NUMERO: 806 DATA: 31/01/2014

APPUNTI

STUDENTE: Greco

MATERIA: Statistica + Esercizi

Prof. Vicario

Probabilità: 01/10/2012

nasce per dare una risposta ai giocatori d'azzardo.
ciascuna definizione di probabilità scaturisce da esigenze di tipo pratico.

fenomeno casuale (o aleatorio) (random) - fenomeno empirico i cui risultati non sono prevedibili a priori, caratterizzato dalla proprietà che la sua osservazione in un insieme fissato di circostanze non conduce sempre agli stessi risultati.

es: moneta ben bilanciata. Testa o croce?
mazzo con 52 carte. Quale carta estraggo?
il risultato non è prevedibile a priori.
C'è una regolarità statistica e non deterministica, ci sono delle oscillazioni attorno ad un valore che è costante.

definizione a priori della probabilità (o classica):
probabilità di un evento E è definita come il rapporto tra il numero s dei risultati favorevoli ed il numero n dei risultati possibili: $\mathbb{P}[E] = \frac{s}{n}$ purché i risultati siano ugualmente possibili e mutuamente escludentesi (incompatibili).

esempio 1: lancio di un dado simmetrico ed omogeneo
- qual è probab di avere come risultato un num dispari?
$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$
- qual è probab. di ottenere la faccia con quattro pallini?
$\frac{1}{6}$
- qual è probab. di avere come risultato un numero magg. di 2?
$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

esempio 2: esperimento casuale: estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte ben mescolate.
- qual è la probab. di estrarre 1 carta di cuori? $\frac{13}{52} = \dots$
di estrarre 1 carta con un numero compreso

maggiori informazioni.
All'aumentare del numero delle prove aumenta la prob. statistica
Definizione di probabilità statistica.
se in un numero molto grande di prove la freq. relativa tende a stabilizzarsi assumeremo quel valore come probabilità purché le prove si svolgono nelle stesse identiche condizioni.

~~$\lim_{N\to\infty} f_E = P[E]$~~ è vero che $\lim_{N\to\infty} P[|f_E - P[E]| < \varepsilon] = 1$ disuguaglianza di Tchebycheff

limite matematico — limite in probabilità

validità: campo assicurativo, biologico, controllo statistico della qualità, ...
ma...
come si possono ripetere ∞ prove sempre nelle stesse condizioni?

Definizione soggettivistica della probabilità:
la probab. di un evento E, secondo l'opinione di un individuo coerente, è il prezzo p che egli stima equo attribuire all'importo unitario esigibile solo al verificarsi di E.

o ad un evento il grado di fiducia che ho io che si verifichi quell'evento, purché l'individuo sia coerente.
la somma dei gradi di fiducia deve essere = 1.

per quanto riguarda: $\lim_{N\to\infty} P[|f_E - P[E]| < \varepsilon] = 1$
$f_E - P[E]$: deviazione

Evento E = un sottoinsieme di S

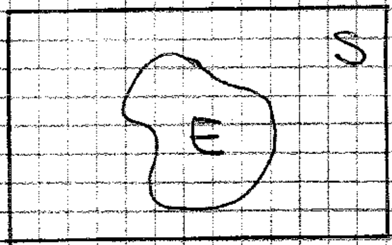


Diagramma di Venn relativo ad un evento E sottoinsieme di S.

A questo punto si è costruita l'algebra degli eventi.

(dalla totalità degli eventi)

Spazio degli eventi A = insieme costituito dagli eventi associati ad un fenomeno casuale.

Algebra degli eventi — lo scopo fondamentale della costruzione di tale algebra è quello di chiarire quali sottoinsiemi di S possono essere eventi e quali no.

Lo spazio dei campioni S appartiene allo spazio degli eventi e viene chiamato evento certo.

Dato E, evento qualsiasi appartenente allo spazio degli eventi A, si definisce evento complementare di E in S (E^c), l'evento che si verifica quando non si verifica E.

$S \quad \mathcal{A} = \{S, E, \bar{E}\} \qquad \complement E$, $\bar{E}$ = complem. di E.

Tutti gli elementi che non mi interessano stanno nel complementare.

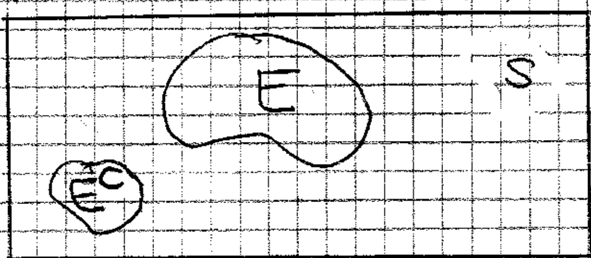


Diagramma di Venn relativo ad un evento E ed all'evento complementare E^c, nello spazio campione S.

Se si definisce come evento impossibile $\emptyset$ l'insieme vuoto, cioè l'insieme che non contiene nessuna descrizione, $\emptyset \in \mathcal{Q}$.

"un evento si è verificato"

$\Downarrow$

il risultato delle osservazioni effettuate ha una descrizione che

Esempi:

- lancio di una moneta $S = \{T, C\}$ $\#S = 2$
  $2^2 = 4$

$E_1 = \{testa\}$ → evento elementare xkè contiene un solo elemento.
$E_2 = \{croce\}$
$\mathcal{Q} = \{\emptyset, \{croce\}, \{testa\}, S\}$

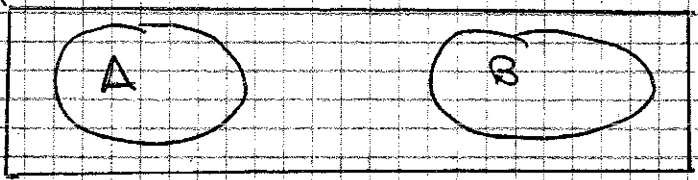
- lancio di un dado: $\#S = 6$ $2^6 = 64$ ESEMPIO UN PO' PIÙ DIFFICILE

$E = \{$present. di un num pari$\} = \{2, 4, 6\}$
$E_J = \{$present. del num $J\} = \{J\}$
con $J = 1, 2, \dots, 6$ eventi elementari

$\mathcal{Q} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, 2, 3\},$
$\{1, 2, 4\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5\} \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

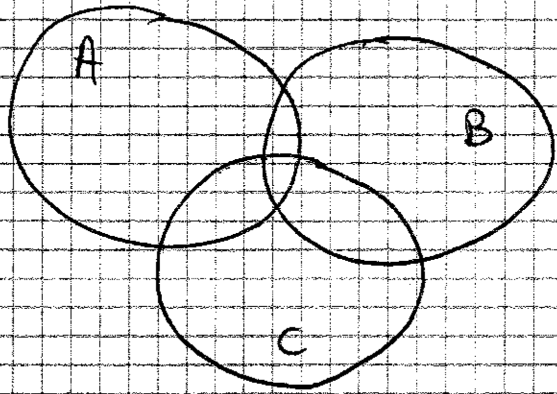
lancio di 2 monete:
$E_1 = \{$due teste$\} = \{(T, T)\}$
$E_2 = \{$testa, croce$\} = \{(T, C)\}$
$E_3 = \{$prima una croce e poi una testa$\} = \{(C, T)\}$
$E_4 = \{$due croci$\} = \{(C, C)\}$
$E = \{$una testa e una croce$\} = \{(T, C), (C, T)\}$
$F = \{$ <u>al più</u> una testa$\} = \{(T, C), (C, T), (C, C)\}$
$G = \{$almeno una testa$\} = \{(T, T), (C, T), (T, C)\}$

Se fossero mutuamente escludentesi



$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

Se avessi N eventi non mutuamente escludentesi, cos'è la probab. dell'unione? Devo sommare le probab. delle intersez. dispari e togliere le intersezioni degli ordini pari.



$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] - P[\overset{\cap}{AB}] + P[C] - P[\overset{\cap}{AC}] - P[\overset{\cap}{BC}] + P[\overset{\cap}{ABC}]$$

Spazio di probabilità $(S, \mathcal{A}, P[\cdot])$

$P[\cdot] : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

Questi 3 elementi sono tutti legati tra loro. Vanno definiti per completare il modello.

<u>Osservazione</u>: gli assiomi non ci dicono qual è il valore della probabilità, ma solo quali sono le funzioni che possono essere definite come funzioni di probabilità.

$S \rightarrow$ n° finito punti $\rightarrow$ punti cioè elementi.

$S \rightarrow$ n° infinito punti.

A_7 = "la somma dei numeri apparsi sulle facce superiori dei dadi è uguale a 7" $= \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$

$(1,1)\quad(1,2)\quad(1,3)\ \ldots\ldots\ (1,6)$
$(2,1)$
$\vdots$
$\qquad(5,2)$
$(6,1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6,6)$

Come esercizio: Volendo possiamo provare a fare $A_2, A_5, \ldots$

$$P[A_7] = \frac{\#A_7}{\#S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Controlli campione: da un grande lotto estraggo un campione e lo controllo. Si chiama <u>controllo di accettazione</u>, si basa sui piani di campionamento.

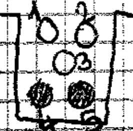
<u>Il piano di campionamento semplice:</u>
n, a

numero dei difettosi $\leq a$

Esempio: Si abbia un lotto costituito da M componenti dei quali K grandi sono difettosi, mentre i rimanenti $M-K$ non lo sono. L'esperimento consiste nell'estrazione di un campione di n componenti dal lotto. Qual è la probabilità che nel campione vi siano k componenti difettosi?

Esempio: Tipi spazi campione:
$S = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$

$\{$pres. 2 teste, pres. 2 croci, pres. 1 t e 1 c$\}$
$\qquad \frac{1}{4} \qquad\qquad \frac{1}{4} \qquad\qquad \frac{2}{4}$



$S = \{$bianco, nero$\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Costruiamo nel nostro caso <u>uno</u> spazio dei campioni.

$$= \binom{n}{k} \frac{K^k (M-K)^{n-k}}{M^k M^{n-k}} = \binom{n}{k} \left(\frac{K}{M}\right)^k \left(1-\frac{K}{M}\right)^{n-k}$$

più in là, lo ritroveremo in qst modo.

senza reimmissione:

$$(z_1, z_2, \dots, z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n)$$

$$\binom{n}{k} K \times (K-1) \times (K-2) \times \dots \times (K-k+1) \times (M-K) \times (M-K-1) \times \dots \times (M-K-n+k+1)$$

$$\boxed{P[A_k] = \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}} \qquad n \leq M, \; k \leq K, \; k \leq n}$$

Esempio:

4 amici

52 carte

Probabilità che 1 x sona ha 5 carte di cuori.

$M=52$

$K=13$

$n=13$

$k=5$

Terminare

$$P[5 \text{ carte di cuori}] = \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}} = \frac{\binom{13}{5}\binom{52-13}{13-5}}{\binom{52}{13}}$$

Spazi campione finiti con punti campione non equiprobabili:

1ª cosa: Associo ad ogni p.to campione la sua probabilità:

$p_j = P[\{s_j\}]$ con $j = 1, 2, \dots, N$ e $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$

se ho $A \subseteq S$: $P[A] = \sum_{j: s_j \in A} p_j$

$\uparrow$ evento

Probabilità condizionata:

si modifica a second che si è verificato oppure no un evento prima.

Esercizio d'esame sett. 2012:

1 nera 4 rosse.

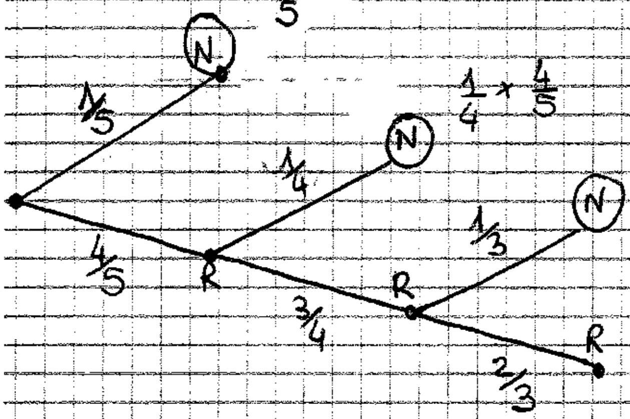
Chi estrae la pallina nera lava i piatti. Qual'è la probabilità? È sempre uguale?

La probabilità di lavare i piatti è sempre la stessa.

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$

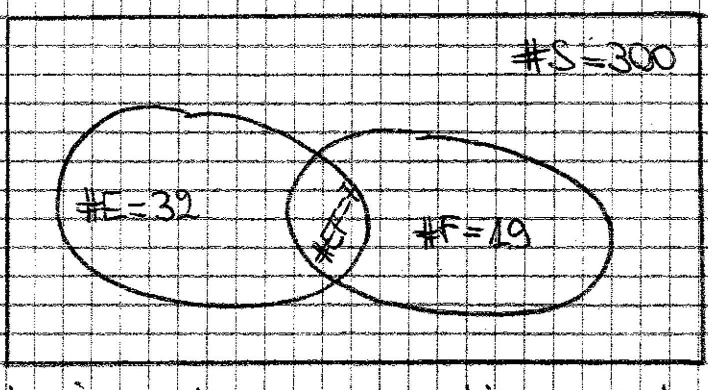
$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$



08/10/2012

Esempio:

Si abbia un lotto costituito da 300 pneumatici, dei quali 32 presentano delle irregolarità nello spessore del battistrada, 19 hanno le tracce non regolamentari e 7 presentano entrambi i difetti.



evento F: "estrazione di un pneumatico avente le tracce non regolamentari".

$$P[F] = \frac{19}{300} = \frac{\#F}{\#S}$$

Esempio:

Esperimento casuale: lancio di due dadi ben bilanciati.

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (2,1), (2,2), (2,3), \dots, (3,1), (3,2), \dots, (6,1), (6,2), (6,3), \dots\}$

Qual è la probab. del verificarsi dell'evento "la somma dei num. apparsi sulle facce superiori dei 2 dadi sia > di 8" (A) condizionata al verificarsi dell'evento "presentarsi almeno un 6" (B)?

A: "la somma dei numeri apparsi sulle facce superiori dei 2 dadi sia > di 8"

B: "presentarsi almeno un 6"

$A = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$B = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

$AB = \{(3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[AB]}{\mathbb{P}[B]} \overset{def}{=} \frac{\frac{\#AB}{\#S}}{\frac{\#B}{\#S}} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{7}{11}$$

Per esercizio $\mathbb{P}[B|A]$.

Esempio:

Una ditta produttrice di autovetture riceve da 3 fornitori (B_1, B_2, B_3) i cambi da installare sulle sue auto nelle seguenti percentuali: 65%, 25%, 10%. Sapendo che i 3 fornitori producono i cambi con una difettosità dichiarata rispettivamente del 5%, 10% e 25%, si vuole calcolare la percentuale (probab.) che ha la ditta produttrice di autovetture di ricevere un cambio difettoso.

$\mathbb{P}[B_3] = 0,10$

$\mathbb{P}[B_2] = 0,25$

$\mathbb{P}[B_1] = 0,65$

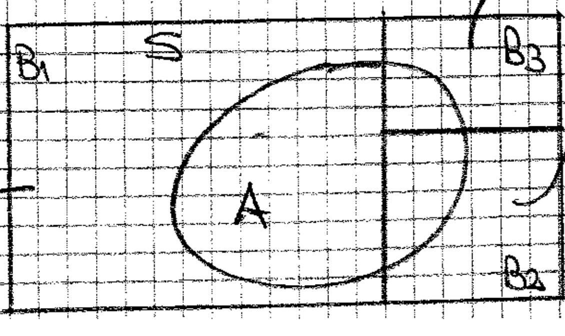


Diagramma di Venn relativo all'evento A (cambio difettoso) nello spazio campione S, definito in termini dei sottoinsiemi B_1, B_2

$P[A|B_2] \overset{def}{=} \dfrac{P[AB_2]}{P[B_2]}$, $P[AB_2] = P[A|B_2]P[B_2]$

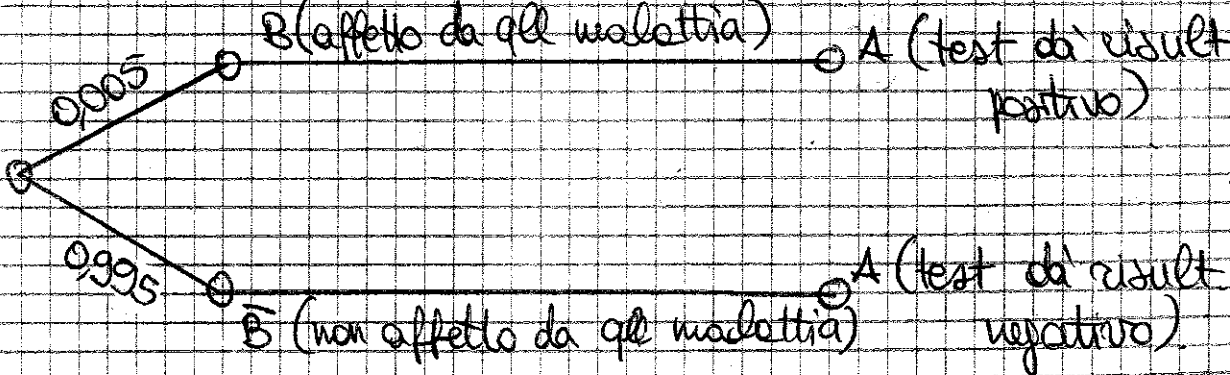
Formula di Bayes:

$$P[B_k|A] = \frac{P[A|B_k]P[B_k]}{\sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]}$$

Vedi stesso ragionamento per formula probab. totali.

Esempio:

La probab. che il test somministrato ad 1 persona affetta da una certa malattia (un tipo di cancro, HIV, tubercolosi, ...) sia positivo viene detta sensitività; la probab. che il test somministrato ad una persona non affetta da quella malattia sia negativo viene detta specificità. Ammettiamo di disporre di un test per la diagnosi precoce di quella malattia capace di fornire una diagnosi corretta nel 95% dei casi esaminati. Se l'incidenza di quella malattia (prevalenza) è pari allo 0,5% sulla popol. esaminata valutare qual'è la proporzione di diagnosi corrette di malattia.



$$P[B|A] = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}005}{\underbrace{0{,}95 \cdot 0{,}005 + 0{,}05 \cdot 0{,}995}_{P[\text{test sia positivo}]}} = 0{,}087 \cong 9\%$$

a fa così basso il tasso di errore, e che fortunatamente è una malattia che colpisce lo 0,5% delle persone Non è necessario uno screening così.

$P[A|B] = \dfrac{P[AB]}{P[B]} = \dfrac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \dfrac{1}{2}$ Sono indipendenti.

$P[A] = \dfrac{1}{2}$

$P[B] = \dfrac{1}{6}$

$P[AB] = \dfrac{3}{36}$

A e C sono indipendenti?

$P[A|C] = \dfrac{P[AC]}{P[C]} = 1$ $P[A] = \dfrac{1}{2}$ Non sono indipendenti.

$P[C] = \dfrac{5}{36}$

$P[AC] = P[C]$

B e C sono indipendenti?

$P[C|B] = \dfrac{P[CB]}{P[B]} = \dfrac{P[\emptyset]}{\frac{1}{6}} = 0$ $P[C] = \dfrac{5}{36}$ Non sono indipendenti.

09/10/2012

Esempio: Per chiarire def. di probab. soggettiva.

Ho un'urna A = Tutte palle bianche

$\bar{A}$ = Metà bianche - metà nere.

Supponiamo di pescare, vedere il colore e rimettere dentro.

B = estrazione palla bianca

$$P[A|B_{(1)}] = \frac{P[AB]}{P[B]} = \frac{\overbrace{P[B|A]}^{=1}\,\overbrace{P[A]}^{=\frac{1}{2}}}{\underbrace{P[B|A]}_{1}\,\underbrace{P[A]}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{P[B|\bar{A}]}_{\frac{1}{2}}\,\underbrace{P[\bar{A}]}_{=\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$P[\bar{A}|B_{(1)}] = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

$$P[A|B_{(2)}] = \ldots = \frac{\overbrace{P[B_{(2)}|A]}^{=1}\,\overbrace{P[A]}^{=2/3}}{\underbrace{P[B_{(2)}|A]}_{=1}\,\underbrace{P[A]}_{=\frac{2}{3}} + \underbrace{P[B_{(2)}|\bar{A}]}_{\frac{1}{2}}\,\underbrace{P[\bar{A}]}_{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{5}$$

A_1, A_2, A sono indipendenti a coppie ma non a 3 a 3.

Regole per il calcolo delle probab:

Regola moltiplicativa

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi $\in$ tutti allo stesso spazio degli eventi, si ha:

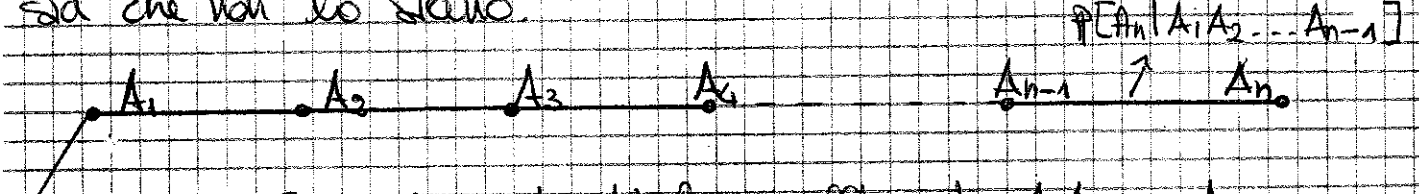
$$P[A_1 A_2 \dots A_n] = P[A_1] \times P[A_2 | A_1] \times P[A_3 | A_1 A_2] \times \dots \times P[A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}] \quad \text{con } P[A_1 A_2 \dots A_{n-1}] \neq 0$$

Se gli eventi sono indipend.:

$P[A_2|A_1] = P[A_2]$

$$P[A_3 | A_1 A_2] \overset{def}{=} \frac{P[A_1 A_2 A_3]}{P[A_1 A_2]} = \frac{\cancel{P[A_1] \times P[A_2]} \times P[A_3]}{\cancel{P[A_1] P[A_2]}} = P[A_3]$$

La regola moltiplicativa vale sempre, sia che siano indipend. sia che non lo siano.



Successione che dà luogo all'evento $A_1 A_2 \dots A_n$

Esempio:

Una scatola contiene 10 palline, metà bianche metà nere. Si estrae a caso 1 pallina alla volta, se ne registra il colore e la si rimette nella scatola con altre 2 palline dello stesso colore. Qual'è la probab. di estrarre 1 pallina bianca in ognuno dei primi 3 tentativi?

$B_i = \{$estrazione di 1 pallina bianca all'i-esimo tentativo$\}$

$$P[B_1 B_2 B_3] = P[B_1] \times P[B_2 | B_1] \times P[B_3 | B_1 B_2] = \frac{5}{10} \times \frac{7}{12} \times \frac{9}{14} = \frac{9}{48}$$

Qual è la probab di estrarre una pallina bianca al 3° tentativo? $P[B_3]$?

Qual'è la probab. di estrarre 2 palline nere e 1 bianca in 3 tentativi? $P[\text{2 nere et 1 bianca}] = P[B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3] + P[\bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3] + P[\bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3]$ Metto + xké sono mutuam. esclusivi

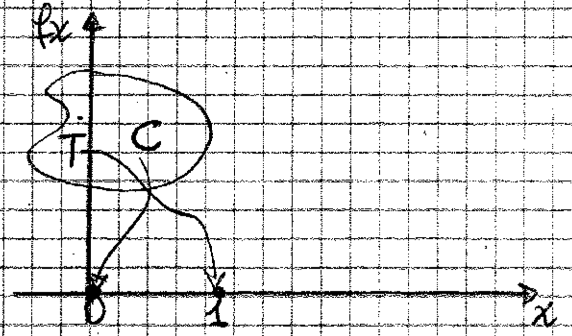
→ In qst casi poss usare diagramma ad albero.

$S = \{(i,j) : i = 1,2,\dots,6 \text{ e } j = 1,2,\dots,6\}$

1) $X((i,j)) = i + j \qquad \forall (i,j) \in S \quad \{2,3,4,\dots,12\} = X$

2) $Y((i,j)) = \max(i,j) \qquad \forall (i,j) \in S \quad \{1,2,3,\dots,6\} = Y$

3) $Z((i,j)) = |i - j| \qquad \forall (i,j) \in S \quad \{0,1,2,\dots,5\} = Z$



variabile casuale → discreta (S finiti o infiniti numerabili)

variabile casuale → continua (S infinito non è numerabile)

Funzione densità discreta o funzione di massa:

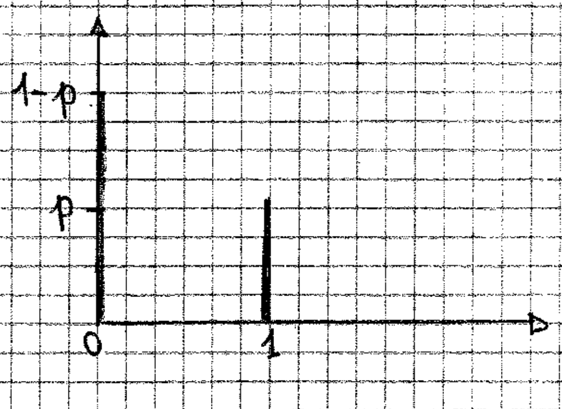
$$f_X(x) = \begin{cases} P[X = x_j] & \text{se } x = x_j \text{ con } j = 1,2,\dots,n,\dots \\ 0 & \text{se } x \neq x_j \end{cases}$$

Esempio moneta

$S = \{T, C\}$

variabile casuale X conta n° teste.

$p = P[T] \qquad 1-p = P[C]$



Bernoulli

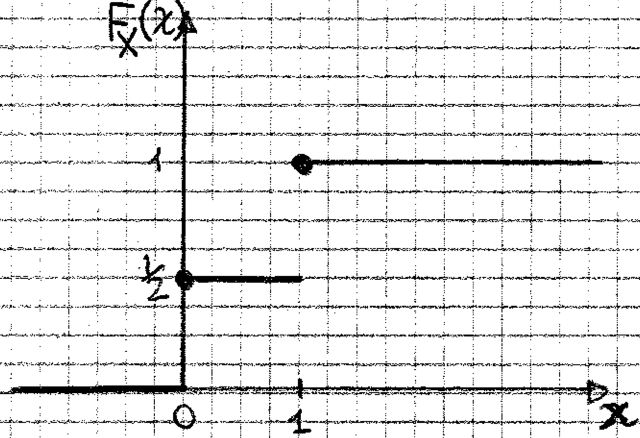
Funzione di distribuzione cumulativa

10/10/2012

$$F_X(x) = P[\{s: X(s) \le x\}] = P[X \le x]$$

a probabilità dell'evento costituito dai p.ti campioni s tali per cui se faccio l'immagine risulta essere $X \le x$, cioè la probabilità che la variabile X assuma valori $\le$ di x.

$S = \{T, C\}$ $\quad P[T] = P[C] = \frac{1}{2}$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1/2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Esempio:

$x = -2{,}5 \qquad F_X(-2{,}5) \stackrel{def}{=} P[X \le -2{,}5] = 0$

$x = 0 \qquad F_X(0) \stackrel{def}{=} P[X \le 0] = \frac{1}{2}$

$x = 0{,}35 \qquad F_X(0{,}35) \stackrel{def}{=} P[X \le 0{,}35] = \frac{1}{2}$

$x = 1 \qquad F_X(1) \stackrel{def}{=} P[X \le 1] = 1$

$x = 4{,}6 \qquad F_X(4{,}5) \stackrel{def}{=} P[X \le 4{,}6] = 1$

Esempio lancio di due dadi (grafico libro)

$x = 4{,}2 \qquad F_X(4{,}2) = P[X \le 4{,}2] = P[\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)\}]$

$$= \frac{\#A}{\#S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

II modo: $P[\{(1,1)\} \cup \{(1,2)\} \cup \ldots \cup \{(3,1)\}] \stackrel{\text{III cassi}}{=}$

$= P[\{(1,1)\}] + P[\{(1,2)\}] + \ldots + P[\{(3,1)\}] =$

$= P[X=2] + P[X=3] + P[X=3] + P[X=4] + P[X=4] + P[X=4] =$

$P[7 \leq x \leq 10] = f_X(7) + f_X(8) + f_X(9) + f_X(10) = F_X(10) - F_X(6)$

$P[7 \leq X < 10] = F_X(9) - F_X(6)$

Proprietà:

$F_X(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

1) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \rightarrow P[X \leq +\infty] = 1$

$\rightarrow P[X \leq -\infty] = P[\emptyset] = 0$

2) $F_X(x)$ è una funz. monotona non decrescente:

$\forall x_1, x_2$ tali che: $x_1 < x_2$: $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

3) $F_X(x)$ è continua da destra:

$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$ ⇐ Poco importante.

Funzione di densità di probabilità:

X variabile casuale continua

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

$f_X(x)$ funzione di densità di probabilità di X (o anche solo funzione di densità).

Proprietà:

$f_X(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

1) $f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

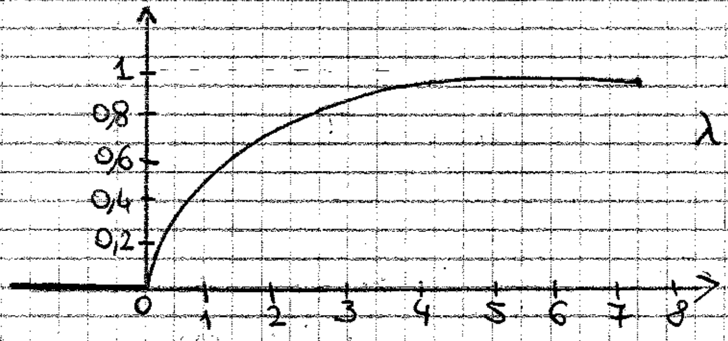
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\rightarrow \int = F_X(10) - F_X(0) = 1 - 0 = 1$

Esempio: Sia X una variabile casuale che rappresenta la durata (in anni) di un componente elettronico (per es. un condensatore) la cui funz. cumulativa di distribuzione è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

distribuzione esponenziale.



$\lambda = 0{,}45$

Grafico relativo alla funzione di distribuzione cumulativa esponenziale.

Facendo i calcoli si vede che:

① $f_X(x) \ge 0$

D_X: dominio o supporto di una variabile casuale, insieme dei pti x tali per cui vale ①

$$D_X = \{x : f_X(x) > 0\}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \quad \text{perché} \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{0} + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \overset{?}{=} 1 \rightarrow -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} = 0 + 1$$

Qual'è la probabilità che quel componente duri un tempo compreso tra 10 e 20 anni?

$$\mathbb{P}[10 < X \le 20] = \int_{10}^{20} \lambda \exp(-\lambda x)\,dx = \exp(-10\lambda) - \exp(-20\lambda)$$

$$\mathbb{P}[10 < X \le 20] = F_X(20) - F_X(10) = \mathbb{P}[X \le 20] - \mathbb{P}[X \le 10] = (1 - \exp(-20\lambda)) - (1 - \exp(-10\lambda)) = \exp(-10\lambda) - \exp(-20\lambda)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \quad ⊛$$

esempio: $\int_0^{\infty} e^{-4x}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} 4e^{-4x}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 1$

Se ho $\int_0^{\infty}$ posso sfruttare il risultato ⊛ senza calcolare l'integrale.

$$\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} 3xe^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

...empio:

... è una variab. casuale con: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{per } 1 < x < \infty \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

... $f_X(x)$ perchè soddisfa le proprietà:

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 0 + 1$ OK è una funz. di densità di probabilità.

$$E[X] \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\xi \to \infty} \log \xi = \infty$$

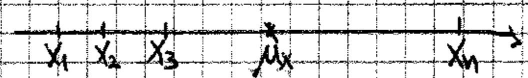
... valore atteso non esiste. Il valore deve essere finito.

...empio: Supponiamo di avere uno studente che prende: 18, 30, 19, 28, 29, 18 → media 24

... secondo studente: 26, 24, 23, 25, 22 → media 24

...n basta la media. Conta la variabilità. Dobbiamo indicare che per uno studente i risultati sono più variabili, per l'altro meno.

...variazione o scarto dal valore medio



$x_1 - \mu_X$

$x_2 - \mu_X$

$\vdots$

$x_n - \mu_X$

Nel discreto:

$$\sum_{x_j}(x_j - \mu_X)P[X = x_j] = \underbrace{\sum_{x_j} x_j P[X = x_j]}_{E[X]} - \sum_{x_j} \mu_X P[X = x_j] =$$

$$= E[X] - \mu_X \cdot 1 = 0$$

...viene 0 perchè qlk valore è positivo, qlk altro è negativo.
...ossiamo mettere il valore assoluto, allora vediamo che con valore assoluto non soddisfa alcune proprietà, allora lo elevo al quadrato.

Proprietà dei valori attesi:

i) $\mathbb{E}[c] = c \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}[c] = \int_{-\infty}^{+\infty} c f_X(x)\,dx = c \cdot 1 = c$

valore atteso di una costante è la costante stessa.

ii) $\mathbb{E}[c\,g(X)] = c\,\mathbb{E}[g(X)]$

la costante filtra attraverso il segno di valore atteso

iii) $\mathbb{E}[c_1 g_1(X) + \dots + c_n g_n(X)] = c_1 \mathbb{E}[g_1(X)] + \dots + c_n \mathbb{E}[g_n(X)]$

valore atteso di una comb. lineare di funz di variab. casuali =
= comb lineare dei singoli valori attesi

Vado ad applicare qst proprietà al caso 2):

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[X - \mu_X] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\mu_X] = \mathbb{E}[X] - \mu_X = 0$$

Teorema:

Qualunque sia la variab. casuale X si ha:

$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \qquad$ • se $\mathbb{E}[X^2]$ esiste

adatta per il calcolo

Dimostrazione:

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}[(X-\mu_X)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2] = \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{\mathbb{E}[2\mu_X X]}_{\text{II propr.}} + \underbrace{\mathbb{E}[\mu_X^2]}_{\text{I propr.}} =$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu_X \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\mu_X} + \mu_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2 \quad ■$$

• Se esiste xkè ad es. caso variab. continua:

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$ potrebbe divergere e quindi $\mathbb{E}[X^2]$ non esiste.

Trasformazione lineare:

$y = ax + b$

• $\mathbb{E}[y] = \mathbb{E}[ax+b] = \mathbb{E}[ax] + \mathbb{E}[b] = \underline{a\,\mathbb{E}[x] + b}$ — I valori attesi seguono la comb. lineare.

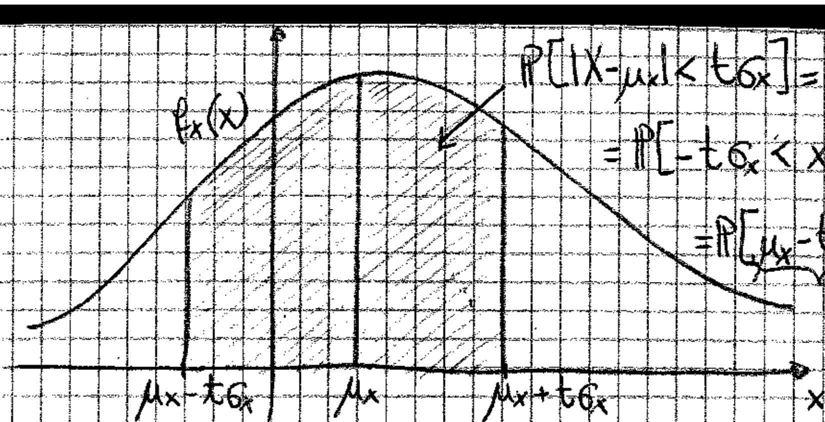
$\mu_y = a\mu_x + b$

• $\mathrm{var}[y] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}[y])^2] = \mathbb{E}[(ax + \cancel{b} - a\mathbb{E}[x] - \cancel{b})^2] =$

$= \mathbb{E}[a^2(X - \mathbb{E}[X])^2] = \underline{a^2\,\mathrm{var}[X]}$

La varianza è invariante per traslazione.

$\mathrm{var}[y] = a^2\,\mathrm{var}[X]$



$$P[|X-\mu_x| < t\sigma_x] =$$
$$= P[-t\sigma_x < X-\mu_x < +t\sigma_x] =$$
$$= P[\underbrace{\mu_x - t\sigma_x}_{a} < X < \underbrace{\mu_x + t\sigma_x}_{b}]$$

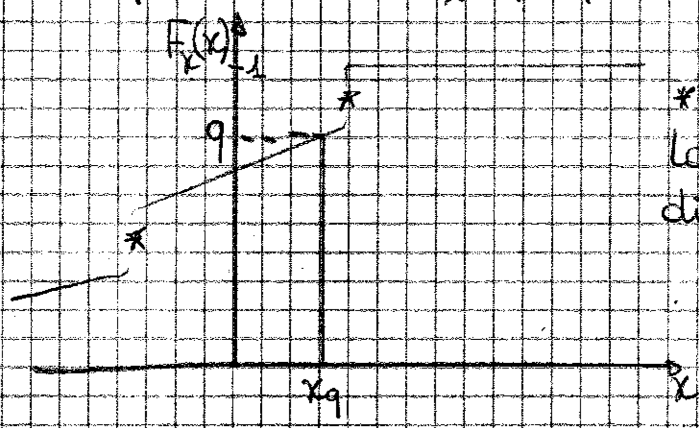
Ad esempio, se assumiamo $t=2$ si ha:

$$P[\mu_x - 2\sigma_x < X < \mu_x + 2\sigma_x] \geq \frac{3}{4} \qquad 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$$

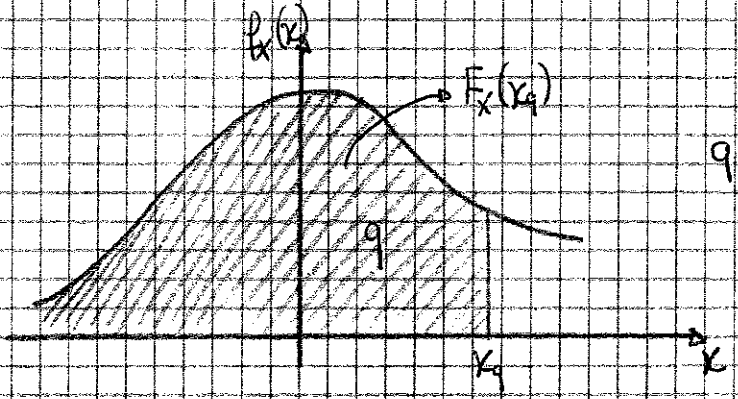
Se X seguisse la distrib. normale tale probab. sarebbe 95,45% del totale.

<u>Altre misure di posizione e dispersione</u>:

- <u>quantile q-esimo</u> x_q di una variab. casuale continua X è il più piccolo valore $x_q \in \mathbb{R}$ tale che $F_X(x_q) = q$.



* C'è un salto. Lo sappiamo dal discreto.



q: area sottesa da x_q verso sinistra.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 208

Range o escursione $x_{max} - x_{min}$

Moda: distrib. discrete valore più frequente
continue
Indice che misura la posizione con scarsi utilizzi

omenti:

omento di ordine n di X:

$$\mu'_n = E[X^n]$$

$X^n \to g(X)$

se $n=1$ $\mu'_1 = E[X] = \mu_X$

se $n=2$ $\mu'_2 = E[X^2]$

$var[X] = \underline{\mu'_2 - (\mu'_1)^2}$

Momento centrale di ordine n rispetto a μ_X:

$$\mu_n = E[(X-\mu_X)^n]$$

se $n=2$ $\mu_2 = E[(X-\mu_2)^2] \overset{def}{=} var[X]$

C'è un collegamento tra ◯ e ___

se $n=1$ $\mu_1 = E[X-\mu_X] \equiv 0$

amiglie di distribuzione:

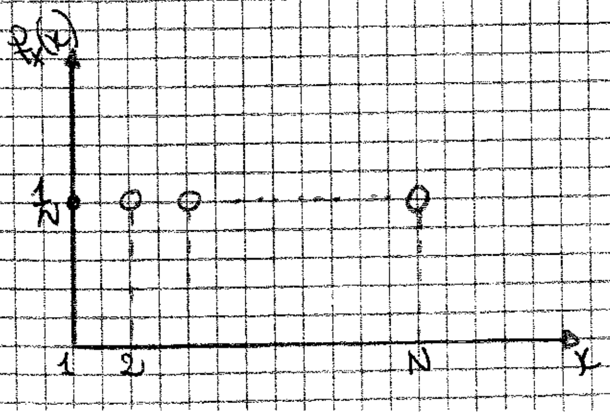
Distribuzione uniforme discreta:

Modellizza tutti quelli spazi campione con numero finito di punti equiprobabili.

già visto come esempio del lancio di un dado

di 2 dadi $P \frac{1}{36}$

$$f_X(x) = f_X(x:N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{per } x = 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$E[X^2] = 0^2 f_X(0) + 1^2 \cdot f_X(1) = p$

esempio: Moneta bilanciata.

$S = \{T, C\}$ x

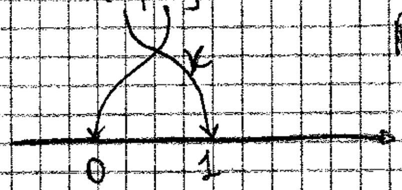
$\mathbb{P}[T] = p$

$\mathbb{P}[C] = 1 - p$

Distribuzione di Bernoulli con parametro p.

esempio: Urna contenente 2 palline bianche e 3 nere.

$S = \{b, n\}$



$\mathbb{P}[b] = p$

$\mathbb{P}[n] = 1 - p$

Distribuzione di Bernoulli.

Se le palline non vengono distinte con il colore ma con numeri da 1 a 5 allora la distribuzione è uniforme perché $\mathbb{P} = 1/5$.

esempio:

{difettoso, non difettoso} {guasto, non guasto}

{morte, vita}

Hanno in comune che sono fatti di 2 elementi. Si dicono dicotomici. Nel caso di spazi campione dicotomici distinguiamo 2 casi: successo e insuccesso.
Il successo è il risultato sul quale vogliamo indagare.

$\mathbb{P}[s] = p$ $\mathbb{P}[\bar{s}] = 1 - p$ Distribuzione di Bernoulli.

17/10/2002

Distribuz. binomiale:

$$f_X(x) = f_X(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{per } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Proprietà:

$$\sum_{x_j} f_X(x_j) = 1$$

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1$$

$P[(s,s,s,f,f,s,\ldots,f,f)] = p^x(1-p)^{n-x}$

X = variab. casuale che indica numero successi nelle n prove indipend. e ripetute di Bernoulli:

$$P[X=x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

Esempio: Esp. casuale: estrazione con reimmissione di un campione di n palle da un'urna che ne contiene M di cui K bianche.

- successo = estrazione di una palla bianca

$P[s] = \frac{K}{M}$ e $P[f] = 1 - \frac{K}{M}$ — La reimmissione garantisce l'indipendenza.

X = variab. casuale che conta numero di palle bianche nel campione di n palle estratte ~ distribuz. binomiale $\left(\frac{K}{M}, n\right)$

$f_X(x) = \binom{\ }{\ }$

Esp. casuale: lancio di un dado 10 volte. Qual'è la probab. di avere 4 volte la faccia "6"?

successo = presentarsi della faccia "6"

$P[s] = \frac{1}{6} \qquad P[f] = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$

binomiale: con $n=10$ $p=\frac{1}{6}$ e $x=4$

X: variab. casuale che conta il num. di volte che "6" appare.

$$P[X=4] = f_X\left(4; 10, \frac{1}{6}\right) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-4} = 0{,}0543$$

Esempio: Una ditta produce componenti per autovetture di cui il 5% difettoso. I componenti vengono venduti in lotti da 100 pezzi. Il lotto viene accettato se da un controllo casuale risulta che non più di 2 pezzi sono difettosi nello stesso lotto. Qual'è la probab. che un lotto venga accettato?

$S = \{\underset{s}{dif.}, \underset{f}{\overline{dif}}\} \qquad P[s] = 0{,}05 \qquad n = 100$

) esattamente 4 pezzi difettosi.

$$\mathbb{P}[X=4] = \mathbb{P}[X\leq 4] - \mathbb{P}[X\leq 3] = 0{,}022$$

$$\hookrightarrow \binom{12}{4} 0{,}1^4 (1-0{,}1)^{12-4}$$

Teorema di Bernoulli:

Variab. casuale X con parametri n e p.

v. c. $\frac{X}{n}$ = rapporto tra il numero dei successi in n prove e il numero delle prove. ⇒ frequenza

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n}\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{np} = p$$

$$var\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\underbrace{var[X]}_{np(1-p)} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Anche la variabile $\frac{X}{n}$ segue una binomiale e assume valori $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$

Corollario della disuguaglianza di Tchebycheff:

$$\mathbb{P}[|X-\mu_x| < t\sigma_x] \geq 1-\frac{1}{t^2}$$

$$F = \frac{X}{n} \to X \qquad \mathbb{P}\left[\left|\frac{X}{n}-p\right| < \underbrace{t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{\varepsilon}\right] \geq 1-\frac{1}{t^2}$$

$$t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \varepsilon$$

$$t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \qquad t^2 = \frac{n\varepsilon^2}{p(1-p)}$$

$$\mathbb{P}[|X/n - p| < \varepsilon] \geq 1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

$$n\to\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|F-p| < \varepsilon] = 1$$

$X \sim$ ipergeom. $(M=800,\ K=40,\ n=150)$

$P[\text{lotto venga accettato}] = P[x \leq 2] = \sum_{x=0}^{2} f_x(x; 800, 40, 150) =$

$$\sum_{x=0}^{2} \frac{\binom{40}{x}\binom{800-40}{150-x}}{\binom{800}{150}} \quad ??$$

Se M e K sono "sufficientemente grandi" e se il rapporto K/M si mantiene costante", posto $K/M = p$, la distribuz. ipergeometrica con parametri K, M e n è approssimata abbastanza bene dalla distribuzione binomiale di parametri n e p.

$$f_{x_{\text{ipergeom.}}}(x; M, K, n) \cong f_{x_{\text{bin}}}(x; n, p) \qquad p = \frac{K}{M} \qquad \text{con } x = 0, 1, \ldots, n$$

$$E[X_{\text{iperg.}}] = n\frac{K}{M} = np = E[X_{\text{bin}}]$$

I due valori attesi indipendentemente dal teorema coincidono sempre.

$$\text{var}[X_{\text{ipergeo}}] = n\frac{K}{M}\,\frac{M-K}{M}\,\frac{M-n}{M-1} = \underbrace{np(1-p)}_{\text{var}[X_{\text{bin}}]}\,\frac{M-n}{M-1}$$

Esempio: a) Una partita di 30 libri ne contiene 6 che presentano un difetto nella rilegatura. Se 10 libri vengono scelti a caso per un controllo, qual è la probab. che 3 libri tra i 10 estratti presentino quel difetto nella rilegatura?

$M=30 \quad K=6 \qquad s=$ difettoso nella rilegatura $\qquad n=10 \quad x=3.$

a probab. di successo cambia di volta in volta. Gli eventi non sono indip.

$X=$ variab. casuale conta n° libri difettosi.

$$P[X=3] = f_x(3; 30, 6, 10) = \frac{\binom{6}{3}\binom{30-6}{10-3}}{\binom{}{}} =$$

Approssimazione della densità binomiale mediante la densità di Poisson:

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \Rightarrow \frac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!}$$

$n \to \infty$

$p \to 0$

fissato l'intero x e posto $\lambda = np = cost$

Densità di Poisson chiamata anche distribuz. degli eventi rari.

Dimostrazione:

$$f_X(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!\, n^x} \lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!} \lambda^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right] = 1$$

$$e \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\right] = e^{-\lambda}\cdot 1$$

Esempio: Si sa che il 5% delle valvole prodotte da una ditta sono difettose qual'è la probab. di trovarne 2 difettose in un lotto costituito da 100 valvole?

Il 5% non è la percentuale del lotto. Ma la difettosità della produzione. In qst caso posso applicare la distrib. binomiale

s = difettoso f = non difettoso $P[S] = p = 0,05$

$n = 100$

X = variab. casuale conta n° difettose

$X \sim$ binomiale $(0.05, 100)$

distrib. binomiale

$$P[X=2] = f_X(2; 100, 0,05) = \binom{100}{2}(0.05)^2(1-0,05)^{98} = 0.081 = 8,1\%$$

distr. Poisson:

$x = 2 \quad \lambda = np = 100 \cdot 0.05 = 5$

Distribuzione geometrica: 23/10/2012

$$f_X(x) = f_X(x;p) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{per } x = 0,1,2,\dots,n, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con p parametro $\in (0,1)$

È una densità discreta perché:

$f_X(x) \geq 0$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} f_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} p(1-p)^x = p \sum_{x=0}^{+\infty} (1-p)^x = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Teorema:

$$E[X] = \frac{1-p}{p} \qquad var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Fissiamo ad esempio: $x = 4$

$$P[X=4] = \underset{s}{\underset{\downarrow}{p}}\underset{f}{\underset{\downarrow}{(1-p)}}\underset{f}{\underset{\downarrow}{(1-p)}}\underset{f}{\underset{\downarrow}{(1-p)}}\underset{f}{\underset{\downarrow}{(1-p)}}$$

$X =$ conta il num. degli insuccessi prima che si verifichi il primo successo.

Teorema:

Sia X una variabile casuale geometrica con parametro p, si ha:

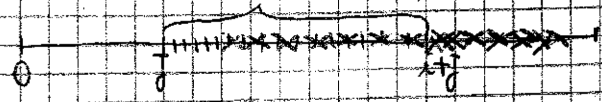
$$P[X \geq i+j \mid X \geq i] = P[X \geq j]$$

Variabile senza memoria nel discreto

Dimostrazione:

$$P[\underline{X \geq i+j} \mid \underline{X \geq i}] \overset{def}{=} \frac{P[\{X \geq i+j\} \cap \{X \geq i\}]}{P[X \geq i]} =$$

ci sono 'i' p.ti massa



$$= \frac{P[X \geq i+j]}{P[X \geq i]} = \frac{\sum_{x=i+j}^{+\infty} p(1-p)^x}{\sum_{x=i}^{+\infty} p(1-p)^x} = \frac{p\{(1-p)^{i+j} + (1-p)^{i+j+1} + (1-p)^{i+j+2} + \dots\}}{p\{(1-p)^i + (1-p)^{i+1} + (1-p)^{i+2} \dots\}} =$$

$$= \frac{\cancel{p}(1-p)^{i+j}\cancel{\{1+(1-p)+(1-p)^2+\dots\}}}{\cancel{p}\cancel{(1-p)^i}\cancel{\{1+(1-p)+(1-p)^2+\dots\}}} = (1-p)^j = P[X \geq j] =$$

$$= \sum_{k=j}^{+\infty} p(1-p)^k = p\{(1-p)^j + (1-p)^{j+1} + \dots\} = p(1-p)^j\{1+(1-p)+(1-p)^2+\dots\} =$$

$$\tilde{f}_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!} & \text{per } x = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ 1 - \sum\limits_{x=0}^{k-1} \dfrac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!} & \text{per } x = k \Rightarrow \tilde{f}_X(x=k) = \sum\limits_{x=k}^{\infty} f_X(x) = 1 - \sum\limits_{x=0}^{k-1} f_X(x). \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio:

Confrontare la probab. di un risultato $\underbrace{= a\ 9}_{A}$ con quella di uno $\underbrace{= a\ 10}_{B}$ su un lancio di 3 dadi.

Fissiamo la nostra attenzione sui 2 dadi.
somma con 2 dadi può essere: ~~2~~ — casi per avere 9 con 3 dadi

3 → 6 — 2
4 → 5
5
6
⋮
12

$P[A] = \frac{25}{216}$ $\qquad P[B] = \frac{27}{216}$ $\qquad \frac{25}{216} < \frac{27}{216}$

Confrontare la probabilità di almeno un risultato = a 6 su 4 lanci di un dado con la probab. di almeno un doppio 6 su 24 lanci di 2 dadi.

P[almeno 1 "un 6" su 4 lanci di un dado] =
$= 1 - P[\text{nessun "6" su 4 lanci di un dado}] = 1 - P[\bar{6}\bar{6}\bar{6}\bar{6}] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 =$

P[almeno un doppio 6] = 1 − P[nessun doppio 6] =

$n = 24$

$s = (6,6) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

Supponiamo che l'esercizio dice distrib. uniforme in (a,b):

$$f_X(x) = \begin{cases} k & a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_X(x) \geq 0 \rightarrow k > 0 + \frac{1}{b-a} = k$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{a} \cancel{0\,dx}^{\,0} + \int_a^b k\,dx + \int_b^{+\infty} \cancel{0\,dx}^{\,0} = k(b-a) \equiv 1$$

→ Deve essere $= 1$ affinché la funzione sia di densità di probab.

Data una funz. di distrib uniforme essa è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\mathcal{L}[a,b]}$$

$f_X(x)$ in $(0,1)$ sarà $f_X(x) = \frac{1}{1-0} = 1$

Teorema:

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Dimostrazione:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = 0 + \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx + 0 = \frac{1}{b-a}\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{1}{2}(b^2-a^2) = \frac{a+b}{2}$$

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0 + \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx + 0 - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{\overset{a^2+ab+b^2}{\cancel{b^3-a^3}}}{3\cancel{(b-a)}} - \frac{(a+b)^2}{4} = \ldots$$

Funzione di distrib. cumulativa uniforme:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0 & x \leq a \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot du + \int_a^x \frac{1}{b-a}\,du = \frac{1}{b-a}\,u\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot du + \int_a^b \frac{1}{b-a}\,du + \int_b^{x} 0\cdot du = \frac{1}{b-a}\,u\Big|_a^b = 1 & x \geq b \end{cases}$$

...unzione di distribuz. cumulativa normale:

Se i parametri della distrib. normale sono $\mu=0$ e $\sigma=1$, la distribuzione assume il nome di distribuzione normale centrata e ridotta o standardizzata.

- $Z = N(0,1)$
- $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
- $\Phi(x) =$

...a trasformazione di variabile casuale:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = *$$

è tale da trasformare qualsiasi casuale normale X nella variabile casuale Z centrata e ridotta o standardizzata.

$$* = \frac{1}{\sigma}(x-\mu) = \overbrace{\frac{1}{\sigma}}^{a} x \overbrace{-\frac{\mu}{\sigma}}^{b}$$

$y = g(x)$
$y = aX + b$

Valgono tutte le vecchie regole che abbiamo introdotto per le trasformazioni lineari.

Vediamo un pò la trasformazione:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

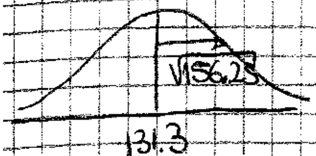
$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $\qquad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

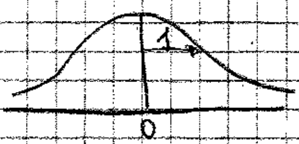
Non va bene perché ho sostituito x invece di X.

- $Z = N(0,1)$
- $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$
- $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{v^2}{2}\right)} dv$

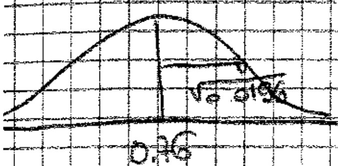
sercizi Sia $X = N(131.3, \sqrt{156.25})$ Trovare il valore della variab. normale standardizzata corrispondente al valore $x = 97.6$.

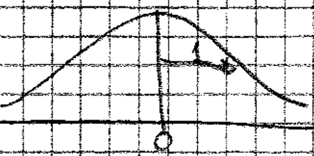
$$z = \frac{97.6 - 131.25}{\sqrt{156.25}} = -2.696$$





ia $X = N(0.76, \sqrt{0.0196})$ Determ. il valore della variabile x corrispondente lla variabile normale standardizzata $z = 1.94$.

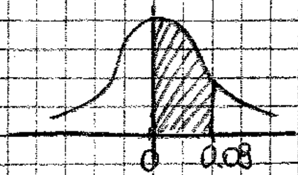




$$1.94 = \frac{x - 0.76}{\sqrt{0.0196}} \Rightarrow x = 1.0316$$

29/10/2012

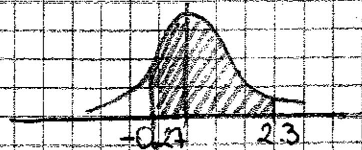
sempio: Trovare $P[0 < Z \leq 0.09]$ e $P[-0.27 < Z \leq 2.3]$

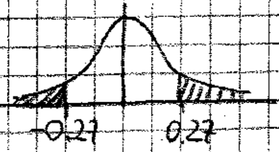


$$P[0 < Z \leq 0.09] = \Phi(0.09) - \Phi(0) =$$
$$= P[Z \leq 0.09] - P[Z \leq 0] =$$
$$= 0.5359 - 0.5 = 0.0359$$

$$P[a < x \leq b] = F_X(b) - F_X(a) =$$
$$= P[X \leq b] - P[X \leq a]$$

$$P[-0.27 < Z \leq 2.3] =$$
$$= P[Z \leq 2.3] - P[Z \leq -0.27] =$$
$$= 0.9893 - P[Z > +0.27] =$$
$$= 0.9893 - (1 - P[Z \leq 0.27]) =$$
$$= 0.9893 - (1 - 0.6064) =$$





Per procedere abbiamo 2 modi:
- standardizzo ① e ② e poi vado avanti

$$\begin{cases} -0.84 = \dfrac{49-\mu_A}{\sigma_A} \\ 1.28 = \dfrac{52-\mu_A}{\sigma_A} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{48-\mu_B}{\sigma_B} = -1.28 \\ \dfrac{53-\mu_B}{\sigma_B} = 1.125 \end{cases}$$

$\mu_A = 50.189 \quad \sigma_A^2 \cong 2 \qquad\qquad \mu_B = 50.66 \quad \sigma_B^2 = 4.32$

Per sapere se è meglio comprare da A o da B devo calcolare: $\mathbb{P}[X_A > X_B]$?

Distribuzione esponenziale (negativa):

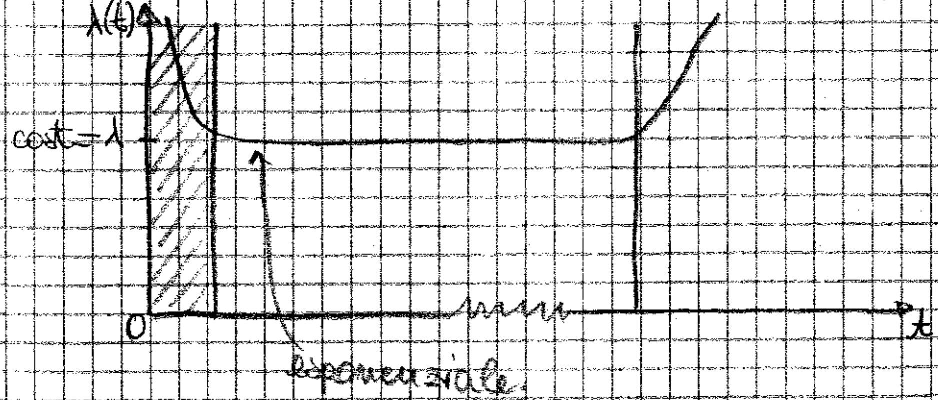
Teorema:

sia X v.c. esponenziale con parametro λ si ha:

$$\mathbb{P}[X > s+t \mid X > s] \overset{def}{=} \frac{\mathbb{P}[\{X > s+t\} \cap \{X > s\}]}{\mathbb{P}[X > s]} = \frac{\mathbb{P}[X > s+t]}{\mathbb{P}[X > s]} =$$

$$= \frac{1-\mathbb{P}[X \leq s+t]}{1-\mathbb{P}[X \leq s]} = \frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-e^{-(s+t)})}{\cancel{1}-(\cancel{1}-e^{-s})} = e^{-t} = \mathbb{P}[X > t]$$

La variab. esponenziale è usata per modellare la durata dei componenti elettronici, ed è una variabile senza memoria.



Trasformazione di variabile casuale:

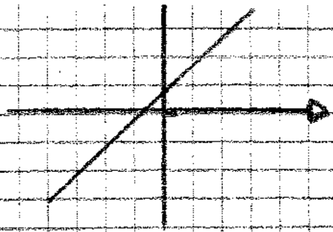
$E[g(x)] = E[Y] \qquad\qquad Y = g(x)$

Data x, $f(x) \longrightarrow f_Y(y)$?

Distinguiamo 2 casi:

$= g(x)$

monotona crescente



$$\frac{dy}{dx} = g'(x) > 0$$

$$\hookrightarrow x = g^{-1}(y) > 0$$

$$f_Y(y) \longrightarrow F_Y(y) \stackrel{def}{=} P[Y \leq y] = P[g(X) \leq y] = P[g^{-1}g(X) \leq g^{-1}(y)] = P[X \leq g^{-1}(y)] =$$

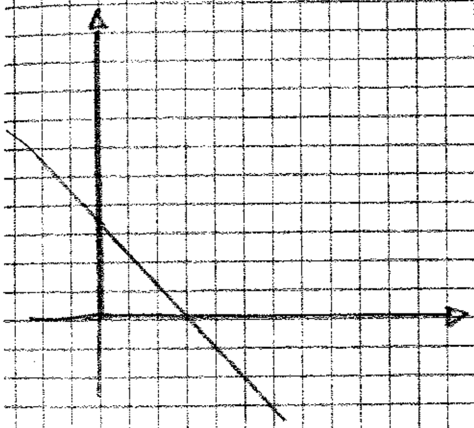
$$\stackrel{def}{=} F_X(g^{-1}(y))$$

$$= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\;)}{dy} = \frac{dF_X}{dx}\frac{dg^{-1}(y)}{dx} = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dx}$$

≥ 0 in D_Y

30/10/2012

monotona decrescente:



$$y = g(x) \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{dg^{-1}(y)}{dy} < 0$$

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) < 0$$

$$f_Y(y) \qquad F_Y(y) \stackrel{def}{=} P[Y \leq y] = P[g(X) \leq y] =$$

$$= P[X > g^{-1}(y)] =$$

$$= 1 - P[X \leq g^{-1}(y)] = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = -\underbrace{f_X(g^{-1}(y))}_{>0}\underbrace{\frac{dg^{-1}(y)}{dy}}_{<0}$$

$f_Y(y) \geq 0$

Esempio: Sia data una v.c. X che segue la distribuz. uniforme:

$$X \sim Unif\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$Y = \tan x \qquad f_Y(y)$?

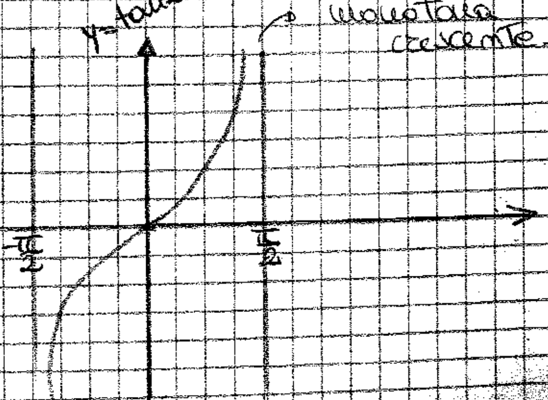
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \Rightarrow$$

Da qui possiamo calcolare $E[X]$ e $var[X]$

$$D_X = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\downarrow y = \tan x$$

$$D_Y = (-\infty, +\infty)$$



monotona crescente.

Proprietà: Supponiamo che $Y = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sigma_X}}}_{a} X + \underbrace{\left(-\frac{\mu_X}{\sigma_X}\right)}_{b}$, con $Y \to Z$

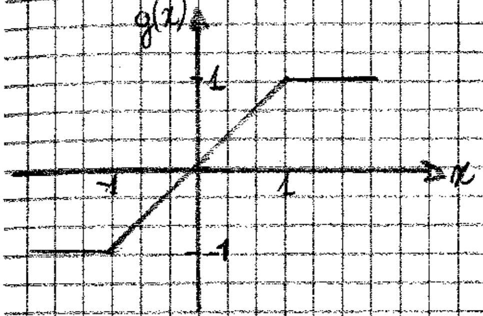
$Z \sim N\left(\frac{1}{\sigma_X}\mu_X - \frac{\mu_X}{\sigma_X}, \frac{1}{\sigma_X}\sigma_X\right)$

$f_Z(z) \sim N(0,1)$

Esempio: limitatore fatto così:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$X \longrightarrow \boxed{g(x)} \xrightarrow{\;Y\;}$$



$D_X = (-\infty, +\infty)$

$\downarrow y = g(x)$

$D_Y = (-1, 1)$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ P[X \leq y] = F_X(y) & -1 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$\overset{\parallel}{[Y \leq y]}$

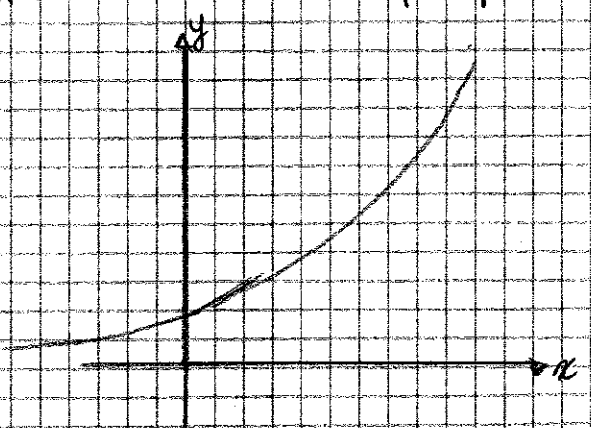
Esempio: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $\quad Y = \exp(X)$ $\quad f_Y(y)$?

$y = e^x$

$D_X = (-\infty, +\infty)$

$\downarrow y = e^x$

$D_Y = (0, +\infty)$



$x = \ln y$

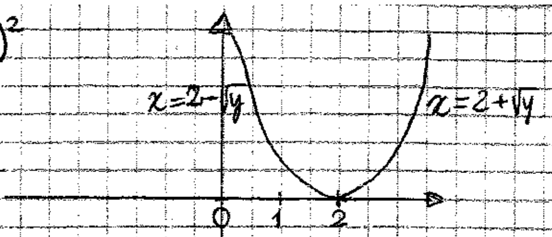
$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{y}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X\, y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2} \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

distribuzione lognormale

Molte volte per i nostri dati serve una trasf logaritmica per compattare l'asse x, quindi i dati seguiranno una distrib. lognormale.

Esempio: $X \sim N(2,\underbrace{9}_{\text{varianza}})$ $\quad Y=(X-2)^2$



$D_x = (-\infty, +\infty)$

$y=(x-2)^2$ non è biunivoca

$D_y = (0,+\infty)$

$D_x = (-\infty,+\infty) = (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$

$y=(x-2)^2 \to \pm\sqrt{y} = x-2 \qquad x = 2\pm\sqrt{y} \qquad \frac{dx}{dy} = \pm\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,3}\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(2-\sqrt{y})-2}{3}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,3}\frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(2+\sqrt{y})-2}{3}\right)^2} = * & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$

$$* = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{2}\frac{y}{9}} + \frac{1}{6\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{2}\frac{y}{9}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{18}}$$

$$E[Y] = \longrightarrow \int_0^{\infty} y\,\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}\,e^{-\frac{y}{18}}\,dy$$

$$E[(X-2)^2] = E[X^2-4X+4] = \underbrace{E[X^2]}_{var[X]+(E[X])^2} - 4\underbrace{E[X]}_{2} + 4$$

$$E[(X-E[X])^2] \stackrel{def}{=} var[X]$$

Processi stocastici:

Un proc. stocastico è uno schema astratto (modello matematico) di un fenomeno empirico che si sviluppa secondo le leggi probabilistiche.

Esempi proc. stocastici:

coda, temperatura e richiesta di energia elettrica, sistemi di riconoscimento della voce, sistemi per processare le immagini, ...

Processi di Poisson:

- numero di difetti per unità di superficie (s) o per unità di lunghezza (l) di un prodotto proveniente da una produzione continua
- numero di radiazioni emesse per unità di tempo da una sostanza radioattiva
- num. di batteri presenti per unità di volume in una coltura
- num. di incidenti mortali che si verificano in un anno lungo un prefissato tratto autostradale.

Ci interessa solo la lunghezza dell'intervallo

x: rappresenta il verificarsi dell'evento

La probab che non vi sia alcuna manifestazione è: $1-\alpha\Delta t$, in quanto si assume uguale a zero la probab che in tale interv. vi siano 2 o più manifestazioni per l'ipotesi 2.

La probab. che in un intervallo di lungh. t si verifichino esattamente k eventi è approssimativamente = alla probab. che esattamente 1 evento sia verificato in k intervallini (t_i, t_{i+1}) tra gli n in cui è stato suddiviso quello di lunghezza t:

$$X \sim Bin(n,p)$$

$$P[k \text{ eventi Poissoniani in } (0,t)] = P[X=k] = \binom{n}{k}(\alpha\Delta t)^k(1-\alpha\Delta t)^{n-k} = \ldots$$

Se $\Delta t \to 0$: $\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha t}{n}\right)^{n-k} = \frac{(\alpha t)^k e^{(-\alpha t)}}{k!}$

α: num. medio di eventi Poissoniani che accadono nell'unità di tempo.

$E[N(t)] = \alpha t$

Applicazione ai processi di Poisson:

$P[T_1 > t] = P[N(t)=0] = e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^0}{0!} = e^{-\alpha t}$

$F_{T_1}(t) = P[T_1 \leq t] = 1 - P[T_1 > t] =$
$= 1 - e^{-\alpha t}$

$f_{T_1}(t) \sim exp(\alpha)$

$P[T_2 > t] = e^{-\alpha t}$

T_i: v.c. che misura il tempo che intercorre tra le diverse manifestazioni.

$T_i \sim exp(\alpha)$

Caso particolare: conteggio relativo al numero di guasti.

$P[T > t] = P$[non si è verificato alcun guasto nell'intervallo di lunghezza t] = affidabilità $= R(t)$

$R(t) = 1 - F_T(t)$

Esempio: 05/11/2012

Supponiamo che si introduca un vaccino in un liquido contenuto in un recipiente avente un volume pari a V mm^3 e che il vaccino, allo stadio in cui viene introdotto, contenga $\overline{0{,}005}^{m}$ virus per mm^3. Si estragga una provetta di liquido avente un volume pari a v mm^3. Si vuole conoscere la probabilità che nella provetta passino k virus.

Virus uniformemente distribuiti nel liquido.

P[un virus venga a passare dal recipiente alla provetta] $= \frac{\cancel{m}v}{\cancel{m}V} = p$
↳ successo

$$P[X=k] = \binom{mV}{k}\left(\frac{v}{V}\right)^k\left(1-\frac{v}{V}\right)^{mV-k}$$

Ad esempio: $P[X=3] = \binom{mV}{3}\left(\frac{v}{V}\right)^3\left(1-\frac{v}{V}\right)^{mV-3}$

Assunzione: le provette hanno un volume molto minore rispetto a quello del recipiente.

Distrib. binomiale $\cong$ distrib. di Poisson con parametro $\lambda \cong$
$\cong np = (mV)\frac{v}{\cancel{V}} = mv$

$$P[X=k] = \frac{e^{(-mv)}(mv)^k}{k!}$$

Per esempio: $P[X=0] = \frac{e^{(-0.005\cdot 600)}(0.005\cdot 600)^0}{0!} = e^{-3} = 5\%$

Esempio: In una ditta è stato rilevato che il numero di pezzi di ricambio di un certo tipo richiesti in un dato periodo segue una distribuzione di Poisson. Se il num. medio di pezzi richiesti al giorno è 2, quanti pezzi di ricambio di quel tipo dovrebbe immagazzinare la ditta per avere una probab. del 90% di avere merce a sufficienza per soddisfare la domanda dei clienti per un periodo di un mese? 26 giorni

x = numero incognito di pezzi di ricambio che la ditta dovrebbe tenere in magazzino.

X = V.C. rappresentante il num. di pezzi richiesti in un mese (26 gg lavor.)

$P[X \leq x] \geq 0.9$

Qual'è la probab. che in un rotolo di 40 m^2 vi sia un difetto di Tipo A
...to che si sono riscontrati complessivamente 3 difetti dei 2 tipi:

$$N_A(40m^2)=1 \mid N(40m^2)=3] = \frac{P[\{N_A(40m^2)=1\} \cap \{N(40m^2)=3\}]}{P[N(40m^2)=3]} =$$

$$\frac{P[\{N_A(40m^2)=1\}] \cdot P[\{N_B(40m^2)=2\}]}{P[N(40m^2)=3]} = \circledast$$

$(40m^2) \sim \text{Poisson}\left(\frac{1}{40}/\cancel{m^2} \cdot 40\cancel{m^2} = 1\right)$

$(40m^2) \sim \text{Poisson}\left(\frac{1}{25}/\cancel{m^2} \cdot 40\cancel{m^2} = \frac{8}{5}\right)$

$40m^2) \sim \text{Poisson}\left(\frac{13}{200}/\cancel{m^2} \cdot 40\cancel{m^2} = \frac{13}{5}\right)$

$$= \frac{\cancel{e^{-1}}\frac{1^1}{1!} \cdot \frac{\cancel{e^{-8/5}}\left(\frac{8}{5}\right)^2}{2!}}{\frac{\cancel{e^{-13/5}}\left(\frac{13}{5}\right)^3}{3!}} = \frac{3!}{1!\,2!} \frac{1^1\left(\frac{8}{5}\right)^2}{\left(\frac{13}{5}\right)^1\left(\frac{13}{5}\right)^2} = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{13}\right)^1\left(\frac{8}{\cancel{8}} \cdot \frac{8}{13}\right)^2 = \binom{\overset{n}{3}}{\underset{x}{2}}\left(\overset{p}{\frac{5}{13}}\right)\left(\overset{1-p}{1-\frac{5}{13}}\right)^2$$

...ando si parla del condizionamento di una somma viene sempre
...na binomiale.

...rcizio 3: I clienti arrivano a una banca secondo un processo di
...isson di Tasso pari a λ. Supponiamo che 2 clienti siano arrivati
...lla 1ª ora. Qual'è la probab. che:

Entrambi siano arrivati durante i primi 20 minuti?

$N(t) \sim \text{Poisson}(\alpha t)$

$[N(20\,min)=2 \mid N(1h)=2] =$

0 ———— 60 min

$$\frac{P[N(20\,min)=2 \text{ et } N(1h)=2]}{P[N(1h)=2]} = \frac{P[N(20\,min)=2 \text{ et } N(40\,min)=0]}{P[N(1h)=2]} =$$

$$\frac{P[N(20\,min)=2] \cdot P[N(40\,min)=0]}{P[N(1h)=2]} = \frac{\cancel{e^{-20\lambda}}\frac{(20\lambda)^2}{2!} \cdot \cancel{e^{-40\lambda}}\frac{(40\lambda)^0}{0!}}{\cancel{e^{-60}}\frac{(60\lambda)^2}{2!}} =$$

Se i calcoli sono giusti l'exp si semplificano

$N(20\,min) \sim \text{Poisson}(20\lambda)$

$N(40\,min) \sim \text{Poisson}(40\lambda)$

Età: continua, Anno di nascita: discreto.

Sesso: caratteristiche qualitative.

n: dimensione del campione. N: popolazione (se finita).

<u>Casualità</u>: fissata la numerosità del campione, tutti i campioni con la stessa numerosità, devono avere la stessa probabilità di essere estratti.

Esempio: $N=32$ $n=7$

$$\binom{32}{7} = \frac{32!}{(32-7)!\,7!} = \frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot \cancel{28}\cdot 27\cdot 26\cdot \cancel{25!}}{\cancel{25!}\,\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \dots\dots$$

$$p = \frac{1}{\binom{N}{n}} \leftarrow \text{campionamento casuale}$$

Esempio: studenti iscritti al corso di statistica.

000 Palline da 0 a 9
001
002 Estraggo 238...... i numeri estratti andranno a far parte del campione.
⋮

Questo tipo di campionamento non va bene per le aziende. Per esempio controllo pneumatici di Fiat.

campionamento sistematico:

devo scegliere un valore iniziale n_0 e poi un passo. che deve essere calcolato dal rapporto produzione campione.

Nel campionamento sistematico bisogna fare attenzione alla ricorsività

<u>Campionamento stratificato</u>:

Si considera la popolazione e si suddivide in strati. (o sottopopolazione). Da ciascuno strato estraggo degli elementi, non è detto che devo estrarre con la stessa numerosità.

Gr 1.	Gr 2.	Gr. K-esimo
x_{11}	x_{12}	x_{1K}
x_{21}	x_{22}	x_{2K}
⋮	⋮	⋮
$x_{n_1 1}$	$x_{n_2 2}$	$x_{n_K K}$
$n_1, \bar{x}_1, S_1^2$	$n_2, \bar{x}_2, S_2^2$	$n_K, \bar{x}_K, S_K^2$

Questo è un buon sistema di raccolta dati.

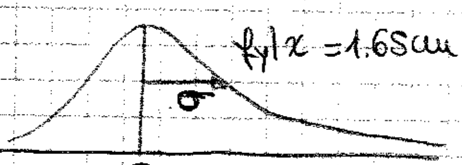
$$n = \sum_{j=1}^{K} n_j$$

variabile casuale doppia $(X,Y) \leadsto f_{XY}(x,y)$

$f_X, E[X], var[X]$ $\qquad$ $f_Y, E[Y], var[Y]$

se conosco la congiunta ottengo f_X ed f_Y ma conoscendo f_X ed f_Y per avere f_{XY} non posso fare nulla a meno che non sono indipendenti.

$Y|X = 1{,}65\,cm \leadsto f_Y|X = x$



$E[Y|X = 1.65cm] = 54{,}5\,kg$ $\qquad$ $E[\ldots] = 60.1\,kg$

nel 1° caso mi aspetto una varianza > del 2° caso.

$Y = f(X)$ $\qquad$ $Y = aX + b$

Indipendenza di n variabili casuali:

X, Y definite sullo stesso spazio di probabilità.

X e Y si dicono indipendenti se lo sono gli eventi:

$\{s : X(s) \leq x\} = \{X \leq x\} \ \forall x$ e $\{s : Y(s) \leq y\} = \{Y \leq y\} \ \forall y$

$$P[\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}] = P[X \leq x]\, P[Y \leq y]$$

$$\underbrace{\{(x,y) : X \leq x \text{ et } Y \leq y\}}_{F_{XY}(x,y)} \qquad P[X \leq x] = F_X(x) \qquad P[Y \leq y] = F_Y(y)$$

$$F_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

Osservazione: Cosa vuol dire i.i.d. $N(0, \sigma^2)$? Indipendenti e identicamente distribuite, secondo una normale.

Quali sono i vantaggi dell'indipendenza?
Indipendenza: assenza di un qualsiasi tipo di legame.
Indipendenza permette delle semplificazioni nelle formule

$E[X_i] = \mu, \quad var[X_i] = \sigma^2$

$$E[X_1 X_2 \cdots X_n] = \begin{cases} \int_{-\infty} dx_n \int_{-\infty} dx_{n-1} \cdots \int_{-\infty} x_1 x_2 \ldots x_n \ldots & \text{(complicato)} \\ E[X_1]\,E[X_2] \ldots E[X_n] & \text{se sono indipendenti} \end{cases}$$

$$var[a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n] = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \ldots + a_n^2 \sigma_n^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \, cov[X_i, X_j]$$

$\sigma_i^2 = var[X_i]$

$n = 2 \quad x, y \quad a, b$

$var[Z] \stackrel{def}{=} E[(Z - E[Z])^2]$

$$\begin{aligned} var[aX+bY] &\stackrel{def}{=} E[((aX+bY) - E[aX+bY])^2] = \\ &= E[(aX+bY - aE[X] - bE[Y])^2] = \\ &= E[(a(X-\mu_x) + b(Y-\mu_y))^2] = \\ &= E[a^2(X-\mu_x)^2 + b^2(Y-\mu_y)^2 + 2ab(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = \\ &= a^2 E[(X-\mu_x)^2] + b^2 E[(Y-\mu_y)^2] + 2ab\, E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = \\ &= a^2 var[X] + b^2 var[Y] + 2ab\, cov[X,Y] \end{aligned}$$

Covarianza: $cov[X,Y] = \sigma_{XY}$

$X = Y \quad cov[X,X] = E[(X-\mu_X)^2] = var[X] = \sigma_X^2$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{array} \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{array} & \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{2n} \\ & & & \vdots \\ \sigma_{1n} & \ldots & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(i,j): $cov[X_i, X_j]$

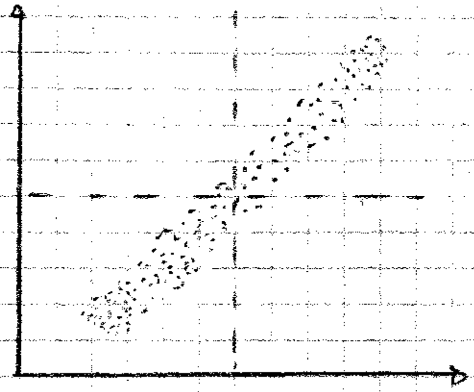
matrice varianza-covarianza o
" varianza o
" covarianza.

Sulla diagonale principale ci sono tutte le varianze mentre fuori ci sono le covarianze.

$\sigma_{xy} = cov[X,Y] \stackrel{def}{=} E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] \stackrel{calc}{=} E[XY] - \mu_x \mu_y$

$$E[XY - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x\mu_y] = E[XY] - \mu_x \underbrace{E[Y]}_{\mu_y} - \cancel{\mu_y \underbrace{E[X]}_{\mu_x}} + \cancel{\mu_x\mu_y} = E[XY] - \mu_x \mu_y$$

12/11/2012



la covarianza come indice che misura l'intensità di una relazione tra 2 variabili lascia a desiderare xkè la covarianza è fortemente legata alla dispersione delle variabili, in statistica si normalizza l'indice.

$$\left|\frac{\text{indice}}{\text{max valore}}\right| \leq 1$$

Si dimostra con la disuguaglianza triangolare che $\max cov[X,Y] = \sigma_x \sigma_y$

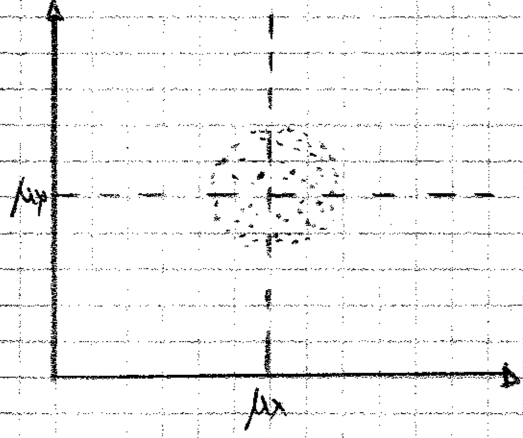
coefficiente di correlazione $\rho_{xy} = \frac{cov[X,Y]}{\sigma_x \sigma_y}$ $\quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ Il segno viene sempre dato dalla covarianza.

Casi particolari:

$\rho_{xy} = 0$ X, Y si dicono non correlate (non c'è una relazione lineare tra X e Y).

$|\rho_{xy}| = 1$

esempi:



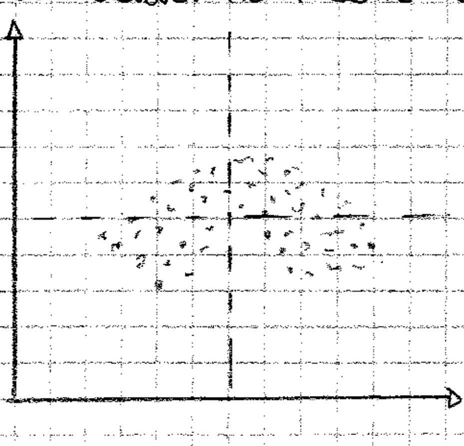
$cov[X,Y] \cong 0$

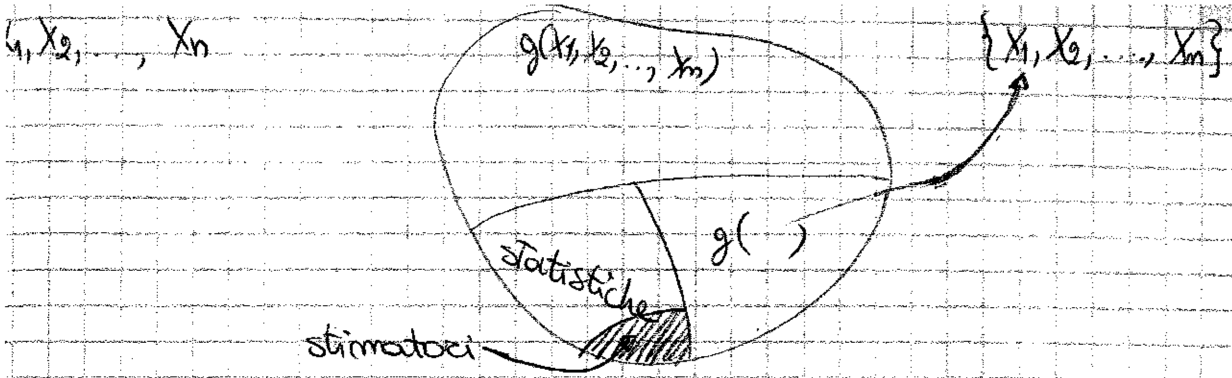
X e Y non sono legate linearmente.

Che relazione c'è tra indipendenza e non correlazione?

Se 2 variabili X e Y sono indipendenti posso dire che non sono correlate.

Se 2 variabili non sono correlate non è detto che sono indipendenti





statistica: una funzione di variabili casuali campionari che non contiene parametri.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad g:(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{X}_n \in \mathbb{R}$$

$$\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - \min(X_1, X_2, \dots, X_n) = R$$

cioè ho un campione $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ che sappiamo che è fatto da v. indipendenti ma non è ordinato.
Se lo ordino allora non c'è più indipendenza.

R: range o escursione è una statistica perchè non contiene parametri incogniti.

$$X_1 + 2X_2 - 4X_3 + \dots - X_n$$

$\bar{X}_n - \mu$ non è una statistica.

stimatori: statistiche per stimare un parametro o una funzione.

$$T = t(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

θ: parametro della popolazione.

$\hat{\theta}$: stima del parametro

Esempio con la media:

θ	μ
T	$\bar{X}_n$
$\hat{\theta}$	$\bar{x}_n = \hat{\mu}$

Ho diversi campioni formati da $\{\circ, \circ, \circ, \circ \dots \circ\}$ Trovo la stima della media della popolazione. Con una elaborazione trovo una distribuzione empirica e in seguito una distribuzione che meglio si adatta.

Teorema limite centrale:
garantisce distribuzione della media campionaria.

Data una popolazione distribuita secondo una funzione f la distribuzione della media campionaria tende ad una distribuzione normale quando $n \to \infty$.

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n\},\ f(\cdot),\ f_{\bar{X}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Pag 173 grafico 7.1 Con $n=50$ la differenza tra una normale e una distribuzione delle medie non esiste.
Partendo da una distribuzione asimmetrica, l'approssimazione con una normale è ottima con $n=50$.
Se aumento la numerosità del campione l'approssimazione migliora e il grafico si stringe.

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

13/11/2012

$$f_{\bar{X}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$$

$$f_{W=\sum_{i=1}^{n} X_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(n\mu, n\sigma^2)$$

Proprietà riproduttiva delle variabili casuali: (chiede sempre) (bene per l'esame)

Date n v.c. normali $X_1, X_2, \dots, X_n$ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e se sono indipendenti una qualsiasi loro combinazione lineare segue ancora una distribuzione normale.

$$W = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$$

$$E[W] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$$

$$\sigma_W^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

Potrei scegliere $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ campionarie se la popolazione da cui proviene il campione è una normale $f(\cdot) \sim N(\mu, \sigma^2)$ e sono indipendenti allora la loro combinazione lineare:

$$W = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\mu \sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

Quando tutti i coefficienti sono uguali fra loro e a $\frac{1}{n}$ cioè:

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ allora $W = \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\bar{x}_n x_i + \bar{x}_n^2)\right] = \frac{1}{n-1}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] - 2E\left[\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_n x_i\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_n^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} E[x_i^2] - 2E\left[\bar{x}_n \sum_{i=1}^{n} x_i\right] + E[n\bar{x}_n^2]\right\} = \qquad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum x_i \quad \sum x_i = n\bar{x}_n$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} E[x_i^2] - 2E[n\bar{x}_n^2] + E[n\bar{x}_n^2]\right\} =$$

$$\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} E[x_i^2] - nE[\bar{x}_n^2]\right\} = \qquad var[z] = E[z^2] - (E[z])^2$$

$$E[z^2] = \sigma_z^2 + \mu_z^2$$

$$\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{\cancel{i}}^2 + \mu_{\cancel{i}}^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right\} =$$

non serve il pedice, xkè v.c. campionarie hanno stessa media e stessa varianza.

$$\frac{1}{n-1}\left\{n(\sigma^2+\mu^2) - \sigma^2 - n\mu^2\right\} =$$

$$\frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$

se al posto di $n-1$ mettevo n: $\qquad \frac{n-1}{n} < 1$ ottengo sottostima

$$M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$$

affetta da un errore sistematico

$$E[M_2] = \frac{1}{n}(n-1)\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

~~la differenza tra i 2 risultati se uso n-1 mi aspetto la varianza della popolazione invece con n mi aspetto la varianza~~ della popolazione a meno di

sottostimare la variabilità vuol dire dare minore incertezza.

Ho un errore sistematico.

distribuzione χ^2: (chi quadro)

distribuzione di supporto nella statistica inferenziale.

z_i: v.c. normali standardizzate ed indipendenti.

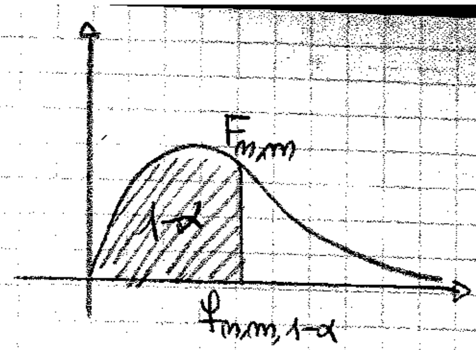
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

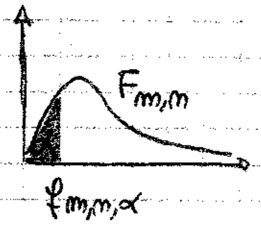
χ^2 ha una distribuzione χ^2 con n gradi di libertà.

$$E[\chi_n^2] = n$$

Anche la varianza è uguale ad n ma non ci interessa granché.

$$1-\alpha = P\left[F_{n,m} \leq f_{n,m,1-\alpha}\right] =$$
$$= P\left[\frac{1}{F_{n,m}} > \frac{1}{f_{n,m,1-\alpha}}\right] =$$
$$= P\left[F_{m,n} > \frac{1}{f_{n,m,1-\alpha}}\right] =$$
$$= 1 - P\left[F_{m,n} \leq \frac{1}{f_{n,m,1-\alpha}}\right]$$
$$\alpha = P\left[F_{m,n} \leq \frac{1}{f_{n,m,1-\alpha}}\right]$$



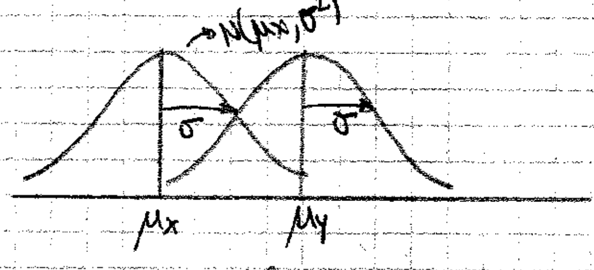


uesta distribuzione viene anche chiamata distrib. del rapporto delle varianze

eorema:

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ proviene da popolazione normale con media μ_x e varianza σ^2 + indipendenza.

$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ proviene da popol.ne normale con media μ_y e var. σ^2.



$$\frac{\overbrace{\frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i - X_n)^2}^{S_n^2}}{\underbrace{\frac{1}{m-1}\sum_1^m (Y_i - Y_m)^2}_{S_m^2}} \sim F_{n-1,m-1}$$

$$\frac{\frac{n-1}{\sigma^2}\,\frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X}_n)^2}{\frac{m-1}{\sigma^2}\,\frac{1}{m-1}\sum (Y_i - \bar{Y}_m)^2}$$

χ^2_{m-1}

istribuzione t o di Student:

Z: v.c. normale standardizzata

U: v.c. che segue una distrib. χ^2 con n gradi di libertà

Z e U indipendenti.

legate tra loro

$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$ segue una distrib. di Student con n gradi di libertà

Metodi per la ricerca degli stimatori.

- metodo dei momenti
- " della massima verosimiglianza
- " dei minimi quadrati

Metodo dei momenti:

$f(\bullet; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ Ci sono k parametri da determinare.

$\mu_k' = E[X^k] = \mu_k'(\bullet; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$

$$\begin{cases} \mu_1'(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = M_1' = \bar{X}_n \\ \mu_2'(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = M_2' = \\ \dots \\ \mu_k'(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = M_k' \end{cases}$$

$X \sim Unif(a, b)$ $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$$\begin{cases} \mu_1'(a,b) = M_1' \\ \mu_1'(a,b) = M_2' \end{cases}$$

$\circledast\ \mu_1' = E[X] = \frac{a+b}{2}$

$\circledast\ \mu_2' = E[X^2] = var[X] + (E[X])^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$

Andiamo a sostituire $\circledast$ $\circledast$ nelle nostre equazioni.

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{X}_n \\ \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2\bar{X}_n - b \\ \frac{(b - 2\bar{X}_n + b)^2}{12} + (\bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

$\to \frac{1}{3}(b-\bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2$ ① $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\bar{X}_n X_i + \bar{X}_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n}\bar{X}_n\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n} n \bar{X}_n^2 =$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2 \dots \circledast$

Sostituisco $\circledast$ in ①

$\to b - \bar{X}_n =$ (Annamaria)

Def: Se $\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è il valore di θ che massimizza $L(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$ allora $\theta = \theta(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ viene chiamato stimatore di massima verosimiglianza di θ e θ è la stima di max verosimiglianza dato il campione $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Esempi: $X \sim Unif(0, \theta)$ $\quad \theta > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cdots \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}$$

Dom θ

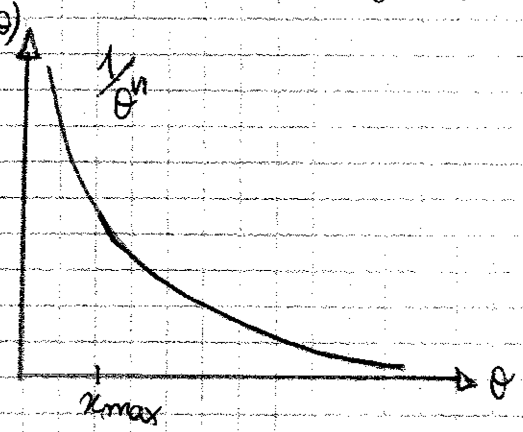
$0 < x_1 < \theta$ limiti che ho dato per la variabile x ma io li voglio per θ. $\quad \theta > x_1$

$0 < x_2 < \theta \quad \theta > x_2$

$\vdots$

$0 < x_n < \theta \quad \theta > x_n$

$$\left.\begin{matrix} \theta > x_1 \\ \theta > x_2 \\ \vdots \\ \theta > x_n \end{matrix}\right\} \theta > \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_{max}.$$



Tratto di curva che mi interessa.

Come stimatore di θ prendiamo $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$$\theta \longrightarrow \mu'_1 = M'_1 \longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n$$

$\mu'_1 = E[X] = \frac{0+\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$ $\quad$ In una uniforme da $(0, \theta)$

$\frac{\theta}{2} = \bar{X}_n$ $\quad$ lo stimatore di $\theta = 2\bar{X}_n$ media campionaria stimatore per μ (ML) $\frac{\sum x_i}{n} = \overline{X}_n$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{(\sigma^2)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\left(-\frac{1}{(\sigma^2)^2}\right) = 0$$

$$-\frac{n}{\cancel{2}}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\cancel{2\sigma^4}_{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2$$

momento di ordine 2

stimatore di ML per σ^2: $\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{X}_n)^2 = M_2$

Metodo del minimo chi-quadrato non si fa.
" della distanza minima non si fa

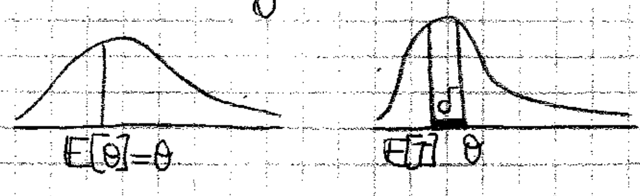
Proprietà degli stimatori puntuali:

$T = t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ stimatore di $\tau(\theta)$

Errore Quadratico Medio (MSE_T): $E_\theta[(T-\tau(\theta))^2]$

$T \to \theta \quad MSE = E[(T-\theta)^2]$

$$MSE = E[(T-\theta)^2] = E[((T-E[T]) + (E[T]-\theta))^2] =$$
$$= E[(T-E[T])^2] + E[(E[T]-\theta)^2] + 2E[(T-E[T])(E[T]-\theta)] =$$
$$= var[T] + (E[T]-\theta)^2 + 2(E[T]-\theta)\underbrace{E[T-E[T]]}_{=0} =$$
$$= var[T] + \delta^2$$



Correttezza:

$E_\theta[T] = \tau(\theta)$ T si dice stimatore corretto o non deviato

$E[T] = \theta$

stimatori per μ: $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

- $\overline{X}_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \qquad E[\overline{X}_n] = \mu \qquad var[\overline{X}_n] = \frac{\sigma^2}{m}$

$\{\cancel{X_1}, X_2, \dots, \cancel{X_n}\} \qquad \overline{X}_{n-2} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1} x_i$

$$E[\overline{X}_{n-2}] = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}E[X_i] = \frac{1}{n-2}(n-2)\mu = \mu$$