NUMERO: 802

DATA: 31/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Cane

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Tresso

MOTO RETTILINEO UNIFORME

IN QUESTO MOTO, SI CONSIDERA LA PRIMA LEGGE CHE OSSERVIAMO: ($\vec{v}$ = COST)

$$x(t) = x_0 + \vec{v} \cdot \int_0^t dt \Rightarrow x_0 + v \cdot (t - t_0)$$

RIASSUMENDO: LO SPAZIO IN FUNZIONE DEL TEMPO RISULTA ESSERE: POSIZIONE INIZIALE SOMMATA ALLA VELOCITÀ MOLTIPLICATA PER UN Δt

LA FORMULA SI SEMPLIFICA SE IL TEMPO INIZIALE È = A "0"

$$x(t) = x_0 + \vec{v}(t - t_0) \qquad x(t) = x_0 + \vec{v} t$$

FORMULA GENERALE — FORMULA SEMPLICE

CONCETTO DI ACCELERAZIONE ISTANTANEA

L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA È DUNQUE LA DERIVATA DELLA VELOCITÀ RISPETTO AL TEMPO, OVVERO LA DERIVATA SECONDA DELLO SPAZIO RISPETTO AL TEMPO.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

SE $\vec{a} = 0$ LA VELOCITÀ È COSTANTE (MOTO RETTILINEO UNIFORME); QUANDO $a > 0$ LA VELOCITÀ CRESCE NEL TEMPO, MENTRE PER $a < 0$ LA VELOCITÀ DECRESCE NEL TEMPO. RICORDIAMO CHE È IL SEGNO DELLA $\vec{v}$ A FORNIRE LA DIREZIONE DEL MOTO E NON IL SEGNO DELL'ACCELERAZIONE.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [\vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)]\, dt$$

SEPARIAMO GLI INTEGRALI E RISULTA

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\vec{v}_0}_{\text{COSTANTE}}\, dt + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\vec{a}}_{\text{COSTANTE}}(t-t_0)\, dt$$

SONO COSTANTI PERCHÈ LA VELOCITÀ INIZIALE È SEMPRE QUELLA E IL MOTO È UNIFORMEMENTE ACCELERATO QUINDI a È UNA COSTANTE

$$x(t) = x_0 + \vec{v}_0 \cdot (t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2$$ FORMULA GENERALE

$$x(t) = x_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$ FORMULA SEMPLICE

RIASSUMENDO: LO SPAZIO IN FUNZIONE DEL TEMPO NEL MUA SI CALCOLA POSIZIONE INIZIALE A CUI È SOMMATO IL PRODOTTO TRA LA VELOCITÀ INIZIALE E IL Δt + $\frac{1}{2}$ DELL'ACCELERAZIONE PER $(\Delta t)^2$

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

TRASCURANDO LA RESISTENZA DELL'ARIA, UN CORPO LASCIATO LIBERO DI CADERE IN VICINANZA DELLA SUPERFICIE TERRESTRE SI MUOVE VERSO IL BASSO CON UN'ACCELERAZIONE COSTANTE $\vec{g} = 9{,}81\ m s^{-2}$

RICORDANDO:

$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow \vec{v}(t) = -\vec{g}t$$

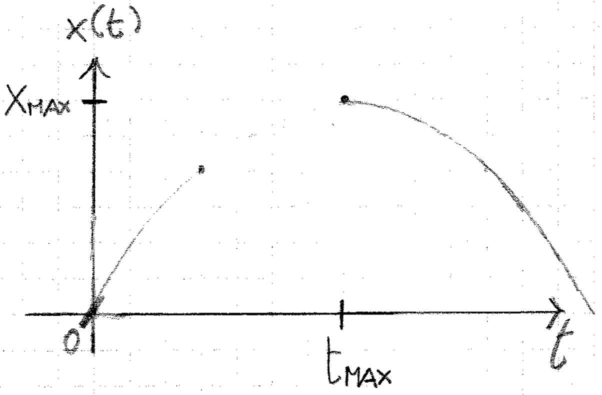
CONSIDERANDO VELOCITÀ INIZIALE $= 0$ E CADUTA LUNGO L'ASSE Y CON VERSO POSIZIONATO IN ALTO $\Rightarrow$ IL SEGNO SARÀ NEGATIVO

NATURALMENTE SE UN OGGETTO VENISSE LANCIATO ESEGUENDO UNA TRAIETTORIA PARABOLICA, CON CONDIZIONI INIZIALI $x_0 = 0$ $\vec{V_0} = \vec{V_2} > 0$ $t_0 = 0$ SI AVRÀ:

DAL SUOLO

$$\vec{v} = +v_2 - \vec{g}t \qquad x(t) = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2$$

IN QUESTO CASO IL TEMPO DI CADUTA RISULTA DA



$$x_{MAX} = \frac{\vec{V_2}^2}{2\vec{g}}$$

$$t_{MAX} = \frac{\cancel{2}V_2}{g} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{V_2}{\vec{g}}$$

NATURALMENTE PER LA VELOCITÀ RISPETTO AL TEMPO; BISOGNA **ORA** TENERE CONTO DELLA PRESENZA DI V_0

$$v(t) = V_0 - \vec{g}t \qquad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

TERMINE NUOVO

FORMULE GENERALI

OVVIAMENTE SE CONSIDERIAMO LA $\vec{V}$ INIZIALE O LA X INIZIALE UGUALE A 0, SI RITORNA ALLE FORMULE PRECEDENTI.

MOTO ARMONICO SEMPLICE

UN PUNTO ESEGUE UN MOTO ARMONICO SEMPLICE QUANDO LA LEGGE ORARIA È DEFINITA DALLA RELAZIONE:

OTTENIAMO LA VELOCITÀ DEL PUNTO IN FUNZIONE DEL TEMPO DERIVANDO LA LEGGE ORARIA:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)}$$

$\rightarrow dx = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega \Rightarrow A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

E CON UNA ULTERIORE DERIVAZIONE: cost cost

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

OPPURE SCRITTA PIÙ SEMPLICEMENTE

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)}$$

LE COSTANTI A e φ INDIVIDUANO LE CONDIZ. INIZIALI:

$$\boxed{x_0 = A \operatorname{sen} \varphi} \; ; \; \boxed{\vec{v}_0 = \omega A \cos \varphi}$$

VICEVERSA, NOTE LE CONDIZIONI INIZIALI x_0 e v_0:

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega x_0}{v}} \; ; \; \boxed{A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

MOTO RETTILINEO SMORZATO ESPONENZIALMENTE

CONSIDERANDO UN ALTRO ESEMPIO DI MOTO VARIO, IN CUI L'ACCELERAZIONE $\vec{a} = -K\vec{v}$ CON K COST. POSITIVA (MISURATA IN s^{-1}). L'ACCELERAZIONE IN QUESTO MOTO È SEMPRE CONTRARIA ALLA VELOCITÀ

VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE

SI OSSERVA CHE SE AD UN CERTO ISTANTE t IL PUNTO OCCUPA UNA DETERMINATA POSIZIONE "x" CON UN VALORE $\vec{v}$ DELLA VELOCITÀ, QUESTA SI PUÒ PENSARE COME FUNZIONE DELLA POSIZIONE OLTRE CHE DEL TEMPO SCRIVENDO $v(t) = v[x(t)]$. DERIVIAMO RISPETTO AL TEMPO

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v}[x(t)] = \frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dx} \quad ; \quad \vec{a} \cdot dx = v \cdot d\vec{v}$$

INTEGRANDO:

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,d\vec{v}$$ ESPLICITANDO IL SECONDO INTEGR

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\underbrace{v_0^2}_{\text{VELOCITÀ DEL PUNTO NELLA POSIZIONE } x_0}$$

ADESSO APPLICHIAMO AI VARI CASI GIÀ STUDIATI.

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$v(t) = v_0 + a\underbrace{t}_{\Delta t} \xrightarrow{\text{DIVENTA}} v^2(x) = v_0^2 + 2a\underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x}$$

$-K\cancel{\vec{v}}\,dx = \cancel{\vec{v}}\,d\vec{v}$; $-K\,dx = d\vec{v}$; $\underbrace{v - v_0}_{d\vec{v}} = -K\underbrace{(x-x_0)}_{dx}$

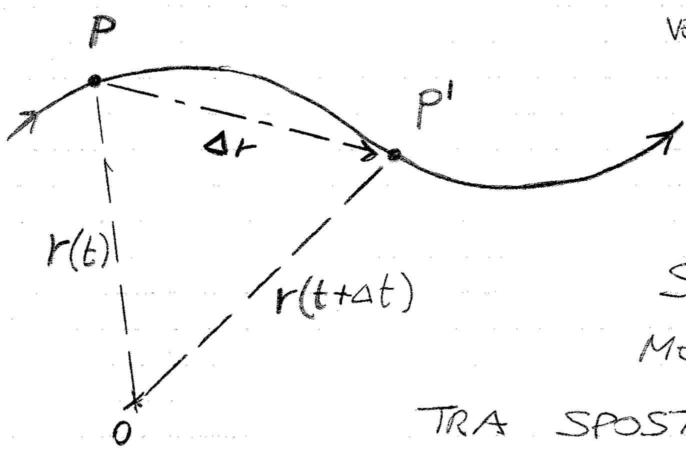
$$\Rightarrow v(x) = v_0 - K(x - x_0)$$

MOTO NEL PIANO. POSIZIONE E VELOCITÀ

CONSIDERIAMO IL SEGMENTO $\overline{OP}$ ESSO PUÒ ESSERE LOCALIZZATO TRAMITE COORDINATE CARTESIANE:

$$r(t) = \overline{OP} = x(t)\,u_x + y(t)\,u_y$$

VERSORI DEGLI ASSI CARTESIANI



SI CHIAMA VETTORE SPOSTAMENTO IL VETTORE RAPPORTO TRA SPOSTAMENTO Δr E L'INTERVALLO DI TEMPO STESSO NECESSARIO PER PERCORRERLO

$$\Rightarrow \vec{V_m} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

CON LO STESSO PROCEDIMENTO GIÀ UTILIZZATO PER IL MOTO RETTILINEO, SI DEFINISCE LA VELOCITÀ VETTORIALE IL LIMITE DELLA VELOCITÀ MEDIA PER $\Delta t \to 0$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}$$

IN SOSTANZA BISOGNA CONSIDERARE IL MOTO COME UNA SUCCESSIONE DI SPOSTAMENTI RETTILINEI INFINITESIMI CON DIREZIONE VARIABILE.

IL RAGGIO VETTORE r PUÒ ESSERE ESPRESSO COME $r u_r$ E PERTANTO

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} u_r + r \frac{du_r}{dt}$$

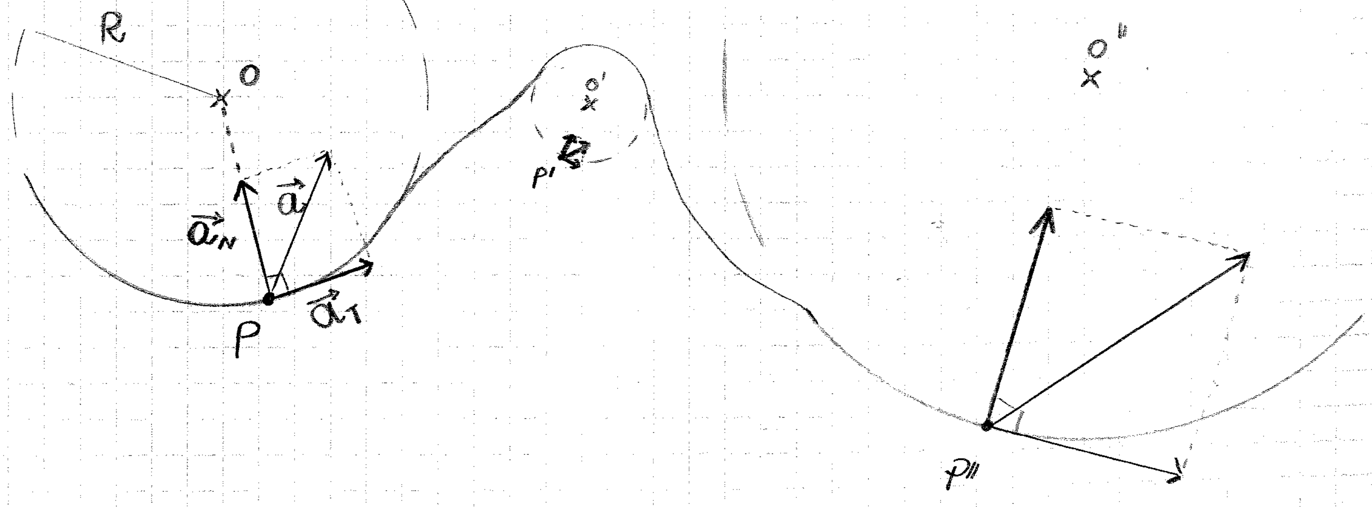
$$\Longrightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt} u_r + r \frac{d\vartheta}{dt} u_\vartheta = \boxed{v_r + v_\vartheta}$$

$\Longrightarrow$ LE COMPONENTI POLARI DELLA VELOCITÀ RISULTANO:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} u_r + r \frac{d\vartheta}{dt} u_\vartheta$$

COMPONENTI DELL'ACCELERAZIONE E CERCHIO OSCULATORE

L'ACCELERAZIONE NEL MOTO PIANO DEVE ESPRIMERE LE VARIAZIONI DELLA VELOCITÀ SIA COME MODULO SIA COME DIREZIONE DEL MOTO; E QUINDI CI ASPETTIAMO CHE ABBIA DUE COMPONENTI.



$$\Rightarrow \left\{ a_{TOT} = a_N = \frac{V^2}{R} = \omega^2 \cdot R \right\} \quad a_N$$

NEL CASO DEL MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME OLTRE ALL'ACCELERAZIONE CENTRIPETA, CHE È VARIABILE PERCHÈ LA VELOCITÀ VARIA ANCHE IN MODULO, DOBBIAMO CONSIDERARE L'ACCELERAZIONE TANGENZIALE

$$\left\{ \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{a_T}{R} \right\}$$

SE È NOTA LA LEGGE ORARIA ANGOLARE $\vartheta(t)$ INTEGRANDO OTTENIAMO:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\, dt$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\, dt$$

IMPARIAMO ANCHE:

$$\begin{cases} \vec{v} = \omega \times \vec{r} \\ \vec{a} = \alpha \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \end{cases}$$

LEGGI DI NEWTON

1°) UN CORPO PERSEVERA NEL SUO STATO DI QUIETE O DI MOTO FINO A CHE UNA FORZA NON VA A MODIFICARE TALE STATO.

2°) $\vec{F} = m\vec{a}$

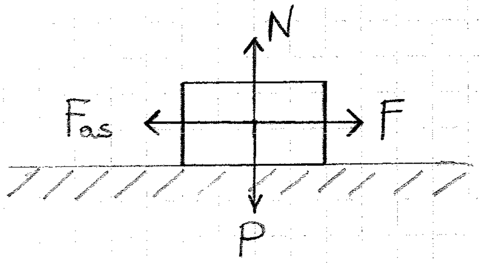
IL TERMINE J, INTEGRALE DELLA FORZA NEL TEMPO È CHIAMATO IMPULSO DELLA FORZA.

NATURALMENTE NEL MOTO CURVILINEO, DOVE L'ACCELERAZIONE PRESENTA DUE COMPONENTI a_T e a_N L'EQUAZIONE SARÀ:

$$F = m a_T + m a_N = m \frac{d\vec{v}}{dt} u_T + m \frac{v^2}{R} u_N$$

È CHIARO CHE SE LE FORZE CHE AGISCONO SONO $\vec{N}$ = REAZ. VINCOLARE E $\vec{P} = m\vec{g}$ FORZA PESO, ALLORA L'EQUAZIONE SARÀ

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

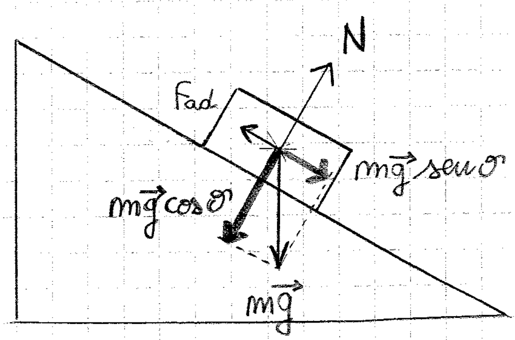


LA Fas È = ALLA FORZA APPLICATA FINO A QUANDO NON SUPERA LA FORMULA $m\vec{g} \cdot \mu_s$

LA FORZA DI ATTRITO DINAMICO CHE È SEMPRE PRESENTE VALE:

$$F_{ad} = -\mu_d \cdot N \cdot u_v$$ ← VERSORE VELOCITÀ

IL PIANO INCLINATO



SOLUZ. $\Longrightarrow$ $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$

RICORDIAMO:

$x = A \sin(\omega t + \varphi)$ I VALORI DI A e φ SI CALCOLANO DALLE CONDIZIONI INIZIALI

$$x_0 = A \sin\varphi \; ; \; 0 = \omega A \cos\varphi$$

SI HA:

$$x = x_0 \cos\omega t \qquad \vec{v} = -\omega x_0 \sin\omega t$$

CON LE COND. INIZIALI TUTTE UGUALI A $\emptyset$

SE LE CONDIZIONI INIZIALI FOSSERO DIVERSE PER ESEMPIO CON $x = x_0$ e $\vec{v} = \vec{v_0}$ PER $t=0$ SI HA:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \vec{\omega} \cdot \frac{x_0}{\vec{v_0}}$$

FORZA DI ATTRITO VISCOSO

LA FORZA DI ATTRITO VISCOSO È UNA FORZA CHE SI OPPONE AL MOTO DEL TIPO:

$$\vec{F} = -mK\vec{v}$$

UN PUNTO MATERIALE LASCIATO LIBERO DI CADERE IN UN FLUIDO VISCOSO SI MUOVE VERSO IL BASSO CON VELOCITÀ:

$$\vec{v}(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

VEDI CAP 4 SUL MAZZOLDI O SU QUADERNO DI FISICA IN FONDO.

DIMOSTRAZIONI DA IMPARARE E RICORDARE

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \underbrace{F \cos\sigma}_{F_{//}}\, ds \Rightarrow \int_A^B F_{TANG}\, ds \Rightarrow \int_A^B m \cdot \vec{a}\, ds$$

UNA $\vec{F}$ È $= A\ m \cdot \vec{a}$ $\Rightarrow \int m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}$

$$\Rightarrow \int \underbrace{m}_{\text{COSTANTE}} \cdot d\vec{v} \cdot \overbrace{\vec{v}}^{\text{VARIABILE}} \Rightarrow m \cdot \int_{v_A}^{v_B} v\, dv$$

RISOLTO L'INTEGRALE:

$$\mathcal{L}_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\mathcal{L}_{AB} = \Delta\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

DIM N°2

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s}$$

$$\mathcal{L}_{AB} = m\vec{g} \cdot \int_A^B d\vec{s} \Rightarrow mg \cdot \overline{AB} = mg \cdot l_{AB} \cos\sigma$$

$$l \cos\sigma = y_A - y_B$$

$$\Rightarrow m\vec{g} \cdot (y_A - y_B)$$

LE DIMOSTRAZIONI N°2 e 3 IL LAVORO DIPENDE SOLO DALLE COORDINATE DELLE POSIZIONI, MENTRE NELLA DIMOSTRAZIONE N°4 IL LAVORO DIPENDE DALLA TRAIETTORIA
LE <u>FORZE CONSERVATIVE</u> SONO AD ESEMPIO LE PRIME DUE, MENTRE L'ULTIMA È UNA FORZA NON CONSERVATIVA.
È IMPORTANTE RICORDARE CHE LUNGO UN QUALSIASI PERCORSO CHIUSO IL LAVORO È NULLO

$$\oint F \cdot ds = 0$$

NON ESISTE UNA FORMULA GENERALE PER L'ENERGIA POTENZIALE AD ESEMPIO NEI DUE CASI VISTI:

$$E_{p,PESO} = m\vec{g}h \quad ; \quad E_{p.ELAS} = \frac{1}{2}Kx^2$$

DIM. N°5 CONSERV. DELL'ENERGIA MECCANICA

$L = \Delta E_{CIN}$ SI DIVIDE IN F. CONSERVATIVE $\Rightarrow L = -E_p$
E IN FORZE NON CONSERVATIVE $\Rightarrow L_{N.C.}$

LA RISULTANTE È: $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{CONSERV.} + \sum \vec{F}_{NON.CONSERV.}$

$$\Rightarrow \underbrace{L_{AB}}_{\Delta E_{CIN.}} = \int_A^B \vec{R} \cdot ds = \underbrace{L_{CONS}}_{-E_p} + \underbrace{L_{NON\,CONS.}}_{?}$$

$\downarrow$

$$\Rightarrow \Delta E_{CIN} = -\Delta E_{POT} + L_{N.C.}$$

$$\Delta E_{CIN} + \Delta E_{POT} = L_{.N.C.}$$

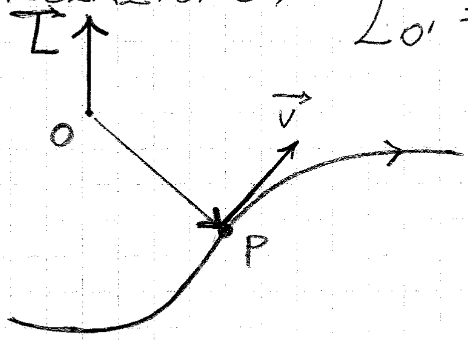
$$L_{NON.CONSERV.} = \Delta(E_{CIN.} + E_{POT})$$

MOMENTO ANGOLARE

SI DEFINISCE COME <u>MOMENTO ANGOLARE</u> IL MOMENTO DEL VETTORE QUANTITÀ DI MOTO.

MOM. ANGOL. → $\vec{L} = r \wedge p = r \wedge m\vec{v}$

IN FIGURA IL PUNTO O È IL POLO RISPETTO A CUI È CALCOLATO $\vec{L}$; NATURALMENTE SE SI CAMBIA POLO VALE LA RELAZIONE: $\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + OO' \wedge m\vec{v}$



IN GENERALE IL MOMENTO DELLA FORZA È UNA FUNZION DEL TEMPO, $\vec{L}(t)$. IL MOMENTO DELLA FORZA È DEFINITO COME: $M = r \wedge F$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE PER UN PUNTO:

$$\vec{L} = \overline{OP} \wedge m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\overline{OP}}{dt}}_{=\vec{v}} \wedge m\vec{v} + r \wedge m \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{a}} = m \cdot a = \vec{F}$$

DATO CHE $\vec{v}$ È LA STESSA PER QUALSIASI PUNTO IN CUI OSSERVIAMO IL MOTO IL PR. VETT. DI COSE UGUALI SI ANNULLA QUINDI LA PRIMA PARTE È $= 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 363

APPUNTO AL CASO IN CUI I SISTEMI DI RIFERIMENTO IN MOTO L'UNO RISPETTO ALL'ALTRO.
LA RELAZIONE TRA LE POSIZIONI DEL PUNTO P, MISURATE RISPETTO AI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO È LA SEGUENTE:

$$\boxed{r = OO' + r'}$$

DETTA $\vec{V}$ È LA VELOCITÀ DI P RISPETTO AL SISTEMA FISSO (VELOCITÀ ASSOLUTA) E $\vec{V}'$ LA VELOCITÀ DI P RISPETTO AL SISTEMA MOBILE (VELOCITÀ RELATIVA), SI DIMOSTRA IL SEGUENTE TEOREMA DELLE VELOCITÀ RELATIVE

$$\boxed{\vec{V} = V' + V_{O'} + \omega \wedge r'}$$

VELOCITÀ DEL SISTEMA MOBILE RISPETTO A QUELLO FISSO

VELOCITÀ DI "P" RISPETTO AL SISTEMA MOBILE

ESISTE UN ULTERIORE VELOCITÀ DETTA DI TRASCINAMENTO ED È:

$$\boxed{\vec{V}_{TR} = \vec{V} - \vec{V}' = \vec{V}_{O'} + \omega \wedge r'}$$

E DIPENDE DAI PARAMETRI DEL MOTO DEL SISTEMA MOBILE RISPETTO AL SISTEMA FISSO ($V_{O'}$; ω) E DALLA POSIZIONE DI "P" RISPETTO AL SISTEMA MOBILE (r').
DUE CASI PARTICOLARI SONO IMPORTANTI.

- IL SISTEMA MOBILE NON RUOTA RISPETTO A QUELL FISSO ($\omega = \emptyset$); SI PARLA DI MOTO RELATIVO TRASLATORIO TRA I DUE SISTEMI, OVVERO DI MOTO DI TRASCINAMENTO TRASLATORIO E LE FORMULE DIVENTAN

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge r') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

SCOMPONENDO TALE FORMULA SI HANNO DIVERSI "FATTORI".

1) $\vec{a}_{TR} = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge r')$

2) $\vec{a}_{COMP} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ (COMPLEMENTARE O DI CORIOLIS)

OVVIAMENTE SI PUÒ QUINDI SCRIVERE

$$\vec{a} = \vec{a}' + a_{TR} + a_{COMP.}$$

DAI DUE CASI VISTI CON LE VELOCITÀ SI HA:

- ACCEL. IN MOTO TRASLATORIO

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'}$$

- ACCEL IN MOTO ROTATORIO

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge r') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

UNA DEFINIZIONE INTERESSANTE È QUELLA DI SISTEMA INERZIALE, UN SISTEMA IN CUI VALGA RIGOROSAMENTE LA LEGGE D'INERZIA, DOVE IL PUNTO NON SOGGETTO A FORZE LANCIATO CON VELOCITÀ ARBITRARIA IN QUALUNQUE DIREZIONE SI MUOVA CON MOTO RETTILINEO UNIFORME O SE È IN QUIETE, RESTI IN QUIETE

IN UN SISTEMA INERZIALE DI RIFERIMENTO LA LEGGE NEWTON HA L'ESPRESSIONE PIÙ SEMPLICE: LE FORZE CHE COMPAIONO A PRIMO MEMBRO SONO LE FORZE VERE CIOÈ QUELLE CHE SAPPIAMO DERIVARE

VECCHIE RELAZIONI:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'}$$

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge r')$$

NUOVE RELAZIONI:

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \omega \wedge r \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge r) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \end{cases}$$

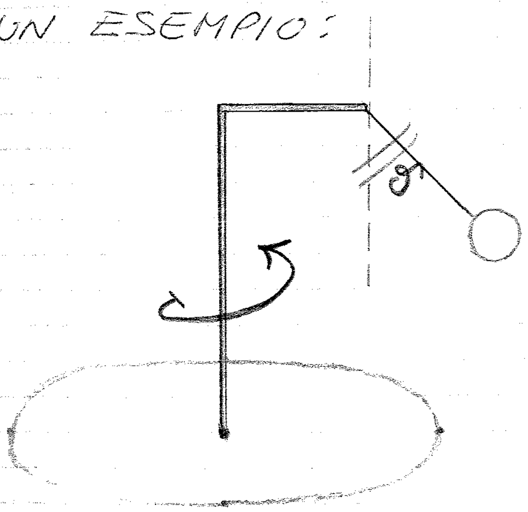
ORA LE FORZE DA CONSIDERARE SONO

$$\vec{F} + \vec{F}_{CENTRIF.} + \vec{F}_{CORIO} = m\vec{a}'$$

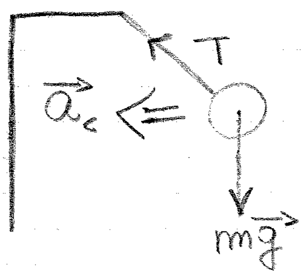
$\vec{F}_{CENTRIF.} \rightarrow -m\omega \wedge (\omega \wedge r)$

$\vec{F}_{CORIO} \rightarrow -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

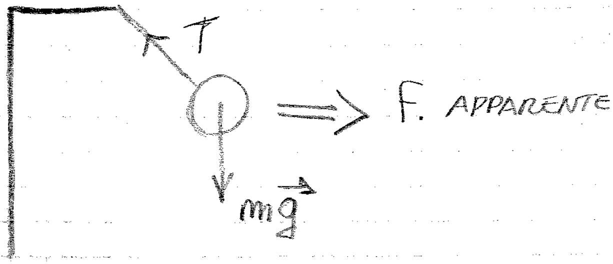
NOTARE UN ESEMPIO:



RISPETTO AD O



RISPETTO AD O'



$$\begin{cases} \vec{a}' = \underbrace{\vec{\alpha}}_{=\emptyset} - (\omega \wedge r') - 2\omega \wedge v' \\ \vec{v}' = \vec{v} - \omega \wedge \vec{r}' \end{cases}$$

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

CONSIDERIAMO ORA UN SISTEMA DI "n" PUNTI MATERIALI, CON $n > 1$ INTERAGENTI TRA DI LORO E CON IL RESTO DELL'UNIVERSO.
LA FORZA F_i AGENTE SULL'i-esimo PUNTO SI PUÒ PENSARE COME RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE AGENTI SUL PUNTO, $F_i^{(EST)}$, E DELLE FORZE ESERCITATE DAGLI ALTRI $n-1$ PUNTI, FORZE INTERNE $F_i^{(INT)}$ AL SISTEMA

$$\boxed{\vec{F}_i = F_i^{(EST)} + F_i^{(INT)}}$$

PER CIASCUN PUNTO P_i DI MASSA m_i SOTTOPOSTO ALLA FORZA F_i CONSIDERIAMO LE GRANDEZZE, MISURATE IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

POSIZIONE : r_i

ACCELERAZIONE : $\vec{a}_i = F_i / m_i$

MOM. ANGOLARE : $\vec{L}_i = r_i \wedge m_i \vec{v}_i$

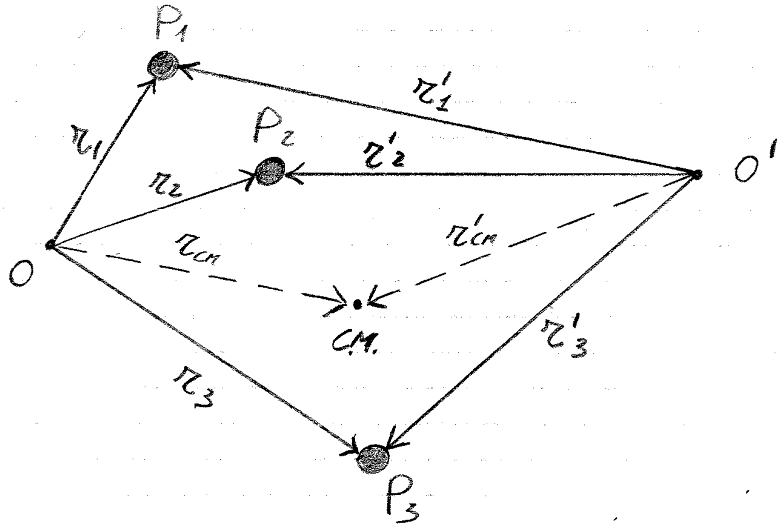
VELOCITÀ: $\vec{v}_i$

QUANTITÀ DI MOTO: $P_i = m_i \vec{v}_i$

ENER. CINETICA: $E_{cin\, i} = \frac{1}{2} m v_i^2$

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} ; \quad y_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} ; \\ z_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \end{cases}$$

SI NOTI CHE LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA RISPETTO AGLI n PUNTI MATERIALI NON DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO, MENTRE LE SUE COORDINATE INVECE VARIANO A SECONDA DEL SISTEMA PRESCELTO



LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA RISPETTO AD O È DATA DA E RISPETTO AD O' DA

$$r'_{CM} = \frac{\sum_i m_i r'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (r_i + O'O)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} + O'O$$

$$= r_{CM} + O'O .$$

SE GLI n PUNTI SONO IN MOVIMENTO, DI NORMA LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA VARIA; SULLA BASE DELLA DEFINIZIONE CALCOLIAMO LA VELOCITÀ DEL

LA RISULTANTE SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$R^{EST} = m a_{CM} = m \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}_{CM}) = \frac{dP}{dt}$$

IL CENTRO DI MASSA È E RIMARRÀ UN PUNTO IMMAGINARIO CHE PERÒ GODE DI PROPRIETÀ UTILI:

- LA SUA VELOCITÀ È UGUALE ALLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DIVISA PER LA MASSA TOTALE, OVVERO LA SUA QUANTITÀ DI MOTO $m\vec{v}_{CM}$ È UGUALE ALLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE P;
- LA SUA ACCELERAZIONE È DETERMINATA DALLA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE AGENTI SUL SISTEMA.

IN QUESTO SENSO, FACENDO RIFERIMENTO A P E $R^{(EST)}$ POSSIAMO DIRE CHE IL CENTRO DI MASSA RAPPRESENTA IL MOTO GLOBALE O DI INSIEME DEI PUNTI MATERIALI. IL FATTO CHE AD UN CERTO ISTANTE $\vec{v}_{CM}$ ABBIA UN DETERMINATO VALORE SIGNIFICA SOLAMENTE CHE IL SISTEMA IN MEDIA SI STA SPOSTANDO IN QUELLA DATA DIREZIONE, ANCHE SE NESSUNA DELLE SINGOLE $\vec{v}_i$ COINCIDE CON $\vec{v}_{CM}$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

SE IL SIST. DI PUNTI CONSIDERATO È ISOLATO, CIOÈ NON SOGGETTO A FORZE ESTERNE, OPPURE L'AZIONE DELLE FORZE ESTERNE È TALE CHE LA LORO RISULTANTE $R^{EST} = 0$ SI HA:

$$\vec{r} = OP$$

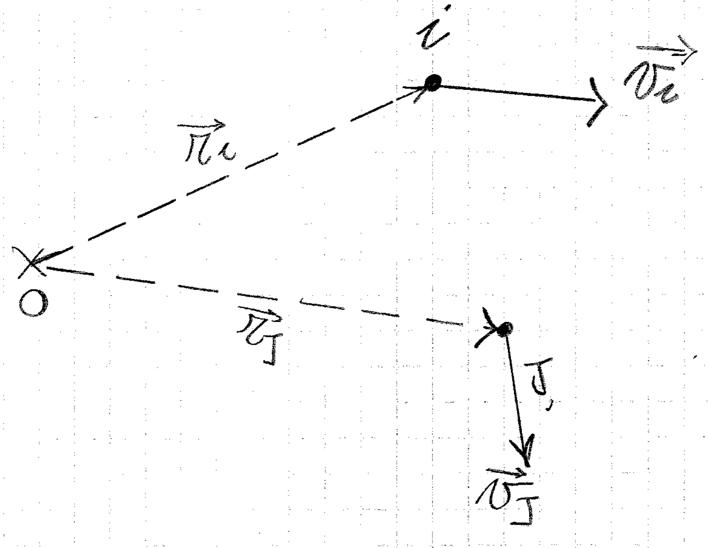
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{PUNTO} + \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{v}_{PUNTO} \wedge m\vec{v}}_{=\emptyset} + \vec{v}_0 \wedge m\vec{v} + r \wedge \underbrace{\frac{dP}{dt}}_{\vec{F}}$$

SE $V_0 = \emptyset$
IL TERMINE
E' NULLO

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\Rightarrow L_i = \vec{r}_i \wedge m_i v_i$$



PER UN NUMERO DI PARTICELLE

$$\vec{L} = \Sigma_i \vec{L}_i = \Sigma_i \cdot \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma_i \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{\vec{v}_i} \wedge m_1 v_1 + \Sigma_i r_i \wedge \underbrace{\frac{dm_i \vec{v}_1}{dt}}_{\vec{F}_i}$$

INTRODUCIAMO M^{EST} CIOÈ IL MOMENTO PRODOTTO DALLE FORZE ESTERNE RISPETTO AL POLO O

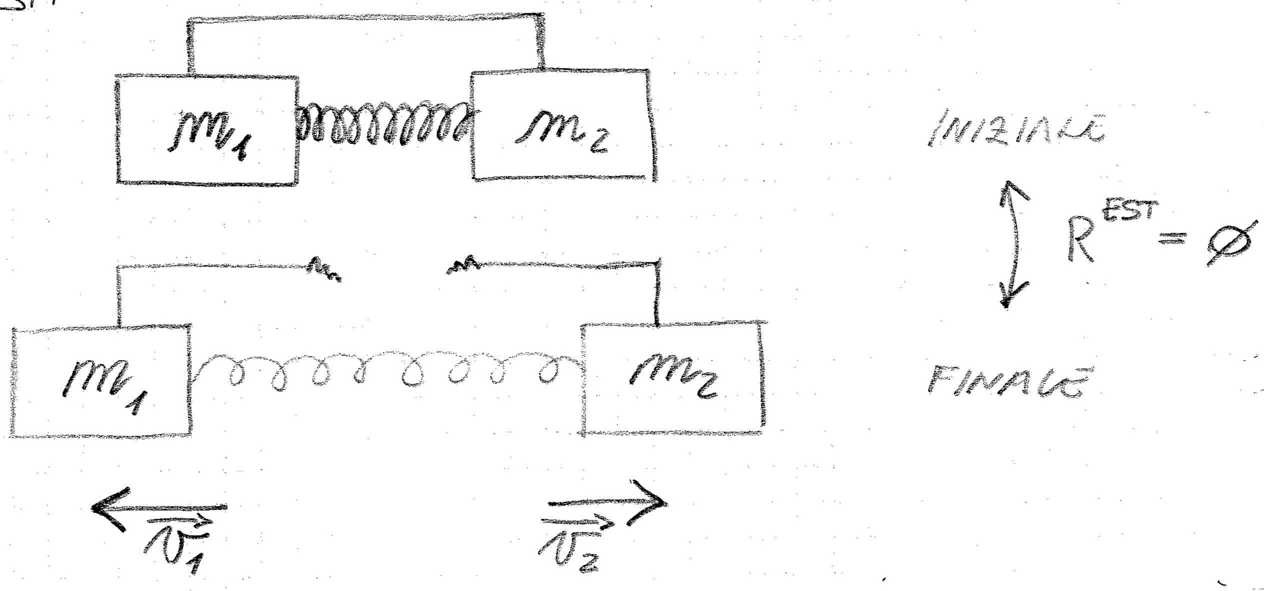
$$M^{EST} = \sum_i \vec{r_i} \wedge F_i^{EST}$$

INVECE:

$$M^{INT} = \sum_i \vec{r_i} \wedge F_i^{INT}$$

RAPPRESENTA QUELLO DELLE FORZE INTERNE RISPETTO ALLO STESSO POLO.

ESM



INIZIO: $\vec{P} = \emptyset$

FINE: $\vec{P}_{FIN} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = \emptyset$

$$\vec{v_2} = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v_1}$$

$$E_{CIN} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\begin{cases} \vec{L}_{INIZ} = 2m\vec{\omega}_{INIZ}\vec{r}_1^2 \quad \text{(DIRETTO VERSO L'ALTO)} \\ \qquad = 2r_1 m\vec{v} = 2r_1 m\,\omega_{INIZ}\,r_1 \\ \vec{L}_{FIN} = 2m\,\omega_{FIN}\,r_2^2 \quad \text{(DIRETTO VERSO L'ALTO)} \end{cases}$$

$$\omega_{INIZ}\, r_1^2 = \omega_{FIN}\, r_2^2$$

$$\omega_{FIN} = \omega_{INIZ}\frac{r_1^2}{r_2^2}$$

TEOREMI DI KÖNIG — $\vec{L}$, EN. CINETICA

$\vec{L}$, MOM. ANGOLARE

– PER IL MOMENTO ANGOLARE –

ASSUMIAMO PER SEMPLICITÀ COME POLO L'ORIGINE DEL SISTEMA INERZIALE: IL MOMENTO ANGOLARE È DATO

$$\underbrace{L_0}_{\substack{\text{MOMENTO ANGOLARE}\\ \text{TOTALE PER } O(x,y,z)}} = \sum_i \underbrace{\vec{r}_i}_{r_{CM}+r'_i} \wedge m_i \underbrace{\vec{v}_i}_{v_{CM}+v'_i}$$

$$\vec{v_i} = \vec{v_i}' + \vec{v_{CM}}$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v_i}' + \vec{v_{CM}})^2 =$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + 2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v_i} \cdot \vec{v_{CM}}$$

$$E_{CIN} = E'_{CIN} + E_{CIN\ CM} + \emptyset$$

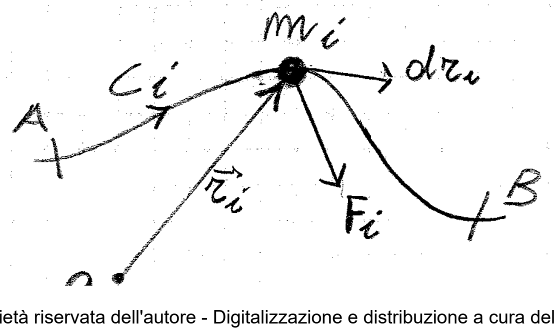
$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \qquad \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \qquad \underbrace{\sum_i \cancel{m_i \vec{v_i}'}}_{=\emptyset} \cdot \vec{v_{CM}}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

CALCOLIAMO IL LAVORO ASSOCIATO AL MOTO DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI. COME GIÀ VISTO NEL CASO DI UN SOLO PUNTO, IL LAVORO PER UNO SPOSTAMENTO $d\vec{r_i}$ DEL PUNTO P_i, È

$$dL = \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i} = F_i^{EST} \cdot d\vec{r_i} + F_i^{INT} \cdot d\vec{r_i} =$$
$$= dL_i^{EST} + dL_i^{INT}$$

SOMMANDO SU TUTTI PUNTI E INTEGRANDO LUNGO LE TRAIETTORIE C_i SI OTTIENE IL LAVORO TOTALE



SE LE FORZE (INT e/o EST) SONO ANCHE NON CONSERVATIVE ALLORA:

$$\Delta E_{MEC} = L_{N.C.}$$

ESM

$\vec{v}_{CM} = \emptyset$

SCELGO COME POLO "O" IL CENTRO DI MASSA

$$\vec{L}_O = \underbrace{\cancel{\vec{L}_{CM}}}_{=\emptyset} + \underbrace{\cancel{\vec{L}'}}_{=\emptyset} = \emptyset$$

↓

PERCHÈ FERMO

$$\begin{cases} \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \wedge M \underbrace{\cancel{\vec{v}_{CM}}}_{=\emptyset} \\ \vec{L}' = \sum \vec{r}_i\,' \wedge m \underbrace{\cancel{\vec{v}_i\,'}}_{=\emptyset} \end{cases}$$

MOM. ANG. DEL CENTRO DI MASSA

MOM. ANG. NEL SISTEMA DI RIF. CENTRO DI MASSA.

INVECE

$$E_{CIN} = E_{CIN\ CM} + E'_{CIN}$$

$$\frac{1}{2} M \underbrace{\cancel{v^2_{CM}}}_{=\emptyset} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^{\,2}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{CIN} = \underbrace{2\,\frac{1}{2}\,m\,(r_2\vec{\omega}_2)^2}_{E_{CIN}\ FINALE} - \underbrace{2\,\frac{1}{2}\,m\,(r_1\vec{\omega}_1)}_{E_{CIN}\ INIZIALE}$$

$$= m\,\omega_2^2\,r_2^2 - m\,\omega_1^2\,r_1^2 =$$

$$\Delta E_{CIN} = m\,\omega_1^2\,\frac{r_1^4}{r_2^2}\cdot r_2^2 - m\,\omega_1^2\,r_1^2$$

$$\Delta E_{CIN} = m\,\omega_1^2\left[\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right] \neq \emptyset$$ MA NEGATIVA

$$\Delta E_{CIN} = W$$

$\vec{F}_{INTERNE} \neq \emptyset$: $T = m\,\omega^2 r$ CENTRIPETA

$$L^{INT} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} -m\,\omega^2\,r\,dr$$

$$L = \int -m\,\omega_1^2\,\frac{r_1^4}{r^4}\,r\,dr =$$ LAVORO SU UNA MASSA

$$= -m\,\omega_1^2\,r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\vec{r}}{\vec{r}_3}$$

$$= -m\,\omega_1^2\,r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} r^{-3}\,dr$$

$$= -m\,\omega_1^2\,r_1^4 \cdot \frac{r^{-2}}{2}$$

$$= -m\,\omega_1^2\,r_1^4 \cdot \frac{r^{-2}}{2}$$

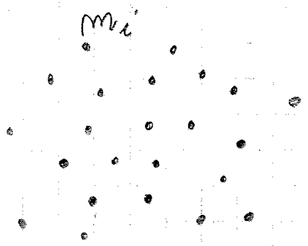
$$M^{EST} = \frac{dL}{dt} \quad ; \quad W^{EST} = \Delta EN.CIN.$$

RICORDO CHE SE:

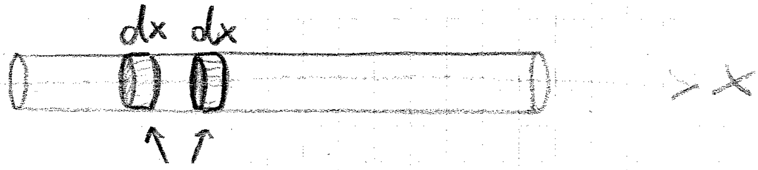
$$\vec{R}^{EST} = \emptyset \Rightarrow \vec{P} = COST$$

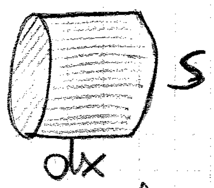
$$\vec{M}^{EST} = \emptyset \Rightarrow \vec{L} = COST.$$

DIFFERENZE CON L'INSIEME DI PUNTI



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$





$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

LA DENSITA': (ρ)

$$\rho = \frac{M}{V} \quad [Kg/m^3]$$

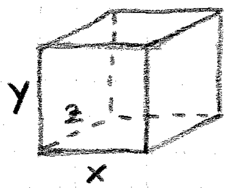
LA DENSITA' E' DEFINITA COME IL RAPPORTO DELLA MASSA INFINITESIMA E IL VOLUME DA ESSA OCCUPATA.

$$\boxed{\rho = \frac{dm}{dV}}$$

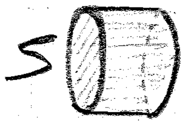
$1° \Rightarrow dV = dx\,dy\,dz \longrightarrow \int dV = \iiint dx\,dy\,dz$

$2° \Rightarrow dV = S\,dx \longrightarrow \int dV = S \int dx$

NEL CASO 1° LA SUPERFICE ERA SIMILE A QUELLA DI UN CUBO:



MENTRE NEL CASO 2° SI PUO PENSARE AD UN CILINDRO

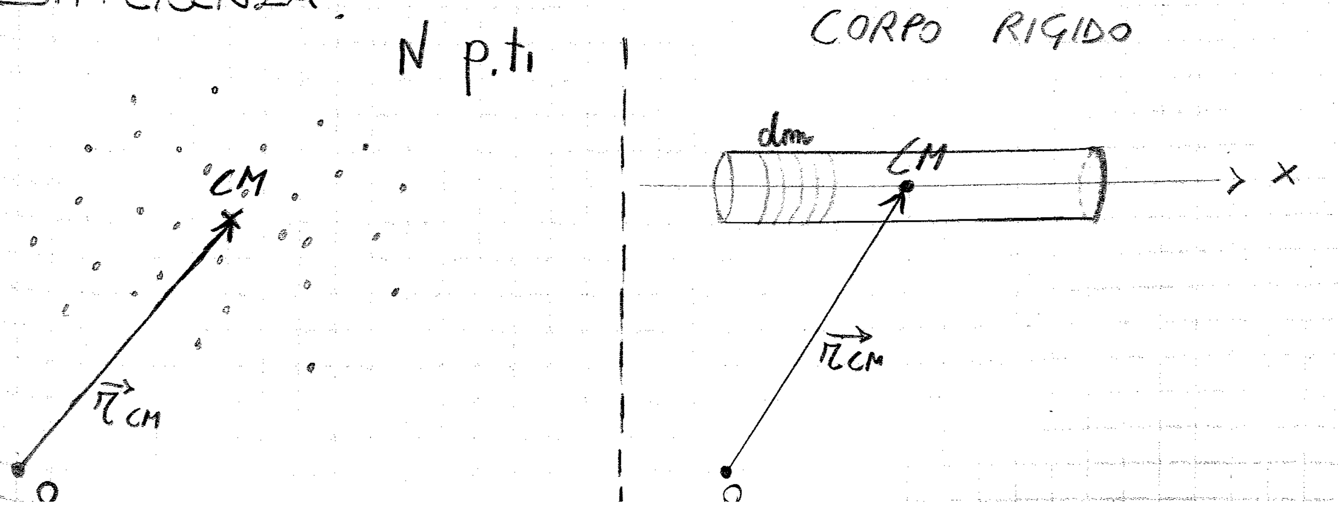


$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\cdot \rho\, dV}{\rho \int dV} = \frac{\rho \int r\, dV}{\rho V} \longrightarrow M = \rho V$$

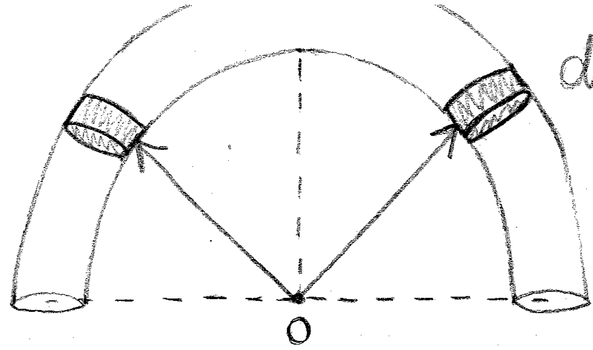
$\rho = COST$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\rho}{M} \int \vec{r}\, dV$$

DIFFERENZA!



2°

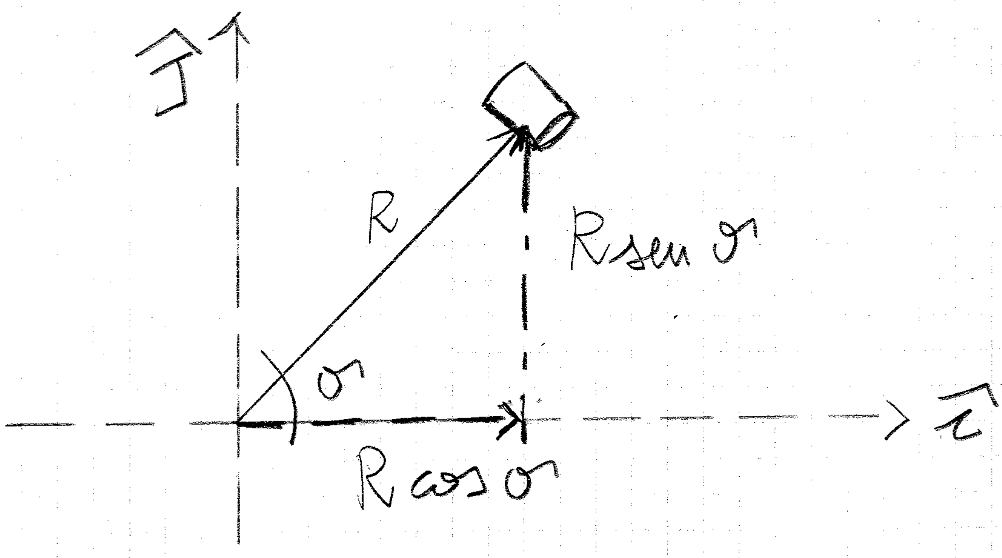


$dm = \rho_L \, dl$

HO SCELTO O PERCHÉ $|r|$ RESTA PER OGNI dm SEMPRE UGUALE

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{m}$$

$$\rho_L \Rightarrow \left\{ m = \pi R \rho_{LIN} \right\} \qquad dl = R \, d\vartheta$$



$$\vec{r}_{CM} = R \cos\vartheta \cdot \hat{\imath} + R \operatorname{sen}\vartheta \, \hat{j}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int (R \cos\vartheta \cdot \hat{\imath} + R \operatorname{sen}\vartheta \, \hat{j}) \, dm}{\pi \cdot R \cdot \rho_L} \qquad dm = \rho_L \, dl$$

$$m = \rho \ell^3$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\rho \int \vec{r}\, dV}{m}$$

$$\vec{r}_{CM} \begin{cases} x_{CM} = \frac{\rho}{m} \cdot \int x\, dV = \frac{\rho}{m} \int x\, dx\, dy\, dz \\ y_{CM} = \frac{\rho}{m} \int y\, dV = \frac{\rho}{m} \int y\, dx\, dy\, dz \\ \qquad\qquad " \qquad\qquad\qquad " \\ z_{CM} = \ldots\ldots \end{cases}$$

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\rho}{m} \iiint x\, dx\, dy\, dz$$

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\rho}{m} \int_{z=\emptyset}^{\ell} dz \int_{y=\emptyset}^{\ell} dy \cdot \int_{x=\emptyset}^{\ell} x\, dx$$

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\rho}{m} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{\ell^2}{2} = \frac{\rho}{\underset{\rho \cdot \ell^3}{m}} \cdot \frac{\ell^4}{2}$$

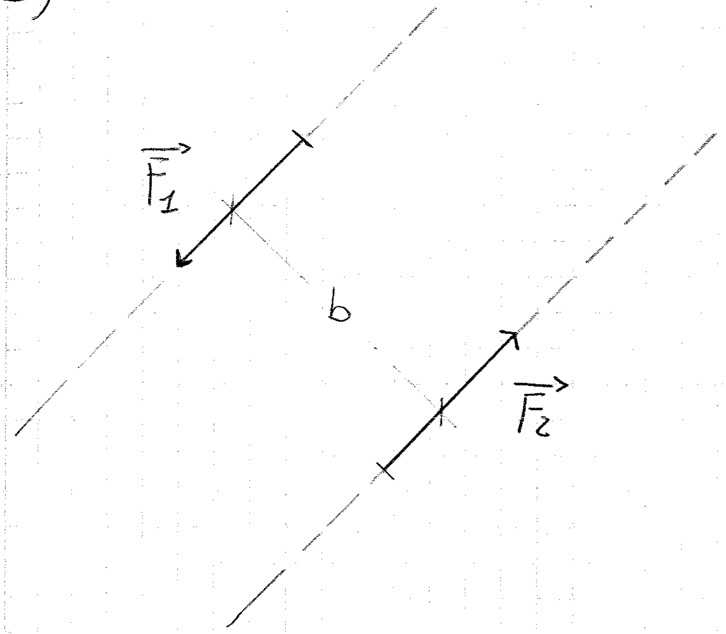
$$\vec{x}_{CM} = \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho} \cdot \cancel{\ell^3}} \cdot \frac{\ell^{\cancel{4}}}{2} = \frac{\ell}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O = M_{O'} + \overline{OO'} \wedge \underbrace{\sum F_i}_{\sum \text{FORZE}}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{R}}$$

IN SOSTANZA M_O DIPENDE DA O A MENO CHE $\vec{R} = \emptyset$

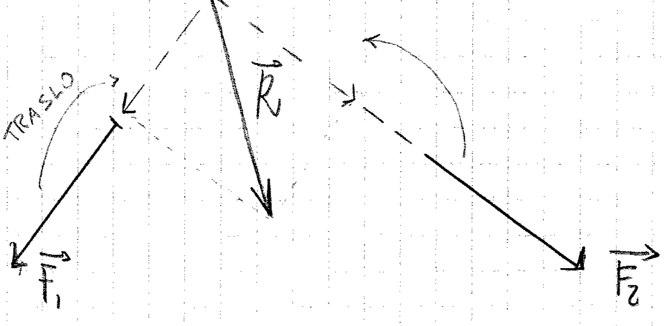
2) COPPIA DI FORZE



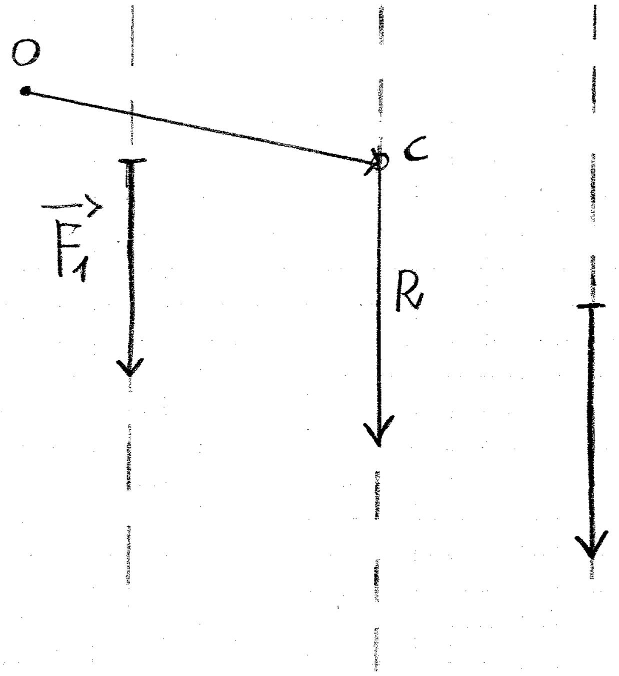
$|\vec{M}| = Fb$

$\Rightarrow \vec{R} = \emptyset$ M NON DIPENDE DAL POLO!

3) COPPIE DI FORZE NON PARALLELE



M NON È IN GENERALE $\perp \vec{R}$



$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i \wedge \hat{u}_i = \overline{OC} \wedge \sum_i F_i \hat{u}$$

$$= \overline{OC} \sum_i F_i \wedge \hat{u}$$

$$\left(\sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i\right) = \left(\sum_i F_i\right) \overline{OC}$$

$$\overline{OC} = \frac{\sum_i \vec{F}_1 \vec{r}_i}{\sum_i \vec{F}_i}$$

→ VETTORE POSIZIONE PER IL PUNTO C (PUNTO IN CUI APPLICHERÒ LA RISULTANTE)

FORZA PESO

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g} = m_i \vec{g}\, \hat{u}$$

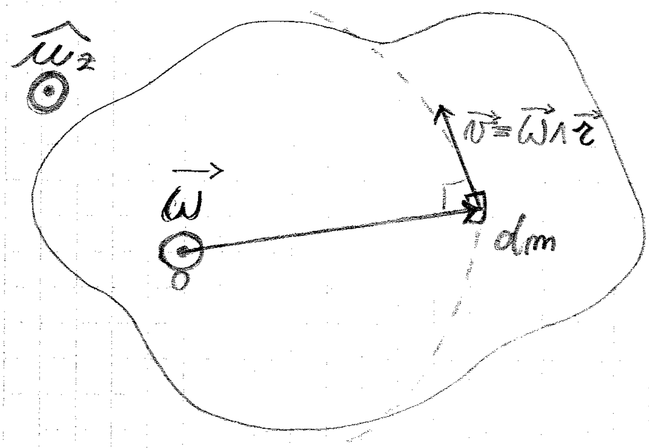
$$|\vec{F}_i| = m_i \vec{g}$$

$$\vec{M}^{EST} = r_{CM} \wedge \vec{R}$$

ROTAZIONE PURA

IL SECONDO TIPO DI MOTO È LA ROTAZIONE: TUTTI I PUNTI DESCRIVONO UN MOTO CIRCOLARE, LE TRAIETTORI SONO ARCHI DI CIRCONFERENZE DIVERSE CHE STANNO SU PIANI TRA LORO PARALLELI E HANNO IL CENTRO SU UN STESSO ASSE, L'ASSE DI ROTAZIONE.

CORPO RIGIDO



$$\Rightarrow \vec{L}_O = \int \vec{r} \wedge dm\vec{v}$$

È DIMOSTRATO CHE:

- IL MOTO RIGIDO PIÙ IN GENERALE È UNA ROTOTRASLAZIONE: OGNI SPOSTAMENTO INFINITESIMO PUÒ SEMPRE ESSERE CONSIDERATO COME SOMMA DI UNA TRASLAZIONE E DI UNA ROTAZIONE INFINITESIME, INDIVIDUATE DA $\vec{v}$ E $\vec{\omega}$, VARIABILI NEL TEMPO.

NELLA FIGURA PRECEDENTE IL RAGGIO VETTORE (r) VARIA A SECONDA DEL dm CHE CONSIDERIAMO, OVVIAMENTE PURE LA VELOCITÀ.

$$\vec{L}_O = \int r \wedge dm\vec{v} = \int r \cdot dm \underbrace{v}_{\omega \cdot r} \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\operatorname{sen} 90^\circ = 1} = \int r^2 dm \overbrace{\omega}^{\text{COSTAN}}$$

$\vec{L}_i$ PER IL PUNTO $\vec{P}_i$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

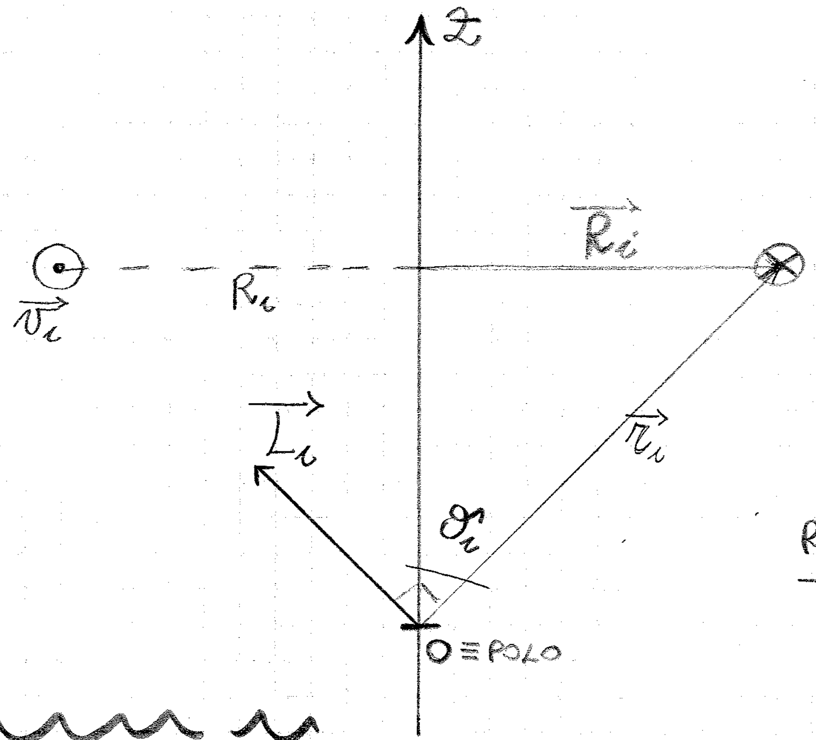
ATTENZIONE A NON CONFONDERE $\vec{r}$ e $\vec{R}$

IL MODULO DI $\vec{L}_i$ SI CALCOLA FACILMENTE ESPLICITANDO IL TUTTO

$$|\vec{L}_i| = \vec{r}_i \, m_i v_i \cdot \operatorname{sen} 90° = r_i \, m_i R_i \omega$$

LA FIGURA INGRANDITA E SEZIONATA IN 3D È

1



RICORDARSI:

REGOLA DELLA MANO DESTRA QUESTA VOLTA VISTA IN 3 DIMENSIONI

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$
$$|\vec{v}_i| = \omega R_i$$

$$\boxed{\vec{L}_{iz} = R_i^2 m_i \omega} \rightarrow \text{QUANDO } L_{iz} \parallel \vec{\omega}$$

③ IL PUNTO 3 CONSISTE NELLA SOMMATORIA DI TUTTI I MOMENTI ANGOLARI $\vec{L}_i$

$$L = \sum_i \vec{L}_i$$

→ NON SEMPRE SI PUÒ CALCOLARE SOLO SE IL CORPO È ABBASTANZA SIMMETRICO.

④ $L_{iz} = \sum L_{iz}$ → QUESTO SI RIESCE SEMPRE A CALCOLARLO VISTO CHE È UN ASSE DI RIFERIMENTO

COMPONENTE LUNGO Z DI $\vec{L}$ $= \left(\underbrace{\sum_i m_i \vec{R}_i^2}_{\text{MOMENTO D'INERZIA}}\right) \vec{\omega}$

IL MOMENTO DI INERZIA QUINDI SI HA CON:

$$\int R_i^2 \, dm$$

R_i = DISTANZA TRA dm E L'ASSE DI ROTAZIONE

IN CONCLUSIONE:

$$\vec{L}_z = \sum_i m_i R_i^2 \omega$$

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}$$

NEL CASO IN CUI $L_z \not\parallel \omega$

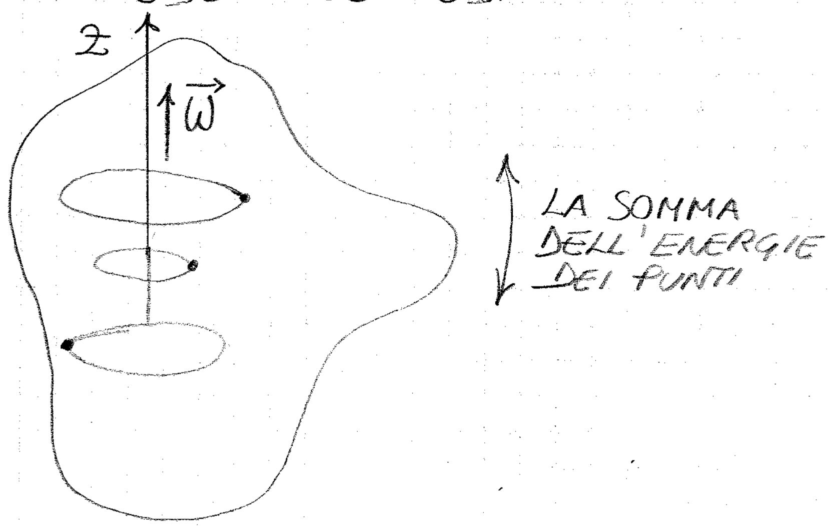
$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha \Rightarrow M^{EST} = I_z \cdot \alpha$$

CALCOLO DELL'ENERGIA CINETICA E DEL LAVORO

L'ENERGIA CINETICA DEL CORPO RIGIDO NEL MOTO DI ROTAZIONE È DATA DA

$$E_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underbrace{v_i}_{\omega \cdot R_i}{}^2 \Rightarrow \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot R_i^2$$

SI PUÒ RAPPRESENTARE COSÌ:



$$\boxed{E_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2}$$

OPPURE

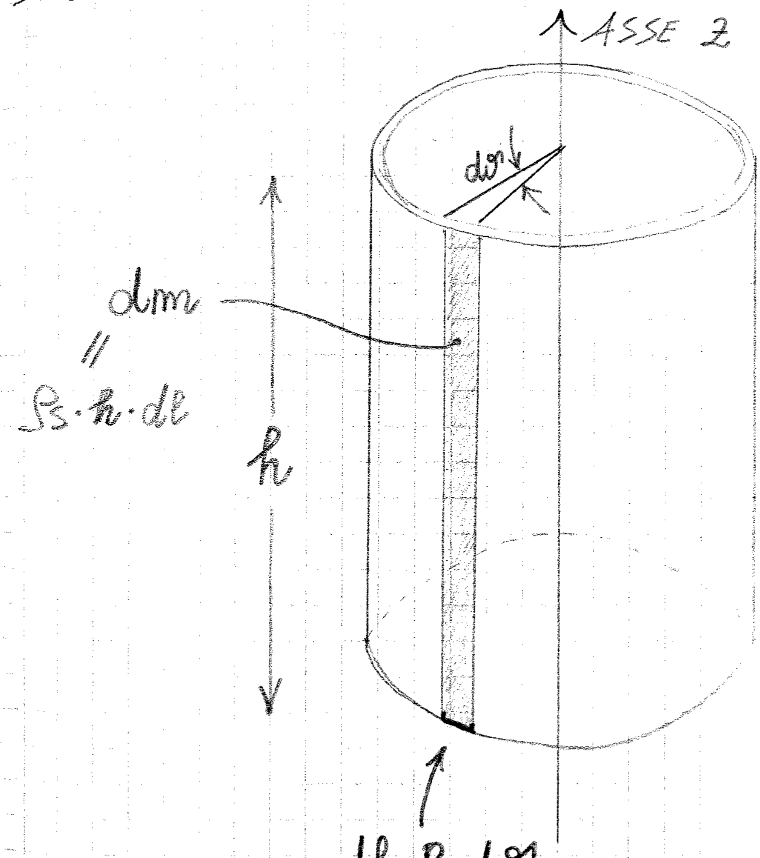
$$E_{CIN} = \frac{1}{2} \underbrace{I_z \omega}_{= L_{iz}} \cdot \omega$$

$$E_{CIN} = \frac{L_z}{2} \omega \Rightarrow \frac{L_z^2}{2 I_z} = \frac{I_z^{\cancel{2}} \omega^2}{2 \cancel{I_z}}$$

VARI MOMENTI D'INERZIA (LO CHIEDE ALL'ORALE

COME SI È VISTO PRECEDENTEMENTE IL MOMENTO D'INERZIA GIOCA UN RUOLO FONDAMENTALE, INFATTI A PARITÀ DI MOMENTO APPLICATO UN CORPO ASSUME UN'ACCELERAZIONE ANGOLARE MAGGIORE O MINORE A SECONDA DEL VALORE DEL MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE

1. CILINDRO CAVO E SOTTILE



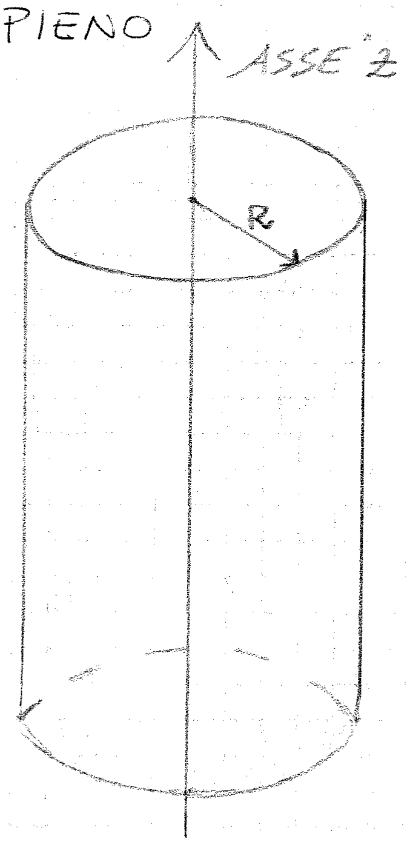
SPESSORE TRASCURABILE

I) PARTIAMO DALLA DEFINIZIONE

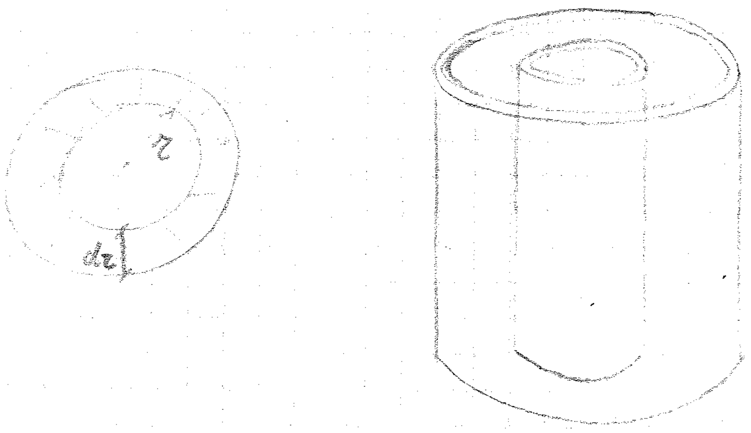
$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho_s \, h \, dl = \int r^2 \rho_s \cdot h \cdot d\vartheta \cdot r$$

DISTANZA dm CONSIDERATO E L'ASSE z

2. CILINDRO PIENO



POSSO CONSIDERARLO COME TUTTI TUBI INSERITI L'UNO DENTRO L'ALTRO

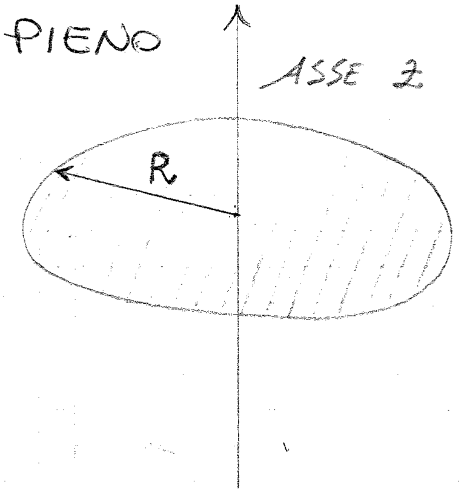


$$dm = \rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot h \cdot dr$$

$$I = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr R$$

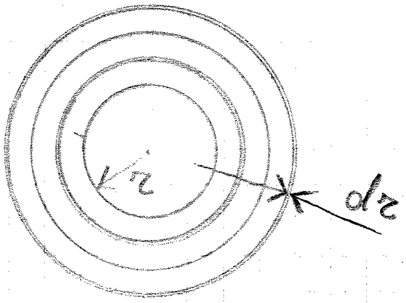
$$= \rho 2\pi \cdot h \int r^3 dr = \rho \cancel{2}\pi h \cdot \frac{R^4}{\cancel{4}}$$

4. DISCO PIENO



$\rho \Rightarrow Kg/m^3$

COME DETTO PRIMA LO PENSO COME $\sum$ DI ANELLI CONCENTRICI



I) QUI r NON E' COSTANTE

$$dm = \rho\, 2\pi r\, dr \cdot h$$

$$I = \int r^2\, dm = \int r^2 \cdot \rho 2\pi \cdot r \cdot h\, dr$$

$$= \int r^3 \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot h\, dr \Rightarrow 2\pi \rho h \int_0^{r=R} r^3\, dr$$

$$= 2\pi \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = \underbrace{\cancel{2}^{1}\pi \cdot \rho \cdot h \cdot R^2}_{M} \cdot \frac{R^2}{\cancel{4}_2}$$

$$\boxed{I = M \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}}$$

$$E_{CIN} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

p → QUANTITA' DI MOTO

$$E_{CIN} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{L_z^2}{2I}$$

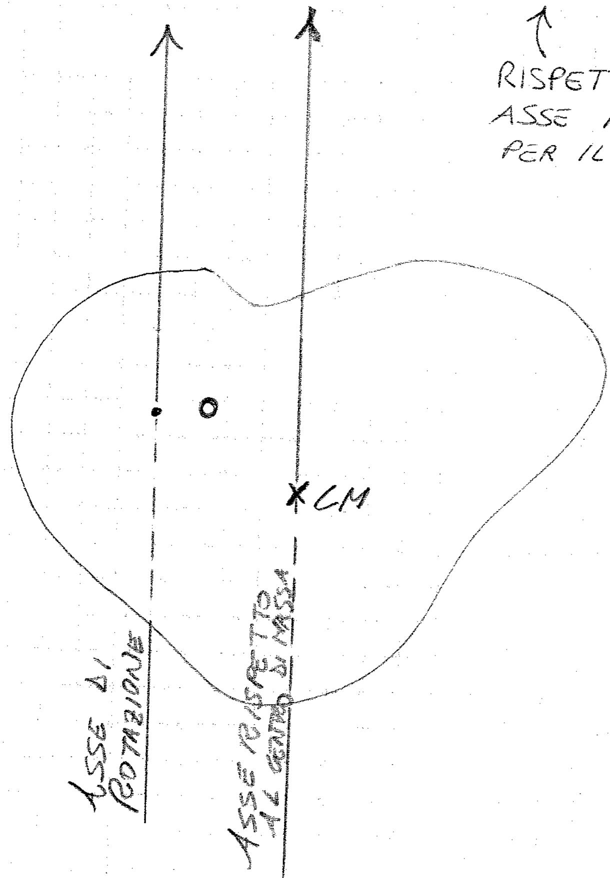
$$\text{POTENZA } (\mathcal{P}) = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\text{POTENZA } (\mathcal{P}) = M \cdot \vec{\omega}$$

TEOREMA DI HUYGENS – STEINER

ENUNCIATO ⇒ $I_o = I_{CM} + M \cdot d^2$

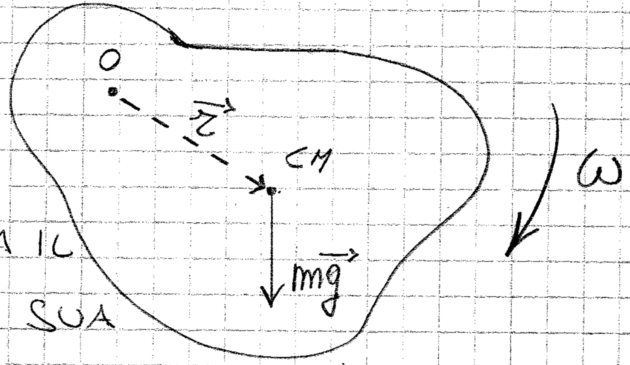
I_{CM} ← RISPETTO AD UN ASSE // PASSANTE PER IL C.M.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 363

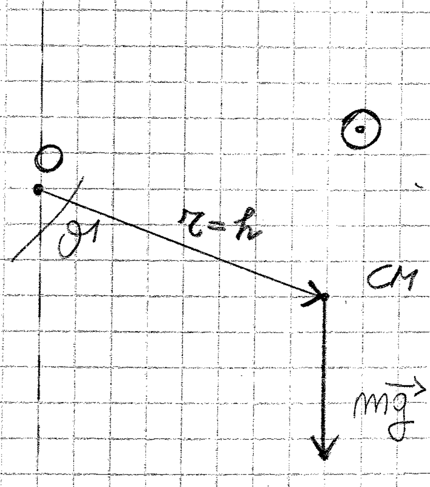
PENDOLO COMPOSTO 8-05-12

SI CHIAMA PENDOLO COMPOSTO, OGNI CORPO RIGIDO CHE POSSA OSCILLARE, PER AZIONE DEL SUO PESO, IN UN PIANO VERTICALE ATTORNO AD UN ASSE ORIZZONTALE NON PASSANTE PER IL SUO CENTRO DI MASSA



SE SI SPOSTA IL PENDOLO DALLA SUA POSIZIONE DI EQUILIBRIO L'AZIONE DELLA FORZA PESO È TALE DA RIPORTARE IL PENDOLO VERSO LA POSIZIONE STATICA (DI EQUILIBRIO). IL MOMENTO DELLA FORZA PESO, CHE AGISCE COME UN MOMENTO DI RICHIAMO VERSO $\vartheta = 0°$, È PARALLELO ALL'ASSE DI ROTAZIONE E VALE $M = -mgh \operatorname{sen}\vartheta$

PIÙ SEMPLICEMENTE:



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge m\vec{g}$$

$$\vec{M} = -r\, m\vec{g} \operatorname{sen}\vartheta\, \hat{u}_z$$

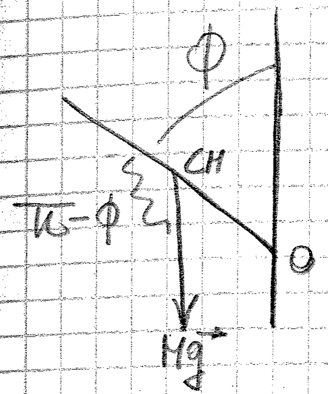
SE CONSIDERO USCENTE LA DIREZIONE DI $\hat{u}_z$

$$M_z^{EST} = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha \qquad L_z \to I_z \omega$$

$$-h\, m\vec{g} \operatorname{sen}\vartheta = I_z \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

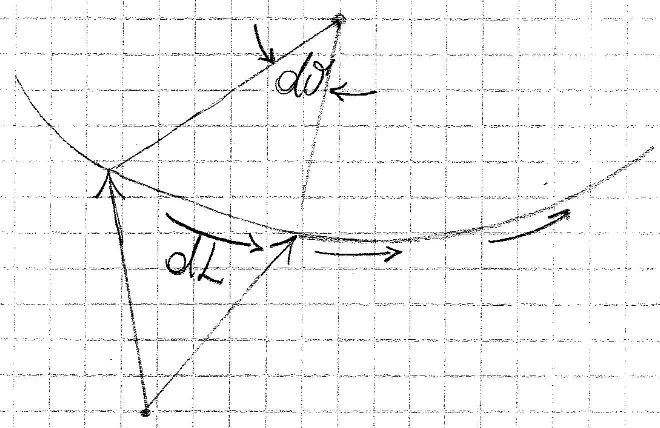
$|\vec{\tau}| = Mgb \operatorname{sen} \phi$

DISTANZA TRA O
E IL CENTRO
DI MASSA



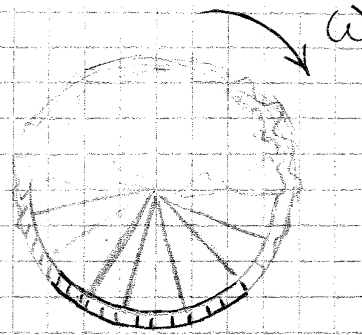
2. IL MOMENTO ANGOLARE $\vec{L}$ DELLA TROTTOLA È PARALLELO ALL'ASSE DELLA TROTTOLA

$\Rightarrow \vec{L}$ VARIA LA SUA DIREZIONE DURANTE IL MOTO MA NON IL MODULO



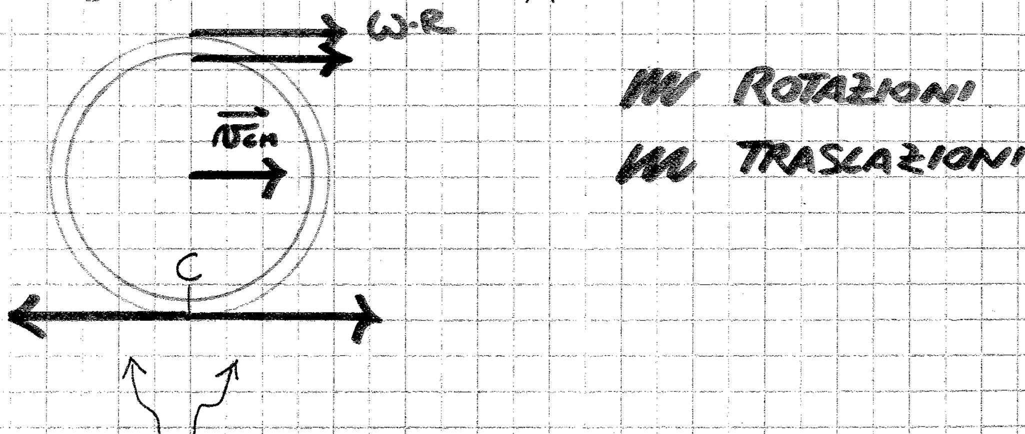
LA DIREZIONE DI $d\vec{L}$ È $/\!/ \vec{\tau}$ SENCONDO LA FIGURA SOPRA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 363



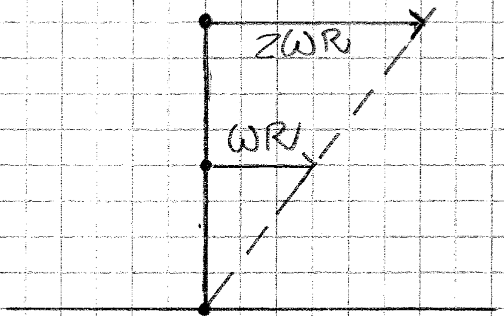
NOTIAMO COME IN UNA FOTO LA PARTE INFERIORE DELLA RUTA RISULTA ESSERE MOLTO NITIDA AL CONTRARIO DELLA PARTE SUPERIORE. QUESTO CAPITA PERCHE' IL PUNTO A CONTATTO CON IL SUO' SI DICE CHE E' FERMO ISTANTE PER ISTANTE OPPURE SI DICE CHE E' CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE

QUESTE SEGUENTI SONO LE FORZE CHE AGISCONO IN UN ROTO-TRASLAZIONE DI UNA RUOTA



UGUALI E OPPOSTE $\Rightarrow \vec{v}_C = \emptyset$

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO ~ TRIANGOLO DELLE VELOCITA'



$\vec{v}_C = \emptyset$

$\vec{v}_{cm} = \overrightarrow{\omega R}$

$\vec{a}_{cm} = \overrightarrow{\alpha R}$

$$F = I \cdot \frac{a_{CM}}{R^2} + m\,\vec{a_{CM}}$$

$$= a_{CM} \cdot \left(\frac{I}{R^2} + m \right)$$

$$\vec{F} = \vec{a_{CM}} \cdot \left(m + \frac{I}{R^2} \right)$$

SE MI SERVISSE

$$\vec{F_a} = \frac{I}{R^2} \cdot \frac{F}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$= \frac{F}{\frac{R^2}{I} \cdot m + 1}$$

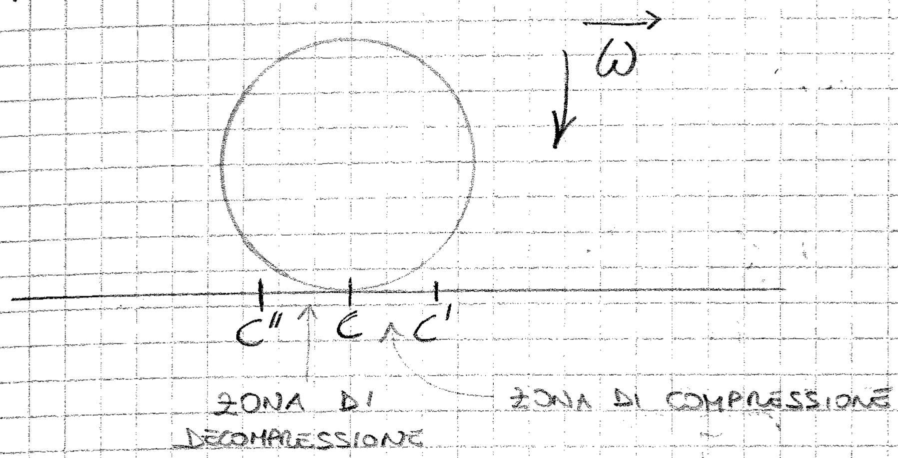
$$F_a \leq \mu_s \cdot m\vec{g}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{F}{\frac{R^2}{I} \cdot m + 1} \leq \mu_s m\vec{g} \Rightarrow F \leq \mu_s m\vec{g} \left(\frac{R^2}{I} m + 1 \right)$$

QUESTI CALCOLI CI AIUTANO A TROVARE QUAL È LA FORZA F MASSIMA DOPO CUI IL MOTO SMETTE DI ESSERE DI ROTO-TRASLATORIO (ROTOLAMENTO PURO) E DIVENTA UNO STRISCIAMENTO

ATTRITO VOLVENTE



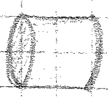
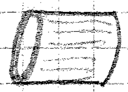
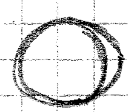
È UNA FORZA GENERALMENTE TRASCURABILE PERCHÉ LA SUA FORMULA È LA SEGUENTE, CON h DI ORDINE 10^{-5}

$$M_{\text{VOLVENTE}} = h \cdot \vec{mg}$$

h → COEF. ATT. VOLVEN.

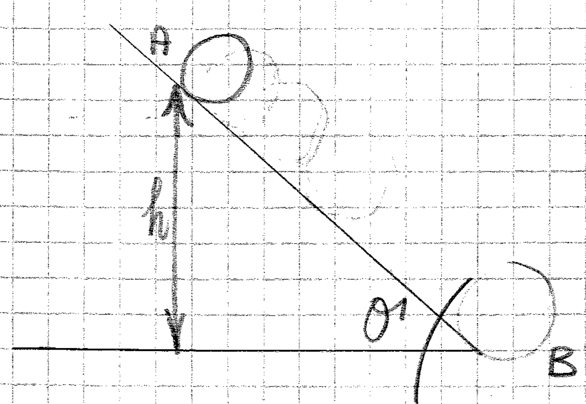
<u>ES:</u>

TRE OGGETTI SCENDONO DA UN PIANO INCLINATO

 CILINDRO $\qquad$  CILINDRO CAVO $\qquad$  SFERA

$I = \dfrac{mR^2}{2}$ $\qquad$ $I = mR^2$ $\qquad$ $I = \dfrac{2}{5} mR^2$

CHI FRA QUESTI CORPI ARRIVA PRIMA



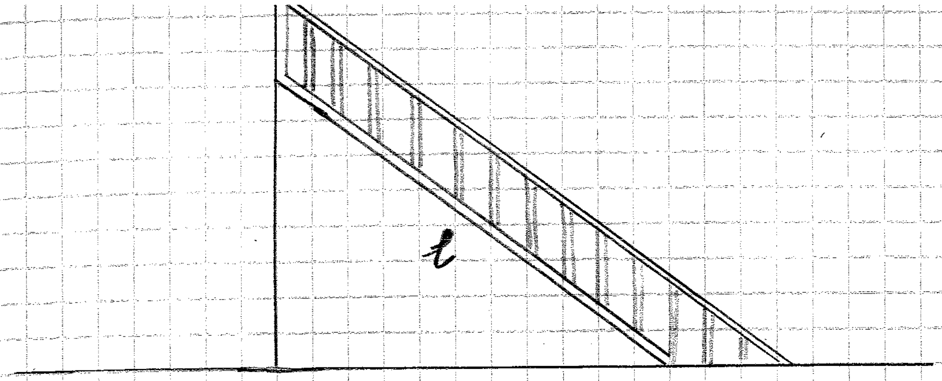
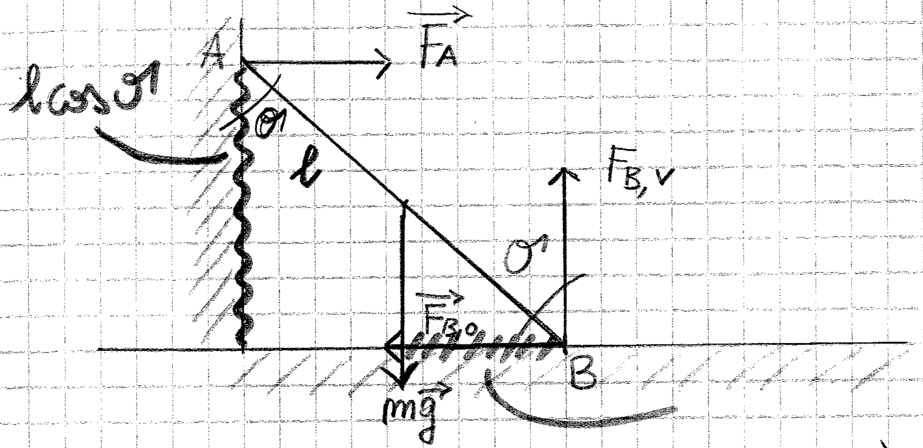


DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



TENENDO CONTO CHE IL VINCOLO IN A È LISCIO, QUINDI LA FORZA F_A È ORTOGONALE ALLA PARETE. LA CONDIZIONE $R=0$ COMPORTA

1) $\vec{F_A} = \vec{F}_{B,O}$ LUNGO L'ASSE DELLE x

2) $m\vec{g} = F_{B,V}$ LUNGO L'ASSE DELLE Y

① ASSUMIAMO B COME POLO:

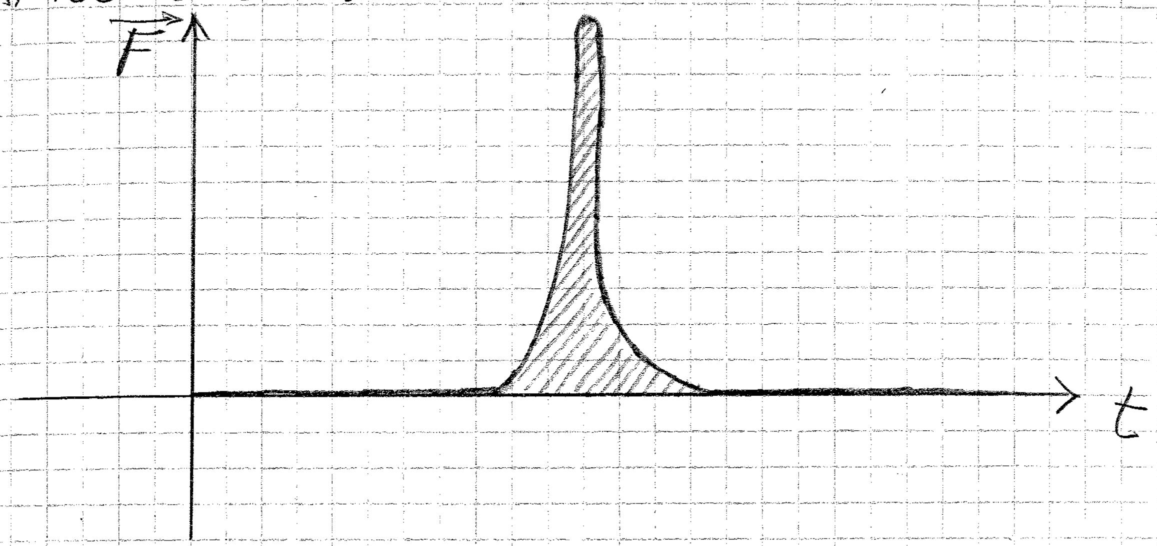
$$\vec{F_A}\, l \cos\vartheta = m\vec{g} \cdot \frac{l}{2} \operatorname{sen}\vartheta$$

② SI OTTIENE PERTANTO

$$\vec{F_A} = \frac{m\vec{g}\, \frac{l}{2} \operatorname{sen}\vartheta}{l \cos\vartheta} \quad \operatorname{tg}\vartheta$$

$$\frac{1}{2}$$

GRAFICO DELL'IMPULSO



$\Rightarrow$; IMPULSO $\sim$ FORZA $\int_0^t F\,dt = \Delta\vec{p}$

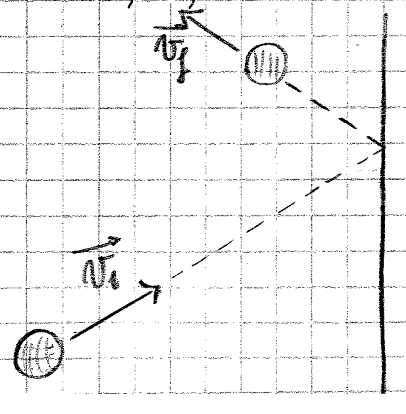
$\sim$ MOMENTO $\int_0^t M\,dt = \Delta\vec{L} \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{J}$

URTO $\begin{cases} \Delta t \text{ BREVE} \Rightarrow \text{P.TO DI CONTATTO NON SI SPOSTA} \\ \text{2 CORPI A CONTATTO} \\ \vec{F}_{INTERNE} \text{ , e/o, } \vec{F}_{ESTERNE} = ? \end{cases}$

RICORDIAMO CHE QUANDO PARLIAMO DI <u>URTO</u> LA FORZA ESTERNA PIÙ RILEVANTE È LA REAZIONE VINCOLARE.

Se $\vec{R}^{EST} = \phi \Rightarrow \vec{P}_{INZ} = \vec{P}_{FIN}$

Se $R^{EST} \neq \phi \Rightarrow \Delta\vec{P} = \vec{J}$



$\Delta p = m v_f - m v_i$

$= -2m\, v_x \hat{i}$

$$m_1 \vec{v}_{1FIN} - m_1 \vec{v}_{1IN} = J_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1}\, dt$$

$$m_2 \vec{v}_{2FIN} - m_2 \vec{v}_{2IN} = J_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2}\, dt$$

$J_{2,1}$ È L'IMPULSO DOVUTO ALLA FORZA IMPULSIVA $F_{2,1}$ ESERCITATA DAL PUNTO 2 SUL PUNTO 1 E ANALOGO È IL SIGNIFICATO DI $J_{1,2}$. NATURALMENTE

$$\vec{F}_{1,2} = -F_{2,1} \Rightarrow J_{1,2} = -J_{2,1}$$

È FONDAMENTALE RICORDARE CHE IN UN URTO NON SI PUÒ ASSUMERE A PRIORI CHE L'ENERGIA CINETICA SI CONSERVI. RIGUARDO L'ENERGIA CINETICA TORNA UTILE IL SECONDO TEOREMA DI KÖNIG

$$En._{cin.\,iniz.} = En._{cin\,CM} + E'n._{cin}$$

ENERGIA CINETICA RISPETTO AL CM

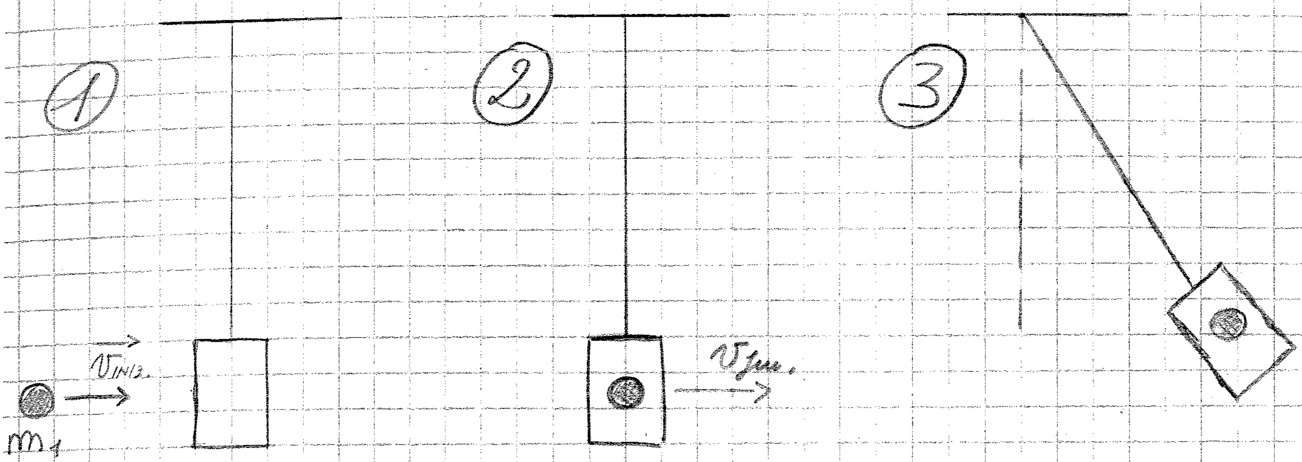
$$En._{cin\,CM} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}_{CM}^{\,2}$$

$$E'n._{cin} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^{\,2}$$

KÖENIG

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}_{CM}^{\,2} + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^{\,2}$$

IL PENDOLO BALISTICO



$\vec{P} = m_1 \vec{v}_{INIZ}$ $\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{fin}$ $\vec{P} = \phi$

$$m_1 \vec{v}_{INIZ} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{fin}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot v_{INIZ}$$

① ANALIZZIAMO SITUAZIONE PER SITUAZIONE

SITUAZ. 1

$E_{N\,CIN} = \frac{1}{2} m_1 v_{INIZ}^2$ $E_{POT} = \phi$

SITUAZ. 2

$E_{N\,CIN} = \frac{1}{2} (m_1 m_2) v_{CM}^2$ $E_{POT} = \phi$