NUMERO: 804

DATA: 31/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Greco

MATERIA: Analisi Matematica II + Esercizi

Prof. Camporesi

Richiami sulle sommatorie

01/10/2012

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Proprietà

- se c non dipende da k $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$

  In particolare: $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n} = n \cdot c$

- $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

- $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \cancel{a_2} - a_1 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cancel{a_4} - \cancel{a_3} + \cancel{\dots} + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_1$

esempio: somma della progressione geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \forall x \neq 1$$

Infatti:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x) = 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \dots + \cancel{x^n} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \dots - \cancel{x^n} - x^{n+1} =$$

$$= 1 - x^{n+1}$$

oppure $\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ con Ruffini

	1	0	0	0	⋯	0	−1
1							1
	1	⋯				1	//

Esempio: formula del binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 +$$

$$+ \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

binomiale: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad (0 \leq k \leq n)$

Vale dunque: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{se} \quad -1 < x < 1}$

formula fondamentale delle serie geometriche (memorizzarla)

Esempi:

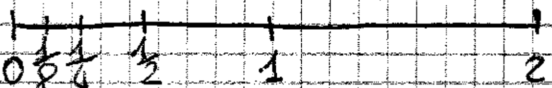
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{4}$$

Se l'indice parte ad esempio da $n=1$ (invece che $n=0$)

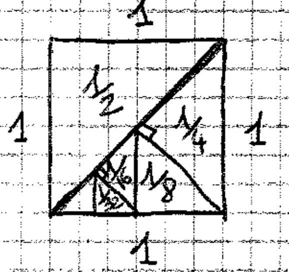
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

Esempi geometrici:



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

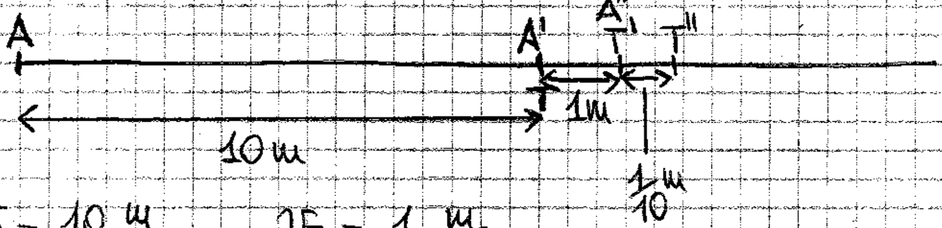
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{OK!}$$



area quadrato: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{OK!}$$

Paradosso di Zenone: (500 a.C.)



$v_A = 10 \frac{m}{s}$, $v_T = 1 \frac{m}{s}$

Per raggiungere T, A dovrà percorrere la distanza $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots =$

$$10 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 10 + \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 10 + \frac{10}{9} = \frac{100}{9}\ m$$

In effetti:

$x_A(t) = 10t \qquad 10t = t - 10$

$x_T(t) = t + 10 \qquad 9t = 10 \qquad t = \frac{10}{9}\ s$

$\overline{x} = \frac{100}{9}\ m$

ipico esempio di serie oscillante:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\dots$$

$S_0 = 1$; $S_1 = 0$; $S_2 = 1$; $S_3 = 0$; ... ; $S_{2n} = 1$, $S_{2n+1} = 0$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} S_n$

Serie di Mengoli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots$$

ecompongo $\frac{1}{n(n+1)}$ in fratti semplici:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}$

⋮

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

quindi la serie di Mengoli converge a 1: (e la sua somma vale 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Si dice telescopica una serie del tipo:

$\sum_{1}^{\infty} a_n$ dove $a_n = b_n - b_{n+1}$

$S_1 = b_1 - b_2$

$S_2 = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - b_3$

$S_3 = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - b_4$

⋮

$S_n = b_1 - b_{n+1}$

eorema: 1) Se $\sum_0^\infty a_n$ e $\sum_0^\infty b_n$ sono 2 serie convergenti con somme $\sum_0^\infty a_n = s \in \mathbb{R}$, $\sum_0^\infty b_n = t \in \mathbb{R}$ allora la serie $\sum_0^\infty (a_n + b_n)$ è convergente e ha somma $s+t$.

) Se $\sum_0^\infty a_n$ converge a $s \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ allora la serie $\sum_0^\infty c \cdot a_n$ converge e ha somma $c \cdot s$.

l teorema dice che se $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$ convergono allora valgono $\sum_0^\infty (a_n + b_n) = \sum_0^\infty a_n + \sum_0^\infty b_n$, $\sum_{n=0}^\infty c\, a_n = c \sum_{n=0}^\infty a_n$ e in generale $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^\infty a_n + \beta \sum_{n=0}^\infty b_n$$

cioè due serie convergenti si possono sommare, sottrarre o combinare linearmente termine a termine.

Esempi

$$\sum_{n=0}^\infty \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{8} + \frac{1}{125} + \dots =$$

$$= \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\sum_0^\infty \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n-1}} = \sum_0^\infty \frac{(-2)^n(-2)}{3^n(3)^{-1}} = (-2 \cdot 3) \sum_0^\infty \left(-\frac{2}{3}\right)^n = -6 \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = -6 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{18}{5}$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\pi^{n+2} + (-1)^n 4^{n-2}}{5^{n+1}} = \sum_0^\infty \left(\frac{\pi^{n+2}}{5^{n+1}} + \frac{(-1)^n 4^{n-2}}{5^{n+1}}\right) = \sum_0^\infty \frac{\pi^2}{5}\left(\frac{\pi}{5}\right)^n + \sum_0^\infty \frac{4^{-2}}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)^n =$$

$$= \frac{\pi^2}{5} \frac{1}{1-\pi/5} + \frac{1}{80} \frac{1}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{\pi^2}{\cancel{5}} \frac{\cancel{5}}{5-\pi} + \frac{1}{144}$$

Esempio: Scrivere come frazione (svolgerlo applicando i teoremi di prima).

$$0,\overline{31} = 0,31313131\dots = \frac{3}{10} + \frac{1}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \dots =$$

$$= \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots\right) =$$

Questo teorema si usa spesso nella forma contronominale cioè:
se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge

quindi o diverge o è oscillante.

forma contronominale
$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \text{non}P \Rightarrow \text{non}Q$

Esempio: • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ non converge perchè $\frac{3^n}{n^2} \to +\infty$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ non converge perchè $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2 \neq 0$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ non conv. perchè: $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log n} = e^{\frac{\log n}{n}} \to e^0 = 1$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

• $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^2+1}$ non converge perchè $\lim_{n\to\infty} a_n = (-1)^n \frac{n^3}{n^2+1}$ $\nexists$

• $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$

notiamo che data una successione a_n, si ha $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.
e dunque $a_n \not\to 0 \Leftrightarrow |a_n| \not\to 0$.

Nel nostro caso $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \not\to 0$ perchè $|a_n| = \frac{n-1}{n+1} \not\to 0$.

La condizione "$a_n \to 0$" è solo necessaria ma non sufficiente, cioè se $a_n \to 0$ non è detto che $\sum a_n$ converge.

Per esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$ però

$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \log 1 = 0$

Vedremo tra breve che la serie armonica diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 206

$\Rightarrow \frac{1}{n} \geq \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Poiché $\sum_{1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ per il teorema del confronto (p.to 2) anche $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

08/10/2012

sempi:

) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{5^n \log n}$

$\frac{1}{5^n \log n} \overset{?}{\leq} \frac{1}{5^n} \iff \frac{1}{\log n} \leq 1 \iff \log n \geq 1 \iff n \geq e \iff n \geq 3$ vera

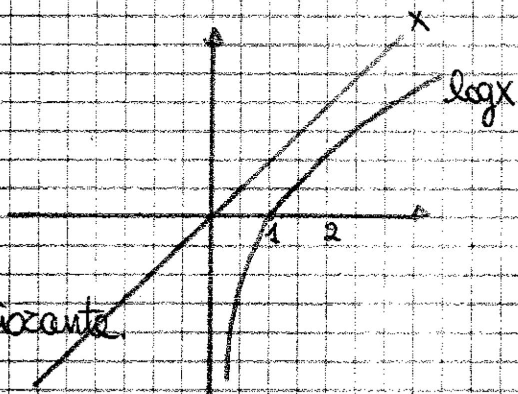
$\Rightarrow$ converge poiché è maggiorata da $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{3^n + n}$

$|\sin n| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin n|}{3^n+n} \leq \frac{1}{3^n+n} \leq \frac{1}{3^n}$

$\Rightarrow$ converge poiché maggiorata da $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$



$\log x < x \quad \forall x > 0$

$\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2$

$\Rightarrow$ diverge perché è maggiorante di $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

) <u>Serie esponenziale</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\dots$

Vale

$n! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \geq 1$ (si dimostra per induzione)

Anzi vale $n! > 2^n \quad \forall n \geq 4$)

$\Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \geq 1$ anche per $n=0$.

) Serie armonica generalizzata

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$ Determinare valori di α per cui converge o diverge.

$\alpha>2 \Rightarrow n^\alpha \geq n^2 \quad \forall n\geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

er $\alpha>2$ la serie converge perché è maggiorata da $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$0<\alpha<1 \Rightarrow n^\alpha \leq n \quad \forall n\geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ diverge per $0<\alpha<1$.

on il criterio di Mc Laurin (vedi dopo) si ha che converge per $1<\alpha<2$.

In definitiva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \alpha>1 \\ \text{diverge} & 0<\alpha\leq 1 \end{cases}$$

Non è un caso che la serie si comporta l'integrale, ma una conseguenza del criterio di McLaurin.

) La rappresentazione decimale di un numero reale è una serie convergente. Per esempio sia $x>0$

$x = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots\ldots$ dove $a_0 \in \mathbb{N}$, a_j = cifre decimali $0\leq a_j \leq 9 \quad \forall j \geq 1$

$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots\ldots = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

uesta serie converge sempre perché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$

eorema (Criterio di McLaurin o del confronto integrale)

Sia $f: [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva e decrescente.
Allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hanno lo stesso comportamento cioè sono entrambi convergenti o divergenti.

Poiché $f>0$, la funzione integrale $t \to \int_1^t f(x)dx$ è crescente

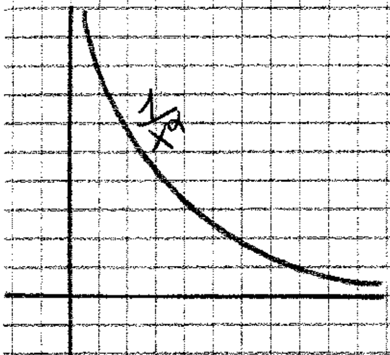
$\Rightarrow \exists \lim_{N\to+\infty} \int_1^N f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$

Allora: prendo $\lim_{N\to\infty}$ in $*$ $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \le \int_1^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Se l'integrale converge anche le sommatorie convergono e viceversa.

Da questa segue la tesi.

Esempi: 1) $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$



è positiva + decrescente

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge

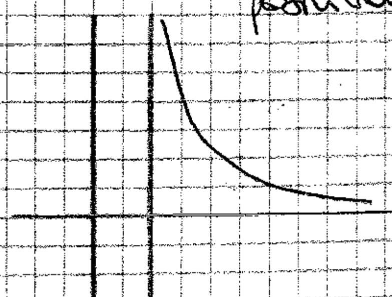
Ma sappiamo che:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha>1 \\ \text{diverge} & \text{se } 0<\alpha\le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dots$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$

$f(x)=\frac{1}{x\log x}$ si vede facilmente che f è decrescente in $[1;+\infty)$ e positiva



$\Rightarrow$ serie si comporta come:

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx = \left[\log(\log x)\right]_2^{+\infty} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \log(\log x) - \log(\log 2) = +\infty$

$\Rightarrow$ serie diverge.

$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad (n \to \infty)$

Infatti $n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \longrightarrow \log e = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hanno lo stesso carattere (Infatti entrambe divergono a $+\infty$).

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1/2}{n^{1/2}}$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ diverge.

) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+\sin n}{2n^3+n^2+n+7}$

$a_n = \frac{n\left(3+\frac{\sin n}{n}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)} \sim \frac{3n}{2n^3} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{n^2}$

$2 > 1 \Rightarrow$ converge

) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n+n^{3/2}}$

$a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n+n^{3/2}} \sim \frac{\pi/2}{n^{3/2}}$

$\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ converge

) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2+1}$

$a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2+1} \sim \frac{e}{n^2+1} \sim \frac{e}{n^2}$

$\alpha = 2 > 1$ converge.

) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

$2 > 1 \Rightarrow$ converge

$= \log\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \qquad \log\frac{n+2+1}{n+2} = \log\left(1+\frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ diverge

$\sum_1^\infty \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n} = +\infty$

$\sum_1^\infty \frac{1}{2n-1} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots \qquad \frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow$ diverge

Studiare la convergenza della serie: Esame

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{\log n}}$

$2^{\log n} = e^{\log n \log 2} = (e^{\log n})^{\log 2} = n^{\log 2}$ *

In generale:

$a^{\log b} = e^{\log b \log a} = b^{\log a}$

* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\log 2}} \qquad \log 2 < 1 \Leftrightarrow 2 < e \Rightarrow$ converge.

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{3^{\log n}} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{\log 3}} \qquad \log 3 > 1 \Leftrightarrow 3 > e \Rightarrow$ diverge.

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2+(-1)^n}}$

$a_n = \frac{1}{n^{2+(-1)^n}} = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases}$

$a_n \not\sim \frac{k}{n^\alpha}$

Calcolo le somme parziali di ordine pari e dispari:

$S_{2n} = 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{(2n)^3} \geq$

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n-1} \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow S_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

$S_{2n+1} = 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4^3}+\dots+\frac{1}{(2n)^3}+\frac{1}{2n+1} \geq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n+1} \to +\infty$

$\Rightarrow S_{2n+1} \to +\infty \Rightarrow S_n \to +\infty$

sempi: (criterio della radice)

1) • $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1$ $\quad$ qui $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ $\quad$ caso dubbio

$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}} \to e^0 = 1)$

• $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow 1$ $\quad$ qui invece converge.

) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\log n)^n}$

$\sqrt[n]{\frac{2^n}{(\log n)^n}} = \frac{2}{\log n} \longrightarrow 0$ $\quad 0 < 1 \Rightarrow$ converge

$\sum_1^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \frac{3}{n} \longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow$ converge

) $\sum_1^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{10}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ converge

alternativamente si può dimostrare $\frac{n^{10}}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

) $\sum_1^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

$\sqrt[n]{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \frac{(2n-1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}} = \frac{n^{\frac{1}{n}}(2-\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{1 \cdot 2^0}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow$ converge

) $\sum_1^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \frac{n+1}{2n-1} \longrightarrow \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ converge

) $\sum_1^{\infty} 2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}}$

$\sqrt[n]{2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}}} = 2 \cdot 3^{-\frac{\sqrt{n}}{n}} = 2 \cdot 3^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \longrightarrow 2 \cdot 3^0 = 2 > 1 \Rightarrow$ diverge

2° modo

$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{n\log 2 - \sqrt{n}\log 3} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left[\log 2 - \underbrace{\frac{\log 3}{\sqrt{n}}}_{\to 0}\right]} = e^{+\infty} = +\infty$

$\Rightarrow$ diverge

esempi (con il rapporto):

1) $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ $\qquad \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

2) $\sum_0^\infty \frac{1}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

in generale: se $x > 0$

$\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Otteniamo che dalla condizione necessaria di convergenza segue che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

3) $\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^5}{(n+1)!}}{\frac{n^5}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \frac{n!}{(n+1)!} \to 0 < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

4) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^n}{(2n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) \frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\to e \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{converge}$$

Otteniamo: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$

Serie a termini di segno qualsiasi (a termini di segno alterno) 15/10/2012

Sia $\sum_0^\infty a_n$ una serie in cui i termini a_n hanno segno arbitrario:

Il 1° criterio che si tenta di applicare è: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \quad b_n > 0, \ \forall n \geq 0$

TEOREMA (Criterio di convergenza assoluta):

Se la serie $\sum_0^\infty |a_n|$ converge, allora anche la serie $\sum_0^\infty a_n$ converge e vale:

$|\sum_0^\infty a_n| \leq \sum_0^\infty |a_n|$ ⊛

Dimostrazione: Definiamo

$a_n^+ = \max(a_n, 0) = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$

$a_n^- = \max(-a_n, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$

Esempio:

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$

$= -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49}, \dots$

$a_n^+ = 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{36}, 0, \dots$

$a_n^- = 1, 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{25}, 0, \frac{1}{49}, \dots$

Si verifica subito che: $\begin{cases} a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} \\ a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} \end{cases}$ da cui: $\begin{cases} |a_n| = a_n^+ + a_n^- \\ a_n = a_n^+ - a_n^- \end{cases}$

Inoltre si ha: $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$

$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$

Applicando il criterio del confronto si ha che se $\sum_0^\infty |a_n|$ converge $\Rightarrow$ anche $\sum_0^\infty a_n^+$, $\sum_0^\infty a_n^-$ convergono. Ma allora anche $\sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty (a_n^+ - a_n^-) =$

$= \sum_0^\infty a_n^+ - \sum_0^\infty a_n^-$ converge.

Per dimostrare ⊛ cioè: $(|t| \leq a \iff -a \leq t \leq a)$

$-\sum_{n=0}^\infty |a_n| \leq \sum_{n=0}^\infty a_n \leq \sum_0^\infty |a_n|$ basta osservare:

$\sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty (a_n^+ - a_n^-) \leq \sum_0^\infty \underbrace{(a_n^+ + a_n^-)}_{=|a_n|}, \quad \sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty (a_n^+ - a_n^-) \geq \sum_0^\infty (-a_n^+ - a_n^-) = -\sum_0^\infty |a_n|$

) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$

onverge assolutamente se $\alpha > 1$. infatti $\sum_{1}^{\infty} |a_n| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ e questa converge se $\alpha > 1$. Se $\alpha \leq 1$ vedremo che $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge solo semplicemente.

) <u>Serie esponenziale con $x \in \mathbb{R}$</u>

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Si era visto che se $x > 0$ questa converge (criterio del rapporto)

se $x < 0$, $a_n = \frac{x^n}{n!}$

$|a_n| = \frac{|x|^n}{n!}$ e la serie $\sum_{0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ converge. $\Rightarrow$ La serie esponenziale converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.

) le seguenti serie $(x \in \mathbb{R})$

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

convergono assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti

$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right| = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ Applico il criterio del rapporto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{\cancel{|x|^{2n}}} = \frac{|x|^2 \ \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

in modo analogo trattiamo l'altra con potenze dispari.

Dimostreremo a cosa convergono le 2 serie.

<u>Differenza tra serie convergenti assolutamente o solo semplicemente</u>

<u>Teorema</u> 1) $\sum_{0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e solo se le serie $\sum_{0}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{0}^{\infty} a_n^-$ entrambe convergono.

2) Se $\sum_{0}^{\infty} a_n$ converge solo semplicemente allora le due serie $\sum_{0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{0}^{\infty} a_n^-$ entrambe divergono.

In quest'ultimo caso:

$\sum_{0}^{\infty} a_n = \sum_{0}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-)$

È facile verificare che:
S_{2n} è crescente
S_{2n+1} è decrescente.

Per esempio: $S_2 \leq S_4 \iff \cancel{a_1} - \cancel{a_2} \leq \cancel{a_1} - \cancel{a_2} + a_3 - a_4 \iff a_4 \leq a_3$ vera perché a_n è decrescente.

$S_1 \geq S_3 \iff \cancel{a_1} \geq \cancel{a_1} - a_2 + a_3 \iff a_2 \geq a_3$ vera perché a_n decrescente.

In generale: $S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq S_8 \leq \dots$
$S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq S_7 \geq \dots$

Inoltre da * $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ (1)
$\Rightarrow S_{2n+1} \geq S_{2n}$ perché $a_{2n+1} \geq 0$.
Quindi: $S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots \leq S_{2n} \leq \dots \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq \dots \leq S_7 \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$

S_{2n} è crescente e limitata superiormente essendo $S_{2n} \leq S_1$
$\Rightarrow \exists\ S' = \lim_{n\to\infty} S_{2n} \in \mathbb{R}$

S_{2n+1} è decrescente e limitata inferiormente essendo $S_{2n+1} \geq S_2$
$\Rightarrow \exists\ S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} \in \mathbb{R}$

Passando al limite in (1) per $n \to \infty$ si ottiene: $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S'' =$

$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S' + 0$

Esempio 3) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^{n-1} \underbrace{\frac{n-1}{n^2+n}}_{a_n} \Rightarrow$ ~~Per qst esempio è inefficace il criterio di convergenza assoluta~~

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0$ Non sufficiente per dire che converge.

$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \iff \frac{n-\cancel{1}+\cancel{1}}{(n+1)^2+n+1} \leq \frac{n-1}{n^2+n} \iff n(n^2+n) \leq (n-1)[(n+1)^2+n+1]$

$n^2\cancel{(n+1)} \leq (n-1)\cancel{(n+1)}(n+2) \iff \cancel{n^2} \leq \cancel{n^2} + 2n - n - 2 \iff n \geq 2$ vera $\forall n \geq 2$

quindi converge per Leibniz.

4) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{3} - 1)$

$a_n = \sqrt[n]{3} - 1 = 3^{1/n} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \iff 3^{\frac{1}{n+1}} - \cancel{1} \overset{?}{\leq} 3^{1/n} - \cancel{1} \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \iff n+1 \geq n$ vera $\forall n$

$\Rightarrow$ converge per Leibniz. Non converg. assolutamente xché $\sum_{1}^{\infty} |a_n| = \sum_{1}^{\infty} (3^{1/n} - 1)$

$\cancel{n}+1+\sin(n+1) \geq \cancel{n}+\sin n$

$1 \geq \sin n - \sin(n+1)$ non ovvia perciò studio:

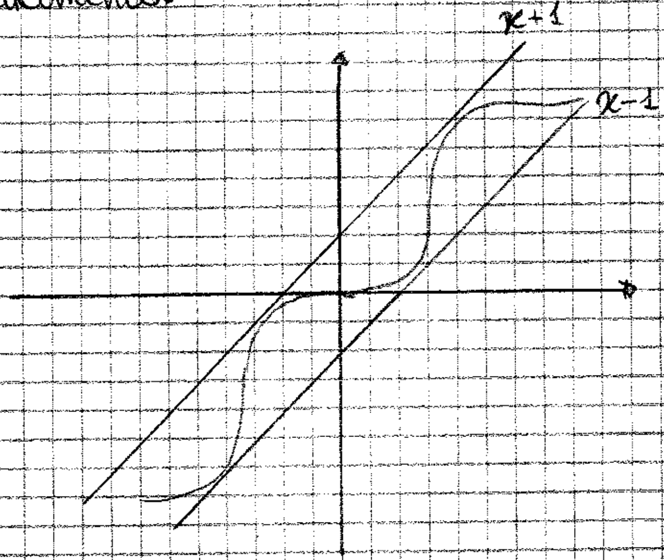
$f(x) = \frac{1}{x+\sin x}$ anzi ancora meglio se studio:

$g(x) = x+\sin x$

$g'(x) = 1+\cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g$ crescente strettamente.

$x-1 \leq g(x) \leq x+1$



$\Rightarrow \frac{1}{x+\sin x}$ è strett. decrescente

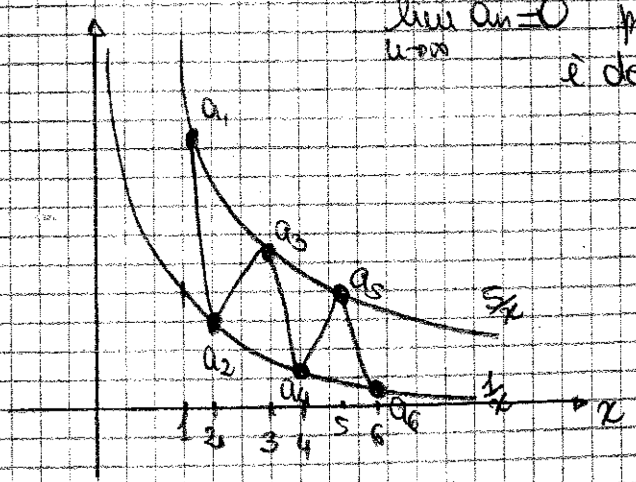
$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n+\sin n}$ è decrescente $\Rightarrow$ converg. per Leibniz.

Se $a_n \to 0$ ma non è decrescente la serie potrebbe non convergere.

3) $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$

$a_n = \begin{cases} \frac{5}{n} & n=1,3,5,\ldots \\ \frac{1}{n} & n=2,4,6,\ldots \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ però a_n non è decrescente.



Inoltre la serie non converge assolutamente perché:

$\sum_1^{\infty} |(-1)^{n-1} a_n| = \sum_1^{\infty} a_n = +\infty$ diverge essendo $a_n \geq \frac{1}{n} \ \forall n$

$\Rightarrow$ convergenza assoluta inefficace.

questo mi darà $n > \bar{n}$ $(\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon))$ e quindi approssimando s con $S_{\bar{n}+1}$ sono sicuro che $|s - S_{\bar{n}+1}| < \varepsilon$.

Esempi: Calcolare s con errore minore di $1/10$ e $1/100$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

$a_{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$

$n+1 > 10$, $n > 9$

$n \geq 10 \Rightarrow |s - s_{10}| < \frac{1}{10}$

$s \cong S_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} \simeq 0,64563492$

Si sa $s = \log 2 \cong 0,69314718\dots$

$\Rightarrow |s - s_{10}| = 0,04751 < \frac{1}{10}$

Stessa serie $\varepsilon = \frac{1}{100}$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$, $n+1 > 100$ $n > 99$

$n \geq 100 \Rightarrow s \cong S_{100}$

2) Calcolare con errore $< \varepsilon = 1/1000$.

$s = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1000}$; $(n+1)^2 > 1000$

$n+1 > \sqrt{1000} \simeq 31,6$ $n > 30,6$ $n \geq 31$

$\Rightarrow s \simeq S_{31} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{30^2} + \frac{1}{31^2} \simeq 0,82297056$

Eulero ha dimostrato che $s = \frac{\pi^2}{12} \cong 0,82246703$

$S_{31} - s \cong 0,000503 < 10^{-3}$

3) Stimare con errore $< 1/10$.

$\sum_{3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log n}$ ||| $\sum_{3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log(\log n)}$

$\frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{10} \Rightarrow \log(n+1) > 10$ $n+1 > e^{10}$

$n \geq [e^{10}] \simeq 22026$

tirling:

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \Rightarrow a_n = \dfrac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n}(2\pi n)4^n}$

$a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ non converg. assolutamente

eibniz:

$a_n = \dfrac{(2n)!}{n!^2 4^n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$

$\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2 4^{n+1}} \overset{?}{\leq} \dfrac{(2n)!}{n!^2 4^n}$

$\dfrac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 \cancel{n!^2}\, 4} \leq \dfrac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!^2}}$

$\cancel{2}\cancel{(n+1)}(2n+1) \leq \overset{2}{\cancel{4}}(n+1)^{\cancel{2}}$

$2n+1 \leq 2n+2$ vera $\forall n \Rightarrow$ converge per leibniz.

Osservazione: Se $a_n, b_n > 0 \quad \forall n$ e $a_n \sim b_n$ allora:

- $\sum_1^\infty a_n$ e $\sum_1^\infty b_n$ hanno lo stesso comportamento (confronto asintotico)
- $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$, $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} b_n$ possono non avere lo stesso comportamento,

per esempio può succedere che $a_n, b_n \to 0$, a_n decresc. ma potrebbe essere b_n non decresc. e $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$ conv. mentre $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} b_n$ diverge.

Esempio:

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} & n \text{ pari} \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases}$

$a_n > 0 \quad \forall n \geq 2$

$a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \to \infty)$ Butto via $\dfrac{1}{n}$ perché più piccolo.

Es. $\dfrac{1}{1000} < \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ decrescendo

$\Rightarrow$ anche $a_n \to 0$ però a_n non è decrescente (come si dimostra).

$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}_{l \in \mathbb{R}} - \underbrace{\sum_1^\infty \dfrac{1}{n}}_{+\infty} = -\infty$ quindi $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n = -\infty$ mentre $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} b_n$ converge dove $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

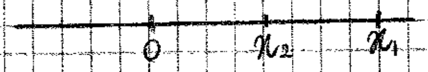
$|a_n x^n| = \left|a_n \frac{x^n}{x_1^n} x_1^n\right| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right| \le M \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$

$\Rightarrow \sum_0^\infty |a_n x^n|$ è maggiorata da $M \sum_0^\infty \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$

$\Rightarrow$ converge se $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ cioè $|x| < |x_1|$

$\Rightarrow \sum_0^\infty a_n x^n$ converge assolutamente.

b) $\sum_0^\infty a_n x_2^n$ non converga ($x_2 \neq 0$, $x_2 > 0$).



Se ci fosse un pto $x_1 > x_2$ in cui la serie converge per la parte a) la serie dovrebbe convergere $\forall x: |x| \le x_1$ e quindi anche in x_2 contro l'ipotesi.

Da questo teorema si hanno le seguenti 3 possibilità:
1) la ① converge solo per $x=0$ e non converge mai se $x \neq 0$.
2) la ① converge $\forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3) $\exists R > 0$ tale che la ① converge per $x \in (-R, R)$ e non converge per $x > R$ o $x < -R$.

Definiz: $R = \sup A = \{x \in \mathbb{R}$: la ① converge$\}$ = raggio di convergenza.

Poiché $0 \in A \Rightarrow R \ge 0$.

Teorema 2:

Sia R il raggio di convergenza della $\sum_0^\infty a_n x^n$.

1) se $R=0 \Rightarrow$ la serie converge solo per $x=0 \Rightarrow A=\{0\}$.
2) se $R=+\infty \Rightarrow$ la serie converge $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.
3) se $R>0$, $R \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow$ la serie di potenze converge assolutamente per $|x|<R$ e non converge per $|x|>R$.

$(-R,R)$ = intervallo di convergenza. L'insieme di convergenza A può essere $A=(-R,R)$; $A=[-R,R]$, $A=[-R,R)$, $A=(-R,R]$ a seconda dei casi.

Per la serie $\sum_0^\infty a_n (x-x_0)^n$ posto $R = \sup\{x$: converge$\}$ vale l'analogo:
1) $R=0 \Rightarrow A=\{x_0\}$
2) $R=+\infty \Rightarrow A=\mathbb{R}$
3) $R>0 \Rightarrow$ converge per $|x-x_0|<R$.

Esempio: 1) $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$;

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$

$\Rightarrow R = \frac{1}{0} = +\infty \Rightarrow$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sum_0^\infty x^n$, $a_n = 1$ $\forall n$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{1} = 1 \to 1$

$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$; estremi:

non converge né per $x=1$ né per $x=-1 \Rightarrow A = (-1,1)$

3) $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ $a_n = \frac{1}{n}$

$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$

$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$, estremi:

- $x = 1 \to \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ diverge
- $x = -1 \to \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ converge (Leibniz) $\Rightarrow A = [-1, 1)$

4) $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2}$ $a_n = \frac{1}{n^2}$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$

$R=1$; estremi: $x = 1 \to \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ converge

$x = -1 \to \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge $\Rightarrow A = [-1, 1]$

5) $\sum_0^\infty n!\, x^n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to +\infty$

$\Rightarrow R = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow A = \{0\}$

6) $\sum_1^\infty \frac{n^2+1}{n!} x^n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2+1} = \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$

$\Rightarrow$ in t converge per $|t|<5$. cioè $|2x+1|<5$. cioè

$\left|x+\frac{1}{2}\right| < \frac{5}{2}$ cioè $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$ $\qquad -3<x<2$

2° metodo: $\sum_1^\infty \frac{2^n}{5^n+n3^n}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^n = \sum_1^\infty a_n(x-x_0)^n$ centrata in $x_0=-\frac{1}{2}$.

$s = x+\frac{1}{2} \longrightarrow \sum_1^\infty \frac{2^n}{5^n+n3^n} s^n$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{5^n+n3^n}s^n} = \frac{2}{5}\frac{1}{\left(1+n\frac{3^n}{5^n}\right)^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{2}{5}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \Rightarrow$ converge per $|x-x_0|<R$ cioè $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{5}{2}$ cioè $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

estremi: $x=x_0+R=2 \longrightarrow \sum_1^\infty \frac{2^n}{5^n+n3^n}\left(\frac{5}{2}\right)^n = \sum_1^\infty \frac{1}{1+\underbrace{\frac{n3^n}{5^n}}_{\to 0}}$ non converge perché

$\frac{1}{1+\frac{n3^n}{5^n}} \longrightarrow 1 \neq 0.$

$x=x_0-R=-3 \longrightarrow \sum_1^\infty \frac{2^n}{5^n+n3^n}\left(-\frac{5}{2}\right)^n = \sum_1^\infty \frac{2^n}{5^n+n3^n}\left(-\frac{5}{2}\right)^n = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{1+\frac{n3^n}{5}}$ non converge

perché $\left|\frac{(-1)^n}{1+\frac{n3^n}{5}}\right| \longrightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow A=(-3,2)$.

Proposizione: Sia $a_n \sim b_n$ con $a_n, b_n > 0 \quad \forall n$
Allora le 2 serie di potenze $\sum_0^\infty a_n x^n$ e $\sum_0^\infty b_n x^n$ hanno lo stesso raggio di convergenza R.
Inoltre se $R\in\mathbb{R}$ esse hanno lo stesso comportamento per $x=R$ mentre per $x=-R$ possono comportarsi diversamente.

Oss: se ad esempio $l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ allora $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b_n}{a_n}a_n} =$
$\Rightarrow R_1 = \frac{1}{l}$

$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b_n}{a_n}}\cdot\sqrt[n]{a_n} = 1\cdot l = l \Rightarrow R_2 = \frac{1}{l}$

Ricordo che $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 1 \Leftrightarrow \frac{b_n}{a_n} \longrightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{b_n}{a_n}} = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots)=$

$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3+\dots=$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ dove

$c_0 = a_0b_0$

$c_1 = a_0b_1+a_1b_0$

$c_2 = a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$

$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ⊛ = serie prodotto

Teorema! Se $\sum a_n x^n$ ha raggio R_1 e $\sum b_n x^n$ ha raggio R^2 allora la serie prodotto $\sum c_n x^n$ ha raggio $R \geq \min(R_1, R_2)$

Detta inoltre $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ $g(x)=\sum_0^\infty b_n x^n$ vale $\sum_0^\infty c_n x^n = f(x)g(x)$ $\forall x \in (-R, R)$

Esempio: $E(x)=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$E(x)E(x)=\sum_0^\infty c_n x^n$

$c_n=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\frac{1}{n!}2^n$

$\left((a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad a=b=1 \Rightarrow 2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \right)$

$\Rightarrow E(x)E(x)=\sum_0^\infty \frac{1}{n!}2^n x^n=\sum_0^\infty \frac{(2x)^n}{n!}=E(2x)$

Più in generale posso (calcolare) definire il prodotto di 2 serie num!

$\left(\sum_0^\infty a_n\right)\left(\sum_0^\infty b_n\right)$ calcolando: $(\sum a_n x^n)(\sum b_n x^n)$ nel modo visto

$\Rightarrow$ ottenendo $\sum c_n x^n$ e alla fine ponendo $x=1$:

$$\left.(\sum a_n x^n)(\sum b_n x^n)\right|_{x=1}=\left.\sum c_n x^n\right|_{x=1}$$

$\Rightarrow$ ottengo $\left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right)\left(\sum_0^\infty b_n\right)=\sum_0^\infty c_n$ dove c_n è data dalla ⊛

Si dimostra che se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono assolutamente ad A, B allora $\sum c_n$ converge assolutamente a $C=A\cdot B$.

Calcoliamo allora $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$E(x)E(y)=\sum_0^\infty c_n$

$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=\frac{(x+y)^n}{n!}$

Teorema: $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dimos: $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{e^x} = \frac{d}{dx}\left(f(x)e^{-x}\right) = f'(x)e^{-x} + f(x)(-e^{-x}) = f(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0 \ \forall x$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} = k =$ costante $\forall x$

ponendo $x=0$ ottengo $k=1 \Rightarrow f(x) = e^x \ \forall x$

2) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left\{\cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \cancel{\frac{x^4}{4!}} + \frac{x^5}{5!} + \dots - \left(\cancel{1} - x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} + \cancel{\frac{x^4}{4!}} - \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\right\} =$

$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$\Rightarrow \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left\{1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \dots + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right\} =$

$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$\Rightarrow \operatorname{ch} x = \sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $a^x = e^{x \log a} = \sum_0^\infty \frac{(x \log a)^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{(\log a)^n}{n!} x^n \qquad (\forall a>0 \ \forall x \in \mathbb{R})$

4) $x^\alpha = e^{\alpha \log x} = \sum_0^\infty \frac{(\alpha \log x)^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} (\log x)^n \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x > 0)$

5) $\forall x \in \mathbb{R}$ sia $C(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$S(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

Queste convergono assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$ ($R = +\infty$)

Vogliamo dimostrare che C è coseno e S è seno.

$C'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = -S(x)$

$S'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = C(x)$

$C(0) = 1 \qquad S(0) = 0$

converge per $x=1$, diverge per $x=-1$. $A=(-1,1]$

$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_0^\infty (-x)^n = \frac{1}{1+x}$

Teorema: $\log(1+x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \forall x \in (-1,1)$

Dimos: $\frac{d}{dx}\left(\log(1+x) - L(x)\right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 0 \quad \forall x \in (-1,1)$

$\Rightarrow \log(1+x) - L(x) = k = \text{cost.}$

$x = 0 \Rightarrow k = 0$

Inoltre dal teorema sulla continuità delle funzioni analitiche, poiché la serie converge per $x=1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} \log(1+x) = \log 2 = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

29/10/2012

) Per $x \in (-1,1)$ $A(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

$R=1$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} \longrightarrow 1$

estremi $x = \pm 1$

$x=1 \quad \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge per Leibniz

$x=-1 \quad -\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$ " " "

$\Rightarrow$ converge $[-1,1]$

$\frac{d}{dx} A(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_0^\infty (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$

$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}(x) - A(x)\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x \in (-1,1)$

$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = A(x) + K$

pongo $x=0 \Rightarrow K=0 \Rightarrow$

Teorema: $\forall x \in (-1,1)$

$\operatorname{arctg} x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Poiché la serie converge anche per $x = \pm 1$, dal teorema della continuità di una serie di potenze

$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n = b_n$

Esempio: Supponiamo che la funzione $\sqrt{1+x}$ si possa scrivere come serie di potenze $\sum_0^\infty a_n x^n$ convergente in un intorno di $x=0$ $\Rightarrow$ moltiplicandola per se stessa si avrà $1+x = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) =$
$= a_0^2 + 2a_0 a_1 + (2a_0 a_2 + a_1^2) x^2 + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) x^3 + \dots$

$\Rightarrow$ (dal principio di identità):

$$\begin{cases} a_0^2 = 1 \\ 2a_0 a_1 = 1 \\ 2a_0 a_2 + a_1^2 = 0 \\ 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 0 \\ \vdots \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = -\frac{1}{8} \\ a_3 = \frac{1}{16} \\ \vdots \end{cases}$$

Teorema di integrazione per serie:

$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ sia una funzione analitica definita per $|x| < R$. Allora la funzione integrale di f relativa al pto $x_0 = 0$ è data da $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_0^\infty a_n t^n\right) dt = \sum_0^\infty a_n \int_0^x t^n\,dt =$

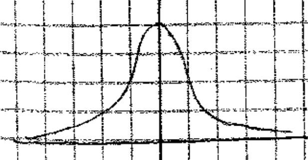
$= \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots$ $\quad \forall x \in (-R, R)$ dove la serie di potenze ottenuta integrando termine a termine ha sempre raggio di convergenza R.

Esempio ①: Per $-1 < x < 1$ $\quad f(x) = \sum_0^\infty (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \log(1+x)$

$= \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

② $f(x) = e^{-x^2}$



Serie di Taylor:
Data $f: I \to \mathbb{R}$,
I = intervallo $\subseteq \mathbb{R}$, sia $f \in C^\infty(I)$.
Fissato x_0 interno a I consideriamo la serie di Taylor di f centrata in x_0 $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$

I cui coefficienti sono $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

La sua somma parziale n-esima è proprio il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0:

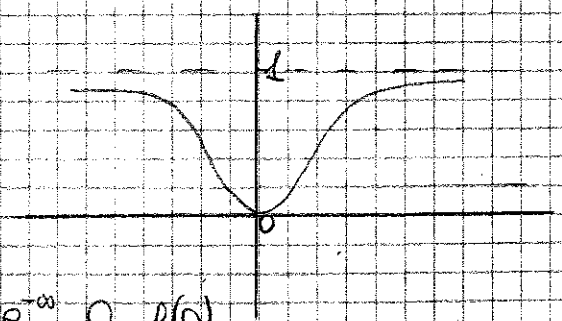
$$P_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Se $x_0 = 0$ si chiamerà la serie di McLaurin di f.

Sia R = raggio di convergenza della serie di Taylor. Sia $R > 0 \Rightarrow$ la serie converge per $x_0 - R < x < x_0 + R$ ed è naturale chiedersi se la sua somma coincide proprio con $f(x)$ oppure no.
In altre parole: Data $f \in C^\infty(I)$ e dato $x_0 \in I$ interno f è analitica di centro x_0? Risposta: NO.

Esempio (funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ che non è analitica in $x_0 = 0$).

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



f è continua in $x = 0$: $\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0 = f(0)$

Inoltre: $\exists f'(0)$: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = *$

$\frac{1}{x^2} = t$, $x \to 0$, $t \to +\infty$ $\qquad x^2 = \frac{1}{t}$, $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$* = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{t}\, e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{1/2}}{e^t} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

Più in generale si dimostra che $\exists f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
La serie di McLaurin di f è $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \cancel{f(0)} + \cancel{f'(0)}x + \cancel{\frac{f''(0)}{2!}}x^2 + \dots = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
dunque la somma di tale serie è $\neq$ da $f(x)$ per $x \neq 0$.

Dim: Dati $x_0, x \in I$ applico la formula di Taylor col resto di Lagrange all'ordine n cioè: $R_{n,x_0,f}(x) = f(x) - P_{n,x_0,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

dove $c = c(x_0, x, n, f)$ è un p.to compreso tra x_0 e x

$$|R_{f,x_0,n}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M K^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = M\frac{|K(x-x_0)|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

usato $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n!} = 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}$

$\left(\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}\right.$ converge a e^A $\forall A \in \mathbb{R} \Rightarrow \left.\frac{A^n}{n!} \to 0\right)$

Esempio: $f(x) = \sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$

$x_0 = 0$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \pm \sin x \\ \pm \cos x \end{cases}$$

$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad \forall n \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sin x$ è sviluppabile in serie di Mclaurin e questa converge a $\sin x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \forall n$

$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio: $f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad \forall n$

$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \Rightarrow \cos x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Allo stesso modo si possono ottenere gli sviluppi già visti in serie di Mclaurin delle funzioni elementari: e^x, $\text{sh}x$, $\text{ch}x$, $\log(1+x)$, $\text{arctg}x$.

Un altro sviluppo importante è quello binomiale.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \ldots, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} =$$

= coefficiente binomiale generalizzato.

Si chiama serie binomiale $\sum_0^\infty \binom{\alpha}{n}x^n$

na volta per ottenere $(1+x)^{-2}$, 2 volte per $(1+x)^{-3}$, ...).

empio: $\alpha=-2$.

$$(1+x)^{-2}=\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}=1-2x+3x^2\ldots\ldots$$

$$=-\sum_0^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$$

direttamente ho: $\binom{-2}{n}=(-1)^n(n+1)$

$$(1+x)^{-3}=\frac{1}{(1+x)^3}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sum_0^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=-\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}(-1)^n(n+1)n x^{n-1}=$$

$$=1-3x+6x^2-10x^3+\ldots\ldots$$

sservazione: Per $\alpha=\frac{1}{2}$ si ottiene il seguente sviluppo di $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\ldots\ldots=1+\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n$$

ove doppio fattoriale di:

$(2n)!!=1\cdot2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\ldots\cdot2n$

$(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\ldots(2n+1)$

$(-1)!!=1$

$$\binom{1/2}{n}=(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

r $\alpha=-\frac{1}{2}$ si ottiene $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\ldots\ldots=$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

sercizio: Usando gli sviluppi di McLaurin delle funzioni elementari, calcolare la serie di McLaurin delle seguenti funzioni indicando il raggio di convergenza:

) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$

$|t|<1\Rightarrow\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\ldots\ldots=\sum_0^{\infty}(-t)^n$

$$\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\frac{1}{3}\sum_0^{\infty}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n=\frac{1}{3}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{3^n}x^n$$

$|t|<1\Rightarrow\left|\frac{2}{3}x\right|<1\Rightarrow|x|<\frac{3}{2}\Rightarrow R=\frac{3}{2}$

converge per $|x|<1$

converge per $\left|\frac{x}{2}\right|<1\Rightarrow|x|<2$

) $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=-\sum_0^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=$

$\Downarrow$ R = minimo tra i 2

$$=-\sum_0^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n=\sum_0^{\infty}\left(-1-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{2^n}\right)x^n=\sum_0^{\infty}\left(-1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)x^n$$

R=1.

Una funzione di n variabili a valori vettoriali è:

$F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

Casi importanti:

Se $n=1$ una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ o $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ si chiama curva.

$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$

Si parla anche di curva parametrica con parametro t.

Si parla di curva anche intendendo l'immagine della funzione $g(t)$.

$n=2$ Una curva parametrica è $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = g_1(t), y = g_2(t), t \in I\}$

Altri modi di definire una curva:

curva cartesiana = grafico di una funzione

$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in I\}$ $\quad t = x$

curva in forma implicita: $f(x,y) = 0$

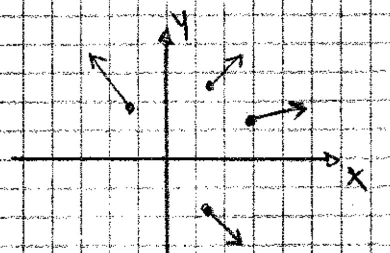
2° caso: $n = m$

2 interpretazioni di una $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1) F definisce un campo vettoriale

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \vec{v}(x,y)$



2) se F è biunivoca (fra il suo dominio e la sua immagine) si può pensare come un cambio di coordinate. Esempi:

$F: [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

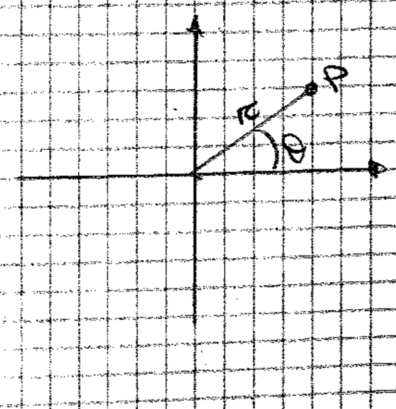
$(r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$

(r,θ) coordinate polari.

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

con inverse $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$



...pologia di $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$) e limiti.

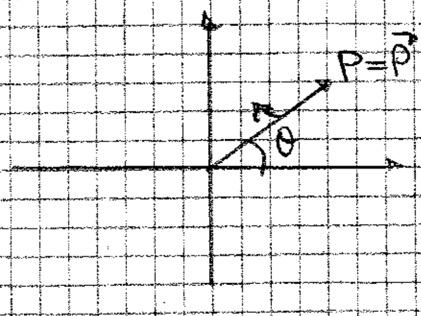
$P = (x,y)$ $\quad$ $Q = (x',y')$

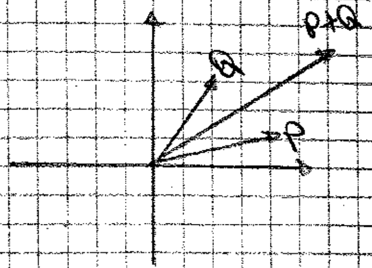
...a norma è: $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = d(P,O)$

$d(P,Q) = \|P-Q\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$

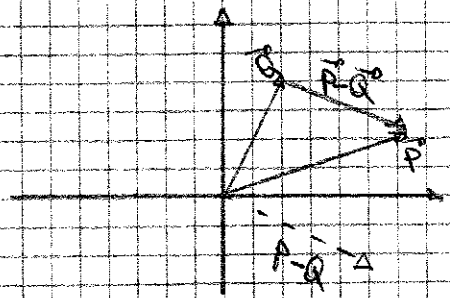
...somma vettoriale $P+Q$ si può fare in $\mathbb{R}^2$ con la regola del ...rallelogramma

$P+Q = (x+x', y+y')$





$-\vec{Q}$



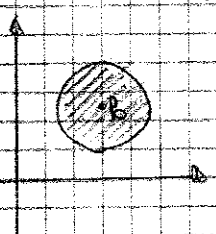
...i generalizza tutto a $\mathbb{R}^n$.

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\quad\quad$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

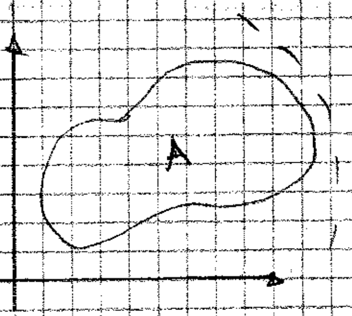
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$P_0 = (x_0, y_0)$ $\quad\quad$ $r>0$

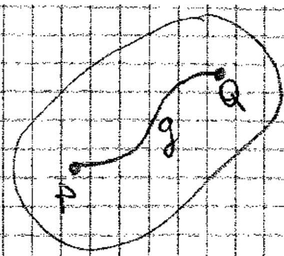
...n intorno di P_0 di raggio r è $B_r(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r\}$



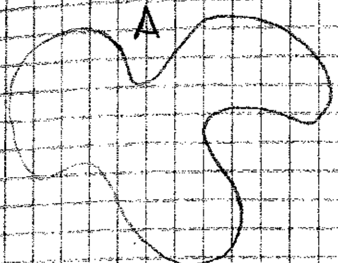
$\subset \mathbb{R}^2$ è limitato se A è contenuto in un $B_r((0,0))$ per qualche $r>0$

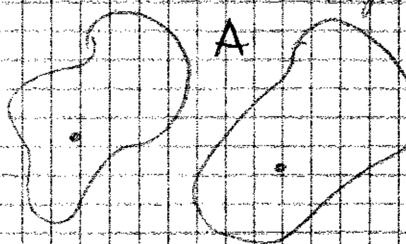


...ste $g: [a,b] \to \mathbb{R}^2$
$g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ tale che
g_1, g_2 sono continue
$g(t) \in A \;\; \forall t$
$g(a) = P; \;\; g(b) = Q$



Un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice connesso (per archi) se, presi comunque due punti x e y di A, esiste una poligonale che li congiunge interamente contenuta in A.





connesso per archi — non connesso

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_0, y_0) = P_0 \in \mathbb{R}^2$

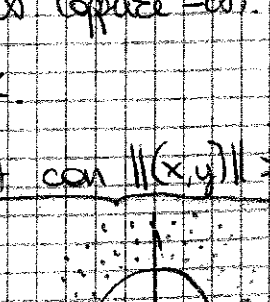
Supponiamo che f sia definita in un intorno di P_0 escluso al più il punto P_0 stesso.
Diciamo che $l \in \mathbb{R}$ è il limite di f per (x,y) che tende a (x_0, y_0)

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in A$ (dominio di f) con $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ vale che se $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon. \iff$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: se $P \in A$, $P \neq P_0$ e se $0 < d(P, P_0) < \delta \Rightarrow d(f(P), l) < \varepsilon$.

Più in generale si può definire:
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ allo stesso modo se P_0 è un pto di accumulazione di A
cioè se $\forall r > 0$, $(B_r(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$.

Analoghe definizioni si danno per $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ (oppure $-\infty$).
$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) > K$.

$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists K > 0 : \underbrace{\forall (x,y) \in A \text{ con } \|(x,y)\| > K}$
$\Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$



$f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0 \longrightarrow 0$

$y = x \quad f(x,x) = \frac{x^3}{x^4+x^2} = \frac{x}{1+x^2} \xrightarrow[x\to0]{} 0$

$y = kx, \ f(x,kx) = \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \frac{kx}{x^2+k^2} \xrightarrow[x\to0]{} 0 \quad \forall k \neq 0$

sembra che $\exists$ limite; però se prendo $y = x^2$

$f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \nexists$ limite

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^4}{x+y^2}$ Provare lungo asse x, asse y e $y = \sqrt{x}$ provero che limite $\nexists$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Dimostriamo che fa 0 verificando la definizione.

$\varepsilon > 0 \quad |f(x,y) - 0| < \varepsilon$

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon$, ma si ha che $0 \leq \boxed{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} < \boxed{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ basta prendere $\delta = \varepsilon$.

Tale: $\square < \boxed{\varepsilon}$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$

lungo assi $f = 0 \Rightarrow \lim$ o è 0 o $\nexists$

Passando a coordinate polari $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2\cancel{r^2}\cos^2\theta \, r\sin\theta}{\cancel{r^2}}$

$0 \leq |f(x,y)| = 2|\cos^2\theta||\sin\theta| r \leq 2r$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \quad 0 \qquad 0$

Regola: se $0 \leq |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| \leq g(r)$ con $g(r) \xrightarrow[r\to0]{} 0$

allora vale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$.

somma, il prodotto di funzioni continue sono ancora continui, così pure il rapporto $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ nei p.ti in cui $g \neq 0$; la funzione composta $g \circ f$ di funzioni continue è continua.

Teorema di Weierstrass:
Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua su un insieme A limitato e chiuso (compatto). Allora f assume massimo e minimo su A, cioè esistono 2 p.ti $P_1 = (x_1, y_1) \in A$ e $P_2 = (x_2, y_2) \in A$ tali che $f(x_1, y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2, y_2)$ $\forall (x,y) \in A$
$\Rightarrow m = \min_A f = f(x_1, y_1)$, $M = \max_A f = f(x_2, y_2)$).

Osservazione: se $f(x)$ è una funzione continua di una variabile, allora f è continua anche se la considero come funzione di 2 variabili:
$g(x,y) = f(x)$ g è continua

Esempio: $f(x,y) = \sin x$ $g(x,y) = \cos y$ sono continue
$\Rightarrow h(x,y) = \sin x + \cos y$, $k(x,y) = \sin x \cos y$, $l(x,y) = \sin^2 x \cos^3 y$
sono continue in $\mathbb{R}^2$.

$f(x,y) = x^3 \cos y + x (\sin x) y^2$ è continua
$f(x,y) = x^2 e^{x+y} = x^2 e^x \cdot e^y$
$f(x,y) = \frac{\sin x}{1+y^2}$ è continua su $\mathbb{R}^2$
$f(x,y) = e^{\frac{x}{1-y}}$ questa è la funzione composta

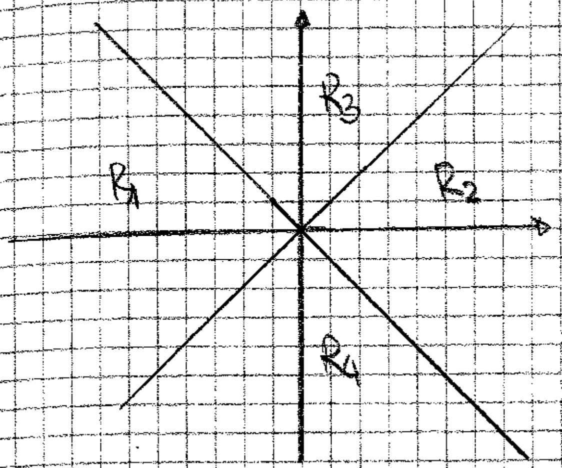
$$(x,y) \xrightarrow{g} \frac{x}{1-y} = g(x,y) \xrightarrow{h} e^{g(x,y)} \Rightarrow f(x,y) = h(g(x,y))$$
$h(t) = e^t$

$f = h \circ g$
$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{retta } y = 1\} \to \mathbb{R}$
$h(t) = e^t$ è continua su $\mathbb{R}$. $g(x,y) = \frac{x}{1-y}$ è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{retta } y = 1\}$
$\Rightarrow f = h \circ g$ continua $\forall (x,y): y \neq 1$.
Possiamo usare la continuità per calcolare i limiti.
$\lim_{(x,y) \to (0,0)} e^{\frac{x}{1-y}} = e^{\frac{0}{1-0}} = e^0 = 1$

Teorema: Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Allora:
1) i seguenti insiemi sono aperti in $\mathbb{R}^2$:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) > 0\}$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < 0\}$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq 0\}$

esempio: 1) Determinare e disegnare il dominio di $f(x,y)=\log(x^2-y^2)$

$\mathrm{dom} f=\{(x,y): x^2-y^2>0\}$



$g(x,y)=x^2-y^2$

$g>0$

$g(x,y)=0 \iff x^2=y^2 \iff y=\pm x$

R_1, R_2, R_3, R_4 sono connessi

$\Rightarrow$ segno di g $\forall R_j$ deve essere costante.

$g(1,0)=1^2-0^2=1>0$

$g(-1,0)=(-1)^2-0^2=1>0$ $\qquad g|_{R_1}>0,\ g|_{R_2}>0.$

$g(0,1)=-1^2=-1<0$

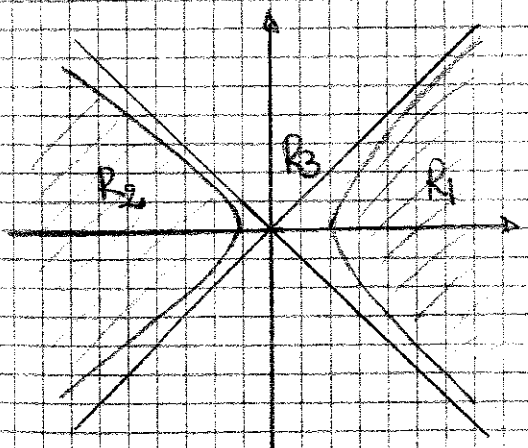
$g(0,-1)=-1<0$ $\qquad g|_{R_3}<0,\ g|_{R_4}<0$

$\Rightarrow \mathrm{dom} f=R_1\cup R_2$ ($\partial R_1, \partial R_2=$ bisettrici sono escluse)

$R_1\cup R_2$ è aperto ma non connesso.

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2-1}$

$\mathrm{dom} f=\{(x,y): x^2-y^2-1\geq 0\}$



$g(x,y)=x^2-y^2-1$

$g=0 \iff x^2-y^2=1 \iff (x,y)\in$ iperbole

Questa iperbole divide $\mathbb{R}^2$ in 3 regioni connesse R_1, R_2, R_3.

$g(2,0)=4-1=3>0$

$g(-2,0)=4-1=3>0$

$g(0,1)=-2<0$

$\Rightarrow g|_{R_1}>0,\ g|_{R_2}>0,\ g|_{R_3}<0.$

$\Rightarrow \mathrm{dom} f=R_1\cup R_2\cup\partial R_1\cup\partial R_2$

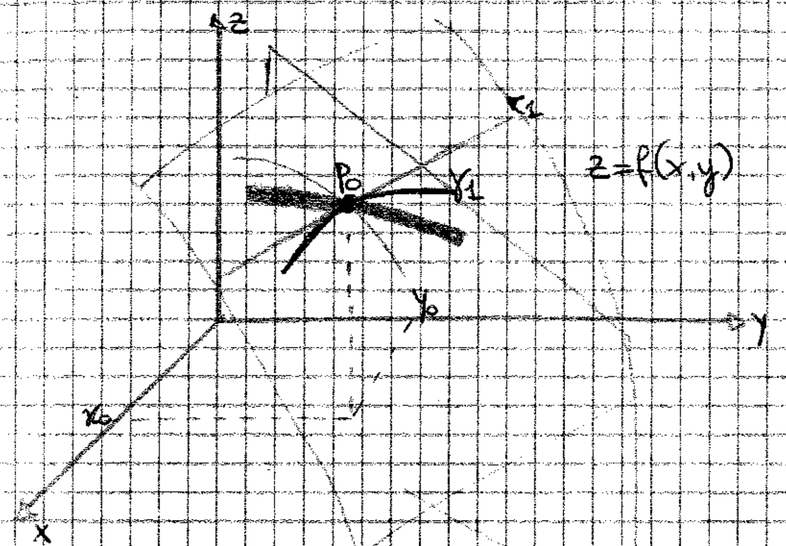
Si può anche discutere algebricamente, però così si vede meglio.

$(\partial_x f)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow \partial_x f(0,0) = 0.$

Si osservi che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\partial_x f)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{2\sqrt{x}} \nexists$

Osservazione: In generale se $f(x,y)=0$ lungo l'asse x allora $\partial_x f(0,0)=0$ se $f(x,y)=0$ lungo l'asse y allora $\partial_y f(0,0)=0$, se $f(x,y)=0$ lungo entrambi gli assi allora $\partial_x f(0,0) = 0 = \partial_y f(0,0)$

Interpretazione geometrica di $\partial_x f, \partial_y f$: 15/11/2012



$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ dove $z_0=f(x_0,y_0)$.

Interseca la superficie $z=f(x,y)$ con il piano verticale (// asse z) $y=y_0$. Ottengo una curva γ_1 la cui equazione nel piano $y=y_0$ sarà $z=f(x,y_0)$. e la cui forma parametrica prendendo $t=x$ come parametro sarà:

$\gamma_1 : R \to R^3$

$\gamma_1(x) = (x, y_0, f(x,y_0))$.

Allora $\partial_x f(x_0,y_0)$ è il coefficiente angolare della retta r_1 tangente a γ_1 in P_0.

r_1 ha equazione in R^3:

$$\begin{cases} z = z_0 + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) \\ y=y_0 \end{cases}$$

Analogamente $\partial_y f(x_0,y_0)$ è il coefficiente angolare della retta r_2 tangente in P_0 alla curva γ_2 ottenuta intersecando $z=f(x,y)$ col piano $x=x_0$

Oss: Il vettore tangente a γ_1 è:

$\gamma_1'(x) = (1, 0, \partial_x f(x_0,y_0))$ = direzione retta r_1.

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{t^2} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}$$

$f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(P_0) h + o(h) \qquad h \to 0$

$f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \partial_y f(P_0) k + o(k) \qquad k \to 0$

Quello che serve è:

$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$ funzione lineare di 2 incrementi h, k + infinitesimi di ordine superiore a $\sqrt{h^2+k^2}$.

Def: $f(x,y)$ si dice differenziabile in (x_0,y_0) se esistono $\partial_x f(x_0,y_0)$, $\partial_y f(x_0,y_0)$ e vale: $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0) h + \partial_y f(x_0,y_0) k + o(\sqrt{h^2+k^2})$ per $(h,k) \to (0,0)$.

cioè: $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \partial_x f(P_0) h - \partial_y f(P_0) k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ A volte per verificare differenziabilità bisogna fare qst tipo di limite.

La funzione lineare $df(x_0,y_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$df(P_0)(h,k) = \partial_x f(P_0) h + \partial_y f(P_0) k = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (h,k) =$$
$$= \langle \nabla f(P_0), (h,k) \rangle \quad \text{dove:}$$

$\nabla f(P_0) = (\partial_x f(P_0), \partial_y f(P_0)) =$ gradiente.

La funzione di $f(P_0)$ si chiama il differenziale di f in $P_0 = (x_0, y_0)$.

Quindi f differenziabile in $P_0 \Longleftrightarrow f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) =$
$= \nabla f(P_0) \cdot (h,k) + o(\|(h,k)\|) = df(P_0)(h,k) + o(\|h,k\|)$.

funzioni coordinate:

$g_1(x,y) = x \qquad g_2(x,y) = y$

$\begin{cases} \partial_x g_1 = 1 \\ \partial_y g_1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \partial_x g_2 = 0 \\ \partial_y g_2 = 1 \end{cases}$ in ogni p.to.

$\Rightarrow dg_1(x_0,y_0)(h,k) = h$
$\quad dg_2(x_0,y_0)(h,k) = k \qquad \forall (x_0,y_0)$

$\Rightarrow df(P_0)(h,k) = (\partial_x f(P_0))\, dx\,(h,k) + (\partial_y f(P_0))\, dy\,(h,k)$

$\Rightarrow df(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)\, dy$

$df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy$

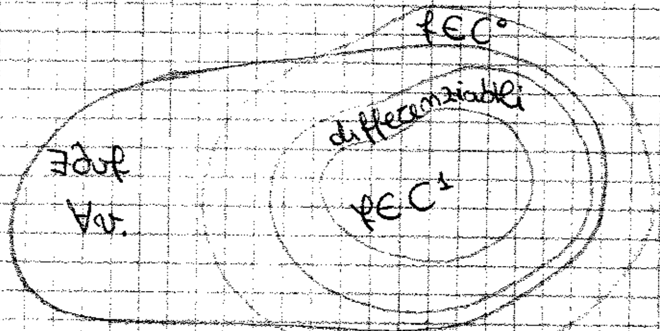
Se f differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$ il piano tangente è il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione:

Teorema (condizione sufficiente per la differenziabilità)
Se f è definita in un intorno di (x_0, y_0) ed esistono $\partial_x f(x,y)$, $\partial_y f(x,y)$ in ogni p.to di questo intorno e se $\partial_x f$, $\partial_y f$ sono continue in (x_0,y_0) $\Rightarrow$ f è differenziabile in (x_0,y_0).

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $f: A \to \mathbb{R}$.
[D]iciamo che f è di classe C^1 su A, $f \in C^1(A)$, se f ha le derivate [p]arziali $\partial_x f$, $\partial_y f$ continue su TUTTO A.
[P]er il Teorema $f \in C^1(A) \Rightarrow f$ differenziabile in ogni p.to di A.

[N].B: Il viceversa non vale.

[Q]uindi riassumendo la situazione è:



C^0: continua.

[A]lgebra per differenziale e gradiente:

$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$

$\nabla(fg) = (\nabla f) g + f(\nabla g)$ Leibniz.

$\nabla \frac{1}{g} = -\frac{1}{g^2} \nabla g$ etc $\nabla \frac{f}{g} = \ldots\ldots$

[O]sserv: La seguente definizione è equivalente a quella data sopra.
$f(x,y)$ si dice differenziabile in (x_0,y_0) se esistono 2 costanti A, B:
$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = Ah + Bk + o(\|h,k\|)$
[S]e vale questa si dimostra che: $\exists\, \partial_x f(x_0,y_0) = A$

$\exists\, \partial_y f(x_0,y_0) = B$.

$\Rightarrow df(x_0,y_0)(h,k) = Ah + Bk$

[f]$: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se $\exists$ una funzione lineare $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ detta differenziale di f in x_0 tale che
[f]$(x_0+h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + o(\|h\|)$ $h \to 0$
$\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - df(x_0)h}{\|h\|} = 0$

il gradiente di $g\circ f$ è:

$$\nabla(g\circ f)(x,y) = (g'(f(x,y))\partial_x f(x,y),\ g'(f(x,y))\partial_y f(x,y)) = g'(f(x,y))\nabla f(x,y)$$

esempio: Gradiente di una funzione radiale

$$h(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2}) = g(r) = g(f(x,y)),\quad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

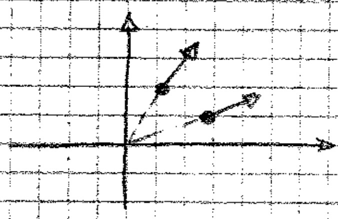
$$\frac{\partial}{\partial x} g(r) = g'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = g'(r)\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\partial_y g(r) = g'(r)\frac{y}{r} \Rightarrow \nabla g(r) = \frac{g'(r)}{r}(x,y)$$

$\Rightarrow$ il gradiente di una funzione radiale ha la direzione radiale in ogni punto.

$$\|\nabla g(r)\| = \left|\frac{g'(r)}{\cancel{r}}\right| \cancel{\|(x,y)\|} = |g'(r)|$$



2° caso) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$h(t) = f\circ g(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t)) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

Se g è derivabile in t cioè $\exists\, g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t))$ = vettore tg alla curva e f è differenziabile in $(x,y) = g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ allora:
$h = f\circ g$ è derivabile in t e vale:

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), g_2(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t))\, g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t))\, g_2'(t) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t)\rangle$$

esempio: Ortogonalità del gradiente di f alle curve di livello di f:
Sia f differenziabile in un intorno di (x_0,y_0), sia $z_0 = f(x_0,y_0)$, e sia γ la curva di livello z_0, cioè la curva di livello passante per (x_0,y_0) definita implicitamente da $f(x,y) = z_0$.
Supponiamo che γ ammetta una rappresentazione regolare del tipo $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ con $g_1(0) = x_0$, $g_2(0) = y_0$ con $g_1, g_2 \in C^1(I)$, I = intervallo con $(g_1'(t), g_2'(t)) = v(t) \neq (0,0)$ $\forall t\in I$.

Vediamo che questo vale localmente se $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
Consideriamo $h(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t))$ = costante $= z_0$ $\forall t\in I$

$$\Rightarrow 0 = h'(t) = \frac{d}{dt} f(g(t)) = \nabla f(g(t))\cdot g'(t) \quad \forall t\in I$$

$\Rightarrow$ il vettore gradiente di f lungo γ è $\perp$ al vettore Tangente sempio: $f(x,y) = x^2+y^2$

eterminare l'eq. del piano tg nel p.to (1,1) e calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)$ per $v=(v_1, v_2)$ e individuare le direzioni in tale p.to di massima e minima pendenza del grafico di f e la direzione in (1,1) in cui è costante.

...: vediamo se f è differenziabile

$\partial_x f = 2x \qquad \partial_y f = 2y$

oiché $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono continue su $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ f differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

$= f(1,1) + \partial_x f(1,1)(x-1) + \partial_y f(1,1)(y-1)$

$= 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$

$= 2x + 2y - 2$.

$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot (v_1, v_2) = (2,2)\cdot(v_1, v_2) = 2(v_1+v_2)$

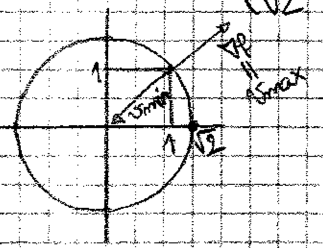
(v_1, v_2) è un versore, la direzione di massima pendenza è:

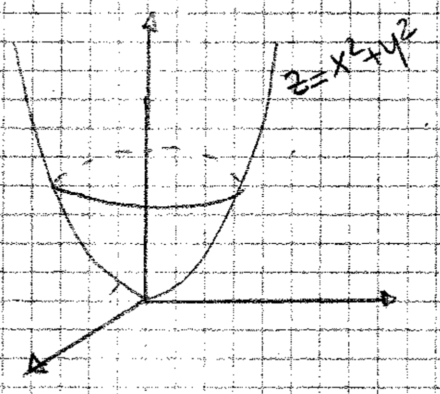
$v_{max} = \frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = \frac{2(1,1)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$v_{min} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

curva di livello in (1,1) è $\perp$ $\nabla f(1,1)$ cioè $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = 0$ e ha direzione $v=(v_1, v_2)$ con $v_1 = -v_2$)

er esempio: $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.





caso) caso generale:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \partial_x(\partial_x f) = \partial_x^2 f$;

$\partial_y^2 f$;

$\partial_x \partial_y f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$;

$\partial_y \partial_x f$.

Esempio: $f(x,y) = x^2 \sin y$

$\partial_x^2 f = 2\sin y$

$\partial_y^2 f = -x^2 \sin y$

$\partial_x \partial_y f = \partial_x(x^2 \cos y) = 2x\cos y$

$\partial_y \partial_x f = \partial_y(2x \sin y) = 2x\cos y$

Teorema (Schwarz).

Se le derivate parziali miste $\partial_x\partial_y f$, $\partial_y \partial_x f$ esistono in un intorno di (x_0,y_0) e sono continue in (x_0,y_0) allora in tal punto coincidono

$\partial_x\partial_y f(x_0,y_0) = \partial_y \partial_x f(x_0,y_0)$.

f si dice di classe C^2 su A = aperto, $f \in C^2(A)$, se $f(x,y)$ ha tutte le derivate parziali seconde continue in ogni p.to di A

$f \in C^2(A) \Rightarrow$ derivate miste uguali.

22/11/2012

In modo analogo definiamo le derivate parziali di ordine 3 o di ordine n.

$n=3$ $\partial_x^3 f$; $\partial_y \partial_x^2 f$; $\partial_x^2 \partial_y f$; $\partial_x \partial_y \partial_x f$ più quelle ottenute scambiando x con y. ($8 = 2^3$ derivate)

Si dice in generale che f è di classe C^k su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ se ha tutte le derivate parziali di ordine $\leq k$ e queste sono tutte continue in A. Il teorema di Schwarz si estende ad ogni ordine. Per esempio per $k=3$, si ha che se $f \in C^3(A)$ allora tutte le derivate parziali terze miste rispetto alle stesse variabili coincidono:

$\partial_y \partial_x^2 f = \partial_x^2 \partial_y f = \partial_x \partial_y \partial_x f$ etc quindi si hanno in tutto non 8 derivate terze distinte ma solo 4 cioè: $\partial_x^3 f$; $\partial_x^2 \partial_y f$; $\partial_y^2 \partial_x f$; $\partial_y^3 f$.

In generale se $f \in C^k(A) \Rightarrow$ invece di 2^k le derivate distinte di ordine k sono $k+1$ cioè: $\partial_x^k f$; $\partial_x^{k-1} \partial_y f$; $\partial_x^{k-2} \partial_y^2 f$; ...; $\partial_x \partial_y^{k-1} f$, $\partial_y^k f$.

Inoltre si hanno le inclusioni:

$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset \ldots \supset C^n(A) \supset \ldots \supset C^\infty(A)$.

$$\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f = \frac{(x^2+y^2)}{r^2} f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r} - \frac{f'(r)(x^2+y^2)}{r^3}$$

$$\Rightarrow \Delta f = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) f$$

In $\mathbb{R}^3$ si dimostra che:

$$\Delta f = \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) f = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

In $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta f = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\right) f$$

Possiamo risolvere esplicitamente l'equazione di Laplace per funzioni radiali:

$\mathbb{R}^2$: $\Delta f = \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) f = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{df}{dr}\right)$

$$\Rightarrow \Delta f = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r f'(r)\right) = 0 \Rightarrow r f'(r) = a = \text{costante} \in \mathbb{R}$$

$$f'(r) = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow f(r) = \int \frac{a}{r}\, dr = a \log r + b \qquad (1)$$

$\mathbb{R}^3$: $\Delta f = \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{df}{dr}\right)$

$$\Delta f = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2 f'(r)\right) = 0 \Rightarrow r^2 f'(r) = a = \text{costante}$$

$$f'(r) = \frac{a}{r^2}$$

$$\Rightarrow f(r) = \int \frac{a}{r^2}\, dr = -\frac{a}{r} + b \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

$\mathbb{R}^n$: $\Delta f = \left(\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{n-1}{2}\frac{d}{dr}\right) f = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1} \frac{df}{dr}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^{n-1} f'(r)\right) = 0$$

$$r^{n-1} f'(r) = a = \text{costante}$$

$$f'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$$

$$\Rightarrow f(r) = \int \frac{a}{r^{n-1}}\, dr = \frac{a}{(2-n)}\frac{1}{r^{n-2}} + b$$

Non vale se $n = 2$
vale la formula (1)

La generalizzazione a $f \in \mathcal{C}^m(A)$ è:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + (h\partial_x + k\partial_y)f\big|_{P_0} + \frac{1}{2!}(h\partial_x + k\partial_y)^2 f\big|_{P_0} + \frac{1}{3!}(h\partial_x + k\partial_y)^3 f\big|_{P_0} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{m!}(h\partial_x + k\partial_y)^m f\big|_{P_0} + o\big(\underbrace{(h^2+k^2)^{m/2}}_{(\|h,k\|^2)^{m/2}}\big) \qquad (h,k)\to(0,0)$$

Formula di Taylor col resto di Lagrange:

Se $f \in \mathcal{C}^2(A)$, A aperto, $(x_0,y_0) \in A$, dato $(h,k) \in \mathbb{R}^2 : (x_0+h, y_0+k) \in A \Rightarrow$ esiste un p.to $(x_1,y_1) \in A$ con $x_0 < x_1 < x_0+h$, $y_0 < y_1 < y_0+k$ (se $h,k>0$) tale che

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)h + \partial_y f(x_0,y_0)k + \frac{1}{2!}\{\partial_x^2 f(x_1,y_1)h^2 + \partial_y^2 f(x_1,y_1)k^2 +$$
$$+ 2\partial_x\partial_y f(x_1,y_1)hk\}$$

Formula di Taylor del 2° ordine per $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^2(A)$, A aperto, $x_0 \in A$, $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $x_0+h \in A$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n h_j \partial_{x_j} f\big|_{x_0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^n h_i h_j \partial_{x_i}\partial_{x_j} f\big|_{x_0} + o(\|h\|^2) = \quad \begin{matrix} h \to 0 \\ (0 \text{ in } \mathbb{R}^n)\end{matrix}$$

$$= f(x_0) + (h\cdot\nabla)f\big|_{x_0} + \frac{1}{2!}(h\cdot\nabla)^2 f\big|_{x_0} + o(\|h\|^2)$$

$$(h\cdot\nabla)^2 = \left(\sum_{i=1}^n h_i\partial_{x_i}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n h_i\partial_{x_i} h_j\partial_{x_j} = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \partial_{x_i}\partial_{x_j}$$

Matrice Hessiana $n\times n$

$$H_f(x_0) = H_f(x_0)_{ij} = \partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f(x_0) & \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_0) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(x_0) \\ \partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_2}^2 f(x_0) & & \partial_{x_2}\partial_{x_n} f(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_n}\partial_{x_2} f(x_0) & \cdots & \partial_{x_n}^2 f(x_0) \end{pmatrix}$$

Se $f \in \mathcal{C}^2(A) \Rightarrow H_f(x_0)$ è simmetrica

$$\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot h + \frac{1}{2!}h^t H_f(x_0)h + o(\|h\|^2) =$$

$$= f(x_0) + \langle h, \nabla f(x_0)\rangle + \frac{1}{2!}\langle h, H_f(x_0)h\rangle + o(\|h\|^2)$$

Nella notazione matriciale:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \qquad h^t = (h_1\ h_2 \cdots h_n)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 206

Massimi e minimi liberi:
sono i punti di estremo interni ad A. D'ora in poi supponiamo A aperto.

Teorema: (Fermat o condizione necessaria del 1° ordine)
Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, è derivabile parzialmente in un p.to $(x_0, y_0) \in A$ di estremo relativo allora: $\begin{cases} \partial_x f(x_0,y_0)=0 \\ \partial_y f(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ cioè $\nabla f(x_0,y_0)=0$.

I pti in cui si annulla il gradiente si chiamano p.ti critici o stazionari.

Dimostrazione:
Infatti le 2 funzioni di una variabile

$x \to f(x, y_0)$

$y \to f(x_0, y)$

hanno un p.to di estremo relativo la 1ª in $x=x_0$ e la 2ª in $y=y_0$.
Inoltre tali p.ti sono interni al dominio di tali funzioni.
Per il teorema di Fermat in 1 variabile $\Rightarrow \partial_x f(x_0,y_0)=0$, $\partial_y f(x_0,y_0)=0$
Il teorema di Fermat ci dice che i pti di estremo relativo vanno tra i p.ti critici. Non tutti tali p.ti critici sono però necessariamente p.ti di max o di min relativo.

Esempio: 1) $f(x,y) = x^2+y^2$

$\begin{cases} \partial_x f=0 \\ \partial_y f=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$

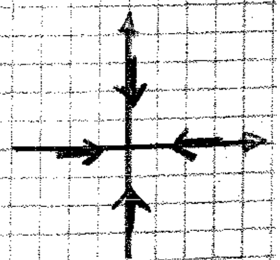
$f(0,0)=0$

$f(x,y) - f(0,0) = x^2+y^2 \geq 0$ in ogni intorno di $(0,0) \Rightarrow (0,0)$ p.to di min. relativo forte.

2) $f(x,y) = -x^2-y^2 \Rightarrow (0,0)$ p.to di max relativo forte

3) $f(x,y) = x^2-y^2$

$(0,0)$ è ancora p.to critico



Se mi avvicino a $(0,0)$ lungo asse x $(y=0)$ $f(x,0)=x^2 \geq 0$
Se invece vado a $(0,0)$ lungo asse y $(x=0)$ $f(0,y) = -y^2 \leq 0$

$\Rightarrow (0,0)$ non è né p.to di max relat. né p.to di min. relativo ma si chiama p.to di sella cioè $\forall$ intorno $B_\varepsilon(x_0,y_0)$ $\forall \varepsilon>0$ ci sono sempre dei p.ti $(x,y) \in B_\varepsilon(x_0,y_0)$ tali che $f(x,y) - f(x_0,y_0) > 0$ e tali che $f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0$

Dimostrazione ($\pm$): Taylor 2° ordine.

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \underbrace{\nabla f(x_0,y_0)}_{0} \cdot (h,k) + \frac{1}{2}(h,k) H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2+k^2) \quad (h,k)\to(0,0)$$

$$\begin{cases} x = x_0+h \\ y = y_0+k \end{cases} \qquad \begin{cases} h = x-x_0 \\ k = y-y_0 \end{cases}$$

Il segno di $f(P)-f(P_0)$ dipende dal termine del 2° ordine cioè dalla forma quadratica associata a $H_f(P_0)$:

$$q(h,k) = ah^2+bk^2+2chk$$

Devo studiare il segno di $q(h,k)$ in un intorno di $(h,k)=(0,0)$.

$$(h,k)\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (h\ k)\begin{pmatrix} ah+ck \\ ch+bk \end{pmatrix} = ah^2+2chk+bk^2 =$$

$$= a\left(h+\frac{c}{a}k\right)^2 + \left(b-\frac{c^2}{a}\right)k^2 = a\left(h+\frac{c}{a}k\right)^2 + \frac{ab-c^2}{a}k^2$$

Se $H = ab-c^2 > 0$ e $a>0 \Rightarrow q(h,k) \geq 0 \ \forall (h,k)$ anzi $q(h,k)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} h+\frac{c}{a}k = 0 \\ k=0 \end{cases} \quad \begin{cases} h=0 \\ k=0 \end{cases} \Rightarrow q(h,k)>0 \quad \forall (h,k)\neq(0,0)$$

$\Rightarrow P_0$ p.to di minimo relativo forte.

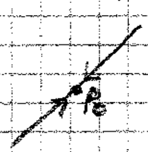
Se $H>0$, $a<0$ ottengo $q(h,k)<0 \ \forall (h,k)\neq(0,0)$.

$\Rightarrow P_0$ p.to di max relativo forte.

Se $H<0$ si dimostra che $\exists\, v_1=(h_1,k_1) : q(v_1)>0$, $\exists\, v_2=(h_2,k_2) : q(v_2)<0$

$\Rightarrow f(P_0+tv_1)-f(P_0)>0$ per $t\to0$

$f(P_0+tv_2)-f(P_0)<0$ per $t\to0$



$\Rightarrow P_0$ p.to di sella.

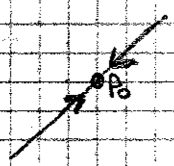
Infine sia $H=ab-c^2=0$ e $a>0$

$$f(P)-f(P_0) = a\left(h+\frac{c}{a}k\right)^2 + o(h^2+k^2)$$

in questo caso: $q(h,k)\geq 0$ con $q(h,k)=0 \Leftrightarrow h=-\frac{c}{a}k \Leftrightarrow x-x_0 = -\frac{c}{a}(y-y_0)$ (*)

$q=0$ lungo la retta (*)

$$f(P)-f(P_0)\Big|_{retta} = o(h^2+k^2)$$



Questo mi impedisce di concludere che P_0 sia pto di minimo: P_0 è o minimo o sella.

Infine se $H=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f(P)-f(P_0) = o(h^2+k^2)$?

4) $f(x,y)=x^2+y^4$

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$(0,0)$ p.to di minimo perché $f(x,y)-f(0,0)=x^2+y^4 \geq 0$ ed essendo $=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0) \Rightarrow$ relativo forte.

Osserv: Se $H>0$ non può essere né $\partial^2_{x}f(P_0)=0$ né $\partial^2_{y}f(P_0)=0$. ($H=ab-c^2<0$) dunque o vale caso 1) o vale caso 2) quindi: $\begin{cases}\nabla f(P_0)=0\\ H>0\end{cases} \Rightarrow P_0$ p.to di max o di min. relat.

Proposizione: Se P_0 p.to di max o min relativo $\Rightarrow \nabla f(P_0)=0$, $H\geq 0$.

Dimostrazione: Per assurdo se fosse $H<0$ per p.to 3) del teorema P_0 sarebbe sella.

Teorema: $f: A\subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A aperto, $f\in C^2(A)$, $x_0\in A$, $\nabla f(x_0)=0$.

$$H_f(x_0)=H=\begin{pmatrix}\partial^2_{x_1}f(x_0) & \cdots & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{x_n}f(x_0)\\ \partial_{x_2}\partial_{x_1}f(x_0) & \partial^2_{x_2}f(x_0) & \cdots & \partial_{x_2}\partial_{x_n}f(x_0)\\ \vdots & & & \vdots\\ \partial_{x_n}\partial_{x_1}f(x_0) & \cdots & \cdots & \partial^2_{x_n}f(x_0)\end{pmatrix}$$

Allora:

1) se H è definita positiva $\Rightarrow x_0$ p.to di min. relativo forte.
2) se H è " negativa $\Rightarrow x_0$ " " max " "
3) se H è indefinita $\Rightarrow x_0$ p.to di sella
4) se H è semidefinita positiva o negativa ma non definita $\Rightarrow$ caso dubbio.

Si studia $(f(x)-f(x_0))$ direttamente. Possiamo però dire che:

- se $H\neq 0_{mat}$ e H semidefinita positiva $\Rightarrow x_0$ minimo o sella
- se $H\neq 0_{mat}$ ed è semidef. negat. $\Rightarrow x_0$ max o sella.
- se $H=0_{mat}$ x_0 può essere qualsiasi cosa.

Dimostrazione: Si usa il fatto che H def. positiva $\Rightarrow v^tHv=q(v)\geq \lambda_{min}\|v\|^2$ $\forall v\in\mathbb{R}^n$ mentre H def. negativa $\Rightarrow q(v)\leq \lambda_{max}\|v\|^2$

Ricordiamo che definita:

$H=H_{ij}=$ matrice simmetrica $n\times n$

$q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\quad q(v)=v^tHv=\langle v,Hv\rangle=$ forma quadratica associata ad H

Teorema (regola dei minori principali):
$H = H_{ij}$ = matrice simmetrica
Definiamo i minori principali:

$$\Delta_1 = H_{11} \; ; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{vmatrix} \cdots\cdots \Delta_k = \begin{vmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1k} \\ \vdots & & \\ H_{k1} & \cdots & H_{kk} \end{vmatrix}$$

con $k = 1, 2, 3, \dots, n$
$\Delta_n = \det H$

Allora:
1) H è def. positiva $\iff \Delta_k > 0 \quad \forall k$
2) H è def. negativa $\iff (-1)^k \Delta_k > 0 \quad \forall k$ cioé $\iff \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0 \dots$
3) H è indefinita $\iff \exists k$ per: $\Delta_k < 0$.

Esempio $n=2$: $H = H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(P_0) & \partial_x\partial_y f(P_0) \\ \partial_x\partial_y f(P_0) & \partial_y^2 f(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

1) H def. positiva $\iff a > 0, \; ab - c^2 > 0$
2) H def. negativa $\iff a < 0, \; ab - c^2 > 0$
3) H indefinita $\iff \Delta_2 = ab - c^2 < 0$

$n=3$: $H = H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(P_0) & \partial_x\partial_y f(P_0) & \partial_x\partial_z f(P_0) \\ \partial_x\partial_y f(P_0) & \partial_y^2 f(P_0) & \partial_y\partial_z f(P_0) \\ \partial_z\partial_x f(P_0) & \partial_z\partial_y f(P_0) & \partial_z^2 f(P_0) \end{pmatrix}$

1) H def. positiva $\iff \partial_x^2 f(P_0) > 0, \; (\partial_x^2 f(P_0)\partial_y^2 f(P_0) - (\partial_x\partial_y f(P_0))^2) > 0, \; \det H > 0$.
2) H def. negativa $\iff \begin{cases} \partial_x^2 f(P_0) < 0 \\ \partial_x^2 f(P_0)\partial_y^2 f(P_0) - (\partial_x\partial_y f(P_0))^2 > 0 \\ \det(H) < 0 \end{cases}$
3) H indefinita $\iff \partial_x^2 f(P_0)\,\partial_y^2 f(P_0) - (\partial_x\partial_y f(P_0))^2 < 0$.

Teorema (condizione necessaria del 2° ordine):
$f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$, $\nabla f(x_0) = 0$; se x_0 è p.to di max o min relativo
$\Rightarrow H_f(x_0)$ è semidefinita o precisamente
1) x_0 p.to di min. relat. $\Rightarrow H_f(x_0)$ semidef. positiva
2) x_0 p.to di max relat. $\Rightarrow H_f(x_0)$ semidef. negativa

$y=x$: $f(x,x)=-4x^4<0$ $\forall x\neq 0$ $\Rightarrow (0,0)$ p.to di sella.

) $f(x,y)=x^3-3xy+y^2$

$$\begin{cases}\partial_x f=3x^2-3y=0\\ \partial_y f=-3x+2y=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=x^2\\ -3x+2x^2=0\end{cases}$$

$x=0,\ \frac{3}{2}$ $\qquad (0,0)\qquad \left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$

$\downarrow$

$y=0,\ \frac{9}{4}$

$\partial_x^2 f=6x\qquad \partial_x\partial_y f=-3$

$\partial_y^2 f=2$

$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&2\end{pmatrix}$ $\quad \det(H_f(0,0))=-9<0 \Rightarrow (0,0)$ p.to di sella

$H_f\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)=\begin{pmatrix}9&-3\\-3&2\end{pmatrix}$ $\quad \det\left(H_f\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)\right)=9>0$

$\partial_x^2 f(P_0)=9>0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ p.to di minimo

) $f(x,y)=3xy-x^2y-xy^2$

$$\begin{cases}\partial_x f=3y-2xy-y^2=0\\ \partial_y f=3x-x^2-2xy=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y(3-2x-y)=0\\ x(3-x-2y)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x(3-x)=0\end{cases}\cup\begin{cases}y=3-2x\\ x(3-x-6+4x)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\cup\begin{cases}y=0\\ x=3\end{cases}\cup\begin{cases}y=3-2x\\ 3x(x-1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\cup\begin{cases}y=0\\ x=3\end{cases}\cup\begin{cases}y=3\\ x=0\end{cases}\cup\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$$

$(0,0)\qquad (3,0)\qquad (0,3)\qquad (1,1)$

$\partial_x^2 f=-2y\qquad \partial_y^2 f=-2x\qquad \partial_x\partial_y f=3-2x-2y$

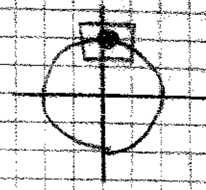
$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}$ $\quad \det(H_f)=-9<0$ $\quad (0,0)$ è un p.to di sella

$H_f(3,0)=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&-6\end{pmatrix}$ $\quad \det(H_f)=-9<0$ $\quad (3,0)$ p.to di sella

$H_f(0,3)=\begin{pmatrix}-6&-3\\-3&0\end{pmatrix}$ $\quad \det(H_f)=-9<0$ $\quad (0,3)$ p.to di sella

$H_f(1,1)=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$ $\quad \det(H_f)=3>0$ $\quad a=-2<0$ $\quad (1,1)$ max relativo forte

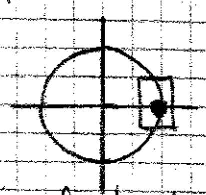
Nell'intorno del p.to $(0,1)$ possiamo esplicitare la y in funzione di x, $y=\sqrt{1-x^2}$ ma non la x in funzione di y. $x=\pm\sqrt{1-y^2}$



Si osservi che $\nabla F=\nabla(x^2+y^2-1)=(2x,2y)$

$\Rightarrow \nabla F|_{(0,1)}=(0,2)$

Nell'intorno di $(1,0) \to \nabla F|_{(1,0)}=(2,0)$ posso esplicitare x in funzione di y $x=\sqrt{1-y^2}$ ma non x in funzione di y.

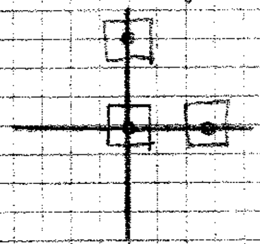


In generale i p.ti in cui $\nabla F=0$ possono dare problemi per la esplicitazione di y in funzione di x e di x in funzione di y.

Esempio: $F(x,y)=xy$

$\nabla F=(y,x)=(0,0) \Leftrightarrow x=y=0$.

L'eq. $xy=0$ in generale ha la soluzione $x=0$ (asse y) $\cup$ $y=0$ (asse x)

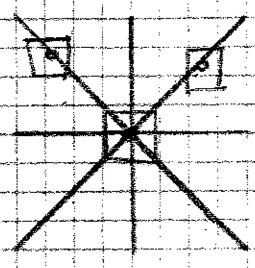


In un intorno di $(0,0)$ non è possibile risolvere $F=0$ in modo univoco $\Rightarrow F=0$ non definisce il grafico di funzione in qualsiasi intorno di $(0,0)$.

$F(x,y)=x^2-y^2$

$F=0 \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow y=\pm x$

$\nabla F=0 \Leftrightarrow (0,0)$



Se $\nabla F|_{(x_0,y_0)}\neq(0,0)$ possiamo invece sempre esplicitare almeno una delle 2 variabili.

Teorema (Dini): o della funzione implicita:

Sia $F: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$F\in C^1(A)$, A aperto

Sia $P_0=(x_0,y_0)\in A$ tale che $F(x_0,y_0)=0$; $\partial_y F(x_0,y_0)\neq0$.

Allora esiste un intorno $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)=I$ di x_0, un intorno $(y_0-\beta, y_0+\beta)=J$ di y_0 e un'unica funzione $y=f(x)$ con $f: I\to J$ tale che $f(x_0)=y_0$, $J=\operatorname{Im} f=f(I)$ e vale: