NUMERO: 801

DATA: 31/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Cane

MATERIA: Essenziale di Meccanica Razionale

Prof. Delitala

EQ. DIFFERENZIALI

- EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE
  - A VARIABILI SEPARABILI

$$y'(t) = a(t)\, b(y(t))$$
$$= a(t)\, b(y)$$

$$\boxed{1° \text{ SOLUZIONE : } b(y) = 0 \quad \text{Quando?}}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = a(t)\, b(y)$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{b(y)}\, dy = \int a(t)\, dt$$

2° SOLUZIONE : $B(y) = A(t) + C$

Facciamo un esempio

$$(t^2+1)\, y' + y^2 = 0$$

$$y' = -\left(\underbrace{y^2}_{b(y)} \underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{a(t)}\right)$$

$$\begin{cases} y'(t) + a(t) \cdot y(t) = s(t) \\ y(t) = b\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_a^t s(x)\, e^{A(t)}\, dx \\ y(a) = b \end{cases}$$

$$A(t) = \int_a^t a(x)\, dx$$

Facciamo un esempio

$$\begin{cases} t y' - 2y = t^3 \cos(t) \\ y(\pi) = \emptyset \end{cases}$$

Riduco in forma canonica

$$y' \underbrace{- \frac{2}{t}}_{a(t)} y = \underbrace{t^2 \cos(t)}_{s(t)}$$

$$A(t) = \int_\pi^t - \frac{2}{t}\, dt$$

$$= -2 \log(t) \Big|_\pi^t$$

$$= -2 \left[\log(t) - \log(\pi)\right]$$

$$= -2 \ln\left(\frac{t}{\pi}\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{t^2}\right)$$

EQ. DIFFERENZIALI LINEARI DEL 2° ORDINE

$$a_0(t)\,y'' + a_1(t)\,y' + a_2(t)\,y = f(t)$$

1° COEFF. COSTANTI $\quad a y'' + b y + c y = \emptyset$

- DEFINISCO IL POLINOM. CARATTERISTICO

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = \emptyset$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac = \Delta$$

Se $\Delta > 0 \Rightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Se $\Delta = 0 \Rightarrow y = e^{-\frac{b}{2a}} (c_1 + c_2 x)$

Se $\Delta < 0$

$\hookrightarrow y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} \cos(\Delta t) + c_2 e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sen}(\Delta t)$

Facciamo un esempio:

$$\frac{1}{2} C_2 e^{-2} + C_2 e^{-2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} C_2 e^{-2} = 1 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{2}{3} e^{2}}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{1}{3} e^{-4}}$$

• CINEMATICA DEL PUNTO

In un sistema di assi cartesiani $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ possiamo individuare infiniti punti localizzati da coordinate cartesiane univoche x y z.

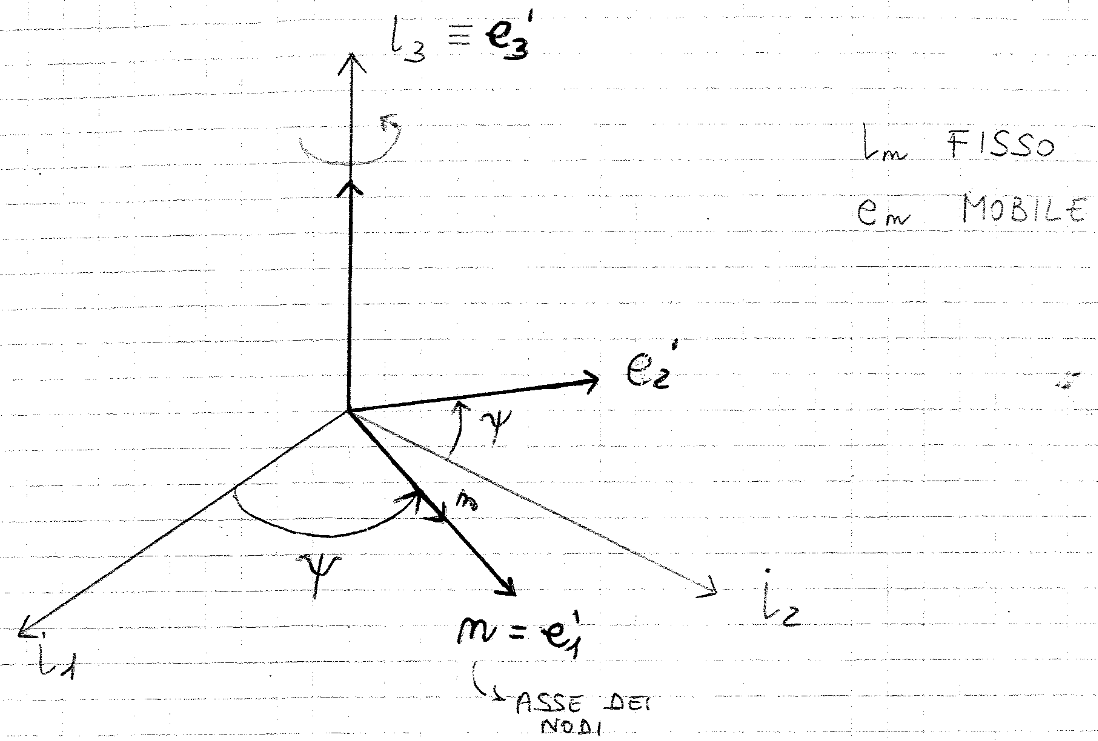
Localizzato il punto $P(t)$ possiamo definire la VELOCITÀ del suddetto punto come LA DERIVATA DEL VETTORE POSIZIONE $OP(t)$ indicata con $v(t)$, per cui abbiamo:

$$\vec{v}_P(t) = \dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{x}(t)\hat{\imath} + \dot{y}(t)\hat{\jmath} + \dot{z}(t)\hat{k}$$

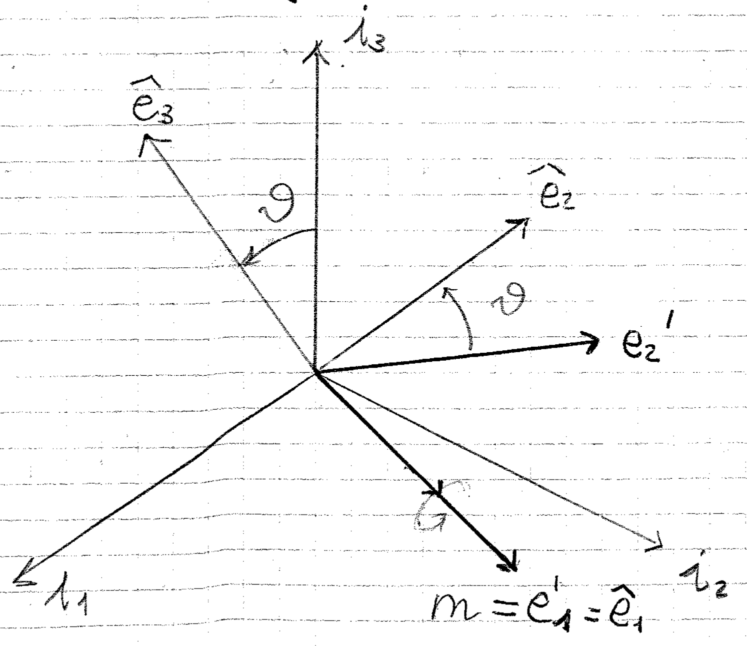
Allo stesso modo, definiamo l'accelerazione come la DERIVATA SECONDA di $OP(t)$

$$\vec{a}_P(t) = \ddot{P}(t) = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{x}(t)\hat{\imath} + \ddot{y}(t)\hat{\jmath} + \ddot{z}(t)\hat{k}$$

$$m = \frac{i_3 \wedge e_3}{|i_3 \wedge e_3|}$$



Se ruoto $i_3 \equiv e_3$ allora individuo un angolo ψ che chiamerò ANGOLO DI PRECESSIONE (Facendo coincidere i_3 con e_3)



non abbiamo modo di distinguere ψ da ϑ. Chiameremo dunque ψ l'angolo complessivo nonché L'ANGOLO DI ROTAZIONE

VELOCITÀ ANGOLARE
Durante un moto rigido ogni punto del sistema possiede una propria velocità e una propria accelerazione, in generale diverse dalle altre, e variabili da istante a istante.

TEOREMA DI POISSON
Sia $\mathcal{B}$ un sistema in moto rigido e siano $\{e_1, e_2, e_3\}$ i versori di una terna solidale. Esiste quindi <u>un unico</u> vettore ω tale che:

$$\dot{e}_h = \omega \wedge e_h \qquad h = 1, 2, 3$$

questo versore NON dipende dalla terna solidale scelta ed è chiamato: VELOCITÀ ANGOLARE DI $\mathcal{B}$. Essa è anche definita:

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{3} e_h \wedge \dot{e}_h$$

CARATTERIZZAZIONE DEI MOTI RIGIDI PIANI
La condizione necessaria e sufficiente

MOTO TRASLATORIO

Un moto si dice TRASLATORIO se ogni retta solidale mantiene orientamento invariabile rispetto all'osservatore fisso. Ossia $\iff \omega(t) \equiv 0 \quad \forall t$

MOTO ROTOTRASLATORIO

Un moto si dice ROTOTRASLATORIO se $\omega(t)$ ha direzione costante possedendo dunque un orientamento solidale al corpo che si mantiene costante

MOTO ELICOIDALE

Un moto rototraslatorio si dice ELICOIDALE se esiste una retta, parallela alla direzione privilegiata, i cui punti abbiano velocità parallela alla retta stessa

MOTO PIANO

Un moto si dice PIANO se esiste un piano π, solidale con il corpo che si mantiene sempre parallelo e a distanza costante da un piano fisso π^* detto PIANO DIRETTORE temporale c' calcolata dall'osservatore mobile dalla relazione:

$$\dot{c} = c' + \omega \wedge c$$

TEOREMA DI GALILEO

Consideriamo un punto P durante un moto. Naturalmente la velocità rilevata da un osservatore fisso ($\vec{v_a}$) sarà diversa dalla $\vec{v_r}$ velocità relativa rilevata da un osservatore mobile. Il nostro crucio è quello di scoprire la relazione tra la v_a di un punto P e la v_r. Fortunatamente il TEOREMA DI GALILEO ci viene in soccorso: $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_\tau}$ dove

$$\vec{v_\tau} = \vec{v_Q} + \vec{\omega} \wedge QP$$

è detta VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO sostanzialmente si ha

$$\underbrace{\vec{v_a}}_{\text{vel. terna fissa}} = \underbrace{\vec{v_r}}_{\text{velocità terna mobile}} + \underbrace{\vec{v_Q}}_{\text{Velocità origine terna mobile}} + \vec{\omega} \wedge QP$$

TEOREMA DI CORIOLIS

Il teorema precedente legava le relazioni tra la $\vec{v_a}$ e la $\vec{v_r}$ mentre il

SISTEMI DI COORDINATE LIBERE si indicono le parametrizzazioni, mediante N-uple di numeri reali, delle configurazioni del sistema.

ATTI DI MOTO E VELOCITÀ VIRTUALI cioè compatibili con i vincoli fissati ad un dato istante

VINCOLI, SPOSTAMENTI E VELOCITÀ VIRTUALI

Definizioni:

- VINCOLO: restrizione a priori sulle possibilità di moto del sistema
- VINCOLO OLONOMO: restrizione a priori sull'insieme delle configurazioni possibili
- VINCOLO DI POSIZIONE MOBILE: in cui l'insieme delle configurazioni a priori possibili dipende esplicitamente dal tempo. Un vincolo privo di questa dipendenza si dice fisso.
- VELOCITÀ VIRTUALE: Velocità compatibile con i vincoli fissati a un dato istante
- ATTO DI MOTO VIRTUALE: Atto di moto " " " "
- SPOSTAMENTO VIRTUALE REVERSIBILE: spost. virtuale tale che il suo opposto è anch'esso virtuale.

< al numero di coordinate libere, mentre se avessimo LABILITÀ i gradi di libertà sarebbero > del numero di coordinate libere

GEOMETRIA DELLE MASSE

Ogni punto materiale è caratterizzato da una quantità positiva, detta MASSA, che determina la sua **risposta** ad una determinata sollecitazione. Nel caso di sistemi estesi, la massa si distribuisce lungo tutta la regione occupata dal corpo. Al fine di associare una massa ad ogni porzione finita e misurabile del sistema introduciamo il concetto di <u>DENSITÀ DI MASSA</u>.

$$m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \rho(P)\, d\tau$$

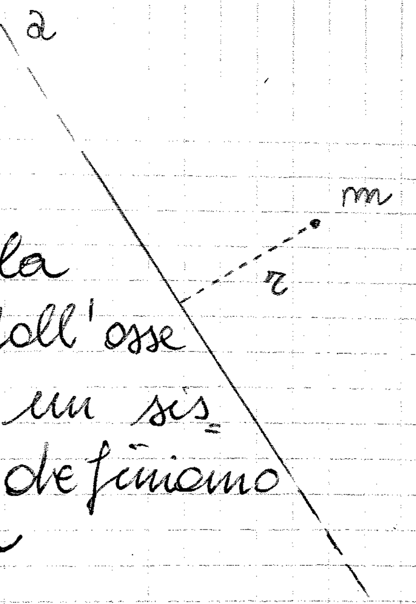
↑ IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE

$d\tau$ = ELEM. INFINITESIMO DI VOLUME per corpi tridimensionali, DI SUPERFICIE per quelli bidimensionali, DI LINEA per quelli lineari.

$$[ML^{-3}],\ [ML^{-2}],\ [ML^{-1}]$$

IL BARICENTRO

Bisogna distinguere il baricentro di un



osse a, lo scalare $I_a = mr^2$ dove r è la distanza del punto dall'asse
Analogamente, per un sistema materiale B definiamo

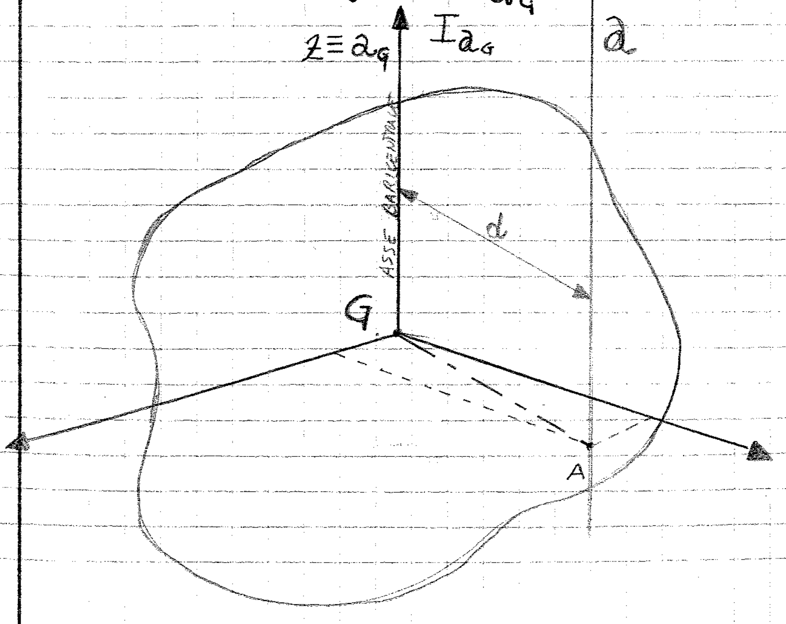
$$I_a = \int_B \rho r^2 d\tau$$

MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AD ASSI PARALLELI

Talvolta per facilitare il calcolo dei momenti di inerzia risulta conveniente individuare come varia il momento di inerzia quando l'asse viene trasportato parallelamente a se stesso.

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER dice che il momento di inerzia di un corpo rispetto a un asse arbitrario a è pari a

$$I_a = I_{a_G} + md^2$$



FORZE DIPENDENTI DALLA VELOCITÀ: In questo caso abbiamo $F = F(v)$. A questa categoria appartengono le forze di resistenza.
FORZE DIPENDENTI DAL TEMPO: $F = F(t)$ basta immaginare di aprire il tappo della vasca, la pressione diminuisce al crescere del tempo in quanto in questo arco di tempo l'acqua defluisce
FORZE ATTIVE Esistono infine, forze che presentano contemporaneamente tutte le caratteristiche sopra-citate. Essa infatti dipendono funzionalmente da posizione, velocità e tempo: $F = F(P, v, t)$
Caratteristica fondamentale di ogni forza attiva è quella che la sua dipendenza da atto di moto e tempo è nota a priori, prima di conoscere eventuali altre forze che agiscano sullo stesso punto

SISTEMI DI FORZE
Iniziamo formando una serie di definizioni:
RETTA DI APPLICAZIONE. Dato un vettore applicato (P, v), definiamo la sua retta di applicazione come la retta pos=

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

1° EQUAZIONE

$$R^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m a_G \Rightarrow R^{EXT} = 0$$

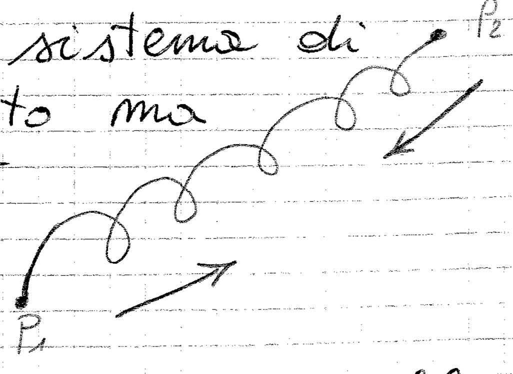
Risultante delle forze esterne attive e vincolari $= \emptyset$

2° EQUAZIONE

$$M^{EXT} = \emptyset$$

Momento delle forze esterne deve essere uguale a $\emptyset$

In soldoni le due equazioni insieme sono equivalenti alla richiesta che il sistema delle forze esterne sia EQUILIBRATO.
Per un sistema generico, però queste equazioni non bastano perchè il sistema sia equilibrato.
In questo caso il sistema di forze è equilibrato ma la molla non è per niente in EQUILIBRIO.



Se però io valutassi una molla arrotolata su un asta e vincolata

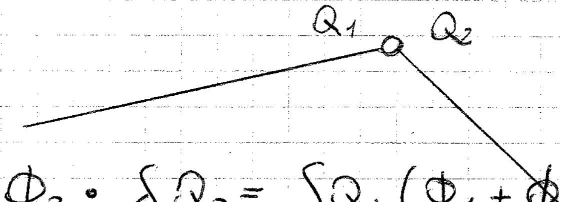
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 126

Nelle CERNIERE FISSE nel punto O lo SPOSTAMENTO VIRTUALE $\delta O = \emptyset$ per definizione del vincolo che è fisso

$$\delta L^{VINC} = \Phi \cdot \underset{\text{UGUALE A } \emptyset}{\delta O} = \emptyset$$

Nelle CERNIERE MOBILI

$\delta Q_1 = \delta Q_2$



$$\delta L^{VINC} = \Phi_1 \cdot \delta Q_1 + \Phi_2 \cdot \delta Q_2 = \delta Q_1 (\Phi_1 + \Phi_2)$$

Nel PURO ROTOLAMENTO anche il lavoro virtuale è $= \emptyset$.

Riassumendo:

- VINCOLI IDEALI BILATERALI abbiamo:

$$\delta L^{V} = \emptyset \quad \rightarrow \text{ogni spostam. virtuale è reversibile}$$

- VINCOLI IDEALI UNILATERALI abbiamo:

$$\delta L^{V} \geq \emptyset$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione $\mathcal{C}$ sia di equilibrio isolati rimangono in quiete oppure si muovono con accelerazione nulla (PRIMO PRINCIPIO DELLA MECCANICA).

In un sistema inerziale, un corpo soggetto a una forza $\vec{F}$ acquista un'accelerazione parallela e concorde alla forza, di intensità proporzionale a quella della stessa forza (SECONDO PRINCIPIO DELLA MECCANICA)

Le interazioni tra coppie di punti materiali sono rappresentabili attraverso due forze che formano una COPPIA di braccio nullo (TERZO PRINC. DELLA MECCANICA o PRINCIP. DI AZIONE E REAZIONE)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE FORZE

Sia F_1 la forza che su un dato punto materiale produrrebbe (se applicata da sola) l'accelerazione $\vec{a_1}$ e F_2 la forza che produrrebbe $\vec{a_2}$. Allora l'accelerazione prodotta dalla contemporanea applicazione di F_1 e F_2 è data da $\vec{a_1} + \vec{a_2}$ per cui:

$q^*_{(1)}, q^*_{(2)}, q^*_{(3)}$ sono tutti punti di stazionarietà. Possiamo distinguerli in STABILI e INSTABILI, dunque (1) e (3) sono INSTABILI in quanto un punto P tenderebbe ad allontanarsi dal punto di equilibrio, mentre il punto (2) tende a mantenere un eventuale punto P vicino al punto di stazionarietà

DINAMICA DEI SISTEMI

QUANTITÀ DI MOTO

Con il termine quantità di moto di un sistema si indica il vettore

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \quad \text{oppure} \quad Q = \int_{\mathcal{C}} \rho \vec{v} \, d\tau$$

a seconda se il sistema è discreto o continuo

MOMENTO DELLE QUANTITÀ DI MOTO

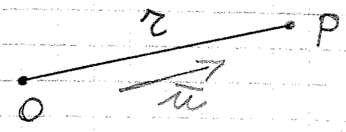
Chiamiamo momento delle quantità di moto di un sistema rispetto ad un polo Q il vettore

$$\vec{K_Q} = \sum_{i=1}^{n} QP_i \wedge m v_i$$

$$K_Q = \int_{\mathcal{C}} QP \wedge \rho \vec{v} \, d\tau$$

Per le FORZE CENTRALI (gravitaz. o coulombiane)

$$\vec{F} = \vec{F}(r)\,\vec{u}$$



$$U = \int_{\emptyset}^{r} F(\rho)\,d\rho + cost$$

Per una COPPIA DI FORZE

$$U = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} f(\hat{\vartheta})\,d\hat{\vartheta}$$

$$W = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} M\,d\vartheta = \emptyset$$

ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$

oppure

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} \rho\, v^2\, d\tau$$

TEOREMA DI KÖNIG o DI DECOMPOSIZIONE DELL' ENERGIA CINETICA

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m v_G^2}_{\text{EN. CINETICA DEL BARICENTRO IN CUI È CONDENSATA TUTTA LA MASSA}} + T^{(G)}$$

$T^{(G)}$: EN. CINETICA DEL SISTEMA NEL MOTO RELATIVO AL BARICENTRO

ENERGIA CINETICA PER UN SISTEMA RIGIDO

Per sistemi rigidi o atti di moto rigidi le velocità sappiamo essere distribuite secondo una legge fondamentale quindi

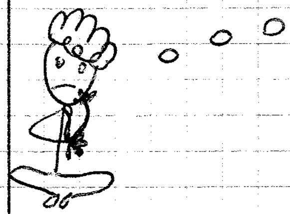
$$v_i = v_A + \omega \wedge AP_i$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} m_i v^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} m_i v_i v_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i \cdot (v_A + \omega \wedge AP_i)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i v_i v_A}_{L\, m v_G} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i \cdot (\omega \wedge AP_i)}$$

permutazioni fattori
PRODOTTO MISTO



$$a \cdot b \wedge c = c \cdot b \wedge a$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \omega \cdot AP_i \wedge m_i v_i$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m v_G + \frac{1}{2} \omega \cdot K_A$$

con A un generico punto arbitrario solidale al corpo rigido

In definitiva

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j}^{n} a_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j + \sum_i b_i\,\dot{q}_i + \text{cost}\right]$$

dove:

$$a_{ij} = \sum_{h=1}^{N} m_h \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_h}{\partial q_j}$$

$$b_i = 2\sum_{h=1}^{N} m_h \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_h}{\partial t}$$

$$c = \sum_{h=1}^{N} m_h \left(\frac{\partial P_h}{\partial t}\right)^2$$

dove $a_{ij} = a_{ij}(q_1, q_2, \dots q_n ; t)$ sono i coefficienti della MATRICE DI MASSA che è simmetrica

$$\frac{\partial P_h}{\partial q_i} + \frac{\partial P_h}{\partial q_j} + \frac{\partial P_h}{\partial q_j} + \frac{\partial P_h}{\partial q_i}$$

I termini $b_i(q_1, q_2 \dots q_n ; t)$ e $c(q_1, q_2, \dots q_n ; t)$ si ANNULLANO quando i vincoli sono fissi per cui si ha che:

$$P_h = P_h(q_1, q_2 \dots q_n)$$

Senza dipendenza esplicita dal tempo

DI TUTTE LE FORZE AGENTI SUL CORPO RIGIDO

Al fine di dimostrare che il membro sinistro coincide con $\dot{T}$, dobbiamo mostrare preliminarmente che

$$\vec{\dot{K}}_G = \vec{I}_G \vec{\dot{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \vec{I}_G \vec{\omega}$$

dunque

$$\vec{\dot{K}}_G \cdot \vec{\omega} = \vec{I}_G \vec{\dot{\omega}} \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{I}_G \vec{\omega} \cdot \omega$$

$$= \vec{\dot{\omega}} \cdot \vec{I}_G \vec{\omega} = \dot{\omega} \cdot K_G$$

otteniamo dopo vari calcoli che:

$$\dot{T} = m \vec{a}_G \cdot \vec{v}_G + \vec{\dot{K}}_G \cdot \vec{\omega}$$

ossia in altri termini.

$$\frac{dT}{dt} = \Pi^A + \Pi^V =$$

POTENZA FORZE ATTIVE

POTENZA FORZE VINCOLARI

Da cui ricaviamo:

$$dT = \Pi^A dt + \Pi^V dt = dW^A + dW^V$$

VARIAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA

Si deduce che un corpo AUMENTA la SUA VELOCITÀ A FRONTE DI UN LAVORO

siano CONSERVATIVE con potenziale $U(q)$
abbiamo: $dL^A = dU \Rightarrow dT = dU$
Integriamo nel tempo:

$$T - U = cost = E$$

energia meccanica del sistema definita come differenza tra energia cinetica e potenziale

Dato che E rimane costante nel tempo abbiamo all'istante iniziale

$$E = T_0 - U_0$$

Riassumendo: Abbiamo visto che il teorema dell'energia cinetica è un valido strumento per lo studio di sistemi OLONOMI ad 1 GRADO DI LIBERTÀ. Questo tuttavia non è agevole e sufficiente allo studio di sistemi a più gradi di libertà.
Le EQUAZIONI DI LAGRANGE permetteranno di descrivere sistemi OLONOMI a n gradi di libertà soggetti a vincoli ideali fissi o mobili in termini di equazioni pure del moto.
Per un qualunque punto materiale noi abbiamo $\vec{F} + \vec{\phi} = m\vec{a}$ (LEGGE DELLA DINAMICA) per cui:

$$\{ F_i \text{ dove } i = 1 \dots K \text{ con } K < n \}$$

L'EQUILIBRIO STATICO si ha quando (per la 1° EQ. CARDINALE DELLA STATICA)

$$\sum_{i=1}^{K} F_i = \emptyset$$

Mentre la condizione necessaria per l'EQUILIBRIO DINAMICO secondo il principio di D'Alembert

$$\sum_{i=1}^{K} (F_i - \underbrace{m_i a_i}_{\text{F. D' INERZIA SU TUTTI I PUNTI SOGGETTI A FORZE}}) - \sum_{i=1}^{m} \underbrace{m_i a_i}_{\text{F. DI INERZIA SU TUTTI I PUNTI NON SOGGETTI A FORZE}} = \emptyset$$

Ricordiamo la cosiddetta EQUAZIONE SIMBOLICA DELLA DINAMICA. Considerando un sistema di punti materiali

$$\{ (P_i, m_i) \quad i = 1 \dots m \}$$

sottoposto a vincoli ideali e ad un sistema di forze su tutti i punti materiali

$$\{ (P_i, F) \quad i = 1, \dots m \}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia il moto del sistema è che:

$$\sum (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i \leq \emptyset$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} (F_i - m a_i)\, \delta P_i = \emptyset}$$

→ EQUAZIONE SIMBOLICA DELLA DINAMICA CHE È L'ANALOGA DINAMICA DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Se consideriamo un sistema OLONOMO sono definite N coordinate lagrangiane:

$(q_1, q_2 \dots q_n)$ COORD. LIBERE ESSENZIALI e INDIPENDENTI TRA LORO

Ora cerchiamo di esprimere gli spostamenti virtuali di ogni punto (δP_i). In termini di spostamenti virtuali delle coordinate libere che sono indipendenti tra loro a differenza de δP_i che sono dipendenti per effetto dei vincoli. Vogliamo esprimere i δP_i (DIPEND.) in funzione dei δq_i (INDIPEND). in q coordinate lagrangiane.

$$\overset{M}{\underset{i=1}{P_i}}(q_1 \dots q_N)$$

m = P.ti materiali

N = gradi di libertà

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\mathcal{Q}_K = \mathcal{T}_K \qquad K = 1 \dots N$$

N equazioni pure del moto tra di loro indipendenti.

EQUAZIONI DI LAGRANGE

Caratterizziamo le $\mathcal{Q}_K$ e le $\mathcal{T}_K$ in funzione di quantità più facilmente calcolabili; quindi a tal fine introduciamo i BINOMI LAGRANGIANI per ottenere le EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\mathcal{T}_K = \sum_{i=1}^{k} m_i a_i \frac{\partial P_i}{\partial q_K} = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{\partial v_i}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_K}$$

Ricordando la regola:

$$\left(\frac{d}{dt} a\right) \cdot b = \frac{d}{dt}(a \cdot b) - a \cdot \frac{db}{dt}$$

$$\Longrightarrow \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(v_i \cdot \underbrace{\frac{\partial P_i}{\partial q_K}}_{\frac{\partial v_i}{\partial q_K}}\right) - \sum_i m_i v_i$$

Invece

$$P_i(t) = P_i\left(q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t); t\right)$$

$$\text{con } i = 1, \dots, m$$

$$\tau_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (v_i \cdot v_i) +$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial q_k} (v_i \cdot v_i) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (v_i \cdot v_i) +$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (v_i \cdot v_i)$$

En cinetica

Quindi

$$\tau_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad k = 1, \dots, N$$

quindi $\tau_k = \vartheta_k$ → BINOMI LAGRANGIANI

Si può dunque scrivere

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \vartheta_k \qquad \forall k = 1, \dots, N}$$

→ EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0}$$

→ EQUAZIONE DI LAGRANGE
CASO CONSERVATIVO

HAMILTONIANA

Chiamiamo Hamiltoniana di un sistema olonomo di coordinate libere $\{q_1 \dots q_N\}$ la funzione

$$H(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L}$$

La derivata temporale di H è legata alla dipendenza esplicita della Lagrangiana dal tempo:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Importante è sapere che quando i vincoli sono fissi, e le forze conservative, la funzione Hamiltoniana coincide con l'energia meccanica del sistema: $E = T - U$

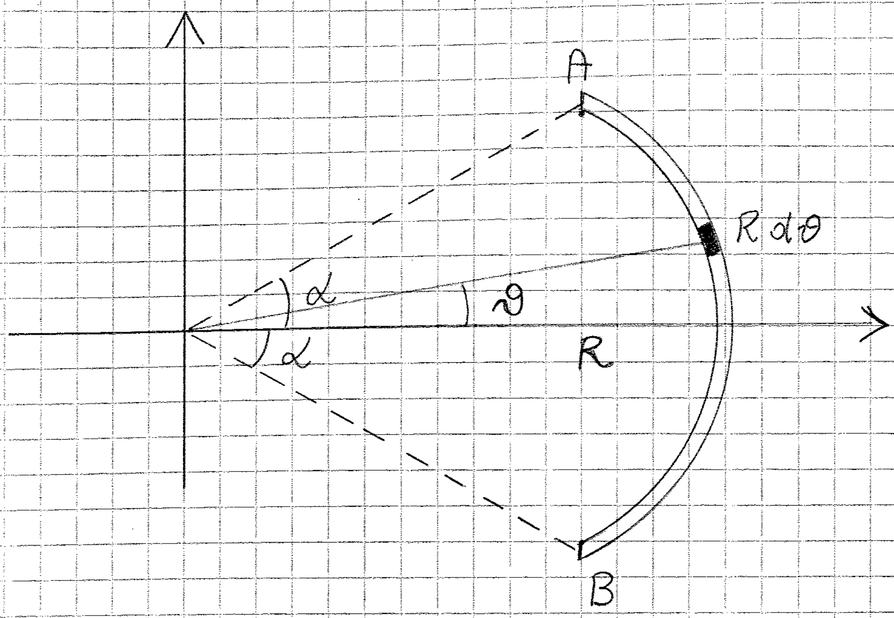
DANIELE CANE

POLITECNICO DI TORINO

PROF. MARCELLO DELITALA

Meccanica Razionale esercizi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 126



1° IMPOSTO $d\tau$

$$d\tau = R\,d\vartheta$$

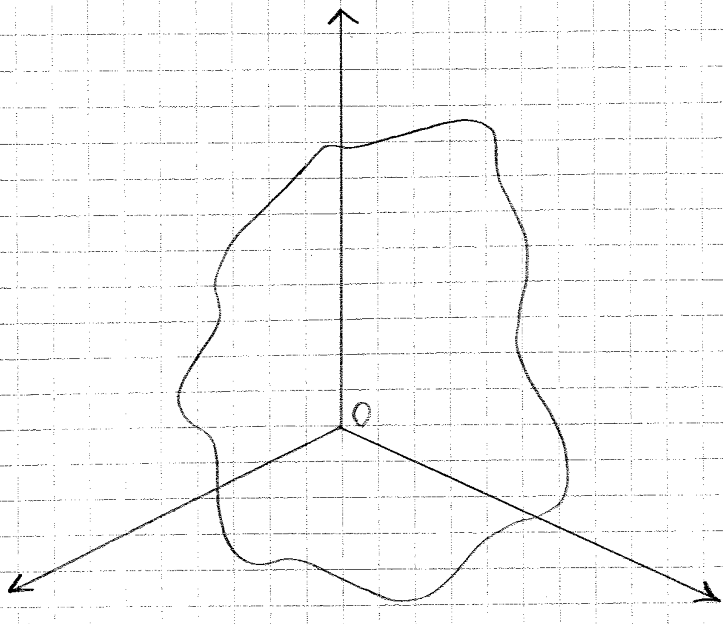
$$x_G = \frac{\int R\cos\vartheta\,\rho\,d\tau}{\int \rho\,d\tau}$$

$$= \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\vartheta\,\rho\,(R\,d\vartheta)}{\rho R\int_{-\alpha}^{\alpha} d\vartheta}$$

$$= \frac{R^2\rho\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\vartheta\,d\vartheta}{\rho R\,\vartheta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}$$

$$= \frac{R^2\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\rho R\alpha} = \frac{R^{\cancel{2}}\cancel{\rho}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cancel{\rho}\cancel{R}\alpha}$$

ESM



$$I_x = \int_{\mathcal{C}} (y^2+z^2)\, d\tau$$

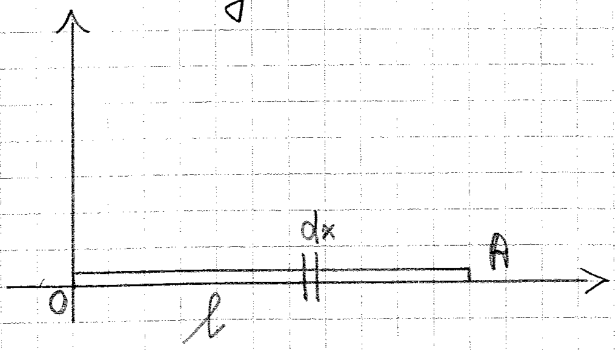
$$I_y = \int_{\mathcal{C}} (x^2+z^2)\, d\tau$$

$$I_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\, d\tau$$

Teorema di Huygens-Steiner

$$I_a = I_a^{(G)} + md^2$$

ES 2 Trovare il momento d'inerzia di un asta lunga l



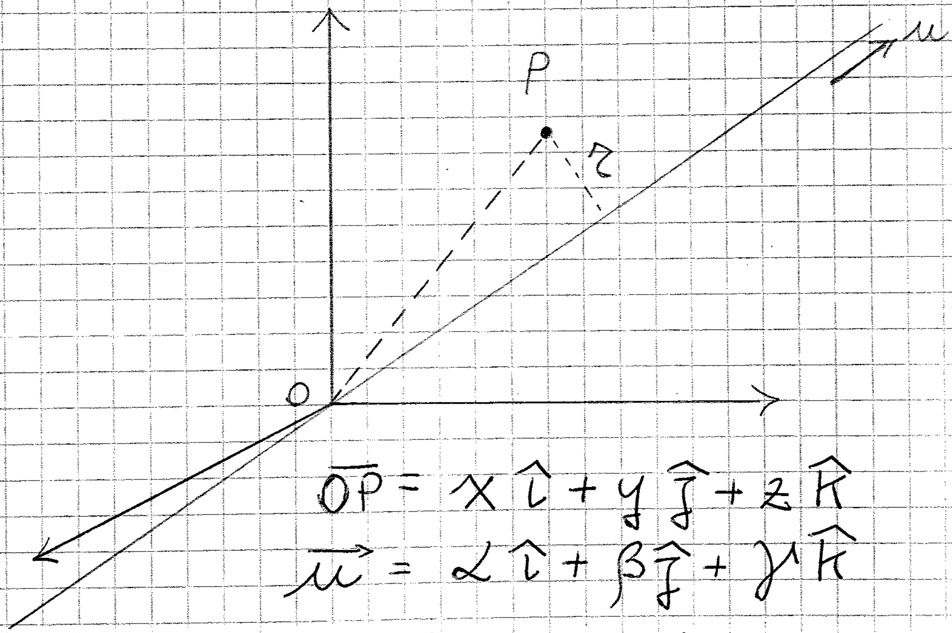
$$I_0 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R r^2 \rho \, dr$$

$$= \rho \, 2\pi \, \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$m = \rho \pi R^2$$

$$I_a = I_0 + m R^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

ASSI CONCORRENTI



$$\overline{OP} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$\vec{u} = \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k}$$

$$r = \left| \overrightarrow{OP} \wedge \vec{u} \right|$$

$$I_u = \int_{b} \left| OP \wedge u \right|^2 \rho \, d\tau$$

$$\overline{OP} \wedge \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$G\curvearrowleft)\quad Kx\,\frac{l}{2}\cos(\vartheta)-\phi\,\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\vartheta=\frac{ml^2}{12}\ddot{\vartheta}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega}=\dot{\vartheta}\,\hat{k}$$

MOLTIPLICO SCALARMENTE PER $\hat{i}$

$$-Kx=m\ddot{x}_G$$

$$x_G=x+\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\vartheta \overset{\text{DERIVO}}{\Longrightarrow} \dot{x}_G=\dot{x}+\frac{l}{2}\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}$$

$$y_G=-\frac{l}{2}\cos\vartheta \overset{\text{DERIVO}}{\Longrightarrow} \dot{y}_G=\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\vartheta\cdot\dot{\vartheta}$$

Derivando ulteriormente e sostituendo

$$-Kx=m\left(\ddot{x}-\frac{l}{2}\,\text{sen}(\vartheta)\,\dot{\vartheta}^2+\frac{l}{2}\,\text{sen}(\vartheta)\,\ddot{\vartheta}\right)$$

MOLTIPLICO SCALARMENTE PER $\hat{j}$

$$-mg+\phi=m\left(\frac{l}{2}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2+\frac{l}{2}\,\text{sen}\vartheta\,\ddot{\vartheta}\right)$$

MOLTIPLICO SCALARMENTE PER $\hat{k}$

$$Kx\,\frac{l}{2}\cos\vartheta-\phi\,\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\vartheta=\frac{ml^2}{12}\ddot{\vartheta}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_G = \cancel{\vec{v}_C} + \vec{\omega} \wedge \vec{CG}$$

puro rotolam.

$$\dot{x}_G\,\vec{i} = R\dot{\vartheta}\,\vec{k} \wedge \vec{j} = -R\dot{\vartheta}\,\vec{i}$$

Applico il teorema di König

$$T = \frac{1}{2} mR^2\dot{\vartheta}^2 + T^{(2,G)}$$

$$T^{(2,G)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} I_z \dot{\vartheta}\,\vec{k} \cdot \dot{\vartheta}\,\vec{k} = \frac{1}{2} I_z \dot{\vartheta}^2$$

Per i sistemi piani questa formula vale SEMPRE, il momento d'inerzia è diretto $\perp$ al piano su cui giace il sistema

$$T = \frac{1}{2} mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\vartheta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{3}{4} mR^2\dot{\vartheta}^2}$$

DATI:

DISCO m, R, $N=1$, $x_A = x$ (coord. libera)
PUNTO P M

Calcolare l'energia cinetica totale:

$$T^{TOT} = \frac{1}{2} M v_P^2 + T^{disco}$$

$$\vec{v_P} = \dot{y}\, \vec{J}$$

Naturalmente so che

$$\vec{v_P} = \vec{v_B} \quad \text{(stessa corda)}$$

$$\vec{v_B} = v_C + \omega \wedge \vec{CB} = -2R\omega\, \vec{\imath}$$

$$\omega = -\frac{\dot{x}}{R}\, \vec{K}$$

Sostituisco

$$v_B = 2\dot{x}\, \imath$$

Confronto l'equazione precedente con questa:

$$-\dot{y}\, \vec{\imath} = 2\dot{x}\, \vec{J} \Rightarrow \dot{y} = -2\dot{x}$$

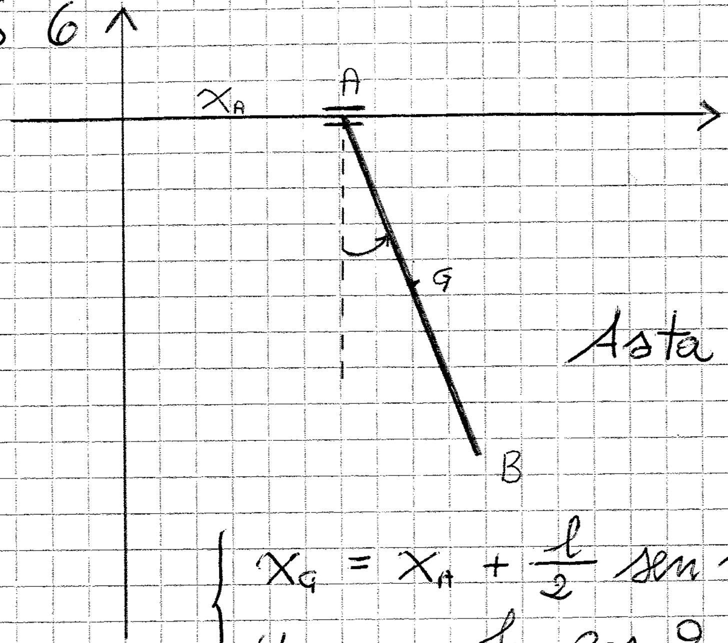
Per cui

$$T^{TOT} = \frac{1}{2} M 4\dot{x}^2 + T^{DISCO}$$

$$T^{DISCO} = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m \cancel{R^2} \frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}}$$

ASTA CON 2 GRADO DI LIBERTÀ

ES 6



DATI

Asta: m, l, $N=2$, x_A, ϑ

$$\begin{cases} x_G = x_A + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \vartheta \\ y_G = -\frac{l}{2} \cos \vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + \frac{l}{2} \cos(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} \\ \dot{y}_G = \frac{l}{2} \operatorname{sen}(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} \end{cases}$$

$$\vec{v}_G^{\,2} = \dot{x}^2 + l \cos\vartheta \, \dot{x} \dot{\vartheta} + \frac{l}{4} (\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta) \dot{\vartheta}^2$$

$$T_{TOT} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l \cos \dot{x} \dot{\vartheta} + \frac{l^2}{4} \dot{\vartheta}^2 \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{m l^2}{12} \dot{\vartheta}^2$$

$$T_{TOT} = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{x}^2 + l \cos\vartheta \, \dot{x} \dot{\vartheta} + \frac{l^2}{3} \dot{\vartheta}^2 \right\}$$

$$v_D^{(DISCO)} = -R\dot{\vartheta}\,\vec{J} = \cancel{\vec{v}_O}^{\to 0} + \omega_1 \wedge \overline{OD}$$

$$v_B^{(FILO)} = v_B^{(DISCO\,2)} = -R\dot{\vartheta}\,\vec{J}$$

$$v_B^{(DISCO\,2)} = \cancel{\vec{v}_C}^{\to 0} + \omega_2 \wedge \overline{CB}$$

$$\uparrow -R\dot{\vartheta}\,J$$

$$\Rightarrow -R\dot{\vartheta}\,\vec{J} = 2R\,\omega_2\,\vec{K} \wedge \vec{i}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = -\frac{\dot{\vartheta}}{2}\,\vec{K}$$

Sostituisco:

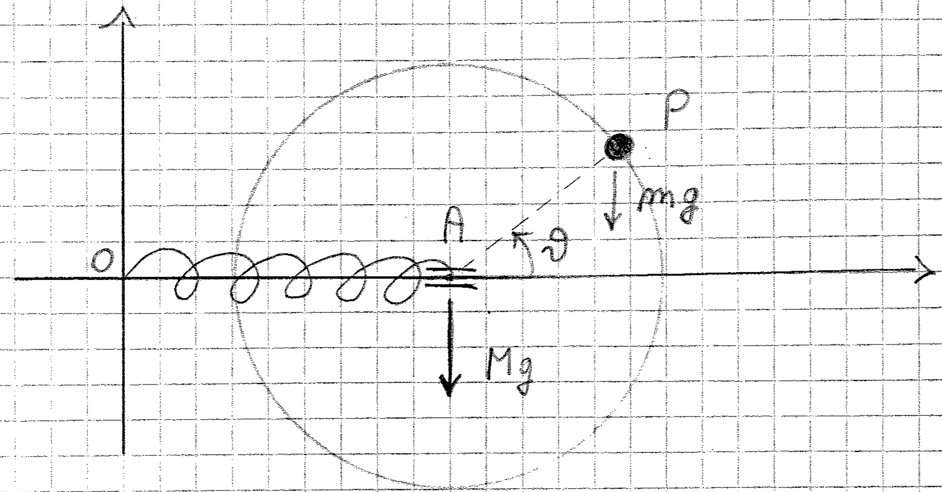
$$T = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} I_C \frac{\dot{\vartheta}^2}{4}$$

$$\omega_1 = \dot{\vartheta}\,\vec{K} \qquad \omega_2 = -\frac{\dot{\vartheta}}{2}\,\vec{K}$$

$$I_C = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{7}{8} m\right) R^2 \dot{\vartheta}^2$$

ES 9



DATI:

DISCO : M, R
PUNTO : m

$\vec{F} = -K\,\overline{OA}$ f. elastica

$N = 2 \begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \vartheta \end{cases}$

Energia potenziale relativo ai possibili movimenti

$$U(x, \vartheta) = -\frac{K}{2}\overline{OA}^2 - mg\,y_P + cost$$

$$= -\frac{K}{2}\overline{OA}^2 - mg\,R\,sen\,\vartheta + cost$$

Posizioni di equilibrio

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -Kx \qquad \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mg\,R\cos\vartheta$$

Ora trovo la velocità di A

$$v_A^2 = \dot{x}^2$$

Ora trovo I_A

$$I_A = \frac{MR^2}{2} \quad \text{con} \quad \omega = \dot{\vartheta}\,\vec{K}$$

Ora posso calcolare l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\left\{ (M+m)\dot{x}^2 - 2mR\,\text{sen}\,\vartheta\,\dot{x}\dot{\vartheta} + \left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\dot{\vartheta}^2 \right\}$$

Ricavo la MATRICE DI MASSA

$$\{a_{hc}\} = \begin{vmatrix} a_{11} = M+m & a_{1,2} = -mR\,\text{sen}\,\vartheta \\ a_{21} = -mR\,\text{sen}\,\vartheta & a_{2,2} = \left(\frac{M}{2}+m\right)R^2 \end{vmatrix}$$

LA METÀ

1) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} - mR\,\text{sen}(\vartheta)\,\dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} - mR\,\text{sen}(\vartheta)\,\ddot{\vartheta} - mR\cos(\vartheta)\,\dot{\vartheta}^2$$

BARICENTRO $(OG) = \dfrac{M\overline{OA} + m\overline{OP}}{M+m}$

• $\gamma)\ -Mg - mg + \Phi_A = \cancel{M\ddot{y}_A} + m\ddot{y}_P$

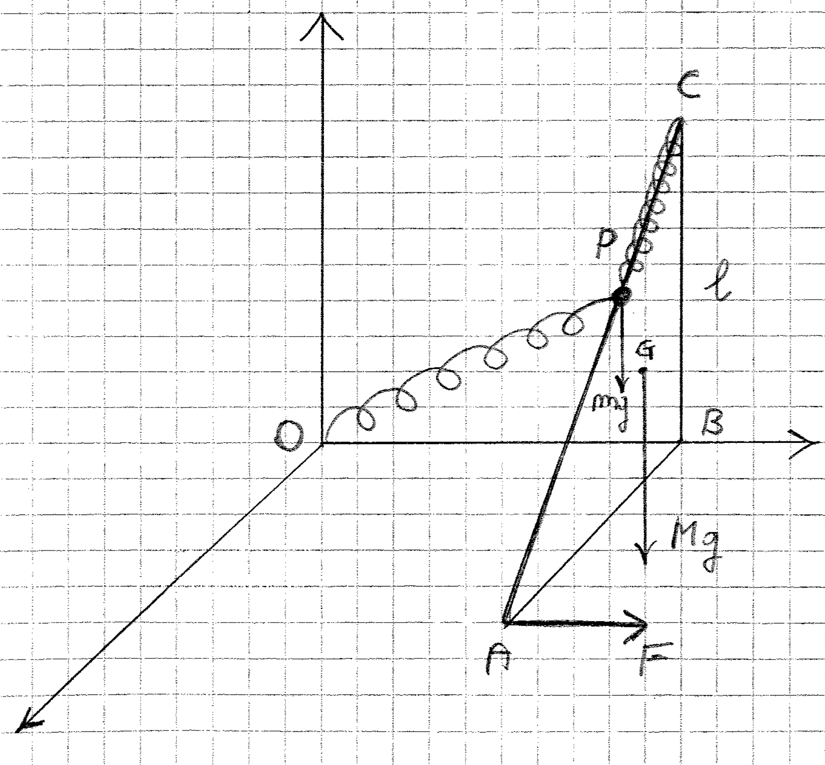
$y_P = R\,sen\,\vartheta \qquad \dot{y}_P = R\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}$

$\ddot{y}_P = -R\,sen(\vartheta)\,\dot{\vartheta}^2 + R\cos(\vartheta)\,\ddot{\vartheta}$

Sostituisco e ricavo Φ_A

$\Phi_A = (M+m)\,g + m\,(R\cos\vartheta\cdot\ddot{\vartheta} - R\,sen\,\vartheta\,\dot{\vartheta}^2)$

ES 10



AB = BC

Per cui ne calcolo il potenziale

$$U(y,s) = -\frac{K}{2}\overline{OP}^2 - \frac{K}{2}\overline{CP}^2 - Mg\,z_G + $$
$$- mg\,z_P + C\frac{y^4}{4} + cost$$

è l'integrale

Calcolo le derivate prime

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -Ky + Cy^3$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\sqrt{2}}{2}(Kl + mg) - 2Ks$$

$$y^{EQUILIB} \iff \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \implies y = \emptyset,\quad y = \pm\sqrt{\frac{K}{C}}$$

$$s^{EQUILIB} \iff \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \implies s = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Calcolo le derivate 2° per l'equilibrio

$y = \emptyset$ stabile

$y = \pm\sqrt{\frac{K}{C}}$ non stabile

$$T = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

$$x_P = s\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \dot{x}_P = \dot{s}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

DATI

DISCO: $3m$, R $\qquad P = \left(\frac{R}{2}, y_G\right)$

PUNTO A: m

$N = 1 \Rightarrow q_1 = \vartheta$

$\omega = \dot{\vartheta}\vec{k}$

$F_{el} = -K\,A'A$

Domanda 1: $\vec{v}_A, \vec{a}_A; \vec{v}_G, \vec{a}_G; \vec{v}_P, \vec{a}_P$?

$$\vec{v}_G = \underbrace{\cancel{v_C}}_{\to \emptyset} + \omega \wedge CG = R\dot{\vartheta}\vec{k} \wedge (-i) = -R\dot{\vartheta}\vec{k}\vec{j}$$

$$\vec{a}_G = \frac{dv_G}{dt} = -R\ddot{\vartheta}\vec{j} \quad \text{(moto rettilineo verticale)}$$

$$v_B^{FILO} = v_B^{DISCO} = \underbrace{\cancel{v_C}}_{\to \emptyset} + \omega k \wedge CB = -2R\dot{\vartheta}\vec{j} = \vec{v}_A$$

$$\vec{a}_A = -2R\ddot{\vartheta}\vec{j}$$

$$\vec{v}_P = \underbrace{\cancel{v_C}}_{\to 0} + \omega \wedge CP = -\frac{3}{2}R\dot{\vartheta}\vec{j}$$

$$\vec{a}_P = -\frac{3}{2}R\ddot{\vartheta}\vec{j} + \frac{R}{2}\dot{\vartheta}^2 i$$

5

$$\Rightarrow T_A = mg - 2KR \cdot \frac{5mg}{4KR} = -\frac{3}{2} mg$$

$$T_A^{FUNE} = 3/2\, mg\, \vec{J}$$

$$T_B^{FUNE} = -3/2\, mg\, \vec{J}$$

$$T_B^{DISCO} = 3/2\, mg\, \vec{J}$$

Equilibrio disco

$$\Leftrightarrow 3m\vec{g} + \vec{T}_B^{DISCO} + \vec{T}_C^{DISCO} = \emptyset$$

$$\cdot J) \; -3mg + \frac{3}{2} mg + T_C^{DISCO} = \emptyset$$

$$T_C^{DISCO} = \frac{3}{2} mg\, \vec{J}$$

$$\vec{T}_C^{FILO} = -\vec{T}_C^{CORSOIO} = -\frac{3}{2} mg\, \vec{J}$$

$$\vec{T}_D^{FILO} = \frac{3}{2} mg\, J$$

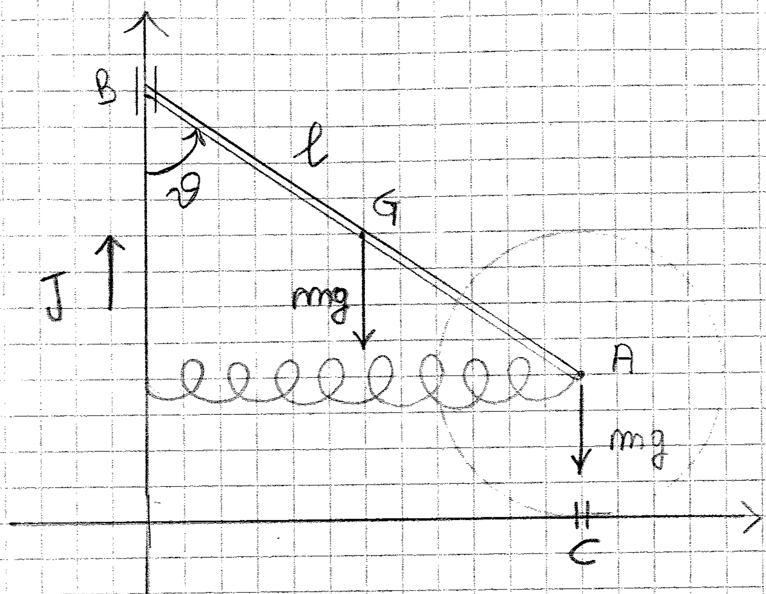
4) Equazioni del moto

$$\mathcal{L} = T + U$$

$$\frac{d}{dT} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\vartheta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = \emptyset$$

$$T = T_{P.TO\ A} + T_{DISCO} = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_C \dot\vartheta^2$$

ES 12



DATI

Disco : m, R
Asta : m, l

$$U(\vartheta) = -\frac{K}{2} l^2 \operatorname{sen}^2\vartheta - mg\frac{l}{2}\cos\vartheta + \text{cost}$$

$$T = T^{ASTA} + T^{DISCO}$$

$$T^{ASTA} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m l^2}{12}\dot{\vartheta}^2$$

VINCOLATA CON CARRELLO

$$T^{DISCO} = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

VINCOLATO CON CARRELLO

$$I_C = \frac{3}{2} m R^2$$

$$v_A = \underbrace{\cancel{v_C}}_{\to 0} + \omega \wedge \overline{CA}$$

CERCO LE POSIZIONI DI EQUILIBRIO

$$\frac{dU}{d\vartheta} = -Kl^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta$$
$$= l \operatorname{sen}\vartheta \left[-Kl\cos\vartheta + \frac{mg}{2}\right]$$

$$\frac{dU}{d\vartheta} = 0 \xRightarrow{\text{soluz.}} \operatorname{sen}\vartheta = 0 \quad \begin{cases} \vartheta_1 = 0 \\ \vartheta_2 = \pi \end{cases}$$

$$\cos\vartheta = \frac{mg}{2Kl}$$

$$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} = -Kl^2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta) + mg\frac{l}{2}\cos\vartheta.$$

$\vartheta_1 = 0$ $$\left.\frac{d^2U}{d\vartheta^2}\right|_{\vartheta_1} = -Kl^2 + mg\frac{l}{2}.$$

$\vartheta_2 = \pi$ $$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} < 0 \quad \text{stabile sempre}$$

$\vartheta_{3,4}$ $$\frac{d^2U}{d\vartheta^2} = -2Kl^2 \cdot \frac{m^2g^2}{hm^2l^2} - Kl^2 + \frac{m^2g^2}{2Kl}\frac{l}{2}$$

Reazioni vincolari esterne

$\Phi_B = \Phi_B \vec{i}$

$\Phi_C = \Phi_{Cx} \vec{i} + \Phi_{Cy} \vec{j}$

Sistema totale

$\Phi_B + 2mg - K A'A + \Phi_C = m\vec{a}_G + m\vec{a}_A$

- $i)$ $\Phi_B - K l \operatorname{sen}\vartheta + \Phi_{Cx} = m(\ddot{x}_G + \ddot{x}_A)$
- $j)$ $-2mg + \Phi_{Cy} = m\ddot{y}_G$

$$U(x,\vartheta) = -\frac{K}{2}\left(x^2 + lx \operatorname{sen}\vartheta + \frac{l^2}{4}\right) + \\ - mg\left(-\frac{l}{2}\cos\vartheta\right) + \text{cost}$$

POSIZIONI DI EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -Kx - K\dfrac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = -K\dfrac{l}{2}x\cos\vartheta - mg\dfrac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta = 0 \end{cases}$$

Da qui ricavo

$x = -\frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta$ (dalla prima)

Sostituisco

$$-K\frac{l}{2}\left(-\frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta\right)\cos\vartheta - mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta = 0$$

$$-\frac{l}{2}\left(-K\frac{l}{2}\cos\vartheta + mg\right)\operatorname{sen}\vartheta = 0$$

Punti di equilibrio:

$P_1\ (x = 0;\ \vartheta = 0)$

$P_2\ (x = 0;\ \vartheta = \pi)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 126

SCELGO UN PUNTO DI EQUILIBRIO

$P_1(0,0)$ stabile se $mg > K\frac{l}{2}$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\vartheta}^2$$

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G \Rightarrow \dot{x}^2 + l\cos(\vartheta)\dot{x}\dot{\vartheta} + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m\dot{x}^2 + ml\cos\vartheta\,\dot{x}\dot{\vartheta} + \frac{ml^2}{3}\dot{\vartheta}^2\right]$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}\left[m\dot{x}^2 + ml\,\dot{x}\dot{\vartheta} + \frac{ml^2}{3}\dot{\vartheta}^2\right]$$

LINEARIZZATO

Ho sostituito il punto

Formula di Taylor (solo 2° ordine) a due variabili

$$\tilde{U} = \frac{1}{2}\left[-K(x^2) - Kl\,x\vartheta - mg\frac{l}{2}\vartheta^2\right]$$

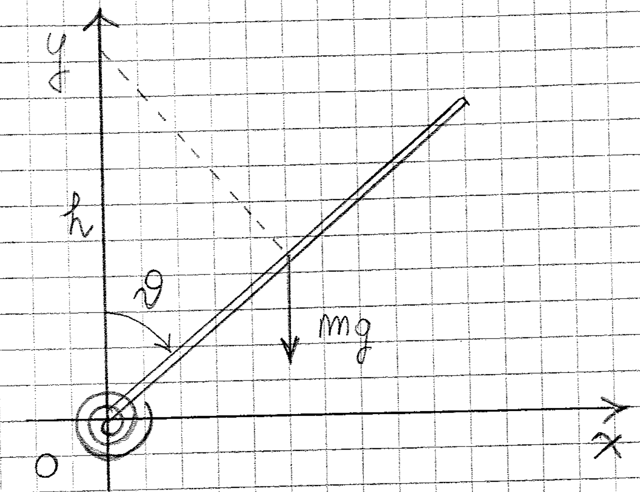
$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\frac{1}{2}\dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + m\frac{l}{2}\ddot{\vartheta}$$

$$-\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = Kx + K\frac{l}{2}\vartheta$$

$$\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_e)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_e)(\vartheta-\vartheta_e) + f_{yy}(x_0,y_0)(\vartheta-\vartheta_e)^2\right]$$

PENDOLO INVERSO



DATI

I_0, $N = 1 \Rightarrow q_1 = \vartheta$

$$U(\vartheta) = -\frac{1}{2}K\vartheta^2 - mg\,y_G$$

$y_G = h\cos\vartheta$

Ne faccio la derivata

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -K\vartheta + mgh\,\text{sen}\,\vartheta$$

PASSAGGI

$$\text{sen}\,\vartheta = \frac{K}{mgh}\vartheta$$

quando il $\text{sen}\,\vartheta = \vartheta \iff \vartheta = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = -K + mgh\cos\vartheta \Big|_{\vartheta=0}$$

$$= -K + mgh$$

DATI

Asta: m, l

PUNTO P: m_p

$N=2 < \begin{matrix} \vartheta \\ x \end{matrix}$

$K>0$, $F=F\vec{i}$ con $F>0$

$OA = \frac{2}{3} l$

$$U(\vartheta, x) = +M\vartheta - mg\, y_G - \frac{K}{2} PA^2 + Fx - mg\,\ell + \text{cost}$$

$$y_G = \frac{l}{6} \operatorname{sen} \vartheta$$

$$\overline{AP}^2 = (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = \left(x - \frac{2}{3} l \cos\vartheta\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3} l \operatorname{sen}\vartheta\right)^2$$

$$= x^2 - \frac{4}{3} l \cos\vartheta\, x + \frac{4}{9} l^2$$

Sostituisco il tutto

$$U(x, \vartheta) = -mg \frac{l}{6} \operatorname{sen}\vartheta - \frac{K}{2} x^2 + \frac{2}{3} K l x \cos\vartheta + M\vartheta + Fx + \text{cost}$$