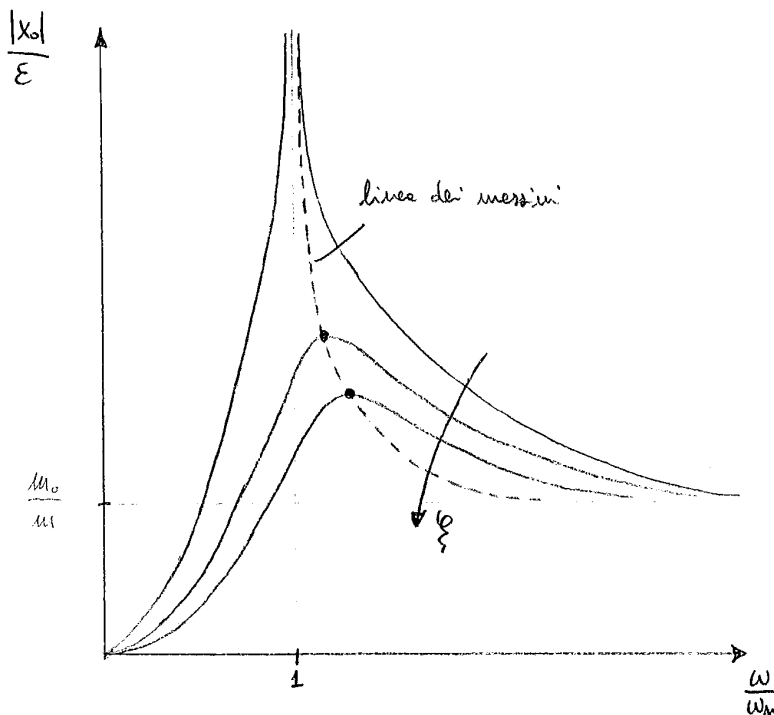
Per rappresentare l'ampiezza della risposta, si scrive:

$$\frac{X_0}{E} = \frac{m_0}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}}_{Q(i\omega)}}$$

Pertanto, vale che:

$$\begin{cases} \frac{X_0}{E} = \frac{m_0}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 Q(i\omega) \\ \frac{1}{Q} = \frac{2 \zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \end{cases}$$

Graficamente tutto ciò si rappresenta con un diagramma simile a quello del caso precedente ma un po' più spostato verso destra:



Si può anche scrivere che:

$$T = \frac{Fv}{m_0 \omega_m^2 E} = \frac{(k + i\omega c) X_0}{m_0 \omega_m^2 E}$$

Si sostituisce a $\frac{X_0}{E}$ l'espressione ricavata precedentemente e si ottiene:

$$T = \frac{k + i\omega c}{m_0 \omega_m^2} \cdot \frac{\frac{m_0}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + i2\zeta \frac{\omega}{\omega_m}} \cdot \frac{1}{\omega_m^2}$$

Si sostituiscono i parametri fisici con quelli modal: $(\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}, c_{cr} = 2\sqrt{k m}, \zeta = \frac{c}{c_{cr}})$

$$T = \frac{\omega_m^2 + i2\zeta \omega \cdot \omega_m}{\omega_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + i2\zeta \frac{\omega}{\omega_m}}$$

$$T = \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \frac{1 + 2i\zeta \frac{\omega}{\omega_m}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + 2i\zeta \frac{\omega}{\omega_m}}$$

Si pone ora l'attenzione sull' ampiezza della trasmissibilità $|T|$:

$$|T| = \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \sqrt{\frac{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}}$$

Rispetto all'espressione $|Q(i\omega)|$, qui il denominatore e sono gli stessi valori mentre il numeratore è cambiato e così comporta un comportamento differente.

- Per prime cose conviene ora un punto invariante (invariante) ottenendo ai tutti le curve passano (in fase di progettazione tale valore va considerato). Da individuare e veder risulta difficile per cui si ottiene la coordinata che sono state fornite: conoscendo la coordinata x del punto I ($x = \sqrt{2}$) lo si sostituisce nell'espressione di $|T|$ e si trova la coordinata y .

$$\left|T\left(\frac{\omega}{\omega_m} = \sqrt{2}\right)\right| = 2 \sqrt{\frac{1 + 8\zeta^2}{1 + 8\zeta^2}} = 2 \quad (\forall \zeta)$$

Pertanto, vale: $I = (\sqrt{2}; 2)$ PUNTO DI INVARIANZA

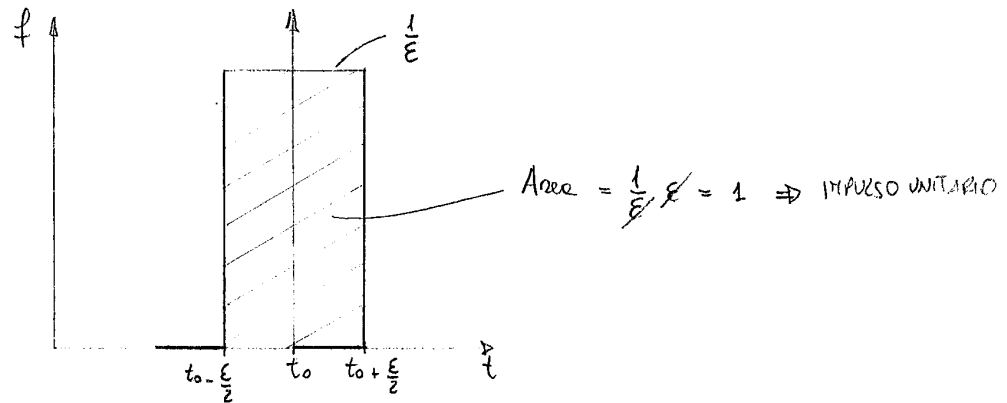
- Per vedere da dove cominciare a costruire il grafico, si pone la coordinata $x = \frac{\omega}{\omega_m} = 0$ e si ottiene $|T(\frac{\omega}{\omega_m} = 0)| = 0 \Rightarrow$ si parte dal punto $(0, 0)$

- $\zeta = 0 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} |T| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |T| = 1$
- $\zeta > 0 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} |T| = 0$

IMPULSO UNITARIO

Precedentemente è stata introdotta la funzione pesante ma poi è stata trascurata; per poterla calcolare è necessario, innanzitutto, ricavare la risposta all'impulso (IRF = Impulse Response Function, $h(t)$) del sistema in modo da poter poi calcolare l'integrale di convoluzione e, quindi, la funzione pesante.

Si definisce impulso una funzione di durata in basso di tempo breve rispetto al periodo di oscillazione.

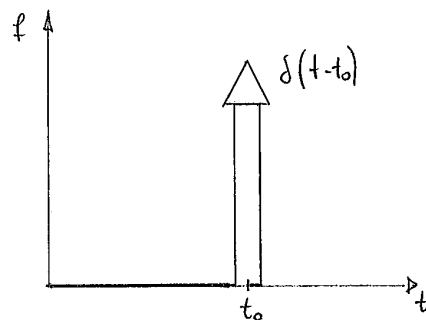


Quindi possiamo affermare che un impulso è una grandezza che, in un istante infinitesimo, assume un valore tendente a infinito:

$$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow \infty$$

- NB:
- È una funzione nulla ovunque tranne che nell'arco istante di tempo t_0 in cui tende a ∞ .
 - Particolarità è che il suo integrale fornisce un valore finito e pari a 1, pertanto l'area sottesa è pari a 1.

A questo punto è possibile definire l'impulso unitario o Delta di Dirac: la "funzione" $\delta(t-t_0)$, anche se sarebbe più corretto parlare di "distribuzione", che preferiamo è rappresentata come segue:



e che rispetta le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0, & \forall t \neq t_0 \\ \delta(t-t_0) = \infty, & t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases}$$

Come si risolve tale integrale "doppio"?

1° STEP: Si risolve il primo integrale:

$$\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{\tau} < 0 \\ 1 & \text{se } \underline{\tau} > 0 \end{cases}$$

NB: l'espressione matematica di posto permette di $u(\tau) \rightarrow$ gradino

2° STEP: Si risolve il secondo integrale:

$$\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} u(\tau) d\tau = \left[\tau u(\tau) \right]_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} = \left[\underbrace{\frac{\epsilon}{2} u\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}_{=1} + \underbrace{\frac{\epsilon}{2} u\left(-\frac{\epsilon}{2}\right)}_{\text{valutato prima che c'è il gradino}} \right] = 1$$

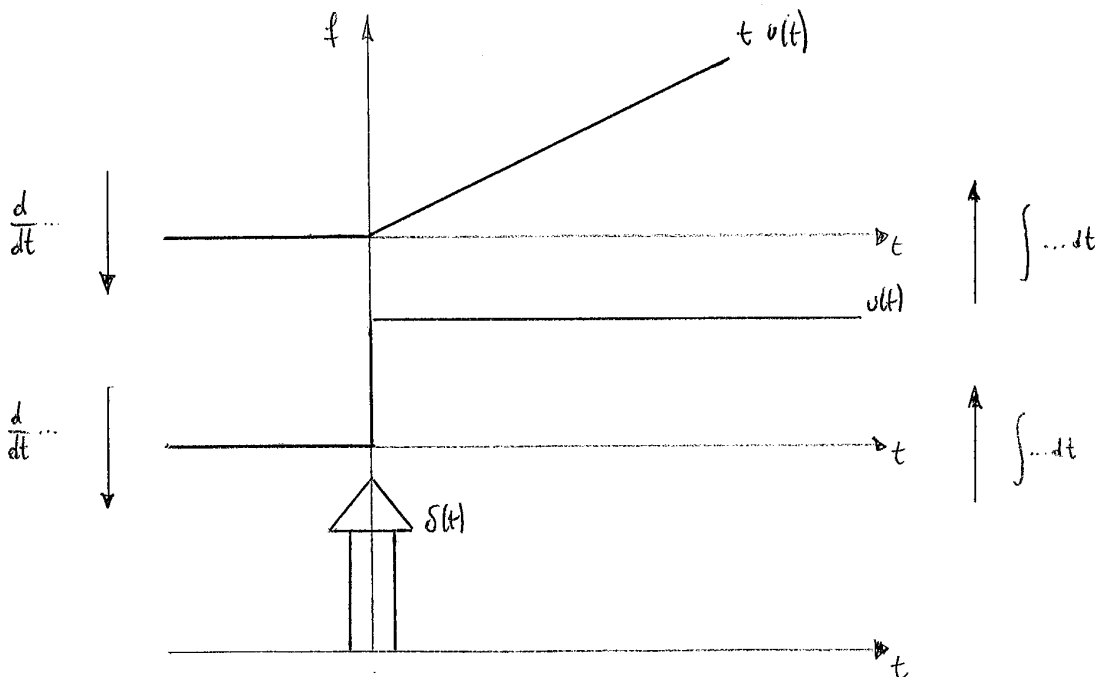
3° STEP: Si calcola il limite per $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon}{2} u\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right] = 0$$

Quindi, ipotizzando $x(t)$ limitata, per tendente a 0, tra $-\frac{\epsilon}{2}$ e $\frac{\epsilon}{2}$ il limite è pari a 0.

Dopo aver descritto il procedimento di integrazione "doppio", si ritorna al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \\ x(0^-) = 0 \\ \dot{x}(0^-) = 0 \end{cases}$$



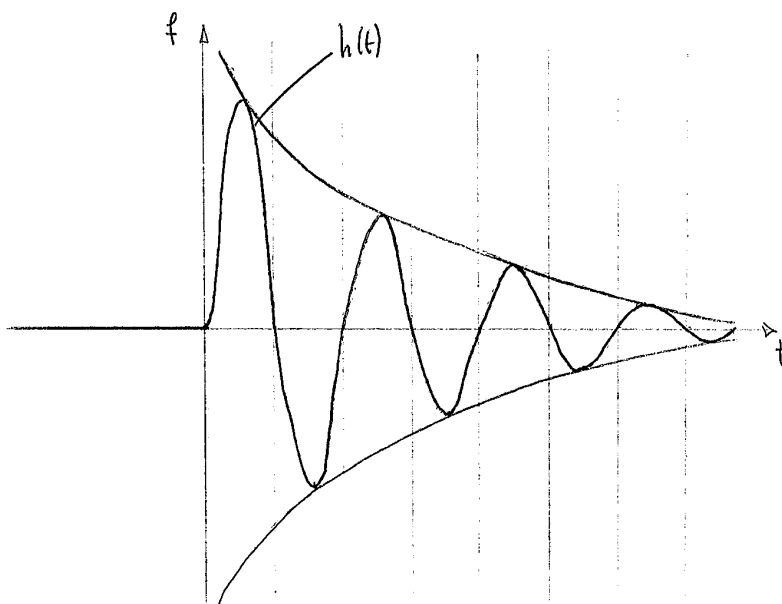
Pertanto, la risposta all'impulso unitario per un sistema sottosmorzato ($\xi < 1$) vale:

$$x(t) = h(t) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_d t \quad u(t)$$

Risposta ALL'IMPULSO UNITARIO (IRF)

↳ Solo termine aggiunto per rispettare la causalità.

Questa risposta può essere espressa preferenzialmente come segue:



- essendo $h(t)$ una funzione pseudoperiodica, è stata una suddivisione del diagramma in var settori nell'asse dei tempi.
- si immagini di dare una "martellata" \rightarrow è ovvio equivale a passare ad un sistema fermo e in si impone una certa velocità ($\neq 0$) \rightarrow discontinuità della velocità.

NB: Come precedentemente detto, per calcolare la risposta alla forzante occorre prima conoscere queste opere determinate.

Perché $f \Delta \tau$?

Non si ha più un impulso unitario ma l'area di un rettangolo $\rightarrow f \cdot \Delta \tau$
 ↓ ↓
 altezza base

Perché $h(t-\tau)$?

Le funzioni non si applicano in 0 ma in τ , quindi le funzioni si basano di τ .

Trostando di un sistema lineare è possibile ottenere la risposta del sistema applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, quindi si calcola la risposta per ogni singolo impulso e infine si sommano gli effetti.

Si pone: $t =$ istante di tempo in cui si misura la risposta } $\rightarrow \underline{t > \tau}$
 $\tau =$ istante di tempo in cui si applica l'impulso

$$\begin{aligned} x_0(t) &= f_0 \Delta \tau h(t) && \text{risposta al primo impulso al tempo } t=0 \\ x_1(t) &= f_1 \Delta \tau h(t-\Delta \tau) \\ &\vdots \\ x_k(t) &= f_k \Delta \tau h(t-k\Delta \tau) \\ &\vdots \\ x_m(t) &= f_m \Delta \tau h(t-m\Delta \tau) \end{aligned}$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti (linearità):

$$\sum_{k=0}^m x_k(t) = \sum_{k=0}^m f_k \Delta \tau h(t-k\Delta \tau)$$

↓
 summa effetti della risposta.

Passando da sommatori finiti ad infinitesimi $\Delta \tau \rightarrow d\tau$ e $m \rightarrow \infty$, la sommatoria si trasforma in un integrale che prende la seguente forma:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE (O DI DUHAMEL)

NB: se le condizioni iniziali non fossero nulle (vd. ipotesi non fondamentale), bisognerebbe aggiungere all'integrale di convoluzione la soluzione particolare della risposta libera alle condizioni iniziali.

NB: si intende "convoluzione tra f e h ", dove $h = \text{IRF}$ è la funzione di risposta completa del sistema.

Per tanto, per una funzione generica, questo è lo strumento da utilizzare (tramite Matlab) per calcolare la risposta in qualunque istante di tempo t , purché siano nulle le condizioni iniziali e sia nota la risposta all'impulso ($h(t)$).

Per verificare se l'integrale (3) oppure ottenuto è equivalente all'integrale (1), si spezza l'intervallo³⁸ di integrazione in tre contributi:

$$x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(\tau) h(t-\tau) d\tau}_{(a)} + \underbrace{\int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau}_{(b)} + \underbrace{\int_t^{+\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau}_{(c)}$$

Si analizzano questi contributi:

(a) Per $\tau < 0$, l'integrale risulta nullo, quindi: $f(\tau) = 0$

(c) Per $\tau > t$, allora $t - \tau < 0$ (sistema causale che non può rispondere prima di emergere le forzanti) e l'integrale risulta nullo, quindi: $h = 0$

Essendo nulli i contributi (a) e (c), ciò che rimane è (b), pertanto l'integrale (3) è equivalente all'integrale (1).

NB: Un ulteriore modo per indicare la convoluzione è:

$$x(t) = f(t) * h(t)$$

La convoluzione del dominio nel tempo è pari al prodotto del dominio nella frequenza!

l'equazione del moto è:

$$(1) \quad m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y) = 0$$

Si introduce con $z(t)$ il moto relativo ($z(t) = x-y$), quindi:

$$z = x-y \quad \Rightarrow \quad x = z+y \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$$

Sostituendo nell'equazione del moto:

$$m\ddot{z} + m\ddot{y} + c\dot{z} + kz = 0 \quad (2)$$

Il moto della base y è descritto dalla relazione:

$$y = y_0 e^{i\omega t} \quad , \quad y_0 = \text{ampiezza di oscillazione}$$

derivando:

$$\dot{y} = i\omega y_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y_0 e^{i\omega t}$$

Andando e sostituendo nella (2) si ha:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m y_0 \omega^2 e^{i\omega t}$$

La soluzione di tale equazione si scrive come:

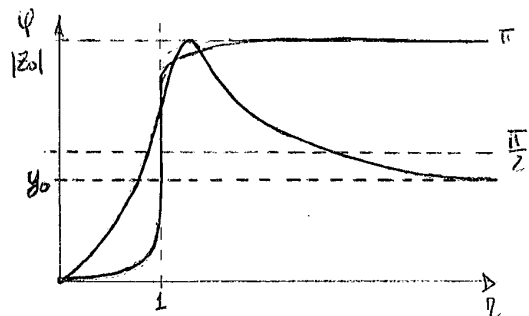
$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

Per cui si cercano l'ampiezza e la fase del moto relativo:

$$|z_0| = \frac{\frac{m y_0 \omega^2}{k} \rightarrow f_0}{\sqrt{(1-\varrho^2)^2 + (2\zeta\varrho)^2}} \quad \Rightarrow \quad |z_0| = y_0 \frac{\varrho^2}{\sqrt{(1-\varrho^2)^2 + (2\zeta\varrho)^2}} \quad , \quad \varrho = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta\varrho}{1-\varrho^2}$$

NB: l'andamento della fase è $0^\circ \rightarrow 180^\circ$ (vedi grafico)



Si osserva che:

- per $\varrho \ll 1$, l'ampiezza del moto relativo è proporzionale al modulo di accelerazione della base $y_0 \omega^2$ e la fase è prossima allo zero. Il modello rappresenta un APPENDICEMETRO (la massa sismica è molto piccola).

$$|z_0| \approx y_0 \varrho^2 = y_0 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \underbrace{y_0 \omega^2}_{\text{accelerazione della base}}$$

$$\text{NB} : \varrho \ll 1 \Rightarrow \varrho < \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$$

- per $\varrho \gg 1$, si ha che $|z_0| \rightarrow y_0$ e la fase è prossima a π . L'ampiezza del moto relativo è uguale e opposta delle basi ma in controfase (la massa m è fessura). Questo modello rappresenta un SISMOGRFO.

(la massa sismica è molto grande)

Come si scelgono i versi delle forze date dalle connessioni tra le due masse?

Si fa, mentalmente, un'ipotesi che $x_2 > x_1$ (ad esempio) in modo da poter studiare il moto relativo tra i due corpi. Immaginando quindi che m_2 si sposti più di m_1 , cioè compaia un allungamento della molla 2 (trazione) e di conseguenza ci sarà una forza, $k_2(x_2 - x_1)$, che m_2 esercita su m_1 ; tale forza sarà verso destra quando si studia m_1 e verso sinistra quando si studia m_2 . Quindi, una volta che tali forze sono state disegnate su m_1 , basterà cambiare di verso e metterle su m_2 . Inoltre, su m_2 , ci sarà la forza $k_3 x_2$ che la molla 3 esercita sul telaio.

NB: Stesso ragionamento vale per lo smorzatore ($c_1(x_2 - x_1)$ e $c_3 \dot{x}_2$).

Detto ciò, sarà possibile adesso procedere al calcolo delle equazioni del moto; si impone l'equilibrio:

$$\leftarrow m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f_1 = 0 \quad , \text{ per } m_1$$

$$\leftarrow m_2 \ddot{x}_2 + c_3 \dot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f_2 = 0 \quad , \text{ per } m_2$$

Questo possono essere riscritte portando le forzanti al secondo membro e combinando alcuni segni:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_3 \dot{x}_2 + k_3 x_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = f_2 \end{cases}$$

Per ottenere maggiori informazioni sul sistema in considerazione e per poter valutare istantaneamente le pulsazioni proprie, si riscrivono queste due equazioni in forme matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

dove: $[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ è la matrice delle masse $\left. \begin{array}{l} \text{reale} \\ \text{simmetrica} \\ \text{definita positiva} \end{array} \right\}$

$[c] = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}$ è la matrice di smorzamento viscoso $\left. \begin{array}{l} \text{reale} \\ \text{simmetrica} \\ \text{definita/semi-definita positiva} \end{array} \right\}$

$[k] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$ è la matrice di rigidezza $\left. \begin{array}{l} \text{reale} \\ \text{simmetrica} \\ \text{definita/semi-definita positiva} \end{array} \right\}$

NB: la notazione $[...]$ indica una matrice, mentre la notazione $\{...\}$ indica un vettore.

NB: Sistema a 2 gradi \Rightarrow matrice 2×2

⋮
Sistema a n gradi \Rightarrow matrice $n \times n$

es. Si consideri la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il minore principale di rango 1 è:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow d_1 = 2 > 0$$

Il minore principale di rango 2 è:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}} & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow d_2 = 6 > 0$$

Il minore principale di rango 3 è l'intera matrice, il cui determinante vale:

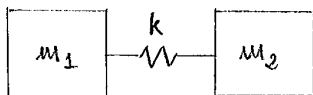
$$d_3 = 1 > 0$$

Da conseguenza la matrice è sicuramente definita positiva !!

Possibile si intende per matrice "simmetrica positiva"?

es. Si consideri l'energia potenziale elastica $u = \frac{1}{2} \{x\}^T [k] \{x\}$. Una matrice è simmetrica positiva se esiste un moto rispetto del sistema a cui non corrisponde una variazione di energia potenziale.

Si consideri il seguente sistema:



2 gdl \rightarrow posizione di m_1 e di m_2

la matrice di rigidezza sarà:

$$[k] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Si applica il criterio di Sylvester:

$$\det(k) = k^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \text{la matrice è simmetrica positiva (esiste } x, \text{ insieme di spostamenti, che non portano alcuna variazione di energia potenziale)}$$

NB: In questo caso un autovalore (pulsonare propria) è nullo: $\omega_1^2 = 0$

~~FRASINIA ALI - AUTOMATI~~

Si è detto che per risolvere il disaccoppiamento di due equazioni nel caso di sistemi complessi si deve ricorrere all'ANALISI MODALE. Questa consiste di due passaggi fondamentali:

1° STEP → Creare la soluzione sincrona

Si studia il comportamento dinamico di un sistema, a n gradi di libertà, non smorzato e non forzato:

$$[m] \ddot{x} + [k] x = \{0\}$$

Cercare una soluzione sincrona significa che tutte le masse devono avere la medesima funzione spostamento. Se esiste essa può essere espressa come:

$$\{x(t)\} = \{x_0\} g(t)$$

NB: $\{x_0\}$ è un vettore reale ($x_0 \in \mathbb{R}^n$) e $\{x(t)\}$ mantiene sempre la stessa forma al variare del tempo.

Derivando due volte la soluzione e sostituendola nell'espressione del moto, si ottiene:

$$[m] \{x_0\} \ddot{g}(t) + [k] \{x_0\} g(t) = \{0\}$$

Dato che le matrici sono reali e simmetriche, se si moltiplicano entrambi i membri per il vettore riga $\{x_0\}^T$, si ha:

$$\underbrace{\{x_0\}^T [m] \{x_0\}}_{\text{scalare}} \ddot{g}(t) + \underbrace{\{x_0\}^T [k] \{x_0\}}_{\text{scalare}} g(t) = \{0\} \quad , \quad \text{con } \{x_0\} \neq \{0\}$$

Per le regole dell'algebra lineare, si ha che:

$$\{x_0\}^T [m] \{x_0\} > 0$$

$$\{x_0\}^T [k] \{x_0\} \geq 0$$

in quanto la matrice di massa è definita positiva mentre la matrice di rigidezza è semidefinita positiva. E' allora possibile dividere:

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = - \frac{\{x_0\}^T [k] \{x_0\}}{\{x_0\}^T [m] \{x_0\}} = -\omega^2 \leq 0 \quad (\text{pulsona pura})$$

Quindi: $-\omega^2 < 0$ (strettamente negativo) ; inoltre, se $-\omega^2 \leq 0 \Rightarrow \omega^2 \geq 0$.
 $\quad \quad \quad = 0$ (nulla)

Per $\omega^2 > 0$, si ha un'equazione omogenea del tipo:

$$\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$$

la cui soluzione è:

$$g(t) = \cos(\omega t + \theta)$$

SOLUZIONE SINCRONA

► Calcolo degli autovettori:

Una volta determinati gli autovalori, gli autovettori si ottengono sostituendo un autovalore per volta all'interno dell'equazione:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{X_0\} = \{0\}$$

Questa equazione diventa:

$$([K] - \omega_2^2 [M]) \{\psi_2\} = \{0\}$$

Si ottengono quindi gli AUTOVETTORI DELLE AMPIETUDDINE: $\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_m\}$ e l'insieme di tutti gli autovettori di un sistema si definisce FORMA MODALE (gli autovettori definiscono la "forma" con cui si può muovere il sistema), in cui gli autovettori sono unitari e meno di una costante moltiplicativa.

Essendo autovalori e autovettori in corrispondenza biunivoca, l'autovalore ω_2^2 e l'autovettore $\{\psi_2\}$ caratterizzano il MODO PROPRIO R-ESIMO:

$$\text{MODO} = \omega_2^2, \{\psi_2\} \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \omega_2, \xi_2 = \text{parametri modali}$$

Risolto l'autoproblema, si ottengono delle matrici:

• MATRICE DEGLI AUTOVALORI

È una matrice diagonale in cui si inseriscono, in ordine crescente ($\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_m^2$), tutti gli autovalori:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \omega_m^2 \end{bmatrix} = \text{diag}(\omega_2^2)$$

• MATRICE MODALE

È la matrice degli autovettori, ottenute ordinandoli in colonne

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \uparrow & & & \uparrow \\ \{\psi_1\} & & & \{\psi_m\} \\ \downarrow & & & \downarrow \end{bmatrix}$$

~~© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 336~~

Alle costanti delle molla di massa $[m]$ e di rigidezza $[k]$ sono legate alcune proprietà degli autovalori e degli autovettori. La realtà e la simmetria delle due molla impone la realtà e la positività di autovalori e autovettori; si ricomincia poi la costanza di ortogonalità rispetto alle due molla $[m]$ e $[k]$. Si considera l'auto problema:

$$([k] - \omega^2 [m]) \{x_0\} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 [m] \{x_0\} = [k] \{x_0\}$$

Tra gli n autovalori da risolvere il problema, si considerano ω_2^2 e ω_5^2 ; per entrambi l'auto problema è:

$$\begin{cases} \omega_2^2 [m] \{ \psi_2 \} = [k] \{ \psi_2 \} \\ \omega_5^2 [m] \{ \psi_5 \} = [k] \{ \psi_5 \} \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per $\{ \psi_5 \}^T$ e la seconda per $\{ \psi_2 \}^T$ si ottengono le relazioni scalari:

$$\begin{cases} \omega_2^2 \{ \psi_5 \}^T [m] \{ \psi_2 \} = \{ \psi_5 \}^T [k] \{ \psi_2 \} & \textcircled{1} \\ \omega_5^2 \{ \psi_2 \}^T [m] \{ \psi_5 \} = \{ \psi_2 \}^T [k] \{ \psi_5 \} & \textcircled{2} \end{cases}$$

Trasportando la $\textcircled{2}$ (è necessario invertire l'ordine):

$$\textcircled{2}^T: \quad \omega_5^2 \{ \psi_5 \}^T [m]^T \{ \psi_2 \} = \{ \psi_5 \}^T [k]^T \{ \psi_2 \}$$

Applicando adesso le proprietà delle molla simmetriche (si ricorda che $[m]$ e $[k]$ possono supporre simmetriche) $\Rightarrow [m]^T = [m]$ e $[k]^T = [k]$ per cui:

$$\omega_5^2 \{ \psi_5 \}^T [m] \{ \psi_2 \} = \{ \psi_5 \}^T [k] \{ \psi_2 \}$$

Sottraendo posto alla $\textcircled{1}$, si ottiene:

$$(\omega_2^2 - \omega_5^2) \{ \psi_5 \}^T [m] \{ \psi_2 \} = 0$$

Questa equazione ha due possibili soluzioni:

- se $\omega_2 \neq \omega_5$ allora $\{ \psi_5 \}^T [m] \{ \psi_2 \} = 0$ m -ortogonalità $(m-1)$
- se $\omega_2 = \omega_5$ allora $\{ \psi_2 \}^T [m] \{ \psi_2 \} = m_2 > 0$ massa modale

Afferme che è possibile esprimere una qualsiasi configurazione assunta da un sistema a più gradi di libertà come combinazione lineare degli autovettori, ovvero essi costituiscono una base nello spazio delle configurazioni; pertanto, gli autovettori $\{\psi_r\}$ sono linearmente indipendenti.

Per la dimostrazione, si procede per assurdo, supponendo che $\{\psi_r\}$ siano linearmente dipendenti. Si considera quindi una combinazione lineare di autovettori e la si pone pari a zero:

$$c_1 \{\psi_1\} + c_2 \{\psi_2\} + \dots + c_n \{\psi_n\} = \{0\}$$

che può essere espressa come sommatoria:

$$\sum_{r=1}^n c_r \{\psi_r\} = \{0\}, \text{ dove } c_r \text{ non tutti nulli (fatto che implica la dipendenza lineare)}$$

Pre-moltiplicando per il vettore riga $\{\psi_s\}^T [m]$, si ottiene:

$$\{\psi_s\}^T [m] \sum_{r=1}^n c_r \{\psi_r\} = \{0\}$$

applicando la m -ortogonalità, si semplifica la relazione precedente come:

$$c_s \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_s\} = 0 \Rightarrow c_s m_s = 0$$

da cui si conclude che c_s deve essere nullo (non potendo essere $m_s = 0$). Ripetendo tale operazione n volte, si conclude che:

$$c_r = 0, \forall r$$

Questo risultato però contraddice l'ipotesi iniziale di coefficienti non tutti nulli, pertanto gli autovettori sono linearmente indipendenti e ciò dimostra il teorema.

Dato un generico vettore nello spazio delle configurazioni, $\{v\} \in \mathbb{R}^n$, è possibile esprimerlo come combinazione lineare degli autovettori:

$$\{v\} = \sum_{i=1}^n c_i \{\psi_i\} \quad \text{FORMULA DI ESPANSIONE}$$

Pre-moltiplicando per $\{\psi_r\}^T [m]$ e sfruttando la m -ortogonalità, si evidenziano i FATTORI DI PARTECIPAZIONE MODALE:

$$c_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{v\}}{m_{r2}}, \quad r = 1, \dots, n$$

Questi fattori indicano quanto ciascun modo contribuisce alla definizione del generico vettore $\{v\}$.

Possò, in quest'ultima matrice qualcosa non va, perché la m -ortogonalità prevede che la matrice sia diagonale e questo non lo è. Il fatto è che due autovettori sono coincidenti e, per avere la matrice diagonale, dovrebbero essere distinti.

NB: Se due autovettori non sono ortogonali, l'espressione $\{\Psi\}^T [M] \{\Psi\} = \text{diag}(m_1, m_2)$ non risulta verificata e il risultato sarà una matrice non diagonale.

Allora, prese alle proprietà di $[M]$ e $[K]$, è possibile fare una scelta alternativa degli autovettori; una scelta appropriata potrebbe essere la seguente:

$$[\tilde{\Psi}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è stato modificato solamente il secondo autovettore (seconda colonna esubica, le altre due rimangono uguali)

Da cui risulta:

$$[\tilde{\Psi}]^T [M] [\tilde{\Psi}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dunque, per un sistema di grado n , detto "degenerato", il tentativo di espansione risulta essere valido; tuttavia, tale tentativo risulta molto "scorretto" da applicare nel caso di autovettori ripetuti, invece vale sempre nel caso di autovettori distinti.

Risposta LIBERA NON SMORZIATA

La risposta libera di un sistema non smorzato è determinabile attraverso le condizioni iniziali oltre alla risoluzione dell'autovalore. In generale, la risposta del sistema si può porre nella forma:

$$\eta(t) = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t \quad (4)$$

dove A_2 e B_2 risultano dipendenti dalle condizioni iniziali, $\{x(0)\} = \{x_0\}$ e $\{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\}$. Le condizioni iniziali e la forma funzionale della soluzione sono in due sistemi di coordinate diverse; bisogna quindi combinare i modi e trasferire le condizioni iniziali dall'orbito delle espressioni all'orbito modale.

Si possono seguire due strade.

① la matrice modale non è singolare ed è pertanto invertibile, quindi si applica la trasformazione modale inversa (TMI):

$$\{\eta(t)\} = [\Psi]^{-1} \{x(t)\}$$

Visto che la TMI vale per ogni istante di tempo t , infatti $[\Psi]$ non dipende dal tempo (sistema lineare - tempo - invariante), si può scrivere:

$$\{\dot{\eta}(t)\} = [\Psi]^{-1} \{\dot{x}(t)\}$$

Quindi, per trasferire le condizioni iniziali dello spazio delle espressioni allo spazio modale, si usa la TMI e si ottiene:

$$\{\eta_0\} = [\Psi]^{-1} \{x_0\} \quad \text{e} \quad \{\dot{\eta}_0\} = [\Psi]^{-1} \{\dot{x}_0\}$$

A questo punto sarà possibile determinare A_2 e B_2 .

Gli svantaggi di tale metodo consistono nel fatto che questo richiede un notevole sforzo computazionale quando il numero di gradi di libertà cresce; inoltre, per poter applicare tale metodo occorre avere la matrice modale completa e questo, quando si vogliono conoscere soltanto alcuni modi, risulta di essere, non inutile.

② Si sfrutta la m-ortogonalità degli autovettori. Vengono evidenziati i modi modali per poter scegliere soltanto i modi che interessano.

Il vettore delle coordinate generalizzate può essere scritto a partire dalla TMI:

$$\{x(t)\} = [\Psi] \{\eta(t)\}$$

che può essere scritto con una formula alternativa che esprime il fenomeno di espansione e mette in evidenza i contributi modali.

Si considero un sistema a molti gradi di libertà non forzato con smorzamento viscoso, le cui equazioni del moto si scrivono nella forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

Se si analizza il problema nel dominio, caratterizzato dalle stesse matrici di massa e di rigidezza, è possibile risolvere l'autovalore $([k] - \omega^2[M])\{x_0\} = \{0\}$ e trovare le matrici degli autovalori e le matrici modali. Si applica allora la TMD, per cui si scrive:

$$[M][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [k][\Psi]\{\eta\} = \{0\}$$

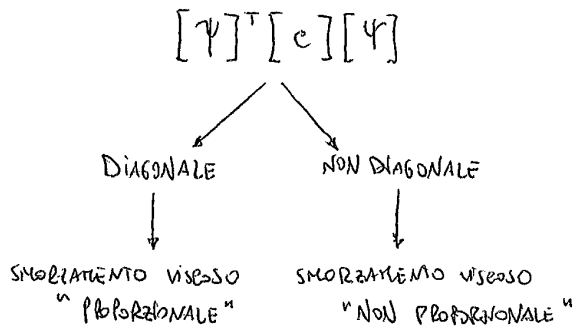
Si moltiplica per $[\Psi]^T$:

$$[\Psi]^T[M][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [\Psi]^T[c][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [\Psi]^T[k][\Psi]\{\eta\} = \{0\}$$

che diventa, sfruttando la m -ortogonalità:

$$\text{diag}(m_i) \{\ddot{\eta}\} + \underbrace{[\Psi]^T[c][\Psi]}_{?} \{\dot{\eta}\} + \text{diag}(k_i) \{\eta\} = \{0\}$$

Come si può dire del secondo membro? Le matrici può assumere due "forme":



da dinamiche si intende però soltanto al primo tra questi due tipi di smorzamento viscoso, escludendo quindi quello "non proporzionale".

dove: $2\varphi_{12} \omega_{12} = \frac{C_2}{m_{12}} \Rightarrow C_2 = 2\varphi_{12} \omega_{12} m_{12}$

Sostituendo C_2 nell'espressione $C_2 = \alpha m_{12} + \beta \cdot k_{12}$, si ottiene che:

$$2\varphi_{12} \omega_{12} m_{12} = \alpha \cdot m_{12} + \beta \cdot k_{12}$$

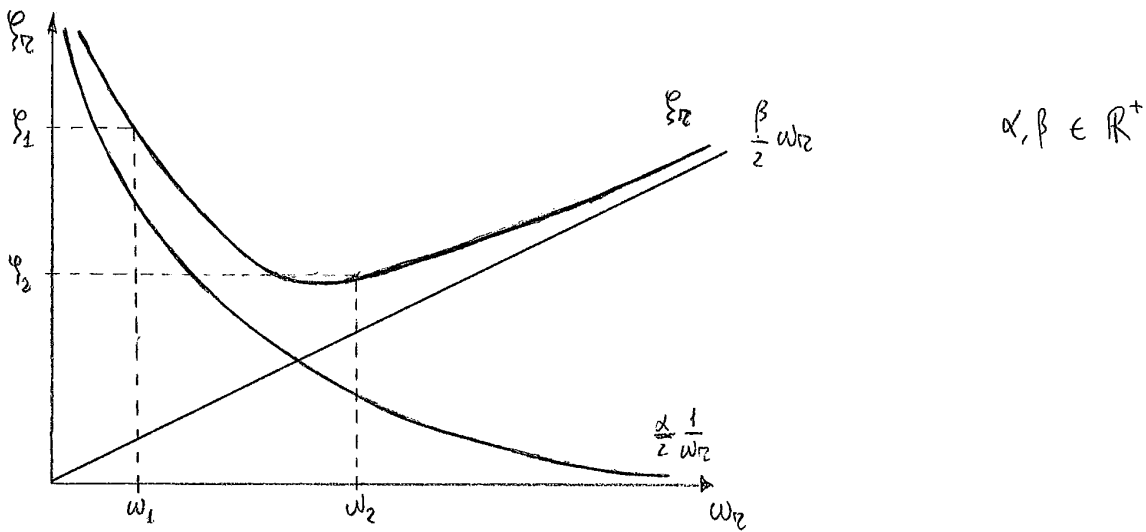
Dividendo tutto per m_{12} :

$$2\varphi_{12} \omega_{12} = \alpha + \beta \left(\frac{k_{12}}{m_{12}} \right) \rightarrow \omega_{12}^2$$

ed infine, si calcola φ_{12} come:

$$\varphi_{12} = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\omega_{12}} + \frac{\beta}{2} \omega_{12}$$

Come si esprime graficamente tale espressione? Questa risulta composta dalla somma di due termini, uno ipercubo e uno lineare



NB: l'ipotesi di smorzamento costante non è compatibile con l'ipotesi di smorzamento proporzionale.

Ritornando al fatto che si è ricavata la ξ_{12} , è adesso possibile scrivere l'espressione del moto nelle 2-esime coordinate modali; supponendo che ciascun modo sia sottomorzato, si hanno n soluzioni del tipo:

$$y_{12}(t) = (A_{12} \cos \omega_{d12} t + B_{12} \sin \omega_{d12} t) e^{-\xi_{12} \omega_{12} t}, \quad \xi \ll 1 \text{ (MODI SOTTOMORZATI)}$$

$$\omega_{d12} = \sqrt{1 - \xi_{12}^2}$$

RISPOSTA ALLA FORZANTE GENERICA

Si studia un sistema a molti gradi di libertà con smorzamento viscoso proporzionale, soggetto a una forzante generica $\{f(t)\}$ nota.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$$

Utilizzando la TRM, che purifica di aver risolto il problema agli autovalori nel caso non smorzato (coinvolge soltanto $[m]$ e $[k]$), si ottiene:

$$[m][\psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\psi]\{\dot{\eta}\} + [k][\psi]\{\eta\} = \{f(t)\}$$

Pre-moltiplicando per $[\psi]^T$:

$$[\psi]^T [m] [\psi] \{\ddot{\eta}\} + [\psi]^T [c] [\psi] \{\dot{\eta}\} + [\psi]^T [k] [\psi] \{\eta\} = [\psi]^T \{f(t)\}$$

Inoltre si chiama $[\psi]^T \{f(t)\} = \{Q(t)\}$ VETTORE DELLE FORZE MODALI

Si ottengono pertanto m -equazioni del tipo:

$$m_2 \ddot{\eta}_2 + c_2 \dot{\eta}_2 + k_2 \eta_2 = Q_2(t) \quad (1)$$

Il termine forzante scelto si ottiene trasponendo l' i -esimo vettore e moltiplicandolo per f_i , infatti:

$$\begin{matrix} Q_2(t) & = & [\psi]^T \{f(t)\} \\ 1 \times 1 & & 1 \times m \quad m \times 1 \end{matrix}$$

Ciascuna delle (1) equazioni può essere interpretata separatamente ottenendo l'integrale di conservazione (un integrale per ciascuna delle coordinate modali). Dopo aver risolto le m -equazioni, si fa la sintesi modale (TRM) e si determina il termine di espressione:

$$\{x\} = [\psi] \{\eta\} = \sum_{r=1}^m \{\psi_r\} \{\eta_r(t)\}$$

Volendo, è possibile calcolare anche la risposta all'impulso, al gradino, etc...; mostra però una particolare attenzione il caso della forzante armonica.

Dalla relazione precedente, si ottiene che :

$$\{x_0\} = \left([k] - \omega^2 [m] + i\omega [c] \right)^{-1} \{F_0\}$$

si moltiplica il primo e il secondo membro per l'inverso della matrice, cioè

$$[k_{din}] = \left([k] - \omega^2 [m] + i\omega [c] \right) \quad \text{MATRICE DI RIGIDEZZA DINAMICA}$$

di dimensioni, è una matrice di rigidezza ed è funzione della frequenza di eccitazione ω .

Si scrive pertanto il vettore delle risposte di spostamenti a regime come :

$$\{x_0\} = [k_{din}]^{-1} \{F_0\}$$

Si pone : $[k_{din}]^{-1} = [\alpha(\omega)] \quad \text{MATRICE DI RECESSIONE}$

NB : la matrice di ricezione è l'inverso della matrice di rigidezza dinamica ed, inoltre, rappresenta il rapporto tra lo spostamento e la forza.

Quindi, per un sistema smorzato e soggetto a forzante armonica, le risposte delle risposte saranno ottenute dal prodotto :

$$\{x_0\} = [\alpha(\omega)] \{F_0\}$$

Questa strada risulta molto poco agevole per sistemi a molti gradi di libertà anche perché tale operazione va fatta separatamente per frequenza. Ci sono però anche dei vantaggi :

- non è richiesto il calcolo di autovalori e autovettori (analisi modale)
- vale anche nel caso di smorzamento non proporzionale

II^o Approccio modale

Soffermiamoci un attimo sul concetto di ricezione.

$$\begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ & \boxed{\alpha_{jk}} & & \\ & & & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \\ \vdots \\ F_{m0} \end{Bmatrix}$$



Sistemi a m -gradi di libertà in cui es. sono m -masse che si muovono da matrice di ricezione sono una matrice quadrata $m \times m$ il cui generico elemento si indica con " α_{jk} "; tutto va moltiplicato per un vettore forzante.

NB: in scale logaritmiche le autovalenze sono viste come $-\infty$ (val. profilo) e non come zero.

Sull'autovalenza si basa il concetto di ASSORBITORE DINAMICO

Come può essere definita l'autovalenza?

Non è possibile dire che "punto di minimo" poiché ci sono altri punti di minimo, però si può sentire che:

$$\text{se } [c] = [0] \quad \text{allora } \alpha(W_{AR}) = 0 \quad \text{e} \quad |\alpha(W_S)| > 0$$

Quindi, per $[c] = [0]$, c'è in assenza di smorzamento, vale:

$$\begin{cases} \alpha(W_{AR}) = 0 & \text{MINIMO ASSOLUTO (autovalenza)} \\ \alpha(W_S) > 0 & \text{MINIMO RELATIVO (selle)} \end{cases}$$

Invece, in presenza di smorzamento, le autovalenze si "sollevano" e non si riesce più a distinguere dalle selle.

NB: Un sistema a n -poli presenta n -risolvenze! (IMPORTANTE!!)

Si può affermare che:

- $J = k \rightarrow$ reattanza punto-punto
- $J \neq k \rightarrow$ reattanza incrociata

Per sistemi lineari tempo invarianti, vale $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$, ovvero si può ottenere lo stesso grafico scambiando la posizione della fonte (k) con la posizione della misura (J) \rightarrow proprietà di reciprocità.

Se, scambiando fonte e misura, ottengo grafici diversi allora il sistema è NON LINEARE.

Così succederebbe invece se le matrici $[m]$ e $[k]$ non fossero simmetriche?

Si effettua un cambio di coordinate; le nuove coordinate del moto sono:

- spostamento assoluto del corpo 1 (x_1)
- spostamento relativo del corpo 2 rispetto al corpo 1 ($\Delta = x_2 - x_1$)

Quindi, sostituendo nelle equazioni del moto, $\Delta = x_2 - x_1$ al posto di x_2 e lasciando invariato x_1 , si giunge alle nuove equazioni:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 = f_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = f_2$$

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 \Delta = f_1}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_3 x_2 - k_2 x_1 = -f_2$$

$$m_2 \ddot{\Delta} + m_2 \ddot{x}_1 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 \Delta + k_3 x_1 = -f_2$$

$$\boxed{m_2 \ddot{\Delta} + m_2 \ddot{x}_1 + k_2 \Delta + k_3 \Delta + k_3 x_1 = -f_2}$$

In forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}}_{[m]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_3 & k_2+k_3 \end{bmatrix}}_{[k]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{Bmatrix}$$

Le matrici $[m]$ e $[k]$ non risultano più simmetriche e pertanto non è più possibile applicare l'ortogonalità dei modi per disaccoppiare le equazioni. Come è più disaccoppiabile in questi casi?

Si è già detto che "È sempre possibile rendere simmetriche le matrici"; ciò però si può fare solo per matrici che sono abbastanza semplici. Infatti, per parte è possibile applicare delle trasformazioni elementari. Ad esempio, si sceglie di sottrarre la prima riga con la somma della prima e della seconda riga e lasciare inalterata la seconda riga; si ottiene:

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_3 & k_3 \\ k_3 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1-f_2 \\ -f_2 \end{Bmatrix}$$

In questo modo le matrici risultano simmetriche ed è quindi possibile disaccoppiare le equazioni.

oss: Questo procedimento ricorda l'operazione fatta per disaccoppiare "a mano" le equazioni.

oss: Ciò che succede applicando le equazioni di Lagrange è che le matrici diventano sempre (o quasi) simmetriche.

Avendo ottenuto come risultato il differenziale dell' energia cinetica, è possibile affermare che: 70

"Il lavoro della risultante (delle forze) è pari alla variazione di energia cinetica." (TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA)

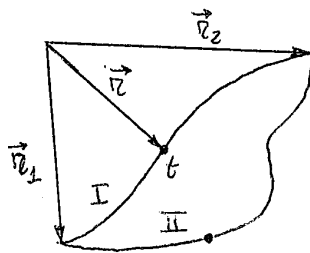
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dT$$

Traente gli integrali, questo può anche essere espresso come:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} dT = T_2 - T_1 = \Delta T$$

In generale, questo lavoro dipende dal percorso seguito; se non dipendesse dal percorso, ma solo dai punti iniziale e finale, allora la forza sarebbe conservativa (\vec{F}_c). Quindi, se la forza è conservativa, l'integrale non dipende dal percorso e si può dimostrare che l'integrale sul percorso chiuso è nullo.

Se si calcola l'integrale della \vec{F}_c su un percorso I, questo deve essere uguale per qualsiasi altro percorso:



Percorso I

Percorso II

$$\left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c d\vec{r} \right)_I = \left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c d\vec{r} \right)_{II} \Rightarrow \left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c d\vec{r} \right)_I + \left(\int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}_c d\vec{r} \right)_{II} = 0$$

Quindi, nel caso di forze conservative, il lavoro compiuto da una forza su un ciclo chiuso è zero.

Tale concetto si esprime con la seguente equazione:

$$\oint \vec{F}_c d\vec{r} = 0$$

, $\vec{F}_c = \text{Forza conservativa}$

Si è con sicurezza l'energia totale (meccanica) "E" data dalla somma dell'energia cinetica "T" e dell'energia potenziale "V".

$$E = T + V \Rightarrow \Delta E = \Delta(T + V)$$

In particolare, se il termine non conservativo è nullo, vale:

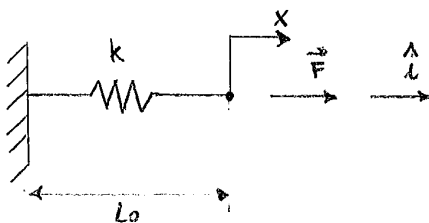
$$\vec{F}_{nc} = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E = \text{cost}$$

NB: le forze conservative conservano l'energia totale lungo un percorso, invece le forze non conservative non conservano l'energia totale lungo un percorso.

Oss: Da fisica I, si ricordano che $E = \text{cost}$ indica il "principio di conservazione dell'energia"; tale principio è un caso particolare dell'"Espressione dell'energia" vista in Meccanica applicata.

Vediamo alcuni esempi...

es. 1 - Molla



L_0 = lunghezza indifferente

\vec{F} = forze esterne

\hat{i} = versore

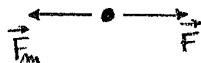
x = quantità di cui varia l'allungamento della molla

Si definisce un vettore posizione (\vec{r}):

$$\vec{r} = (L_0 + x) \hat{i}$$

questo vettore è dato dal fatto che si vogliono calcolare gli spostamenti e posture della configurazione indifferente.

NB: le forze conservative non è \vec{F} bensì la forza esercitata dalla molla (\vec{F}_m); per derivarla vediamo il diagramma di corpo libero.



Così da si vuole calcolare il lavoro delle forze conservative

$$\vec{F} = kx \hat{i}$$

quindi, in questo caso, \vec{i} :

$$\vec{F}_m = -kx \hat{i}$$

Svolgiamo l'integrale:

$$\int_{h_1}^{h_2} \vec{F}_p d\vec{r} = \int_{h_1}^{h_2} (-mg) dy = \int_{h_1}^0 (-mg) dy + \int_0^{h_2} (-mg) dy = \int_{h_1}^0 (-mg) dy - \int_{h_2}^0 (-mg) dy =$$

\downarrow
 posizione di riferimento "0"

$$= \left[-mgy \right]_{h_1}^0 - \left[-mgy \right]_{h_2}^0 = mgh_1 - mgh_2 = V_1 - V_2 = -\Delta V$$

Abbiamo così ancora conferma del fatto che il lavoro delle forze conservative è pari alla variazione di energia potenziale.

Questo risultato però non aggiunge nulla di nuovo a quanto già detto per cui, per ottenere un modo "strutturato" per trattare, si studiano le singole forze.

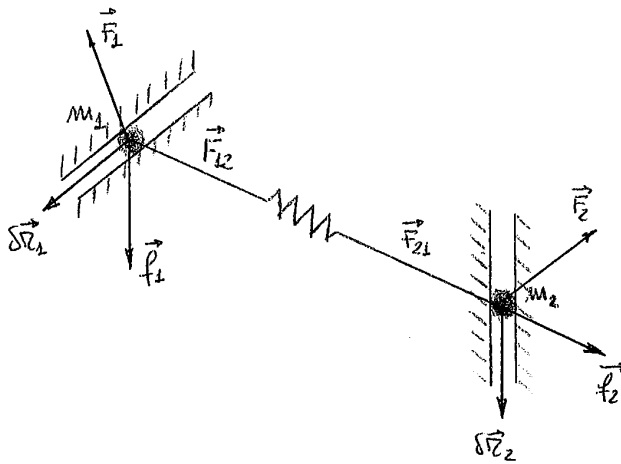
In generale, la risultante \vec{R}_i può essere scritta come:

$$\vec{R}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i$$

dove: $\vec{F}_i =$ forze attive (interne ed esterne)

$\vec{f}_i =$ reazioni vincolari

es)



Si immaginano due giuste con all'interno due palle, libere di muoversi, collegate da una molla.

NB: Non essendo le forze distribuite lungo le divisioni delle giuste, sono presenti attriti.

Risultando, le forze in gioco sono:

- $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \rightarrow$ forze attive esterne
- $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21} \rightarrow$ forze attive interne
- $\vec{f}_1, \vec{f}_2 \rightarrow$ reazioni vincolari
- $\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2 \rightarrow$ spostamenti virtuali

NB: In attesa di vedere come cambia delle forze di massa dato che il sistema non eccelso.

L'elemento di lavoro di queste analisi è che si fanno entrambe le forze interne nel bilancio di corpo libero e quindi anche i lavori interni (corrisp. potenziale della molla), cosa che prima non si faceva.

Si assume il lavoro virtuale come:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

oss: essendo un'uguaglianza tra due lavori, lo "0" non si comprende con il simbolo vettoriale ($\vec{0}$) ma come uno scalare (0).

Seguendo l'approccio del PLV, si deve fare la sommatoria:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ -kx \hat{i} \delta x \hat{i} + m_f \hat{j} \delta y \hat{j} &= 0 \\ -kx \delta x + m_f \delta y &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Però per l'ultima relazione risulta inutile il nostro step in quanto vi sono due coordinate prendo invece un'altra; si sceglie allora una coordinate indipendente (lagrangiana): θ .

Relato:

$$\begin{cases} x = L - L \cos \theta \\ y = L \sin \theta \end{cases}$$

ovvero δx e δy sapendo che $\frac{dx}{d\theta} = \frac{\delta x}{\delta \theta}$ poiché, lavorando con coordinate naturali, ho δ e non d :

$$\begin{cases} \delta x = L \sin \theta \delta \theta \\ \delta y = L \cos \theta \delta \theta \end{cases}$$

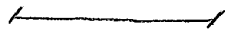
Sostituendo nell'espressione (1), si ottiene:

$$[-kL(1 - \cos \theta) L \sin \theta + m_f L \cos \theta] \delta \theta = 0$$

che, semplificando, diventa:

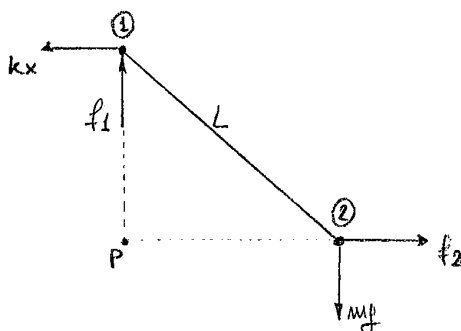
$$\boxed{(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \theta = \frac{m_f}{kL}}$$

Questa è la relazione di forze che fornisce la posizione di equilibrio e loro valore per tutti i valori di θ .



Come abbiamo operato su questo sistema la meccanica vettoriale?

- Diagramma di corpo libero



Terminologia :

- \vec{R} = forze risultanti
- \vec{F} = forze attive esterne/interne
- \vec{p} = reazioni vincolari
- $\vec{F}' = -m\vec{a}$ = forze di inerzia.
- $\vec{R} + \vec{F}'$ = forze effettive

Il PLV assume pertanto l'espressione detta Principio generalizzato di d'Alembert

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{F}'_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

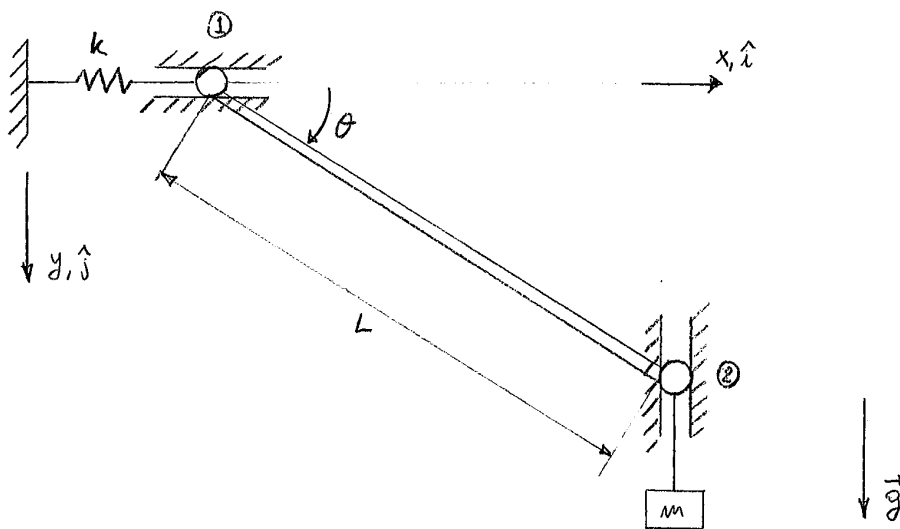
da cui, sfruttando le forze di inerzia, si ricava:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

PRINCIPIO GENERALIZZATO DI D'AMBÈRT
(PLV DINAMICA)

la derivata rispetto allo spostamento
è l'accelerazione.

es.



A differenza del caso statico, qui è necessario calcolare anche le forze di inerzia dato che il sistema può accelerare:

$$\vec{F}_1 \delta \vec{r}_1 + (\vec{F}_2 - m \vec{a}_2) \delta \vec{r}_2 = 0 \quad (1)$$

dove:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = x \hat{i} \\ \vec{r}_2 = y \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_1 = -kx \hat{i} \\ \vec{F}_2 = mg \hat{j} \end{cases}$$

Questo è l'espressione del principio generalizzato di d'Alembert per questo sistema a due gradi di libertà per ogni valore di θ ; pertanto, il numero tra le parentesi quadre deve essere nullo ($=0$).
 Applicando la opportuna semplificazione, si giunge all'equazione del moto:

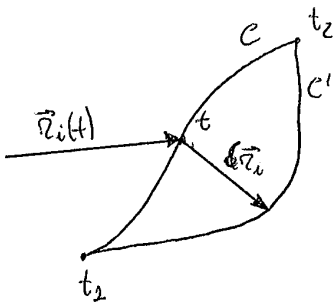
$$mL(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + kL(1 - \cos \theta) + mg = 0$$

oss. " $\ddot{\theta} \cos \theta$ " è un termine non lineare dato che come coefficiente presenta " $\cos \theta$ "

Per determinare i punti di equilibrio basta trovare due parti per cui vale:

$$\dot{\theta}_{eq} = \ddot{\theta}_{eq} = 0$$

oss. Anche quest'esercizio, come nel caso statico, può essere risolto con la meccanica vettoriale (Newtoniana).



Si integra sempre la derivata per eliminare la funzione e secondo membro: l'integrale della derivata è la funzione all'intervallo.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T-V) + \delta W_{nc}] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \delta \vec{r}_i) dt = \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \delta \vec{r}_i \right]_{t=t_1}^{t=t_2} = 0$$

Quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T-V) + \delta W_{nc}] dt = 0$$

$$\delta \vec{r}_i(t_1) = \delta \vec{r}_i(t_2) = \vec{0}$$

Indicando con il termine "legge di conservazione" la quantità $L = T - V$, si ripete alla formulazione del principio di Hamilton esteso:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc}) dt = 0$$

Nel caso in cui il sistema sia conservativo, allora vale $\delta W_{nc} = 0$ e l'eq. precedente diventa:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

$$L = T - V$$

$$\delta \vec{r}_i(t_1) = \delta \vec{r}_i(t_2) = \vec{0}, \forall i$$

• si calcola δT , che equivale a calcolare $\frac{dT}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}(\sin^2 \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}(\cos^2 \theta) = -2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\delta T = mL^2 \left(\frac{1}{2} (-\sin \theta \cos \theta) \dot{\theta}^2 \delta \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta T = mL^2 \left(-\sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \delta \theta + \cos^2 \theta \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \right)$$

• per calcolare δV si considera $df(v,w) = \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw$, per cui:

$$\delta V = kL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta \delta \theta + (-mgL \cos \theta \delta \theta)$$

Considerando il principio di Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (1)$$

si vuole ora calcolare la funzione lagrangiana $L = T - V$; allora, si scrive:

$$\delta L = \left[-mL^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + (-kL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta) + mgL \cos \theta \right] \delta \theta + mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \quad (2)$$

Si consideri adesso l'ultima termine di questa espressione e si svolga l'integrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} (mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \delta \dot{\theta}) dt = \int_{t_1}^{t_2} mL^2 \cos^2 \theta \cdot \frac{d}{dt}(\delta \theta) dt = \dots$$

avendo trovato una "derivata di una funzione per la funzione", si procede con l'integrazione per parti $\left(\frac{df(x)g(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right)$:

$$\dots = \left[mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \delta \theta \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} mL^2 (-2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}) \delta \theta dt \quad (3)$$

($\delta \theta(t_1) = \delta \theta(t_2)$)

Quindi, andando a sostituire nella (1) l'espressione (2), comparsa nella (3), si ottiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ mgL \cos \theta - mL^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + (-kL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta) + 2mL^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 - mL^2 \cos \theta \ddot{\theta} \right\} \delta \theta dt = 0, \quad \forall \delta \theta$$

Oss: questo integrale è pari e zero se la funzione integranda risulta nulla.

Quindi:

$$\left\{ \dots \right\} = 0 \quad \text{è l'espressione del moto.}$$

Si osserva che, calcolando la derivata del vettore posizione, che è funzione delle coordinate lagrangiane ed, eventualmente, del tempo:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \frac{dq_m}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

per cui $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ e quindi l'espressione abstratta delle componenti lagrangiane delle forze i :

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,me} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

Come si fa a passare da Hamilton a Lagrange?

Si scrive il principio di Hamilton esteso:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \overline{\delta W}_k) dt = 0 \quad (4)$$

questo risulta verificato a patto che valga la seguente:

$$\delta \vec{r}_i(t_1) = \delta \vec{r}_i(t_2) = \vec{0}$$

che equivale a dire:

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{conservazione (orbitare) tra } \delta \vec{r}_i \text{ e } \delta q_k$$

A questo punto si usano solo le coordinate lagrangiane le quali, considerando alcune semplificazioni, risulteranno più comode.

Da lagrangiane si funziona delle coordinate lagrangiane, delle velocità generalizzate ed, eventualmente, del tempo:

$$L = L \left(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_m}_{\text{coordinate lagrangiane}}, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m}_{\text{velocità}}, t \right)$$

Invece il lavoro delle forze non conservative può essere scritto utilizzando la lagrangiane delle forze:

$$\overline{\delta W}_k = \sum_{k=1}^m Q_k \delta q_k$$

Alla fine si cerca di esprimere:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad (2), \quad k = 1, \dots, m \quad \begin{array}{l} \text{Espressioni di Lagrange} \\ \text{(una equazione per ogni sei poli)} \end{array}$$

allo stesso modo, l'energia potenziale (elastica + gravitazionale) è:

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \ominus m g y = \frac{1}{2} k L^2 (1 - \cos \theta)^2 - m g L \sin \theta$$

↓
y diretta verso il basso

Si fanno adesso alcune considerazioni pratiche:

- è bene pensare il prima possibile alle coordinate lagrangiane
- scrivere T e V sullo stesso foglio in cui poi si effettuano i calcoli delle derivate.
- si considera $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ sempre!!
- conviene scrivere l'espressione di Lagrange nella seguente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_k$$

Da quest'ultima relazione si nota che Lagrange richiede il calcolo delle derivate da derivate (nell'approccio lagrangiano si deve considerare $\dot{\theta}$ come una nuova variabile, indipendente da θ):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \quad (\dot{\theta} \text{ rimane invertito})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m L^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \quad (\dot{\theta} \text{ rimane inalterato})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k L^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta - m g L \cos \theta$$

Per calcolare la componente lagrangiana della forza nei coordinate si nota che, nel nostro sistema, nulla è peso sono forze conservative, pertanto non ci sono forze non conservative (rotazione non forzata):

$$Q_k = 0$$

Bisogna ora lavorare rispetto al tempo e si ottiene:

$$\left(m L^2 \cos^2 \theta \ddot{\theta} - 2 m L^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \right) - \left(-m L^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 \right) + \left(k L^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta - m g L \cos \theta \right) = 0$$

Avendo definito il vettore posizio \hat{i} , si possono studiare le due forze:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1 = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i} \\ \vec{Q}_1 = \dot{x}_k \hat{i} \quad (\text{velocità istantanea di sinistra}) \end{array} \right.$$

e, allo stesso modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_2 = -c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i} \\ \vec{Q}_2 = \dot{x}_j \hat{i} \quad (\text{velocità istantanea di destra}) \end{array} \right.$$

Si può così determinare Q_k :

$$Q_k = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i} \frac{\partial (\dot{x}_k \hat{i})}{\partial \dot{x}_k} + \left(-c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i} \right) \frac{\partial (\dot{x}_j \hat{i})}{\partial \dot{x}_k}$$

(coordinate indipendenti)

Quindi, la componente lagrangiana delle forze associate allo spostamento $c_{kj} \hat{i}$:

$$Q_k = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k)$$

la quale può essere anche vista come:

$$Q_k = - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left[\frac{1}{2} c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k)^2 \right]$$

Quindi, le componenti lagrangiane sono ottenibili per derivazione di \mathcal{F} :

$$Q_k = - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} (\mathcal{F}(c_{kj}))$$

NB: Si fa una piccola correzione alle espressioni di Lagrange, includendo al primo membro la componente lagrangiana delle forze visose:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k}$$

• $q_1 = x_1$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{2} m_1 \cancel{\cancel{\dot{x}_1}} + \frac{1}{2} m_2 \cancel{\cancel{\dot{\Delta}}} + \frac{1}{2} m_2 \cancel{\cancel{\dot{x}_1}} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{\Delta} + \dot{x}_1) \\ \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{1}{2} k_2 \cancel{\cancel{x_1}} + \frac{1}{2} k_3 \cancel{\cancel{x_1}} + \frac{1}{2} k_3 \cancel{\cancel{\Delta}} = k_2 x_2 + k_3 (x_1 + \Delta) \end{cases}$$

Si può allora determinare la componente lagrangiana della forza (Q_1), considerando che:

- in coordinate esterne, Q_1 coincide con la forza stessa
- in coordinate relative, è bene prima ottenere il calcolo di Q_1

Lo si fa scegliendo un vettore positivo \hat{i} :

$$Q_1 = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_{i,me} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_1} = f_1 \hat{i} \frac{\partial (x_1) \hat{i}}{\partial x_1} - f_2 \hat{i} \frac{\partial (x_2) \hat{i}}{\partial x_1} = f_1 \hat{i} \frac{\partial (x_1) \hat{i}}{\partial x_1} - f_2 \hat{i} \frac{\partial (x_1 + \Delta) \hat{i}}{\partial x_1} = f_1 - f_2$$

Per scrivere l'espressione del moto per la coordinata lagrangiana q_1 si deve derivare rispetto al tempo:

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{\Delta} + \ddot{x}_1) + k_2 x_2 + k_3 (x_1 + \Delta) = f_1 - f_2} \quad (1)$$

• $q_2 = \Delta$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta}} = \frac{1}{2} m_2 \cancel{\cancel{\dot{\Delta}}} + \frac{1}{2} m_2 \cancel{\cancel{\dot{x}_1}} = m_2 (\dot{\Delta} + \dot{x}_1) \\ \frac{\partial T}{\partial \Delta} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \Delta} = \frac{1}{2} k_2 \cancel{\cancel{\Delta}} + \frac{1}{2} k_3 \cancel{\cancel{x_1}} + \frac{1}{2} k_3 \cancel{\cancel{\Delta}} = k_2 \Delta + k_3 (x_1 + \Delta) \end{cases}$$

Si calcola la componente lagrangiana della forza (Q_2) con le stesse considerazioni fatte in precedenza:

$$Q_2 = f_1 \hat{i} \frac{\partial (x_1) \hat{i}}{\partial \Delta} - f_2 \hat{i} \frac{\partial (x_2) \hat{i}}{\partial \Delta} = - f_2 \hat{i} \frac{\partial (x_1 + \Delta) \hat{i}}{\partial \Delta} = - f_2$$

(x_1 e Δ indipendenti)

Quindi, l'espressione del moto sarà:

$$\boxed{m_2 (\ddot{\Delta} + \ddot{x}_1) + k_2 \Delta + k_3 (\Delta + x_1) = - f_2} \quad (2)$$

Per T_1 si può scrivere:

$$T_1 = \sum_{k=1}^N M_k \dot{q}_k, \quad \text{con } M_k = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial p_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Invece, il termine T_0 viene invertito, cioè:

$$T_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \text{cost} (\dot{q}_k)^0$$

dove, $(\dot{q}_k)^0$ è la velocità generalizzata elevata alla "potenza" di i l'esponente di \dot{q}_k .

Nell'ipotesi che sia $T_1 = T_0 = 0$, $T_2 \neq 0$, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ il sistema è dice meccanico,

in questo caso si avrà che:

$$T (= T_2) = \frac{1}{2} \underbrace{\{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}}_{\substack{\text{la forma quadratiche può essere} \\ \text{scritta sotto forma di questo prodotto}}}, \quad m_{jk} = M_{jk}$$

dove $\{\dot{q}\} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$ ovvero $\{\dot{q}\}$ è il vettore colonna delle velocità generalizzate.

In questo modo si è dimostrato che la matrice di massa è simmetrica ($M_{jk} = M_{kj}$) per un sistema meccanico. Inoltre, la matrice di massa è anche reale (coefficienti reali) e definita positiva (per ogni insieme di velocità, il prodotto $\{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$ è sempre positivo).

oss. lo stesso ragionamento può essere fatto per dimostrare la simmetria delle matrici di momento $[k]$.