NUMERO: 796

DATA: 20/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Serra E.

MATERIA: Fisica I

Prof. Daghero

FISICA 1 - MECCANICA e TERMODINAMICA

Cos'è la fisica? La fisica comprende una riguardevole varietà di fenomeni che accadono in natura e che stanno alla base delle attività umane.
Per esempio: ~ la gravità, le orbite dei pianeti, la cosmologia...
~ l'atmosfera e i fenomeni ..., le maree, la ...
~ l'elettricità e il magnetismo, le onde elettromagnetiche...

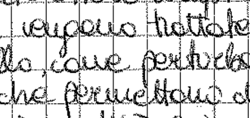
La fisica spiega la descrizione e l'interpretazione dei fenomeni naturali usando un metodo scientifico. Può predire come la natura si comporterebbe in una certa situazione basandosi sui risultati di dati sperimentali ottenuti in un'altra situazione.

I FONDAMENTI FILOSOFICI DELLA FISICA:
1) Il mondo esiste al di fuori di noi ed è l'unica risorsa di percezione.
2) Il mondo è essenzialmente razionale. "A" e "non A" non possono essere veri contemporaneamente. [PRINCIPIO DI NON-CONTRADDIZIONE]
3) Il mondo può essere localmente analizzato senza alterare la sua struttura essenziale
4) I costituenti semplici del mondo non hanno libero arbitrio
5) La natura ha dei comportamenti prevedibili che possono essere previsti
6) Spazio e tempo esistono
7) Il mondo può essere descritto matematicamente
8) Questi postulati perdurano e valgono in ogni tempo e luogo.

IL METODO SCIENTIFICO
Il metodo scientifico (inteso nel suo significato moderno) fu introdotto nel 1600 da Galileo Galilei ed è utilizzato in tutto il mondo dai sistemi tecnologici moderni.
Il metodo scientifico si basa su dei passaggi:

1) SCHEMATIZZAZIONE: Ogni fenomeno e oggetto possono effettivamente essere esemplificati da un modello semplificato le complicazioni vengono trattate in un successivo processo di raffinamento del modello, come perturbazioni.
2) MISURA: La misura corrisponde a una serie di procedimenti che permettono di associare un numero seguito da un'unità di misura a ogni quantità fisica. La grandezza fisica deve essere data da una definizione operazionale, la quale è la definizione di un concetto che spiega come può essere misurato e perfino cosa sia.
3) CORRELAZIONI: I risultati di varie misurazioni della grandezza fisica implicate in un dato fenomeno possono essere organizzati e presentati in tabelle e grafici. Ciò permette l'osservazione di correlazioni tra i loro valori
4) LEGGI: Le correlazioni osservate tra le grandezze possono essere espresse nella forma di leggi matematiche. La legge può essere determinata dalla comparazione di dati sperimentali o da un'ipotesi teorica.
5) PREDIZIONI: Basate sulle leggi appena stabilite (ed estrapolate dalle misurazioni in certe condizioni) si possono fare delle predizioni e calcolare delle aspettative del fenomeno che si manifesta in differenti condizioni.
6) TEST SPERIMENTALE: Infine le predizioni devono essere verificate da un esperimento che riproponga le effettive condizioni del fenomeno.

Con Galileo si introduce il metodo deduttivo.

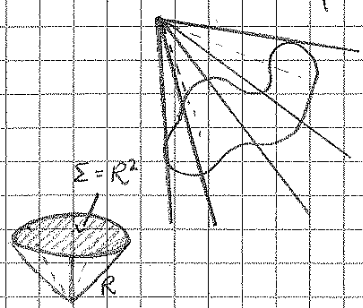


MISURAZIONI: [vedere quante volte l'unità sta nell'oggetto]
Una GRANDEZZA FISICA è qualcosa che può essere misurato.

MISURA DIRETTA: Una grandezza fisica può essere direttamente comparata a una grandezza dello stesso tipo scelta come unità di misura standard. [es. la lunghezza]
MISURA INDIRETTA: Una grandezza fisica può essere determinata dalla misura di altre quantità correlate ad essa attraverso relazioni note. [es. la temperatura si misura in base alla legge ... del ... del termometro]

ANGOLO SOLIDO: è la porzione di spazio delimitata da un cono* l'unità di misura è lo STERADIANTE cioè l'ampiezza di un angolo solido determinato da una sfera di r^2

* il cono è una forma geometrica tridimensionale che consiste in tutte le linee congiunti in un unico punto (il vertice) che partono da una figura bidimensionale (la base).



$$\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}$$

anche l'angolo solido è un numero puro (cioè adimensionale)

GRANDEZZE FISICHE DERIVATE (NON FONDAMENTALI

tutte le grandezze in un dato sistema possono essere espresse in funzione delle grandezze fondamentali, anche le unità di misura vengono contrattate.

SI unità:

- VELOCITÀ = $\frac{\text{LUNGHEZZA}}{\text{TEMPO}}$ ⟹ $[v] = \frac{L}{T}$ $\frac{m}{s}$ metri/secondi
- ACCELERAZIONE = $\frac{\text{VELOCITÀ}}{\text{TEMPO}}$ ⟹ $[a] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2}$ $\frac{m}{s^2}$ metri/secondi^{-2}
- FORZA = MASSA · ACCELERAZIONE ⟹ $[F] = M \cdot \frac{L}{T^2}$ $Kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$ Newton
- TORSIONE = FORZA · LUNGHEZZA ⟹ $[\tau] = [F] \cdot L$ $N \cdot m$ Newton-metri

ANALISI DIMENSIONALE

Tutte le leggi fisiche sono relazioni tra grandezze omogenee ⟹ due membri di una certa equazione devono avere le stesse dimensioni cioè la stessa combinazione di grandezze fondamentali. L'analisi dimensionale non fornisce alcuna informazione riguardo i possibili fattori numerici ma può essere utile per capire se un'equazione può essere o meno corretta. È quindi importante utilizzare sempre le unità di misura senza le quali si incorrerebbe in un elevato numero di errori. Nella maggior parte dei casi bisognerà usare le unità di misura adottate dal Sistema Internazionale ma se le risposte di un problema devono venir richieste in un'altra unità di misura è bene effettuare la conversione solo a problema finito.

MISURA e INCERTEZZA

La misurazione è una delle operazioni fondamentali della fisica. Effettivamente ogni grandezza fisica deve essere misurata. Misurare una grandezza significa associare a questa grandezza un numero seguito da un'unità di misura. In ogni caso, il risultato di una misura è strettamente connesso a un INCERTEZZA.

In fisica è impossibile rimuovere tutte le cause di incertezza. Nemmeno dopo molte misurazioni si potrà avere una misura certa di una grandezza fisica. Perciò il risultato di una misura deve sempre essere espresso da:

- un numero (la migliore stima della misura)
- un'incertezza
- un'unità di misura

$$X = x \pm \Delta x \; [X]$$

X → grandezza fisica; x → numero; Δx → incertezza; $[X]$ → unità di misura

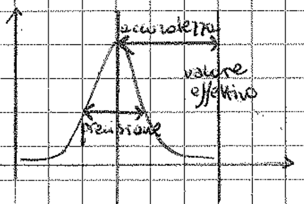
$\boxed{\Delta x}$ è l'incertezza ASSOLUTA (ha la stessa unità di misura del numero)

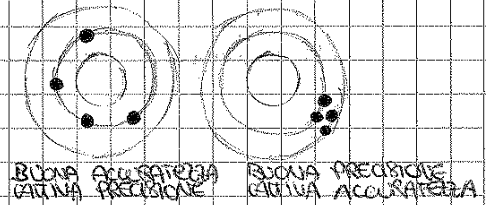
$\boxed{\frac{\Delta x}{x}}$ è l'incertezza RELATIVA (è adimensionale)

$\boxed{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100}$ è l'incertezza PERCENTUALE (è adimensionale)

L'incertezza relativa è più utile di quella assoluta. Importante sarà anche valutare la propagazione dell'incertezza nei calcoli.

La PRECISIONE di una misura, anche chiamata ripetibilità o riproducibilità, è il grado in cui le successive misurazioni mostrano risultati identici o simili. È dovuta a fluttuazioni casuali che possono essere ridotte aumentando il numero di misurazioni, ma non eliminate.





INCERTEZZA STRUMENTALE

Quando si effettua una misura è necessario l'utilizzo di uno strumento. Ciò vuol dire che la misura è influenzata da un'incertezza che dipende dallo strumento usato. Questa incertezza è chiamata SENSIBILITÀ dello strumento.

La SENSIBILITÀ è la variazione minima della quantità da misurare che può essere causata dallo strumento.

- La sensibilità è facilmente determinata guardando la scala o è dichiarata dalla società che fabbrica lo strumento
- In strumenti analogici (dove i valori misurati sono indicati da un puntatore che spazia una scala continua) la sensibilità è uguale alla divisione più piccola della scala
- In strumenti digitali (dove la lettura è indicata in un display LCD) la sensibilità dipende generalmente dalla scala ed è indicata, per esempio, come una frazione della scala e/o dalla variazione minima rilevabile in ultima cifra del numero sul display.

COME VALUTARE I RISULTATI DI UNA MISURAZIONE

Una misurazione diretta consiste nel comparare la grandezza misurata a un valore omogeneo. La comparazione può essere fatta con:

- uno strumento standard (x es. un metro)
- uno strumento tarato (x es. un metro di legno o una bilancia)

MISURAZIONI DIRETTE

- In una singola misurazione diretta, l'incertezza dipende dalla sensibilità dello strumento cioè la minima variazione della grandezza che può essere rilevata.

  1 SINGOLA MISURA → Δx = SENSIBILITÀ

- Un piccolo numero di misure dirette ($n<20$): se uno effettua più di una misura l'incertezza può essere indicata in due modi:
  1) Tutte le misure danno lo stesso valore: in questo caso l'incertezza è uguale alla sensibilità dello strumento. In ogni caso, generalmente ciò vorrebbe dire che lo strumento che stiamo usando non è sufficientemente sensibile
  2) i valori delle misure oscillano: se queste variazioni non sono casuali (se per esempio i valori aumentano sistematicamente) c'è qualcosa di sbagliato nella misurazione (errore sistematico). Se tutti gli errori sistematici vengono eliminati, i valori possono oscillare casualmente. Questa variazione è dovuta a cause che sono fuori dal nostro controllo e non possono essere eliminate.

Supponiamo che $x_1, x_2 \dots x_n$ siano i valori di una stessa grandezza ottenuti in una serie di n misurazioni. Successivamente considereremo come la migliore stima del valore effettivo la media matematica dei valori ottenuti.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n}{n}$$

Diremo inoltre che questo valore è condizionato da un'incertezza data dalla massima deviazione

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

← l'incertezza può avere al massimo due cifre significative (più di due cifre dimostrano un errore)

POCHE MISURE → $X = \overline{x} \pm \Delta x\,[x]$

- Immaginiamo di poter fare un enorme numero di misurazioni ($n \to \infty$). In questo caso:
- il campione tenderà alla popolazione;
- la larghezza degli intervalli può essere ridotta a un valore infinitesimale dx;
- anche la frequenza assoluta Δn_k diventa infinitesimale dn;
- il rapporto $\frac{\Delta n_k}{\Delta x}$ diventa la derivata $\frac{dn}{dx}$
- la somma su k diventa un integrale su tutti i valori di x:

$$\bar{x} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \underbrace{\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}}_{f(x)} x\,dx$$

per min e max non si intendono il min e il max valore sperimentale, ma il minimo possibile valo

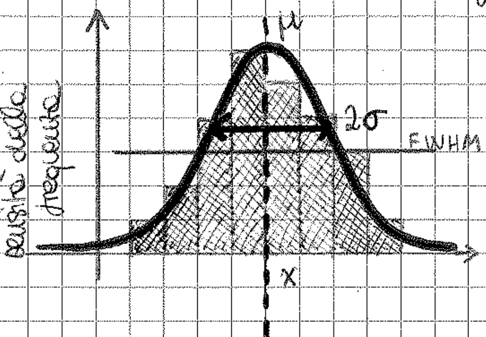
- la densità di frequenza tende a diventare uguale alla densità di probabilità o funzione di distribuzione della popolazione. Questa densità è sconosciuta e può solo essere approssimata sperimentalmente aumentando sempre di più il numero di misurazioni.

Fortunatamente il TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE afferma che:

"la somma di un grande numero di variabili indipendenti e distribuite casualmente può sempre essere approssimativamente distribuita normalmente, cioè seguendo una distribuzione Gaussiana, e a forma di campana se le variabili casuali hanno una variazione casuale".

Quindi quando vi è motivo di ritenere che la dispersione dei dati è dovuta a un gran numero di piccoli effetti che agiscono in modo additivo e indipendente, è ragionevole supporre che le osservazioni siano distribuite secondo una funzione di densità di probabilità gaussiana. È un dato di fatto, se questi effetti sono indipendenti, è molto improbabile che agiscano tutti nella stessa direzione. Pertanto, la probabilità di misurare un valore x diminuisce la distanza tra x e il valore medio aumenta.

La forma matematica della distribuzione Gaussiana è $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$



PROPRIETÀ DELLA CURVA GAUSSIANA

- la curva è simmetrica rispetto al valore $x = \mu$
- tende asintoticamente a zero sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$
- il suo massimo è $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- ha due punti di flesso simmetrici $\mu \pm \sigma$

- Il parametro σ è chiamato deviazione standard ed è una misura della larghezza della curva. Il suo rapporto con la piena larghezza a metà massimo (FWHM) indica che essa è minore

$FWHM > 2\sigma$

- È correttamente normalizzata a 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ grazie al prefattore $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- μ oltre ad essere il valore medio è anche la moda della distribuzione

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{dn}{dx}\, x\,dx$$

La moda (μ) della Gaussiana può essere stimata sperimentalmente con il campione medio:

$$\mu \cong \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \boxed{\mu \cong \bar{x}}$$

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA

In casi come questi si deve propagare l'incertezza delle grandezze iniziali a quella finale.
Esistono diversi casi di propagazione:

$X_1, X_2 \dots X_n$ grandezze misurate direttamente

Z grandezza finale connessa a $X_1, X_2 \dots X_n$

z è il valore di Z

$$Z = X_1 \pm X_2 \longrightarrow z = x_1 \pm x_2 \qquad \Delta z \cong \Delta x_1 + \Delta x_2$$
SOMMA/SOTTRAZIONE

$$Z = \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3} \longrightarrow z = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_3} \qquad \frac{\Delta z}{|z|} \cong \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} + \frac{\Delta x_3}{|x_3|}$$
PRODOTTO/DIVISIONE

$$Z = aX \longrightarrow z = a x_1 \qquad \Delta z = |a| \Delta x_1$$
MOLTIPLICAZIONE PER UN FATTORE COSTANTE

$$Z = X^n \longrightarrow z = x_1^n \qquad \frac{\Delta z}{|z|} = n \frac{\Delta x_1}{|x_1|}$$
POTENZA

$X_1, X_2 \dots X_n$ sono grandezze indipendenti se possono variare indipendentemente l'una dall'altra. Se questo fosse vero e le loro misure fossero influenzate solo da un'oscillazione casuale, l'incertezza su z può anche essere più piccola di quella sopracitata. Per grandezze indipendenti con oscillazioni casuali si ha:

$$Z = X_1 \pm X_2 \longrightarrow z = x_1 \pm x_2 \qquad \Delta z = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$$
SOMMA/SOTTRAZIONE

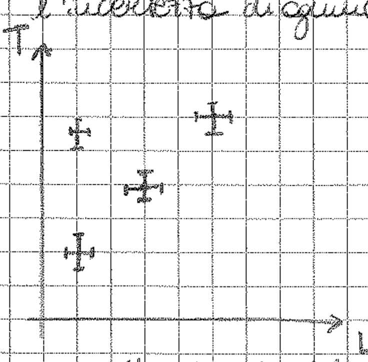
$$Z = \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3} \longrightarrow z = \frac{x_1 x_2}{x_3} \qquad \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3}{x_3}\right)^2}$$
PRODOTTO/DIVISIONE

Se Z è una funzione generica di $X_1, X_2 \dots X_n$ la formula generale che può essere usata

$$Z = f(X_1, X_2 \dots X_n) \qquad \Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2 + \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n\right)^2}$$

RAPPRESENTAZIONE DELL'INCERTEZZA IN UN GRAFICO

Si supponga di dover misurare il periodo di un pendolo, T, per varie lunghezze di una corda priva di massa. Il periodo sarà influenzato da un'incertezza (per esempio determinata dalla sensibilità del cronometro) ma anche la lunghezza è nota solo con un'incertezza che è connessa per esempio alla sensibilità dello strumento del metro utilizzato per determinare la lunghezza. Quando si riportano i valori sul grafico si devono indicare queste incertezze mediante barre di errore verticali e orizzontali.
In questo modo chi legge il grafico può apprezzare non solo l'elenco di dati, ma anche l'incertezza di ognuno di essi.



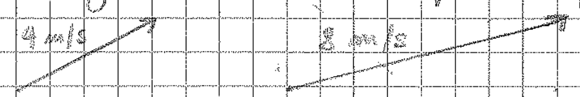
IL METODO DEI QUADRATI MINIMI

Solitamente possiamo riportare i valori di una grandezza misurata come una funzione di un'altra grandezza o parametro (tempo, posizione ecc). Il grafico può mettere in evidenza che esistono alcune correlazioni tra queste grandezze e vorremmo esprimerle attraverso una legge matematica. Questa legge può essere formulata confrontando i dati sperimentali con un'ipotetica curva.
La più semplice dipendenza tra le grandezze è una dipendenza lineare che esprimeremo nella forma:
$Y = A + BX$ dove A e B sono costanti reali. Bisogna trovare una retta che si adatti al meglio ai dati. Prima bisogna però definire una grandezza

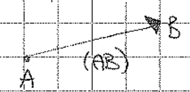
ANALISI DEI VETTORI

Una quantità SCALARE è quella che può essere descritta da un singolo numero: temperatura, massa.

Una grandezza VETTORIALE è dotata intrinsecamente con intensità e direzione: velocità, forza, spostamento.
Le frecce sono usate per rappresentare i vettori: la direzione della freccia indica la direzione del vettore.
Per convenzione, la lunghezza di un vettore freccia è proporzionale al modulo del vettore.



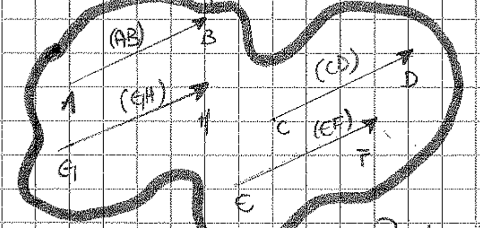
Indichiamo con S_3 lo spazio geometrico ordinario (= insieme di punti).
Siano A e B due punti nello spazio. Indicheremo con (AB), il segmento orientato che deriva da A e termina in B.



Se $A \neq B$, (AB) ha una direzione (indicata dalla linea retta che la attraversa), un orientamento definito (rappresentato dalla freccia) e una lunghezza (un numero reale positivo).
Se $A = B$, (AB) ha lunghezza zero, la sua direzione e l'orientamento non sono definiti.

Due segmenti orientati si dicono equivalenti se hanno:
- stessa lunghezza;
- stessa direzione (si trovano lungo linee parallele);
- stesso orientamento.

Chiameremo vettore nello spazio ordinario S_3 la classe di equivalenza di tutti i segmenti orientati equivalenti.



$= \vec{u}$ (vettore)

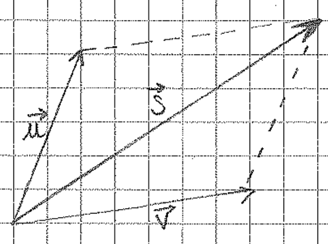
Per rappresentare un vettore, si può utilizzare qualsiasi segmento orientato che appartenga a questa classe di equivalenza: se usiamo, per esempio, (AB), potremmo anche scrivere $= B - A$.

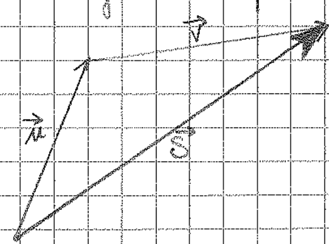
Pertanto un vettore è caratterizzato da lunghezza, direzione e verso ma non ha un punto di applicazione definito: può essere posizionato in qualsiasi punto dello spazio.
La lunghezza del vettore (modulo) è di solito chiamata MAGNITUDINE ed è indicata da $\|\vec{u}\|$ o u. Il vettore di lunghezza zero, è chiamato VETTORE NULLO.

SOMMA DI VETTORI

- metodo 1: regola del parallelogramma
- metodo 2: regola del punta-coda

$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$





MODULO DI UN VETTORE: Risulta dalla definizione che il modulo u di un vettore $\vec u$ è dato da:

$$u=\sqrt{u^2}=\sqrt{\vec u\cdot\vec u}$$

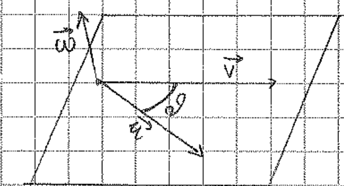
VETTORI ORTOGONALI: $\vec u\cdot\vec v=0 \iff \vartheta=\frac{\pi}{2}$

Due vettori, il cui prodotto scalare è zero, sono detti ORTOGONALI (cioè se sono tra loro perpendicolari). Nello spazio 3D, tre vettori possono essere reciprocamente perpendicolari.

PRODOTTO VETTORIALE:

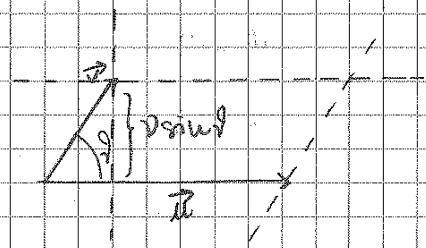
Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec u$ e $\vec v$ è un terzo vettore $\vec w$ tale che:
1) la sua direzione è perpendicolare al piano definito da $\vec u$ e $\vec v$;
2) il suo verso è dato dalla regola della mano destra;
3) il suo modulo è $\|\vec w\|=w=uv\sin\vartheta$

Il prodotto vettoriale è indicato da: $\vec w=\vec u\wedge\vec v$ o $\vec w=\vec u\times\vec v$
ed è anticommutativo



$\vec u\wedge\vec v=-\vec v\wedge\vec u$

VETTORI PARALLELI: $\vec u\parallel\vec v \iff \vec u\times\vec v=0$



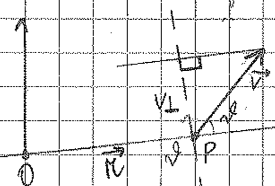
Il modulo di un prodotto vettoriale è uguale all'area del parallelogramma definito dai due vettori $\vec u$ e $\vec v$.

Esempio: Momento Vettoriale (per i vettori con punto di applicazione)

Definiamo momento di un vettore derivante da un punto P, circa un polo O, il prodotto vettoriale $\vec M=\vec r\times\vec v$

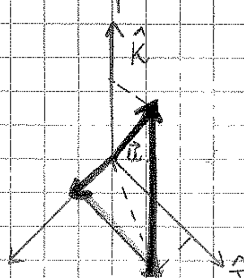
Il modulo del momento può anche essere inteso come il modulo del vettore v per il braccio di leva l, oppure come il modulo del vettore r per la componente perpendicolare del vettore v.

$$M=|r\times v|=r(v\sin\vartheta)=r_\perp$$



SCOMPOSIZIONE DELLE COMPONENTI DI UN VETTORE (VERSORI)

In E_3 il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è 3. Questo significa che siamo in grado di scegliere una base (composta da 3 vettori linearmente indipendenti) e di esprimere ogni vettore in E_3 come combinazione lineare di questi vettori. Useremo sempre una base ORTONORMALE di tre vettori ortogonali di lunghezza 1.



NORMALITÀ: $i^2=j^2=k^2=1$

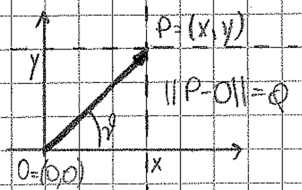
ORTOGONALITÀ: $\hat i\cdot\hat j=\hat i\cdot\hat k=\hat j\cdot\hat k=0$

ORIENTAMENTO RECIPROCO: $\hat i\times\hat j=\hat k$

i, j e k sono versori ortonormali: ogni vettore può essere espresso sempre come loro combinazione lineare.

$\vec u=(u_x\hat i)+u_y\hat j+(u_z\hat k)$

COORDINATE POLARI NEL PIANO



La posizione di un punto nel piano può essere definita attraverso le sue coordinate cartesiane (x,y).

$P=(x,y)$ COORDINATE CARTESIANE

Ma la stessa posizione di un punto nel piano può anche essere definita dalla lunghezza del vettore P-O e dall'angolo che si forma con l'asse delle x. Queste vengono definite COORDINATE POLARI nel piano e sono spesso utili nella descrizione di un moto circolare (dove ρ è costante e varia solo ϑ).

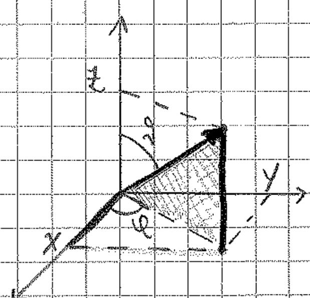
$P=(\rho,\vartheta)$ COORDINATE POLARI

conversione:

$x=\rho\cos\vartheta$ $\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$y=\rho\sin\vartheta$ $\quad \vartheta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

COORDINATE SFERICHE o CILINDRICHE



La posizione di un punto nello spazio può essere definita attraverso le sue coordinate cartesiane (x,y,z).

$P=(x,y,z)$ COORDINATE CARTESIANE

Ma la stessa posizione di P può anche essere definita dalla lunghezza del vettore P-O (ρ) e da due angoli ϑ e φ. Queste vengono definite COORDINATE SFERICHE.
ϑ è chiamato ANGOLO POLARE (o zenith o colatitudine o angolo inclinato);
φ è chiamato ANGOLO AZIMUTHALE.

$P=(\rho,\vartheta,\varphi)$ COORDINATE SFERICHE

conversione:

$x=\rho\sin\vartheta\cos\varphi$

$y=\rho\sin\vartheta\sin\varphi$

$z=\rho\cos\vartheta$

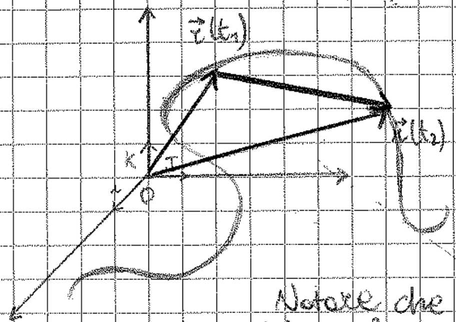
$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\cos\vartheta=\frac{z}{\rho}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

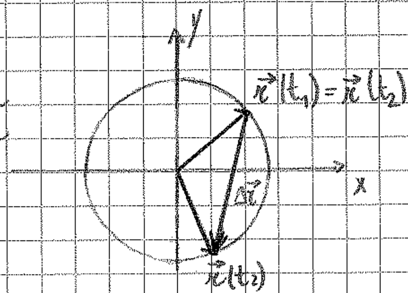
$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Chiameremo SPOSTAMENTO di un corpo in movimento tra i due tempi t_1 e t_2 la differenza dei vettori di posizione. $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$



N.B. Lo spostamento è un vettore che misura l'intervallo tra due punti della traiettoria misurato lungo il percorso più breve che li collega.

Notare che, in una traiettoria chiusa, lo spostamento può anche essere zero anche se il corpo non è a riposo.



Chiameremo VELOCITÀ MEDIA (nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2) il vettore:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}$$

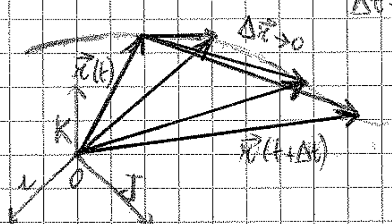
Le dimensioni della velocità media sono $[L]/[T]$ e l'unità di misura nel S.I. è il metro/secondo → m/s.

• Se lo spostamento tra t_1 e t_2 è zero come in un'orbita chiusa, la velocità media è zero anche se il corpo non è mai stato a riposo.
Tale grandezza però fornisce un'informazione complessiva, ma non dà nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto durante l'intervallo di tempo.

Chiameremo VELOCITÀ ISTANTANEA (o semplicemente velocità) il vettore:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Le dimensioni della velocità sono $[L]/[T]$ e l'unità di misura nel S.I. è il metro/secondo → m/s



Per $\Delta t\to 0$ lo spostamento diventa tangente alla traiettoria e tende a zero.
Il rapporto tra $\Delta\vec{r}$ e Δt (che è la velocità) è sempre finito (né nullo né infinito)

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ si scompone nelle sue coordinate cartesiane in: $\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$

Perciò la velocità non è definita su un intervallo di tempo, ma in un singolo istante.
In qualsiasi momento, la velocità del corpo è un vettore tangente alla traiettoria.

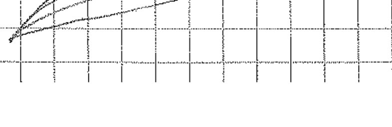
$\vec{v} = v\hat{u}_T$

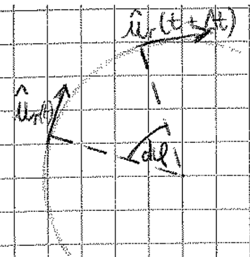
(dove $\hat{u}_T$ è il versore tangente al senso del moto)

• Il modulo della velocità è: $v = \|\vec{v}\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \frac{\|d\vec{r}\|}{dt}$

ma se lo spostamento è infinitesimale, esso tende a coincidere con l'arco della traiettoria ds.

Perciò $\|d\vec{r}\| = ds \Rightarrow v = \frac{ds}{dt}$





$$d\hat{u}_T = \hat{u}_T(t+\Delta t) - \hat{u}_T(t)$$

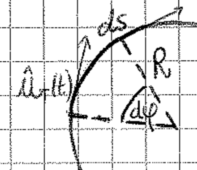
$$\|d\hat{u}_T\| = 2\|\hat{u}_T\| \left|\sin\frac{d\varphi}{2}\right| \simeq d\varphi$$

$d\hat{u}_T$ è NORMALE alla traiettoria e punta verso il centro di curvatura.

Quindi, per concludere:

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_T = \frac{d\varphi}{dt}\hat{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d}{dt}\hat{u}_T \longrightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\varphi}{dt}\hat{u}_N$$



$$R\,d\varphi = ds$$

$$d\varphi = \frac{ds}{R}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{1}{R}$$

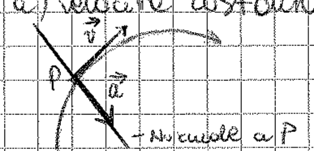
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v}{R}\frac{ds}{dt}\hat{u}_N = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N \Rightarrow \vec{a} = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} & \text{COMPONENTE TANGENZIALE} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} & \text{COMPONENTE RADIALE (ACCELERAZIONE CENTRIPETA)} \end{cases}$$

La componente tangenziale, a_T, dell'accelerazione è pertanto dovuta alla variazione di velocità dell'oggetto.
La componente radiale, a_N (accelerazione centripeta) è dovuta invece alla variazione della direzione della velocità dell'oggetto. È sempre presente quando la traiettoria è curva.
Se la velocità è costante, la componente tangenziale è zero e solo la radiale (centripeta) dell'accelerazione sopravvive.

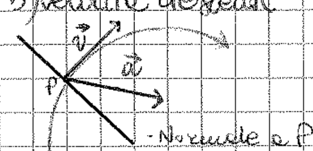
I vettori della velocità e dell'accelerazione di un corpo che si muove attraverso un punto P su un percorso curvo con:

a) velocità costante



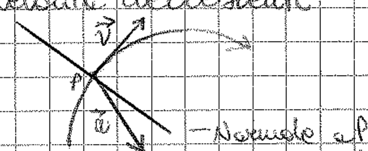
l'accelerazione è normale al percorso

b) velocità crescente



l'accelerazione punta avanti al normale

c) velocità decrescente



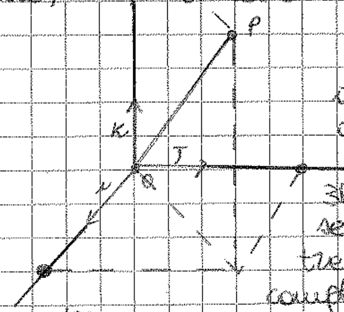
l'accelerazione punta dietro al normale

Tutte le espressioni vettoriali date finora valgono indipendentemente dal sistema di riferimento scelto. Tuttavia è spesso più conveniente scrivere esplicitamente le componenti.
Per far ciò deve essere scelto un certo sistema di riferimento. In un sistema cartesiano con assi normali x, y e z, le espressioni per posizione, velocità e accelerazione sono:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

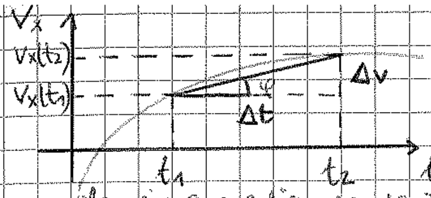
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

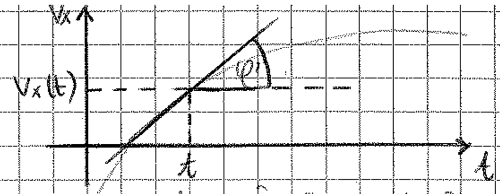
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$



Si noti che in coordinate cartesiane il movimento 3D può essere separato in tre moti 1D completamente indipendenti l'uno dall'altro

Questi sono i moti delle proiezioni della particella puntiforme sui tre assi.





accelerazione media = pendenza della secante

$$(a_m)_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \tan\varphi$$

accelerazione = pendenza della tangente

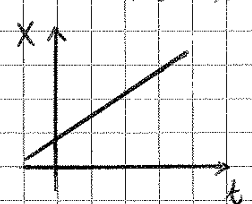
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \tan\varphi'$$

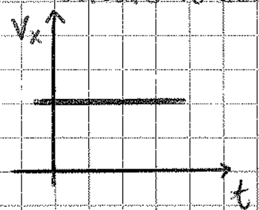
MOTO A VELOCITÀ COSTANTE

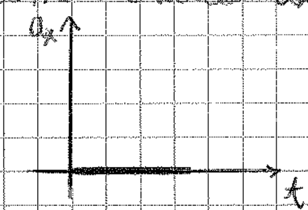
Nel caso particolare in cui la velocità sia costante, si parla di MOTO RETTILINEO UNIFORME

$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x\,dt \qquad x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt$$ ma essendo v = costante

$$x = x_0 + v_x(t-t_0)$$ Pertanto l'accelerazione è nulla $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$







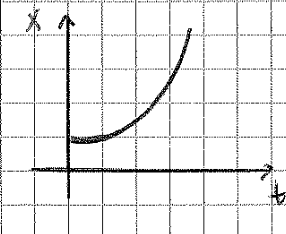
MOTO AD ACCELERAZIONE COSTANTE

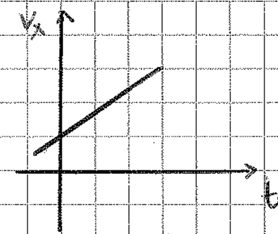
Se l'accelerazione è costante durante il moto, questo si dice UNIFORMEMENTE ACCELERATO e la dipendenza della velocità dal tempo è lineare

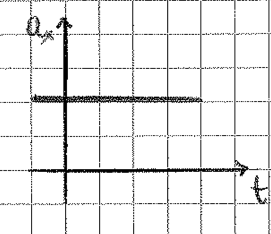
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow dv_x = a_x\,dt \qquad v_x - v_{x0} = \int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt'$$ ma essendo a = costante

$$v_x = v_{x0} + a_x(t-t_0)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x\,dt = (v_{x0} + a_x(t-t_0))\,dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{x0}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_x(t-t_0)^2$$







Con le equazioni date dal moto uniformemente accelerato possiamo eliminare la dipendenza dal tempo.

$$x - x_0 = \frac{1}{2a_x}(v_x^2 - v_{x0}^2)$$

$$v_x^2 - v_{x0}^2 = 2a_x(x - x_0)$$

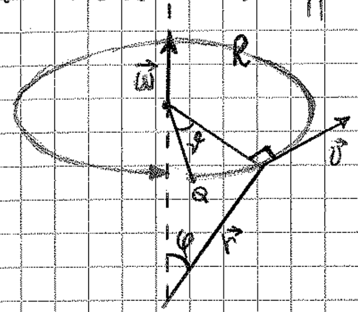
EQUAZIONE NON IN FUNZIONE DEL TEMPO

Le tre equazioni date ci permettono di risolvere qualsiasi problema di moto uniformemente accelerato a 1D. Nel caso di moto uniformemente accelerato in 2D e 3D, queste equazioni valgono per ognuna delle coordinate.

In generale, la descrizione del moto in più di 1D non richiede alcun concetto nuovo. Una volta definito un sistema di riferimento, il vettore posizione, la velocità e l'accelerazione possono essere espresse in componenti. Le componenti scalari sono completamente indipendenti l'una dall'altra perché i tre vettori di base sono ortogonali. Pertanto possiamo trattare con tre moti 1D separatamente indipendenti proiettando il corpo in movimento sui tre assi.

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

In generale l'origine non è nel piano del moto. In questo caso siamo in grado di indicare i rapporti più generali tra le grandezze cinematiche.



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \omega r \sin\varphi = \omega R$$

Se è dato ω, si può individuare l'asse di rotazione e il piano del moto circolare, con quale verso è percorsa la circonferenza e come varia l'angolo nel tempo. Da ω, per derivazione rispetto al tempo, si ottiene il vettore accelerazione angolare α che risulta parallelo a ω, dato che questa ha direzione costante, e ha verso determinato dalla variazione del modulo di ω e modulo $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\vec{a}_T} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\vec{a}_N}$$

A questo tipo di moto: rotazione di un asse rispetto a un altro asse fisso con cui forma un angolo costante e ha un punto in comune, si dà il nome di MOTO DI PRECESSIONE.

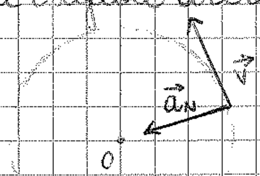
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Il moto circolare più semplice è quello uniforme: v e ω sono costanti e le leggi orarie, con riferimento alle due variabili utilizzate si scrivono:

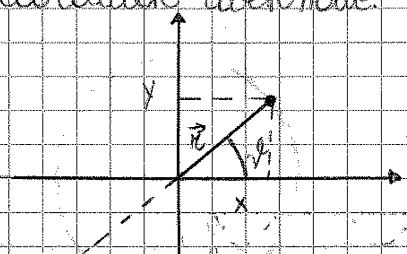
$$v = \text{costante} \longrightarrow s(t) = s_0 + vt \qquad \omega = \text{costante} \longrightarrow \vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$$

Il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria (l'accelerazione quindi non è uguale a zero, ma ha solo la componente normale - centripeta).

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad ; \quad a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



Descriviamo il moto circolare uniforme in coordinate cartesiane:



$$x = R\cos\vartheta = R\cos(\vartheta_0 + \omega t)$$

$$y = R\sin\vartheta = R\sin(\vartheta_0 + \omega t)$$

Il moto circolare può essere pensato come la sovrapposizione di due moti armonici di eguale ampiezza e fase iniziale sfasati tra loro di $\frac{\pi}{2}$ e con periodo coincidente con quello del moto circolare uniforme.

Il periodo del moto circolare uniforme è:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$ (tempo necessario per compiere un giro completo)

Possiamo quindi calcolare la dipendenza della velocità dalla posizione $v(x)$:

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = -\omega^2\int_{x_0}^{x} x\,dx = \frac{1}{2}\omega^2(x_0^2-x^2) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

e quindi $v^2 = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$ Con riferimento al centro, dove $x_0=0$ e $v_0=\omega A$

$v^2(x)=\omega^2(A^2-x^2)$ Nel centro $v=\omega A$ oppure $v=-\omega A$ a seconda del verso del passaggio.

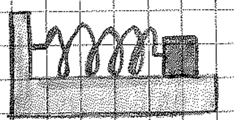
Dalla legge oraria abbiamo ricavato che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo: $a=-\omega^2 x$

La condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dall'equazione DIFFERENZIALE DEL MOTO:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

Esempi di moto armonico semplice:

1) Il sistema MASSA-MOLLA:

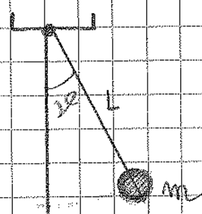


Per un sistema come quello raffigurato:
- molla ideale priva di massa
- superficie priva di attrito

l'equazione del moto è: $\frac{d^2x}{dt}+\frac{K}{m}x=0$ dove K è la costante elastica della molla (in Newton)

Questa è esattamente l'equazione del moto armonico semplice dove $\frac{K}{m}=\omega^2$

2) Il pendolo semplice



Per un sistema come quello raffigurato:
- corda ideale priva di massa,
- perno senza attrito

l'equazione del moto (per le oscillazioni di piccola ampiezza) è:

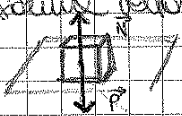
$$\frac{d^2\vartheta}{dt}+\frac{g}{L}\vartheta=0$$

Questa è esattamente l'equazione del moto armonico semplice dove $\frac{g}{L}=\omega^2$

In base a quanto detto:

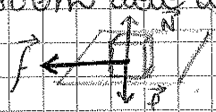
1) se il corpo è a riposo essendoci sempre e comunque almeno una forza che agisce su esso (la forza di gravità), deve esserci almeno un'altra forza in modo che la forza netta (cioè la somma vettoriale di tutte le forze agenti sul corpo) è zero.

$\sum \vec{F} = 0$



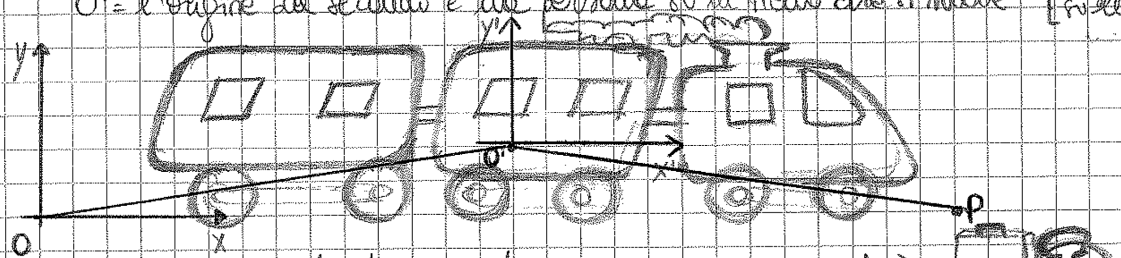
2) se il corpo si muove su una linea retta ma la sua velocità decresce, la forza netta che agisce su esso deve necessariamente essere diversa da zero.

$\sum \vec{F} \neq 0$



esempio: Si considerino due sistemi di riferimento
O = l'origine del primo è una persona sulla banchina
O' = l'origine del secondo è una persona su un treno che si muove

[Siano P delle valige a riposo sulla banchina



1) Se O' si muove a velocità costante verso destra, esso vedrà le valige muoversi verso sinistra a velocità costante → è d'accordo con O che la forza netta sulle valige è zero
2) Se O' sta accelerando verso destra, esso vedrà le valige accelerare verso sinistra dunque, in accordo con il principio di inerzia che sulle valige sta agendo una forza netta diversa da zero, ma questo non sarebbe vero

Dall'esempio deduciamo che la PRIMA LEGGE DI NEWTON (PRINCIPIO DI INERZIA) NON È VERA PER QUALSIASI SISTEMA DI RIFERIMENTO

Definiamo SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto non soggetto a forze lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muove con moto rettilineo uniforme o se è in quiete vi resta.
(Questa situazione si verifica sia quando il punto è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, sia quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che la risultante sia nulla).

SECONDA LEGGE DI NEWTON
È chiaro che una forza che agisce su un corpo libero di muoversi cambia la sua velocità, cioè provoca un'accelerazione

La seconda legge afferma che: "L'interazione del punto con l'ambiente circostante espressa tramite la forza F, determina l'accelerazione del punto ovvero la variazione della sua velocità nel tempo; m rappresenta la massa inerziale del punto".
Cioè per un dato oggetto, l'accelerazione risultante è proporzionale all'intensità della forza netta applicata all'oggetto, la costante di proporzionalità dipende dall'oggetto e si chiama massa.

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ → vettore accelerazione del corpo

somma vettoriale di tutte le forze applicate al corpo

possiamo definire la massa come la quantità che misura l'inerzia di un corpo traslante (cioè la tendenza di

IMPULSO

Dalla relazione $\vec{F}(t)dt = d\vec{p}$ vediamo che l'azione di una forza durante un tempo dt produce una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. Integrando tra due generici istanti t_1 e t_2 si ha:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \Delta\vec{p}$$

impulso della forza tra t_1 e t_2 — variazione della quantità di moto tra t_1 e t_2

Il termine vettoriale J (integrale della forza nel tempo) è chiamato IMPULSO DELLA FORZA, e la relazione sopraccitata esprime il TEOREMA DELL'IMPULSO.

"l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale produce la variazione della sua quantità di moto"

Con m costante si ha ovviamente: $J = m(v - v_0) = m\Delta v$

Se si conosce l'esatta forma funzionale della funzione vettoriale $F(t)$ ed è in grado di integrare nel tempo, si può ottenere la variazione di quantità di moto del corpo su cui viene esercitata la forza.

$$(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \xrightarrow[\text{cartesiane}]{\text{in componenti}} \begin{cases} (p_{x2} - p_{x1}) = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \\ (p_{y2} - p_{y1}) = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt \\ (p_{z2} - p_{z1}) = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \end{cases}$$

Se invece la funzione $F(t)$ non è nota (come accade solitamente), uno può misurare $\Delta\vec{p}$ e ottenere l'impulso.
In questi casi spesso si definisce anche la forza media

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \Longleftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \langle \vec{F} \rangle \Delta t$$

$\langle \vec{F} \rangle$ è la costante di forza che darebbe lo stesso impulso come il vero $\vec{F}(t)$.

LA TERZA LEGGE DI NEWTON - principio di azione e reazione

Ogni volta che un corpo A esercita una forza su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando sul corpo A la forza F tale che:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Si noti che:
1) le due forze agiscono su corpi differenti
2) Esse hanno la stessa grandezza e direzioni antiparallele

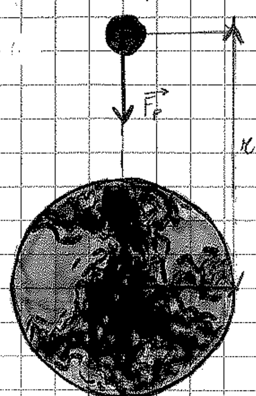
3) le forze agiscono sempre in coppia.

In una forma vettoriale: $\vec{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\lambda} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{1,2}$

* la stessa legge vale anche per corpi di grandi dimensioni purché sferici (es. pianeti, sole

Il peso di un oggetto sopra la terra è la forza gravitazionale che la terra esercita sull'oggetto. Il peso agisce sempre verso il basso, o meglio, verso il centro della terra.

Per un corpo di massa m $\vec{F}_P = \gamma \frac{M_E m}{r^2}$ dove M_E è la massa della terra, m la massa del corpo, r la distanza dal centro della terra.



Solitamente il peso è scritto nella forma $\vec{F}_P = m\vec{g}$ dall'introduzione dell'ACCELERAZIONE GRAVITAZIONALE

$\vec{g} = -\gamma \frac{M_E}{r^2}\hat{\lambda}$ Per oggetti sulla superficie della terra $r = R_E = 6380$ Km e la superficie locale può essere approssimata da un piano xy.

Così che: $\vec{g} = -\gamma \frac{M_E}{R_E^2}\hat{k} \rightarrow \vec{g} = 9.8\ m/s^2$

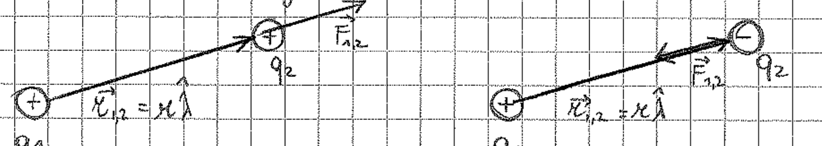
Se su un corpo agisce solo la forza peso abbiamo $\vec{F}_P = m\vec{a} = m\vec{g}$ (visto che $\vec{a} = \vec{g}$). Pertanto la forza peso risulta proporzionale alla massa. Si tratta di una forza costante e in assenza di altre forze il moto è uniformemente accelerato nella direzione parallela a g.

FORZA ELETTROSTATICA - forza di COULOMB

Per due particelle puntiformi con q_1 e q_2 come carica elettrica e separate da una distanza r, la forza elettrostatica (di Coulomb) presenta una grandezza data da

$$\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2$$

La forza che q_1 esercita su q_2 (e viceversa) è diretta lungo la linea che congiunge le particelle. A differenza della forza gravitazionale, la forza elettrostatica può essere attrattiva se le cariche hanno segno opposto o repulsiva se le cariche hanno lo stesso segno.



In forma vettoriale: $\vec{F}_{1,2} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\lambda} = K\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{1,2}$

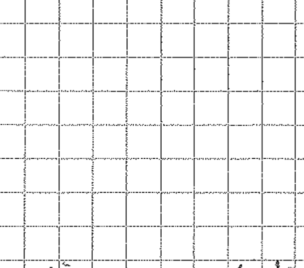
LA FORZA ELASTICA

Si definisce forza elastica (unidimensionale) una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre ad un punto O chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O. Se assumiamo come x la direzione della forza e come origine il centro, possiamo scrivere:

$F_x = Kx$

costante della molla (unità di misura = N/m)

K è una costante positiva, detta COSTANTE ELASTICA

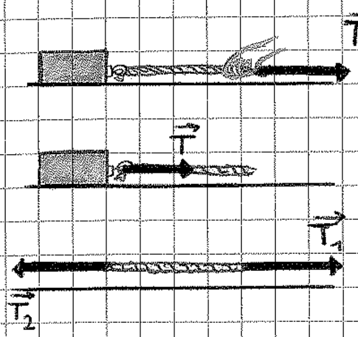


Il moto risultante per effetto di una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla. L'accelerazione vale $a = \frac{F}{m} = \frac{Kx}{m} = \omega^2 x$

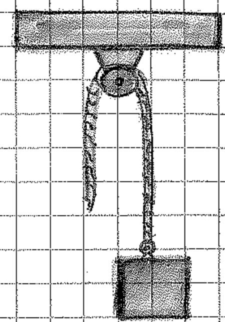
La sensazione di "peso" che sentiamo è dovuta alla forza normale del terreno che si applica sui nostri piedi e non al peso reale.

TENSIONE DI UNA CORDA

Cavi e corde trasmettono le forze attraverso la TENSIONE



Corde ideali sono prive di massa e inestensibili in modo che esse possano semplicemente trasmettere la tensione esercitata da un corpo all'altro.
Se le corde passano attorno a una carrucola supposta priva di massa e attrito, la tensione sarà trasmessa all'altra estremità della corda.



LA FORZA DI ATTRITO RADENTE

Quando un oggetto è in contatto con una superficie, vi è una forza che agisce su tale oggetto: la componente perpendicolare alla superficie di tale forza è la forza normale, la componente parallela alla superficie è chiamata forza di attrito.
La grandezza della forza di attrito non dipende dalla zona di contatto delle superfici. Questo perché il contatto efficace si verifica solo in una piccola frazione dell'area apparentemente in contatto.
Quando le due superfici non sono scorrevoli l'attrito è chiamato ATTRITO STATICO.
Un corpo non entra in movimento se poggiato su una superficie, per effetto della forza di attrito, fino a che il modulo di tale forza non supera il valore $\mu_s N$ dove μ_s è il COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO, ed N è il modulo della componente normale al piano di appoggio. La condizione perché il corpo possa essere messo in movimento per effetto della forza applicata è quindi data da $f > \mu_s N$.

↳ $f_s \le f_{s\,MAX}$ → $f_{s\,MAX} = \mu_s N$ $\quad 0<\mu_s<1$

L'attrito statico si oppone all'imminente moto relativo tra due oggetti.
Quando un oggetto è già in movimento su una superficie, altre forze di attrito si oppongono ai moti relativi scorrevoli. Questo è l'attrito dinamico.

Il moto di un oggetto su una superficie reale è sempre accelerato (cioè la velocità diminuisce) a causa dell'attrito, la cui grandezza è proporzionale alla forza normale esercitata dalla superficie sull'oggetto.

$f_d = \mu_d N$ (N.B. Questo non è un vettore perché le due forze hanno direzioni diverse)

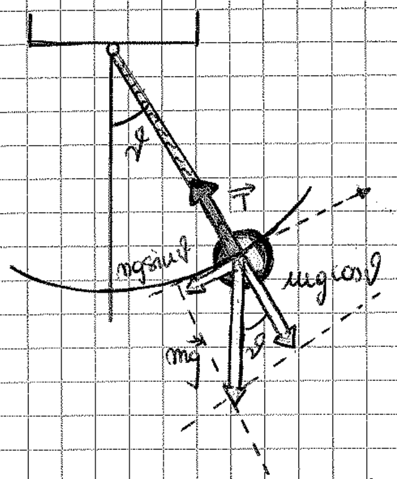
$0<\mu_d<1$ è detto COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO.

Il coefficiente di attrito dinamico è sempre più piccolo del corrispondente coefficiente di attrito statico.

MATERIALI	coefficiente statico	coefficiente dinamico
Vetro su vetro	0,94	0,4
Ghiaccio su ghiaccio	0,1	0,02
Gomma sull'asfalto	1,0	0,8
Gomma sul bagnato	0,7	0,5
Pietra su ghiaccio	0,1	0,05
Pietra su pietra	0,78	0,42
Legno su legno	0,35	0,3

Attenzione! Dire che la forza di attrito è sempre opposta al moto è sbagliato!

IL PENDOLO SEMPLICE



Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La posizione di equilibrio statico è quella verticale con il punto fermo e il filo teso; le forze esercitate dal filo (tensione del filo) vale in modulo $T_F = mg$.

Usiamo le coordinate intrinseche e i versori $\hat{u}_N$ e $\hat{u}_T$

$$\vec T = T\hat{u}_N \qquad m\vec g = -mg\sin\vartheta\,\hat{u}_T - mg\cos\vartheta\,\hat{u}_N$$

$$\Sigma\vec F = m\vec a$$

direzione tangenziale / direzione radiale
$$\begin{cases} -mg\sin\vartheta = ma_T \\ T - mg\cos\vartheta = ma_c \end{cases}$$

direzione tangenziale / direzione radiale
$$\begin{cases} a = -g\sin\vartheta \\ T - mg\cos\vartheta = m\dfrac{v^2}{L} \end{cases}$$

$$a = -g\sin\vartheta \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\vartheta$$

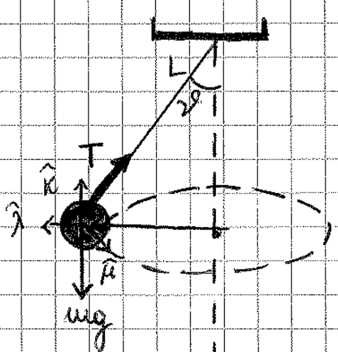
per oscillazioni con piccole ampiezze $\sin\vartheta \cong \vartheta$ e inoltre $\vartheta = \frac{s}{L}$ con che

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L}\vartheta = 0 \qquad \frac{g}{L} = \omega^2$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2\vartheta = 0 \leftarrow \text{MOTO ARMONICO SEMPLICE}$$

Usando la relazione $\vartheta = \frac{s}{L}$ possiamo anche scrivere: $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$

IL PENDOLO CONICO



Un pendolo conico è costituito da un piccolo oggetto di massa m sospeso da una stringa di lunghezza L e girevole con velocità v costante in un cerchio orizzontale di raggio r.

Scegliamo tre versori delle coordinate cilindriche

$\hat\lambda, \hat\mu$ nel piano del moto, $\hat k$ perpendicolare al piano

Nessuna delle forze ha componenti tangenziali → il moto circolare è uniforme ⇒ c'è solo l'accelerazione centripeta.

$$\Sigma\vec F = -mg\hat k + T\cos\vartheta\hat k - T\sin\vartheta\hat\lambda = -m\frac{v^2}{r}\hat\lambda$$

Quindi in componenti:

$$-mg + T\cos\vartheta = 0 \rightarrow T = \frac{mg}{\cos\vartheta}$$

$$\cos\vartheta = \frac{g}{\omega^2 L}$$ l'angolo ϑ dipende dalla velocità angolare

$$T\sin\vartheta = m\frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{mg}{\cos\vartheta}\sin\vartheta = m\frac{v^2}{r} \rightarrow g\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 L\sin\vartheta$$

Tutti i sistemi di riferimento in moto lineare uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale, sono anch'essi inerziali.

La differenza tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento è dunque la VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO:

$$v_t = v - v' = v_0 + \omega \times r'$$

Se P fosse fermo rispetto al sistema mobile la sua velocità misurata dal sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento. Se invece P si muove rispetto al sistema mobile, tale formula afferma che la velocità assoluta è la somma delle velocità relativa e di quella di trascinamento.

L'ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO è quella del punto P solidale al sistema mobile che coincide nell'istante considerato col punto P. Per P a' e v' sono nulle, pertanto:

$$a_t = a_0 + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r'$$

diventa:

$$a = a' + a_0 + a_c$$

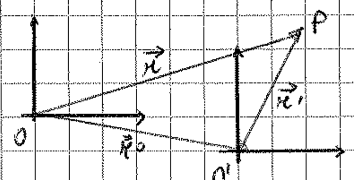
L'ultimo termine a_c è chiamato ACCELERAZIONE DI CORIOLIS: esso dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile tramite la velocità relativa v'

$$a_c = 2\omega \times v'$$

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton (II) ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono al primo membro sono le forze vere cioè quelle che derivano dalle interazioni fondamentali, e la risultante è proporzionale all'accelerazione misurata in quel sistema di riferimento. Quindi è impossibile definire quali tra questi sistemi di riferimento siano a riposo o in movimento. Deve essere abbandonato il concetto di "moto assoluto". Tale situazione fisica viene descritta con il termine di RELATIVITÀ GALILEIANA. Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, la legge di Newton non è più valida, la forza vera che agisce sul punto considerato non è proporzionale all'accelerazione del punto, misurata nel sistema accelerato.

2) MOTO DI TRASCINAMENTO RETTILINEO UNIFORME:

Consideriamo due sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro



Sia P un punto nello spazio.
Secondo O, la sua posizione è data da $\vec{r}$
Secondo O', la sua posizione è data da $\vec{r}'$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$

Essendo $\vec{r}_0$ la posizione di O' rispetto a O

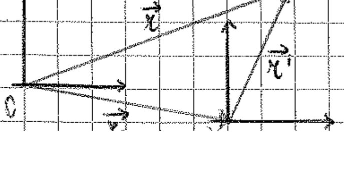
Ora ammettiamo che non solo P ma anche O' è in moto rispetto a O.
Troviamo la relazione tra la velocità della particella nei due sistemi di riferimento.
Per farlo dobbiamo semplicemente calcolare la derivata temporale del vettore posizione

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}' + \vec{r}_0) = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \qquad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

Derivando ulteriormente otteniamo la relazione tra le accelerazioni

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_0) = \vec{a}' \qquad \vec{a} = \vec{a}'$$

3) MOTO DI TRASCINAMENTO RETTILINEO ACCELERATO

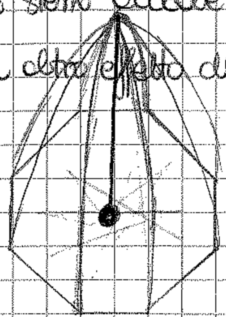


Sia O l'osservatore in un sistema di riferimento accelerato e sia O' in moto uniformemente accelerato rispetto a O.

La forza di Coriolis provoca effetti sul moto di un corpo in caduta libera sulla terra

L'accelerazione di Coriolis fa cadere il corpo un po' spostato verso est.
Lo stesso accade se il corpo è alla superficie della terra

Un altro effetto dell'accelerazione di Coriolis è nel pendolo di Foucault



Se una grande massa è appesa a una lunga corda, sospesa a un perno senza attrito libero di ruotare è possibile osservare che il piano di oscillazione del pendolo ruota a causa della rotazione terrestre (e, in particolare, a causa dell'accelerazione di Coriolis).

Per quanto riguarda uragani e tempeste su media-grande scala, la forza di Coriolis fa sì che l'aria ruoti attorno a un centro di bassa pressione in direzione ciclica. Con l'aria che scorre attorno a un uragano gira in senso antiorario nell'emisfero settentrionale e in senso orario in quello meridionale. Se la terra non ruotasse, l'aria fluirebbe direttamente verso il centro di bassa pressione, ma su una terra che gira la forza di Coriolis fa sì che l'aria venga deviata con il risultato che essa viaggia attorno al centro di bassa pressione

4) DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO IN MOTO RELATIVO GENERICO (TRASLAZIONE + ROTAZIONE)

Il caso più generale è quando O' non solo trasla ma ruota anche rispetto a O. In questo caso, la trasformazione per la velocità e per l'accelerazione è molto più complessa.

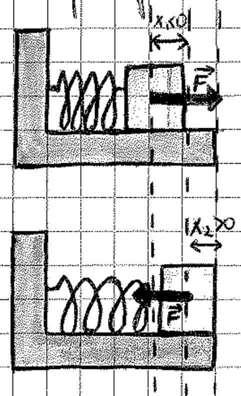
Sia ω la velocità (vettore) angolare della rotazione del sistema di riferimento e v_0 la velocità della sua traslazione. Se P ha una posizione r' e una velocità v' in O', allora

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r})$ la velocità di trascinamento ora ha un contributo rotatorio.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{accelerazione di trascinamento}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Il lavoro è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo. Quando è positivo si parla di LAVORO MOTORE; nel caso in cui il lavoro sia negativo si parla di LAVORO RESISTENTE.

L'esempio più comune di una forza che dipende dalla posizione è la FORZA ELASTICA:

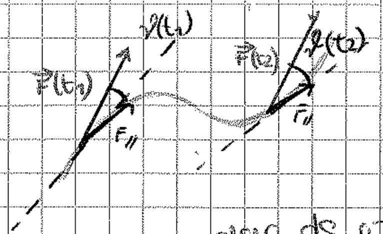


Il lavoro della forza elastica $F = -kx\hat{i}$ per uno spostamento lungo l'asse x vale

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 -kx\,dx = -\frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$

Si noti che:
1) Se $|x_1| = |x_2|$, allora il lavoro è nullo;
2) $|x_2| > |x_1| \rightarrow W_{12} < 0$ la forza di richiamo contrasta il moto
3) $|x_2| < |x_1| \rightarrow W_{12} > 0$ la forza di richiamo contribuisce al moto

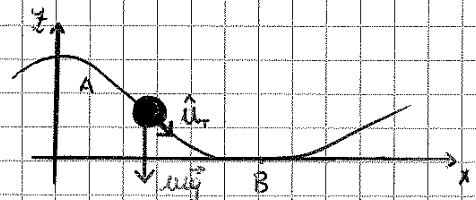
Il lavoro nel caso più generale



Se il movimento non si verifica lungo una linea retta e la forza non è costante, allora il lavoro deve essere ancora pensato come somma di infiniti lavori:

$$W_{12} = \sum W_i = \sum (\vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i) \Longrightarrow W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_\parallel\, ds$$

dove ds è l'infinitesimo spostamento nelle coordinate intrinseche: $d\vec{r} = ds\,\hat{u}_T$



Se la traiettoria è in due dimensioni, il lavoro deve essere calcolato con un integrale:

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dz\,\hat{k} \qquad m\vec{g} = -mg\,\hat{k}$$

$$W_{AB} = \int_A^B m\vec{g}\, d\vec{r} = \int_A^B mg\,dr\cos\vartheta = -\int_{z_A}^{z_B} mg\,dz = \boxed{-mg(z_B - z_A)}$$

Il lavoro dipende solo dal valore iniziale e quello finale di z.

POTENZA

La potenza corrisponde al LAVORO PER UNITÀ DI TEMPO:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

Questa è la POTENZA ISTANTANEA, in generale variabile durante il moto e caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro.

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

Questa è la POTENZA MEDIA, cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante cui il lavoro è stato svolto.

L'unità di misura per il S.I. è il Watt: $1\,\text{Watt}\,(W) = \frac{1\,\text{Joule}}{1\,\text{sec}}$

Tale grandezza è particolarmente importante per qualificare le prestazioni di un dispositivo o di una macchina che fornisce lavoro: a parità di lavoro totale svolto, ha maggior potenza quella macchina che lo eroga in minor tempo.

tutti i tracciati chiusi possibili è pari a zero. Pertanto la stessa condizione può essere espressa in forma differenziale grazie al teorema che afferma:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \quad \forall\Gamma \iff \nabla\times\vec{F} = 0$$

dove $\nabla\times\vec{F}$ è il risultato dell'operatore $\nabla\times$ applicato a $\vec{F}$

~~operatore~~

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ è un operatore vettoriale chiamato del e indicato dal simbolo nabla, con che

1) applicato alla funzione scalare $U(x,y,z)$ dà il suo gradiente in un certo punto.

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = \text{grad}\, U \qquad dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$$

2) il suo prodotto scalare con una funzione vettoriale di (x,y,z) dà la divergenza del vettore in un certo punto.

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div}\,\vec{v}$$

3) il suo prodotto vettoriale con un vettore di (x,y,z) dà del vettore in un certo punto.

$$\nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Pertanto se la forma esplicita della forza in funzione delle coordinate è nota, verificando se è conservativa è semplicemente:

$$\nabla\times\vec{F} = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases}$$

N.B. tutti questi operatori hanno espressioni diverse nelle coordinate sferiche e cilindriche

ENERGIA POTENZIALE

Per ogni corpo si può scegliere come sistema che lo contenga un qualsiasi sottoinsieme di corpi con cui interagisce.
Diciamo che un sistema è isolato quando forze esterne non agiscono su di esso. Per definizione l'Universo è isolato (non esistono enti esterni ad esso).
Scegliamo ora un sistema fatto in modo tale che almeno una delle forze interne sia conservativa, allora il lavoro compiuto dalla forza conservativa quando il sistema cambia configurazione da A a B, è:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ cioè dipende solo dalle configurazioni iniziali e finali del sistema

Definiamo la quantità scalare U tale che: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = U_A - U_B \Longrightarrow W_{AB} = -\Delta U$

U è l'energia connessa alla configurazione del sistema ed è chiamata ENERGIA POTENZIALE
se U aumenta, il lavoro sarà negativo, se U decresce il lavoro è positivo. Quando una forza

$U(z=0)=c=0 \Rightarrow U(z)=mgz$

[ENERGIA POTENZIALE ELASTICA]

Per una configurazione generale del sistema $U(x)=\frac{1}{2}Kx^2+c$

Possiamo impostare c in modo tale che l'energia potenziale sia zero quando $x=0$.

$U(x=0)=c=0 \rightarrow U(x)=\frac{1}{2}Kx^2$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Consideriamo un sistema in cui agiscono solo forze conservative (chiameremo questo sistema conservativo).
Per un sistema conservativo, il lavoro compiuto dalle forze durante lo spostamento da A a B può essere espresso da:

1) $W_{AB}=K_B-K_A$ (teorema dell'energia cinetica, è sempre vero se W_{AB} è il lavoro della forza netta)
2) $W_{AB}=U_A-U_B$ (vero solo per forze conservative)

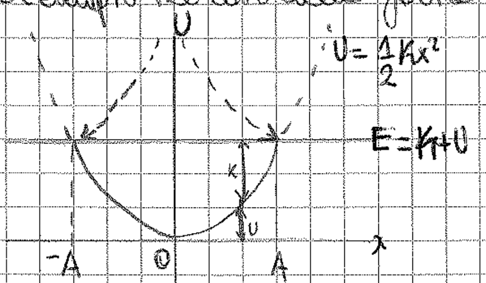
Eguagliando le due relazioni si ha: $U_B+K_B=U_A+K_A$

La grandezza $E=U+K$ è chiamata ENERGIA MECCANICA totale del sistema.
Possiamo quindi affermare che:
la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ovvero SI CONSERVA.

Se durante il moto si verifica una diminuzione di uno dei due termini che compongono l'energia meccanica, l'altro termine aumenta.

Quando una particella si muove lungo una linea retta sotto l'azione di una forza conservativa, siamo in grado di ottenere molti chiarimenti sulle sue proprietà di risoluzione guardando la funzione del potenziale energetico su un grafico.

Per esempio nel caso della forza elastica: $U=\frac{1}{2}Kx^2$



Se la forza elastica della molla è l'unica forza orizzontale agente sulla vela, l'energia meccanica totale $E=K+U$ è costante indipendente da x.
In ogni punto, la forza F_x sulla vela è pari a:

$F=\frac{dU}{dx}$ a $x=0$ la forza è zero.

Questa è una posizione di equilibrio.

Per $x\neq0$ la forza F_x sulla vela è sempre diretta verso l'origine. Tale forza è della FORZA DI RIPRISTINO. Ogni minimo in una curva di potenziale energetico è una posizione di equilibrio stabile.

I massimi e i minimi di una funzione $U(x)$ dell'energia potenziale corrispondono ai punti in cui $F_x=0$

Quando agiscono, come avviene in generale, sia forze conservative che dissipative, il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative W_{cons} e di quello delle forze dissipative W_{diss}.

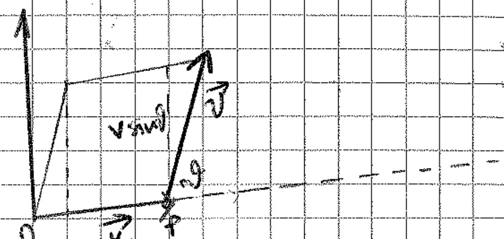
Quindi se il sistema non è conservativo, parte dell'energia meccanica può essere trasformata in altri tipi di energia (tipicamente energia termica). In questo caso l'energia me

GRAVITAZIONE ED ELETTROSTATICA

MOMENTO DI UN VETTORE MOMENTO DELLA FORZA.

Definiamo momento di un vettore v uscente da O e in direzione P, il prodotto vettoriale:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{v}$$



- Il momento è un vettore libero (non ha punto di applicazione come i soliti vettori)
- Il momento è sempre perpendicolare al piano contenente i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$
- Il suo modulo è uguale all'area del parallelogramma definito da $\vec{r}$ e $\vec{v}$

$$M_o = |\vec{r} \times \vec{v}| = rv\sin\vartheta$$

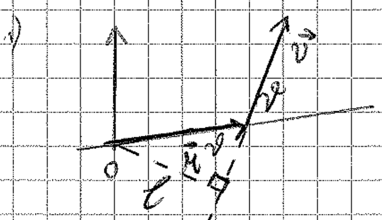
infatti è un prodotto vettoriale

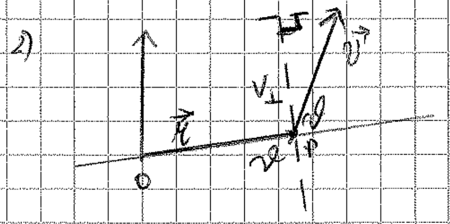
1) Il modulo del momento può anche essere inteso come l'ampiezza del vettore v volte il braccio della leva b.

$$M_o = |\vec{r} \times \vec{v}| = v(r\sin\vartheta) = vb$$

2) O la grandezza del vettore r volte la componente perpendicolare del vettore v

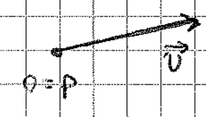
$$M_o = |\vec{r} \times \vec{v}| = r(v\sin\vartheta) = rv_\perp$$



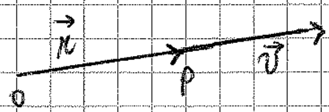


Il momento di un vettore è zero quando:

1) Il vettore v è pari a zero (caso banale)
2) Il vettore v non è zero, ma il vettore $\vec{r}$ lo è. Ciò significa che il punto di applicazione del vettore v coincide con il polo (P=O)

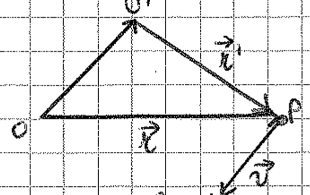


3) Né v né r sono pari a zero, ma sono paralleli. Ciò significa che v giace su una retta passante per O.



Il momento dipende dalla scelta del polo.

$$M_o = \vec{r} \times \vec{v} = (\vec{r}_o + \vec{r}') \times \vec{v} = \vec{r}_o \times \vec{v} + M_{o'}$$

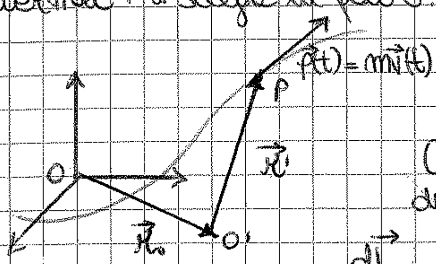


Il momento della forza applicata su un punto P, da un origine (polo) O è definito come

$$\vec{\tau}_o = \vec{r}' \times \vec{F} \quad \text{(momento torcente)}$$

MOMENTO DELLA FORZA

Sia P la posizione di una particella di massa m che si muove in un sistema di riferimento inerziale. Si scelga un polo O'.



Il momento angolare della particella rispetto a O' è:

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{p}$$

Calcoliamo la derivata temporale di entrambi i membri di questa espressione:

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}' \times \frac{d\vec{p}}{dt} =$$

$$\vec{r}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\frac{d\vec{r}_0}{dt}} \Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = 0$$

0 (se il polo non è in moto)

Perciò:

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}' \times \frac{d\vec{p}}{dt} =$$

Ma se il sistema di riferimento è inerziale, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

In modo che si arriva al risultato evidente:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{\tau}_{O'}}$$

Questo è il TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE per una particella. La derivata temporale del momento angolare di una particella è uguale al momento torcente netto agente sulla particella purché la torsione sia il momento angolare vengano calcolate rispetto lo stesso polo e il polo non è in movimento in un sistema di riferimento inerziale.

Partendo dall'equazione di Newton, abbiamo definito l'impulso come l'integrale della forza, lo stesso si può fare partendo dal teorema del momento angolare:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow \vec{J} = \int \vec{F}(t)\, dt = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{\tau}_{O'} = \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} \longrightarrow \int \vec{\tau}_{O'}(t)\, dt = \Delta\vec{L}_{O'}$$

Se la forza è applicata per un tempo molto breve (così che r non cambi significativamente durante la sua azione) possiamo anche scrivere:

$$\int_i^f \vec{\tau}_{O'}(t)\, dt = \int_i^f \vec{r} \times \vec{F}(t)\, dt \cong \vec{r} \times \int_i^f \vec{F}(t)\, dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}_{O'}$$

la variazione di momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato al punto

La quantità $\vec{r} \times \vec{J}$ è il momento dell'impulso ed è chiamato IMPULSO ANGOLARE

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo.

Da $\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ segue che, se la forza netta che agisce su una particella è zero, il momento angolare della particella è costante.

$\sum\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ è un vettore costante (ciò non è altro che l'affermazione che l'accelerazione è zero)

Se $\vec{\tau}_{O'} = 0$ allora $\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{O'}$ è un vettore costante

Il momento angolare di una particella è costante se il momento torcente agente sulla particella è zero.

Il lavoro compiuto da una forza tangenziale su un corpo che si muove lungo una traiettoria circolare può anche essere espresso usando il momento torcente.

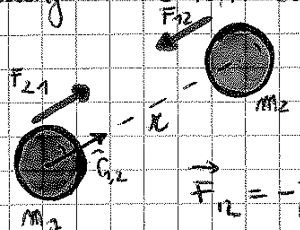
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B F_T\, dS =$$ dato che $dS = r\, d\theta$ si ha:

$$W_{AB} = \int_A^B F_T\, r\, d\theta = \int_A^B r F_T\, d\theta = \int_A^B \tau\, d\theta$$

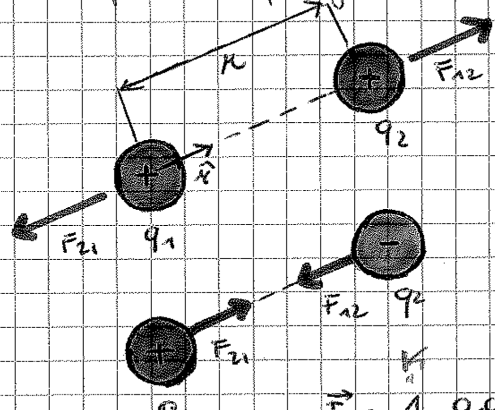
Questa espressione è formalmente analoga alla definizione standard del lavoro, ma:
- contiene grandezze scalari
- il momento torcente sostituisce la forza
- lo spostamento angolare infinitesimo sostituisce lo spostamento lineare infinitesimo.

FORZA GRAVITAZIONALE E DI COULOMB

Formalmente, la gravità e la forza elettrostatica tra le particelle puntiformi o cariche puntiformi assumono la stessa forma:



$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$



$$\vec{F}_{12} = \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}^{K}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

Il segno meno è necessario perché le masse sono sempre positive e la forza è sempre attrattiva.
La massa che appare qui è una sorta di "carica gravitazionale" e in linea di massima non deve essere confusa con la massa che compare nella II legge di Newton, che è invece legata all'inerzia.

Qui l'orientazione della forza è già contenuta nel segno delle due cariche.

MASSA GRAVITAZIONALE E MASSA INERZIALE:

Massa Gravitazionale (m_g) = è proprietà di un oggetto legata o alla forza gravitazionale a cui è soggetto o che può esercitare.

Massa Inerziale (m_i): fa parte della II legge di Newton ed è la costante di proporzionalità tra la forza netta e l'accelerazione.

Vediamo la relazione che intercorre tra queste due masse: Consideriamo un corpo in caduta libera sulla superficie della terra

$$\Sigma \vec{F} = m_i \vec{a} \qquad \gamma \frac{m_g M_E}{R_E^2} = m_i \vec{g} \longrightarrow \frac{m_g}{m_i} = \frac{R_E^2 g}{\gamma M_E} = \text{costante}$$

Le determinazioni più recenti danno:

$$\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{N\, m^2}{Kg^2}$$

N.B. Solo conoscendo γ si possono determinare le masse dei corpi celesti.

CARICA ELETTRICA

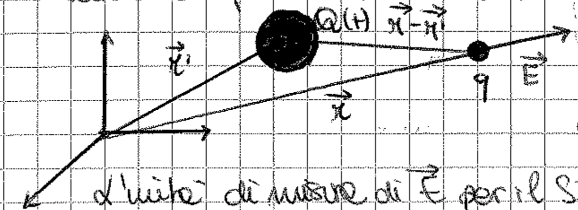
L'esistenza della carica elettrica è dimostrata dal fatto che i diversi materiali (ambra, vetro, gomma, plastica) se strofinati con un panno di un certo materiale, si attraggono o respingono l'un l'altro.

Un campo è una regione dello spazio in ogni punto del quale è definita una grandezza fisica, sia vettoriale o scalare.

$\vec{G} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\gamma \frac{M}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$ Nel caso gravitazionale ed elettrostatico la grandezza vettoriale che viene definita ovunque intorno a una sorgente di massa M (o carica Q) è l'intensità della forza che sarebbe esercitata su un'unità di massa m (unità di carica positiva q). Anche se per definirla è necessario partire dalla forza esercitata su una massa di prova, in realtà dipende solo da M (o da Q).

L'unità di misura di $\vec{G}$ per il S.I. è Newton/Kilogrammo (N/Kg)

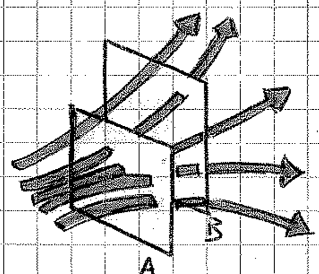
Il vettore campo elettrico nel vuoto è $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$

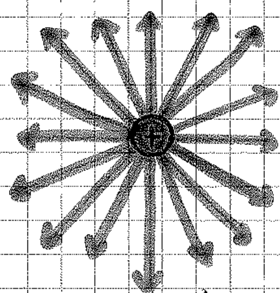


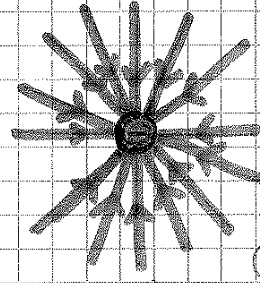
Anche se per definirlo è necessario partire dalla forza esercitata su una carica positiva di prova, in realtà dipende solo da Q.

L'unità di misura di $\vec{E}$ per il S.I. è Newton/Coulomb (N/C)

N.B. Il campo elettrico ha l'orientamento della forza che agisce su una carica positiva. Un modo utile per rappresentare un campo vettoriale è quello di utilizzare le linee di campo. Esse sono definite in modo tale che:
- il campo vettoriale è tangente alle linee del campo in ogni punto.
- le linee hanno un orientamento, indicato da una freccia, che è lo stesso di quello del campo vettoriale;
- il numero delle linee di flusso per unità di superficie perpendicolare alle linee è proporzionale alla grandezza del campo vettoriale in quella zona (cioè dove il campo è più intenso, le linee sono più vicine).



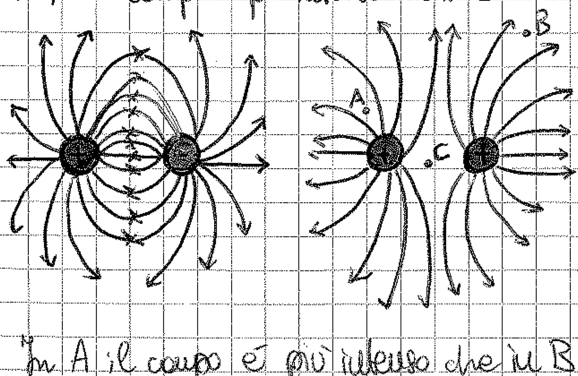




(carica o massa)

In A il campo è più intenso che in B

(a) (b)



Linee di campo di un campo elettrostatico creato da una carica positiva isolata (a) e da una carica negativa isolata (b). La situazione in (b) rappresenta anche le linee di campo create da un punto materiale m.

← Linee di campo di un campo elettrostatico creato da due cariche di segno opposto e da due cariche uguali.

In A il campo è più intenso che in B, ed è pari a zero in C.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Il campo creato in un punto P da più masse o cariche puntiformi è esattamente uguale alla somma vettoriale dei campi creati da ogni singola sorgente in P.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \sum_i \vec{G}_i(\vec{r}) = \sum_i -\gamma \frac{M_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|} = -\gamma \sum_i \frac{M_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Si vede che $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}\Sigma = E\Sigma\cos\vartheta = E(\Sigma\cos\vartheta) = E\Sigma_\perp$

Il flusso è sempre uguale all'intensità di campo per l'area della proiezione della superficie su un piano perpendicolare al campo stesso.
In generale, il campo non è uniforme e la superficie non è un piano.
In questo si può comunque esprimere il flusso infinitesimale attraverso una superficie infinitesimale (così piccola che lì il campo può essere considerato uniforme).

$$d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma$$

il flusso totale è perciò:

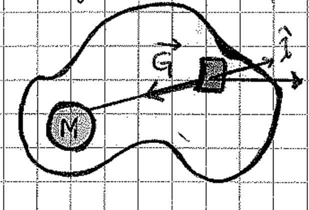
$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma$$

TEOREMA DI GAUSS

Il flusso di un campo F attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla massa totale (o carica totale) contenuta nella superficie.

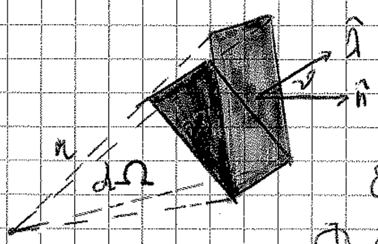
Dimostriamolo nel caso del campo gravitazionale, nel caso del campo elettrostatico tutto è formalmente identico.

Singola massa puntiforme $d\Phi_\Sigma(\vec{G}) = \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = -\gamma\frac{M}{r^2}\hat{\lambda}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = -\gamma\frac{M}{r^2}(d\Sigma\cos\vartheta)$



Ma $d\Sigma\cos\vartheta$ è l'elemento di superficie perpendicolare a $\vec{G}$ e quindi è una porzione di una sfera centrata in M e di raggio r.

$$d\Sigma\cos\vartheta \approx r^2 d\Omega$$



dove $d\Omega$ è l'infinitesimo angolo solido.

Perciò: $d\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -\gamma\frac{M}{r^2}r^2 d\Omega = -\gamma M d\Omega$

E il flusso di G attraverso l'intera superficie chiusa è:

$$\Phi_\Sigma(\vec{G}) = \int_\Sigma d\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -\gamma M\int_\Omega d\Omega$$

$\boxed{\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -4\pi\gamma M}$ per una singola massa

Se ci sono più masse puntiformi all'interno della superficie, grazie al principio di sovrapposizione possiamo applicare lo stesso ragionamento per ogni massa.
Risulta quindi che:

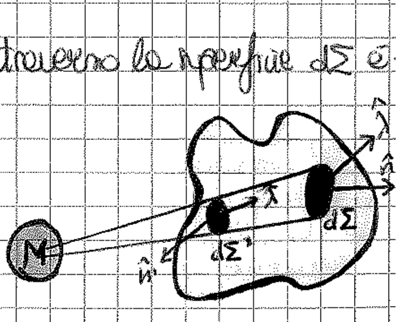
$\boxed{\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -4\pi\gamma M_{TOT}}$ per una distribuzione di masse.

Invece se la massa è esterna alla superficie, il flusso attraverso la superficie $d\Sigma$ è:

$d\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -\gamma\frac{M}{r^2}\hat{\lambda}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = -\gamma\frac{M}{r^2}(d\Sigma\cos\vartheta) = -\gamma M d\Omega$

ma il flusso attraverso la superficie $d\Sigma'$ è:

$d\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -\gamma\frac{M}{r'^2}\hat{\lambda}\cdot\hat{n}'d\Sigma' = -\gamma\frac{M}{r'^2}d\Sigma\cos(\pi-\vartheta') = +\gamma\frac{M}{r'^2}r'^2 d\Omega$

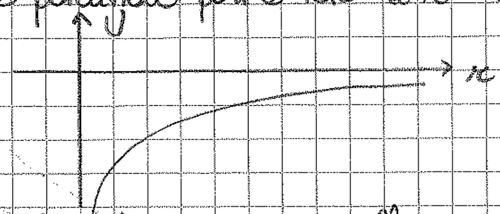


$d\Phi_\Sigma(\vec{G}) = +\gamma M d\Omega$ Ma l'angolo solido è lo stesso. Pertanto, per ogni superficie infinitesimale attraverso cui il flusso è positivo, un'altra superficie infinitesimale esiste ed è definita dallo stesso angolo solido, attraverso cui il flusso ha lo stesso modulo, ma negativo. $\Phi(\vec{G}) = 0$

Perciò: $U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + c$

Se scegliamo l'energia potenziale pari a zero a $r \to \infty$: $U(r \to \infty) = c = 0$

$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$



(è una scelta usata molto in astronomia)

Se scegliamo l'energia potenziale pari a zero sulla superficie della terra:

$U(R) = -\gamma \frac{mM}{R} + c = 0 \longrightarrow c = \gamma \frac{mM}{R}$

Perciò: $U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + \gamma \frac{mM}{R} = \gamma mM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) \simeq \gamma mM \frac{r-R}{R^2} = m \frac{\gamma M}{R^2} h$ ($r = R+h$)

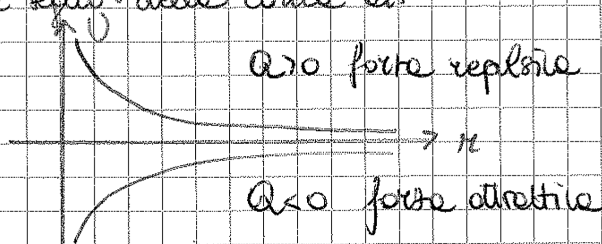
$U(R+h) = mgh$ ← esattamente come avevamo già visto

Notare che il rapporto tra forza ed energia potenziale $\vec{F}(r) = -\nabla U(r)$ è particolarmente semplice quando F dipende solo da r (il che vuol dire che la forza ha una simmetria sferica). In questo caso infatti possiamo dire, usando le coordinate sferiche, che: $F_r(r) = -dU/dr$; $F_\vartheta = 0$; $F_\varphi = 0$

Nel caso di una singola carica elettrica puntiforme o una distribuzione di carica sferica

$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r} + c$ e normalmente l'energia potenziale viene scelta pari a zero per $r \to \infty$, così che: $U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r}$

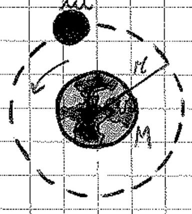
Qui il segno dell'energia potenziale dipende dal segno della carica Q.



ENERGIA MECCANICA GRAVITAZIONALE

Calcoliamo l'energia meccanica di un satellite in un'orbita circolare attorno alla terra.

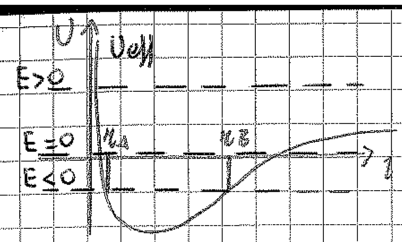
$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r}$ (energia meccanica del satellite)



Ma dal momento che l'accelerazione del satellite è solo centripeta: $\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \to m v^2 = \gamma \frac{mM}{r}$ (accelerazione centripeta)

Perciò: $E = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r} - \gamma \frac{mM}{r} \longrightarrow E = -\frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r}$

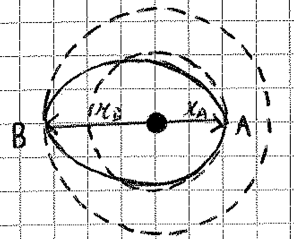
Si notiche:
- Cambiando il raggio dell'orbita da r_1 a r_2 varia anche l'energia meccanica
- La velocità è connessa al raggio dell'orbita perché $L = mvr$ è costante
- Il lavoro di una forza non-conservativa cambia necessariamente il raggio dell'orbita



E>0: c'è una distanza minima dal fuoco, e l'orbita è un'iperbole

E=0: c'è una distanza minima dal fuoco, e l'orbita è una parabola

E<0: il raggio è inferiormente limitato da R_A e superiormente limitato da R_B. L'orbita è un'ellisse



A è chiamato PERIGEO

B è chiamato APOGEO

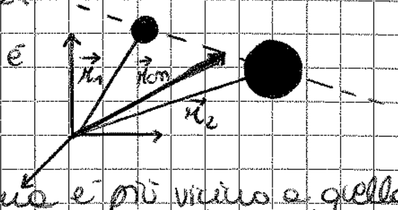
CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI

Si definisce come centro di massa di un sistema di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

dove M è la massa totale del sistema.

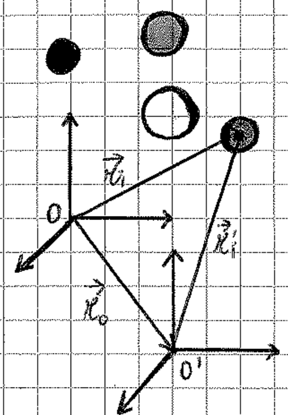
Per un sistema di due particelle, il centro di massa è



$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

Esso giace sulla linea che collega le due particelle, ed è più vicino a quella con maggiore massa. Si noti che il CM può anche cadere al di fuori delle masse.

La posizione del centro di massa rispetto agli oggetti che formano il sistema è definita dalla configurazione del sistema (cioè le distanze relative tra le sue componenti) e non dipende dalla scelta del sistema di riferimento.



$$\vec{r}_{cm}' = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} - \frac{\sum_i m_i \vec{r}_0}{\sum_i m_i} = \vec{r}_{cm} - \vec{r}_0$$

Ma questa è la legge di trasformazione per la posizione di un punto arbitrario, in modo che la posizione del centro di massa rispetto all'i-esima particella è:

$$\vec{r}_{cm}' - \vec{r}_i' = (\vec{r}_{cm} - \vec{r}_0) - (\vec{r}_i - \vec{r}_0) = \vec{r}_{cm} - \vec{r}_i$$

Questo è il motivo per cui $\vec{r}_{cm}$ non dipende dalla scelta del sistema di riferimento, anche se ovviamente le sue coordinate variano a seconda di quale si sceglie.

Se gli n punti sono in movimento, di norma, anche la posizione del centro di massa varia. Sulla base della definizione, calcoliamo la velocità del centro di massa:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Quindi: $\boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i}$ La velocità del centro di massa è la media delle velocità delle particelle pesate con le masse.

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i = \frac{\vec{P}}{M}$$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{cm}}$$

La quantità di moto totale di un sistema è rappresentata dalla massa totale per la velocità di centro di massa.

Questo significa che per qualche aspetto l'intero sistema può essere trattato come un unico corpo di massa M "concentrato" nel centro di massa.

Se le particelle n che formano il sistema stanno accelerando, allora, di norma, anche il centro di massa sta accelerando. L'accelerazione sarà:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

quindi $\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i}$ L'accelerazione del centro di massa è la media delle accelerazioni delle particelle pesate con le masse.

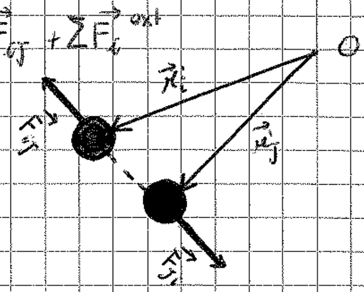
Secondo la II legge di Newton $m_i\vec{a}_i = \vec{R}_i$, dove $\vec{R}_i$ è la forza netta che agisce sull'i-esima particella.

$$\vec{R}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \sum \vec{F}_i^{ext} = m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\left(\sum \vec{R}_i\right) \longrightarrow \sum \vec{F}^{ext} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0)\times\vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{R}_i = \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij} + \sum \vec{F}_i^{ext}$$



$$= \cancel{\sum_i \vec{v}_i\times\vec{p}_i} - \vec{v}_0\times\sum_i\vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i\times\left(\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\right) + \left(\sum\vec{F}_i^{ext}\right)$$

$$= -\vec{v}_0\times\vec{P} + \sum_i \vec{r}_i\times\vec{R}_i^{in} + \sum_i\vec{r}_i\times\vec{R}_i^{ex}$$

$$= -\vec{v}_0\times\vec{P} + \sum_i \vec{r}_i\times\vec{R}_i^{in} + \vec{\tau}_0^{ext}$$

Questo termine è nullo perché tutte le forze interne sono a coppie, le due forze di ogni coppia hanno torsione opposta in quanto agiscono lungo la stessa direzione (hanno lo stesso braccio di leva).

In conclusione: $\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = -\vec{v}_0\times\vec{P}+\vec{\tau}_0^{ext}}$

Il termine $-\vec{v}_0\times\vec{P} = -\vec{v}_0\times M\vec{v}_{cm}$ è nullo quando:

a) il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale. $\vec{v}_0=0$
b) il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale. $\vec{v}_{cm}=0$
c) il polo O coincide con il centro di massa, per cui $\vec{v}_0=\vec{v}_{cm}$ e $\vec{v}_0\times\vec{v}_{cm}=0$
d) la velocità del centro di massa è parallela a quella del polo. $\vec{v}_{cm}\parallel\vec{v}_0$

In tutti questi casi (che sono molto comuni) possiamo scrivere semplicemente scrivere.

$$\boxed{\vec{\tau}_0^{ext} = \frac{d\vec{L}_0}{dt}}$$

<u>TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE</u>: Se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa (anche se quest'ultimo non è in generale un punto fisso), l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto ad O, mentre le forze interne non portano contributi.

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

In una situazione in cui valga $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0^{ext}$, cioè $\vec{v}_0\times M\vec{v}_{cm}=0$, se il momento torcente delle forze esterne è nullo, il momento angolare resta costante.

$$\sum\vec{\tau}^{ext}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{L}=\text{costante}$$

La condizione $\sum\vec{\tau}^{ext}=0$ si verifica quando:

1) non agiscono forze esterne, il sistema è isolato: allora L si conserva rispetto a qualsiasi polo per il quale $\vec{v}_0\times M\vec{v}_{cm}=0$; in questa situazione si ha anche la conservazione della quantità di moto, $P=$ costante;

2) il momento delle forze esterne è nullo rispetto a un determinato polo, ma non rispetto a qualsiasi polo, pure in presenza di forze esterne, pertanto si ha una conservazione del momento angolare solo se calcolato rispetto a quel polo.
(questa condizione sottolinea l'importanza della scelta del polo per poter risolvere determinati problemi)

I TEOREMA DI KÖNIG → teorema di König per il momento angolare

Il momento angolare di un dato sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, L_{cm}, e di quello del sistema rispetto al centro di massa.

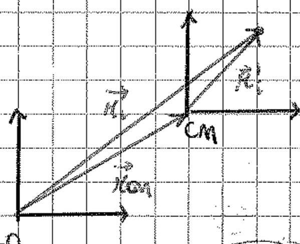
$$\boxed{\vec{L}_o = \vec{L}_{cm} + \vec{L}'}$$

$\vec{L}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ momento angolare con polo l'origine del sistema inerziale

$\vec{L}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i$ momento angolare con polo $O' = cm$

$\vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}$ momento angolare rispetto al centro di massa: il sistema è pensato come se fosse una particella di massa M concentrata nel centro di massa.

Dimostrazione del I teorema di König:



$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}$

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}) \times m_i(\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{cm} +$$

$$+ \vec{r}_{cm} \times \sum_i m_i \vec{v}_i' + \vec{r}_{cm} \times \sum_i m_i \vec{v}_{cm} = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \cancel{\sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_{cm}} + \vec{r}_{cm} \times \cancel{\sum_i m_i \vec{v}_i'} + \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}$$

questi due termini sono pari a zero perché la posizione e la velocità di cm nel sistema di riferimento di cm sono entrambi zero.

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \vec{r}_{cm} \times \vec{P} = \vec{L}' + \vec{L}_{cm}}$$

II TEOREMA DI KÖNIG → teorema di König per l'energia cinetica

L'energia cinetica di un dato sistema di punti si può scrivere nel sistema di riferimento inerziale come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.

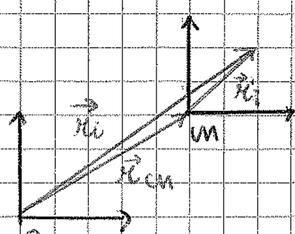
$$\boxed{K = K_{cm} + K'}$$

$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$ energia cinetica nel sistema di riferimento inerziale, v_i = velocità rispetto a O.

$K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$ energia cinetica del centro di massa: il sistema è pensato come se ci fosse una particella di massa M concentrata nel centro di massa

$K' = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$ energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa $O' = cm$

Dimostrazione del II teorema di König:



$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}$

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}$

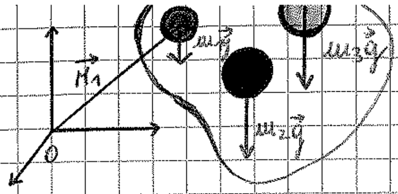
$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i'^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_{cm}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \vec{v}_{cm} =$$

questo termine è pari a zero

$$= K' + \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + \left(\cancel{\sum_i m_i \vec{v}_i'}\right) \vec{v}_{cm} = K' + \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2$$

Quindi: $\boxed{K = K' + \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 = K' + K_{cm}}$



Un esempio particolare di forze parallele è dato da un sistema le cui particelle sono tutte soggette al proprio peso. Per un dato polo O, il momento risultante applicato nel sistema (rispetto al polo O) è:

$$\vec{\tau}_o = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}$$

Come abbiamo visto questo stesso momento può essere visto come l'effetto della forza netta risultante (cioè il peso totale) applicato in un punto C che è il centro delle forze:

$\vec{\tau}_o = \vec{r}_c \times M\vec{g}$. In questo caso il centro delle forze C è chiamato CENTRO DI GRAVITÀ M_G: (o BARICENTRO)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \vec{r}_{cm}$$

Così il momento risultante del peso sarebbe lo stesso di quello dato dal peso totale applicato nel centro di gravità. Se g ha lo stesso valore in tutti i punti di un corpo, il centro di gravità coincide con il centro di massa (sebbene il centro di massa è definito indipendentemente da qualsiasi effetto gravitazionale).

IL TEOREMA DELL'ENERGIA

Calcoliamo il lavoro associato al moto di un sistema di punti materiali. Per ogni punto si ha:

$$dW_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{int} d\vec{r} + \vec{F}_i^{ext} d\vec{r} = dW_i^{int} + dW_i^{ext}$$

Sommando su tutti i punti e integrando lungo le traiettorie Γ_i percorse, si ottiene il lavoro totale:

$$W = \sum_i \int_{\Gamma} \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_i \left(\int_{\Gamma} \vec{F}_i^{int} d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{ext} d\vec{r}_i \right) = W^{int} + W^{ext}$$

Questa volta il contributo delle forze interne non scompare. La struttura di dW_i implica che il lavoro delle forze interne è legato a un cambiamento delle distanze mutue tra i vari punti:

$$dW_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i = m\vec{a}_i d\vec{r}_i = m\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{d\vec{r}_i}{dt}dt = m\vec{v}_i d\vec{v}_i$$

Perciò sommando su tutti i punti e integrando:

$$W = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_i \int_A^B m\vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Big|_A^B = K_B - K_A$$

Perciò la variazione dell'energia cinetica del sistema è uguale al lavoro svolto da tutte le forze che agiscono nelle particelle dei sistemi, sia interne che esterne.

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Se le forze interne sono conservative, possiamo definire un'energia potenziale associata ad esse. In questo caso $W^{int} = -\Delta U$

In questo caso possiamo scrivere che $W = W^{int} + W^{ext} = -\Delta U + W^{ext} = \Delta K$

e quindi: $W^{ext} = \Delta K + \Delta U = \Delta E$. Si noti che se anche le forze esterne sono conservative non possiamo scrivere l'energia potenziale, in quanto essa è connessa a una configurazione di un sistema e sarebbe definito solo se tutti gli oggetti interagenti non fossero inclusi nel sistema.

Se il sistema è isolato, cioè la forza esterna nulla è zero, la conservazione dell'energia meccanica vale: $\Delta E = -\Delta U + \Delta K = 0$

$V_f = V_i$.

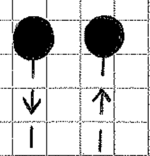
Ciò che invece può variare è l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento del centro di massa, K':

$$K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Se le forze interne sono conservative, la conservazione dell'energia meccanica si riduce a: $K_i' = K_f'$

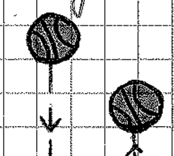
URTO ELASTICO

Si definisce come urto elastico un urto durante il quale si conserva anche l'energia cinetica del sistema. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. I due corpi rigidi che si urtano subiscono durante l'urto delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto. L'energia potenziale prima e dopo l'urto è la stessa e pertanto, se si conserva l'energia meccanica, deve conservarsi anche l'energia cinetica.



URTO ANELASTICO

Questo è il caso più comune: i punti materiali separati dopo l'urto, durante il quale si conserva la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo ma non l'energia cinetica. Una certa frazione dell'energia cinetica prima dell'urto rispetto al centro di massa, viene assorbita conservandosi, ad esempio, in calore o in energia potenziale di deformazione. Per descrivere meglio tale processo consideriamo nel sistema di riferimento del centro di massa. La particella con quantità di moto p_i nell'istante precedente all'urto vede, per effetto dell'impulso nella fase di deformazione ridursi progressivamente a zero la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva, sempre durante l'urto, la particella riprenderebbe lo stesso valore della quantità di moto se l'urto fosse elastico e cambierebbe solo il verso, invece nell'urto anelastico ciò non avviene e si definisce il coefficiente di restituzione:



$$\boxed{e = \frac{p_1'}{p_1} = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{p_2'}{p_2} = \frac{v_2'}{v_2}}$$

L'energia cinetica del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da:

$$K_{fin}' = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 e^2 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 e^2 \vec{v}_2^2 = e^2 K_{in}'$$

e la variazione relativa di energia cinetica nell'urto è $\boxed{\delta = \frac{K_{fin}' - K_{in}'}{K_{in}'} = e^2 - 1}$

Nell'urto elastico $e = 1$, $\delta = 0$, l'energia cinetica si conserva.
Nella situazione di urto anelastico il coefficiente di restituzione è sempre compreso tra zero e uno. K_{fin}' è sempre minore di K_{in}'. Nell'urto completamente anelastico $e = 0$, $\delta = -1$: tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata.

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

L'urto si chiama completamente anelastico quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$. Si conserva solo la quantità di moto. Quindi avremo

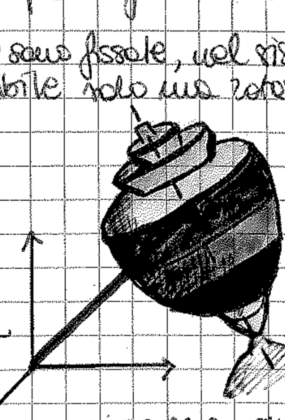
$\vec{P} = \vec{P}' \Rightarrow P_x = P_x'$ $\quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' = (m_1 + m_2) v_{cm}$

$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$ in questo caso l'unica incognita è la velocità.

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Un corpo rigido viene definito come un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare. Questa definizione si riferisce a un corpo solido ideale in quanto i corpi ordinari sono sempre deformabili.

Poiché le distanze relative tra le particelle (o le parti del corpo) sono fissate, nel sistema di riferimento del centro di massa del movimento è possibile solo una rotazione rigida del corpo attorno a un asse.

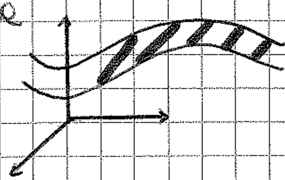


Il moto di un corpo rigido può sempre essere visto come una combinazione di traslazione e rotazione attorno a un asse.
Per esempio, il moto di una trottola può essere composto in:
- traslazione del centro di massa
- rotazione a un asse che passa attraverso il centro di massa

TRASLAZIONE DI UN CORPO RIGIDO

Un moto semplice che può compiere un corpo rigido è il MOTO DI TRASLAZIONE:

- tutti i punti del corpo descrivono esattamente la stessa traiettoria
- ogni segmento rimane parallelo a se stesso



Le grandezze significative in una traslazione sono:

✓ QUANTITÀ DI MOTO: $P = M\vec{v}_{cm}$

✓ MOMENTO ANGOLARE: $\vec{L} = \vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P}$ (il momento angolare non è indipendente dalla quantità di moto)

✓ ENERGIA CINETICA: $K = K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$

Un corpo rigido può essere trattato come una particella di massa M posta nel centro di massa. Tutte le dinamiche della traslazione sono quindi espresse dall'equazione:

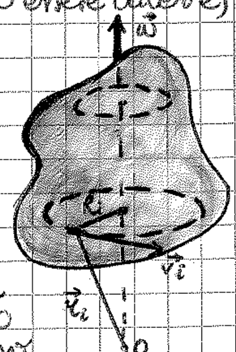
$$R = \sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

ROTAZIONE

Un secondo tipo di moto semplice è la ROTAZIONE:

- tutti i punti del corpo descrivono una traiettoria circolare i cui centri giacciono su uno stesso asse (asse di rotazione)
- tutti i punti del corpo hanno la stessa velocità angolare (ma le velocità tangenziali possono essere diverse)

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \longrightarrow \|\vec{v}_i\| = \omega_i r_i \sin\vartheta_i = \omega R_i$$



L'equazione dinamica di base del moto di rotazione è:

$$\sum \tau^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

I due moti considerati, traslazione e rotazione, sono gli unici da studiare in dettaglio, in quanto si dimostra che il moto rigido più generale è una ROTOTRASLAZIONE: ogni spostamento infinitesimo può sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime, individuate da v e ω, variabili nel tempo.

Questa dimostrazione non è richiesta.

Assumiamo l'asse z come asse di rotazione; ω è quindi parallelo all'asse z. Il polo dei momenti è il punto O sull'asse z.

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \Rightarrow \|\vec{L}_i\| = r_i m_i v_i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = m_i v_i r_i$ ma dato che: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \rightarrow v_i = \omega r_i \sin\theta_i =$ [illegible] $v_i = \omega R_i$

$\|\vec{L}_i\| = m_i \omega R_i r_i$ il vettore $\vec{L}_i$ non è parallelo alla rotazione degli assi, la sua componente z è:

$\vec{L}_{iz} = L_i \sin\theta_i = m_i \omega R_i r_i \sin\theta_i \Rightarrow L_{iz} = m_i \omega R_i^2$ ciò non dipende dalla scelta del polo

Il momento angolare totale è allora: $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ e in generale non è parallelo all'asse di rotazione: ciò vuol dire che in generale non esiste una relazione di proporzionalità tra L e ω. La proiezione di L sull'asse z è:

$$\underbrace{L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i \omega R_i^2 = (\sum m_i R_i^2)\omega}_{L_z = I_z \omega}$$

I_z momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z.

Il momento d'inerzia dipende quindi dalle masse e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione.

Riassumendo: $L_z = I_z \omega$ $\boxed{I_z = \sum m_i R_i^2}$ $[I_z] = [M][L^2] = kg\, m^2$

La componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende, tramite il coefficiente I_z, solo dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo.

	TRASLAZIONI	ROTAZIONI
INERZIA	M (massa)	I (momento di inerzia)
VELOCITÀ	v_{cm}	ω (velocità angolare)
	$\vec{p} = M \vec{v}_{cm}$	$\vec{L}_z = I_z \omega$

LA SECONDA LEGGE DI NEWTON PER UN CORPO RIGIDO

Se la componente z del momento angolare cambia con il tempo

$\frac{dL_z}{dt} = \sum \tau_z^{ext} \longrightarrow$ la componente z del momento torcente è generato solo dalle componenti delle varie forze che influenzano la rotazione.

$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = \sum \tau_z^{ext}$ se il corpo è rigido il momento d'INERZIA è COSTANTE

$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum \tau_z^{ext}$ $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ $\Rightarrow \sum \tau_z^{ext} = I_z \alpha_z$

questa è la II legge di Newton per
- corpi rigidi (I_z costante)
- assi fissati ($\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$)

$\vec{F}_z$ farebbe scivolare il corpo lungo l'asse di rotazione

$\vec{F}$ [illegible] invece un momento torcente lungo l'asse z che colpisce la rotazione del corpo.

Partendo dall'equazione $\sum \tau_z^{ext} = I_z \alpha_z$, possiamo ottenere l'accelerazione angolare $\alpha_z = \frac{\sum \tau_z^{ext}}{I_z}$

e integrando otteniamo informazioni sulla cinematica del corpo:

$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \longrightarrow d\vec{\omega} = \vec{\alpha}_z dt \Rightarrow \omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha_z(t)dt$ $\vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega(t)dt$

Se $\sum \tau_z^{ext} = 0$ allora $\alpha_z = 0$, il moto di rotazione è uniforme (velocità angolare costante)

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \\ \vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

Se $\sum \tau_z^{ext}$ = costante allora α_z = costante, il moto di rotazione è uniformemente accelerato

E integrando otteniamo $W=\int_0^{\vartheta}\tau_z d\vartheta$ (analogo a $W=\int_0^{r}\vec{F}d\vec{r}$)

La potenza sarà allora: $P=\frac{dW}{dt}=\tau_z\frac{d\vartheta}{dt}=\tau_z\omega$ (analogo a $P=\vec{F}\vec{v}$)

MOMENTO DI INERZIA

Nello studio delle rotazioni rigide il momento di inerzia ha un ruolo fondamentale: a parità di momento applicato un corpo assume un'accelerazione angolare maggiore o minore a seconda del valore del momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione.
Non ha senso parlare di momento di inerzia di un corpo di determinata forma, ma bisogna sempre specificare l'asse di rotazione a cui si fa riferimento.

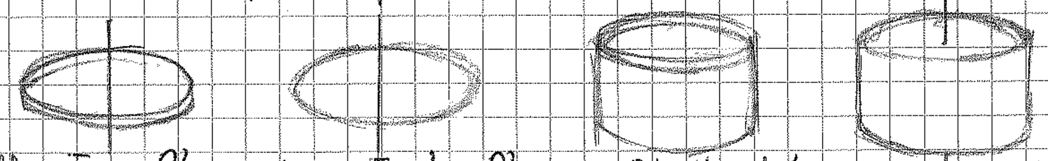
Il momento di inerzia per un corpo continuo:

$$I=\int R^2 dm=\int R^2\rho dV=\int\rho(x^2+y^2)dV$$

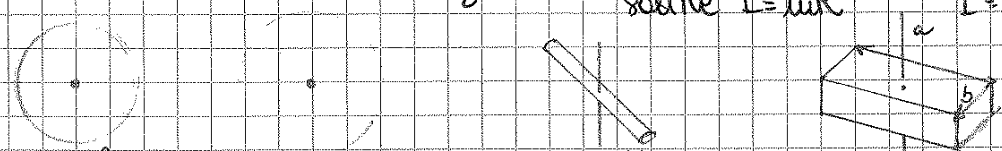
R è la distanza dell'elemento di massa m dall'asse z assunto come asse di rotazione.

Essendo il momento di inerzia additivo, cioè definito attraverso sommatorie e integrali, se si suddivide il corpo in tante parti il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti d'inerzia parziali, calcolati tutti rispetto allo stesso asse.

I momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi omogenei, rispetto agli assi indicati, che sono assi di simmetria passanti per il centro di massa.



anello $I=mR^2$ disco $I=\frac{1}{2}mR^2$ guscio cilindrico sottile $I=mR^2$ cilindro pieno $I=\frac{1}{2}mR^2$



guscio sferico sottile $I=\frac{2}{3}mR^2$ sfera piena $I=\frac{2}{5}mR^2$ asta sottile $I=\frac{1}{12}mL^2$ lastra $I=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

CALCOLO DEL MOMENTO DI INERZIA

(esempio) Calcolare il momento di inerzia di una sottile asta omogenea di massa m e lunghezza L rispetto a un asse ortogonale all'asta e passante per il suo centro.

Detta S la sezione dell'asta la massa è $m=\rho SL$.
Qui $dV=Sdx$ e $R=x$

$$I_x=\int R^2 dm=\int R^2\rho dV$$
$$=2\rho\int_0^{L/2}x^2 S dx=2S\rho\int_0^{L/2}x^2dx$$
$$=2S\rho\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{L/2}=2S\rho\frac{L^3}{24}$$

ma $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{SL}$

$\boxed{I_x}=2S\frac{M}{SL}\frac{L^3}{24}=\boxed{\frac{1}{12}ML^2}$

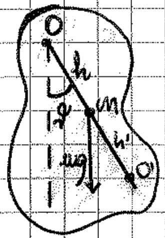
Supponiamo che non vi siano momenti torcenti esterni paralleli all'asse di rotazione: $\sum \tau_z^{ext} = 0$, avviene che:

a) non ci sono forze esterne: il sistema è isolato
b) le forze esterne sono parallele all'asse di rotazione
c) le forze esterne sono radiali (come per esempio le forze centripete)

In tutti questi casi: $\sum \tau_z^{ext} = 0 \longrightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \longrightarrow L_z = \text{costante}$ dove $L_z = I_z \omega$

PENDOLO COMPOSTO (o PENDOLO FISICO)

Si chiama pendolo composto, o pendolo fisico, ogni corpo rigido che possa oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno a un asse orizzontale non passante per il centro di massa.



Come sempre l'equazione del moto è $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}^{ext}$

Il corpo non è simmetrico rispetto all'asse di rotazione

$$L_z = I_z \omega \to \sum \tau_z^{ext} = \frac{d}{dt}(I_z \omega)$$

· Scegliamo un orientazione per l'asse di rotazione (lungo il quale θ aumenta)

· Il momento torcente delle forze esterne è quello dato dal peso che può essere pensato come se fosse applicato nel centro di massa.

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} \longrightarrow \tau_z^{ext} = -mgh\sin\theta$$

allora $-mgh\sin\theta = I_z \frac{d\omega}{dt} \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\sin\theta = 0$

Se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola $\sin\theta \approx \theta$ e si ha: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0$ che è l'equazione del moto armonico con pulsazione pari a: $\Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$ e periodo pari a:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$$

ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO ATTORNO A UN ASSE IN MOVIMENTO

Possiamo estendere la nostra analisi della dinamica del moto di rotazione ad alcuni casi in cui l'asse di rotazione si muove. Quando ciò accade, il moto del corpo è una combinazione di traslazione e rotazione.

L'energia cinetica, secondo il teorema di König è la somma di due termini:

$K = K' + K_{cm} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ dal punto di vista della dinamica, le due equazioni continuano:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z$$

l'equazione è valida persino se l'asse si sposta, a patto che:
- l'asse sia un asse di simmetria
- esso non cambi direzione

Un caso importante di traslazione e rotazione combinate, è il MOTO DI PURO ROTOLAMENTO in cui il corpo rotola senza strisciare.

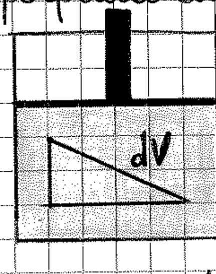
6) Hai sempre bisogno di tante equazioni quante sono le incognite. A seconda del numero di incognite può essere necessario calcolare coppie rispetto a due o più assi per ottenere sufficienti equazioni. Spesso, ci sono parecchi insiemi di forze equivalenti ed equazioni di coppie per un problema particolare, di solito non vi è un'unica combinazione di equazioni "giusta".

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 124

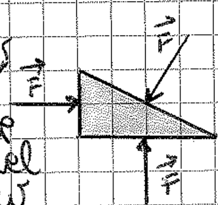
Qualsiasi parte di un fluido è libera di scivolare o fluire rispetto a una parte adiacente del fluido o alle pareti del contenitore. A questo flusso relativo si oppone un attrito viscoso, ma non può impedire il flusso stesso, può soltanto dissipare energia meccanica facendo lavoro negativo.

Consideriamo quindi un fluido in quiete, e un volume dV all'interno di esso, delimitato da alcune superfici. Se ci fosse qualche forza tangenziale su queste superfici non ci sarebbe alcun movimento del fluido.

Pertanto: se un fluido è in quiete, ogni parte di esso, del volume dV delimitato da una superficie chiusa, può essere soggetto solo a forze perpendicolari alle superficie.



Consideriamo come dV il volume del fluido illustrato. Se il fluido è in quiete allora la forza risultante che agisce su dV deve essere zero. Trascuriamo per il momento il peso del fluido. Le forze che agiscono su di esso possono essere solo normali (perpendicolari) alle superficie.

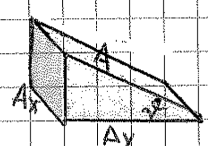


Poiché dV è a riposo: $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} + \vec{F}_x + \vec{F}_y = 0$

in componenti:

$$\begin{cases} -F\sin\vartheta + F_x = 0 \\ -F\cos\vartheta + F_y = 0 \end{cases} \rightarrow F_x = F\sin\vartheta, \quad F_y = F\cos\vartheta$$

Ma anche: $A_x = A\sin\vartheta$
$A_y = A\cos\vartheta$



Così che:

$$\frac{\|\vec{F}_x\|}{A_x} = \frac{F\sin\vartheta}{A\sin\vartheta} = \frac{F}{A} \qquad \frac{\|\vec{F}_y\|}{A_y} = \frac{F\cos\vartheta}{A\cos\vartheta} = \frac{F}{A}$$

La forza per unità di superficie che agisce sul volume dV è la stessa in tutte le direzioni! Quindi per qualsiasi superficie nel fluido, la forza per unità di superficie è la stessa.

Definiamo PRESSIONE IDROSTATICA in un fluido la quantità:

$$p = \frac{dF}{dA}$$

dF = forza che agisce sull'elemento di superficie dA
dA = elemento della superficie che delimita un volume di fluido

La pressione è uno scalare, le sue dimensioni sono:

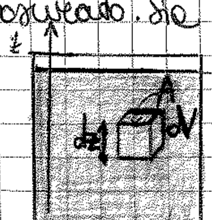
$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{[M][L][T]^{-2}}{[L]^2} = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$$

Nel sistema Internazionale l'unità di misura è il Pascal: $1\ Pa = \frac{1N}{1m^2}$

Fisicamente parlando la pressione è dovuta alle collisioni delle molecole del fluido contro immaginari "muri" del volume dV.

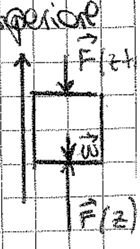
Dipendenza della pressione con la profondità in un fluido incomprimibile:

Prendiamo ora in considerazione il peso del fluido di volume dV, che abbiamo finora trascurato. Se dV è riposo, chiamiamo: $-p$ la pressione sulla superficie inferiore del
$-p+dp$ la pressione sulla superficie superiore



$\sum \vec{F} = 0$

$\vec{F}(z+dz) + \vec{F}(z) + \vec{w} = 0$



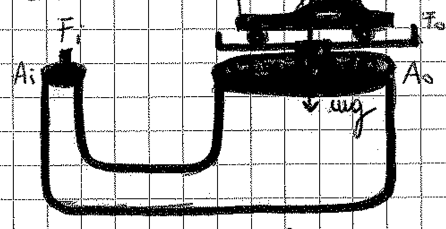
in componenti

dove $\vec{w} = \rho g dV = \rho g A dz$ $\qquad + pA - (p+dp)A - \rho g dz A = 0$

Se z aumenta ($dz>0$) la pressione diminuisce $\qquad dp = -\rho g dz \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$
Se z diminuisce ($dz<0$) la pressione aumenta

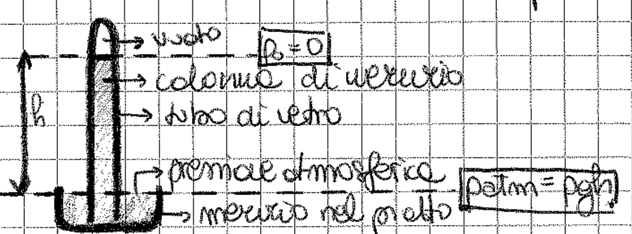
esempio - l'elevatore idraulico (o torchio)

L'elevatore idraulico è un dispositivo formato da due cilindri, uno di area di base A_1, l'altro di area di base $A_2 > A_1$. I cilindri, contenenti ciascuno un pistone, sono collegati attraverso un tubo e riempiti con un fluido.
La forza F_i applicata è piccola ma crea una pressione $p = \frac{F_i}{A_i}$ che può essere piuttosto grande in quanto anche A_i è piccola.
Alla stessa altezza, all'altro lato del sistema la pressione deve essere la stessa, ma essendo qui la superficie del cilindro molto più grande, la forza risultante sarà: $F_o = pA_o = \frac{A_o}{A_i} F_i$



esempio - il barometro a mercurio e la pressione atmosferica

Il barometro a mercurio, inventato da Torricelli, consiste in un lungo tubo di vetro, chiuso a una estremità, riempito con mercurio e poi capovolto in un piatto di mercurio. Lo spazio sopra la colonna contiene solo vapore di mercurio la cui pressione è trascurabile, per cui la pressione p nella parte superiore della colonna di mercurio è praticamente nulla.



La pressione atmosferica è uguale al peso della colonna di mercurio:

$$p_{atm} = \rho g h$$

Al livello del mare $h = 0,76$ m da cui $\rho_{Hg} = 13,95 \cdot 10^3$ kg/m^3 si ha che:

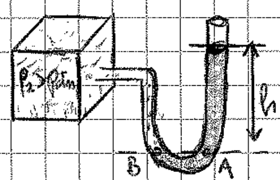
$$p_{atm} = 1,013 \cdot 10^5 \ Pa$$

In altre unità di misura, p_{atm} è:

- 1 atm
- 1,013 bar (1 bar = 10^5 Pa)
- 760 mmHg = 760 Torr

esempio - manometri a U

Il manometro a pressione più semplice è il manometro a tubo aperto. Il tubo a U contenente un liquido di densità ρ, spesso mercurio o acqua. L'estremità sinistra del tubo è collegata al contenitore in cui la pressione p_2 deve essere misurata. La pressione in B è la stessa del contenitore così che $p_B = p_2$.



La pressione in A è uguale alla pressione atmosferica + il peso della colonna del liquido dell'altezza h:

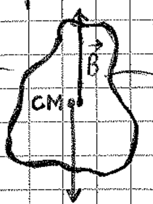
$$p_A = p_{atm} + \rho g h$$

Comunque, $p_A = p_B$ perché sono allo stesso livello così che

$$p_2 = p_{atm} + \rho g h$$

- Se $\rho > \rho'$ la forza risultante è diretta verso l'alto: se rilasciato, il corpo salirà in superficie e galleggerà;
- Se $\rho < \rho'$ la forza risultante è diretta verso il basso: se rilasciato, il corpo cadrà verso il fondo del contenitore
- Se $\rho = \rho'$ la forza netta è zero e il corpo rimarrà in equilibrio senza cadere né risalire in superficie.

Esempio - iceberg



Qual è il volume di un iceberg che è al di sopra della superficie dell'acqua?
Calcoliamo di trovare le forze che agiscono sull'iceberg.
NOTA: Per un oggetto mobile, il peso è applicato nel centro della massa dell'oggetto stesso, la forza di galleggiamento è applicata al centro di massa della parte immersa (centro di carena). L'iceberg è a riposo in modo che la somma di tutte le forze deve essere zero.

$\Sigma \vec{F} = \vec{B} + m\vec{g} = 0$ lungo l'asse y, si ha: $\Sigma F_y = +\rho_w V_w g - mg = \rho_w V_w g - \rho_i V_i g = 0$

Poiché l'iceberg non è completamente immerso, il volume di acqua spostata V_w non è uguale al volume di ghiaccio V_i

$\Rightarrow \rho_w V_w - \rho_i V_i = 0 \Rightarrow \frac{V_w}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_w}$ è la frazione di volume immerso

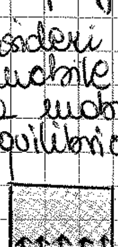
La frazione di volume sopra la superficie è allora: $\frac{V_i - V_w}{V_i} = 1 - \frac{V_w}{V_i} = 1 - \frac{\rho_i}{\rho_w}$

TENSIONE SUPERFICIALE

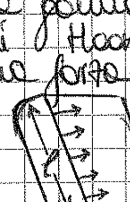
La tensione superficiale sorge perché le molecole del liquido esercitano forze attrattive l'una con l'altra. La forza netta su una molecola all'interno del volume del liquido è zero, ma una molecola di superficie viene aspirata nel volume. Pertanto il liquido tende a minimizzare la sua superficie.

Effetti sulla vita quotidiana:
- La tensione superficiale impedisce a una moneta di affondare. La moneta è più densa dell'acqua quindi non può rimanere in superficie solo grazie alla forza di Archimede.
- Le gocce di pioggia sulla superficie di una foglia. L'acqua aderisce debolmente alla foglia e fortemente a se stessa, così che l'acqua si trasforma in gocce. La tensione superficiale conferisce loro forma quasi sferica, perché una sfera ha il minor rapporto possibile tra superficie e volume.
- Gli insetti d'acqua possono camminare sull'acqua proprio grazie alla tensione superficiale.

Si consideri ora un filo metallico a forma di U, sottile con una piccola barra mobile libera di scorrere su di esso. Immerso in acqua e sapone la barra mobile sarà attratta verso il lato superiore del telaio. Per mantenere in equilibrio possiamo appendere un peso (w) ad essa. Si noti che possiamo ottenere un equilibrio statico con la barra in qualsiasi posizione, qualunque sia l'area della superficie del liquido. Pertanto la membrana liquida non si comporta come una molla, perché la forza di ripristino non obbedisce alla legge di Hooke.



All'equilibrio, il peso w deve essere pari a una forza F dovuta all'attrazione molecolare.
Se l è la lunghezza della barra, si ha che la forza F è proporzionale a l. Definiamo tensione superficiale il rapporto: $\vec{\tau} = \frac{F}{2l}$



dove $2l$ è la lunghezza totale su cui

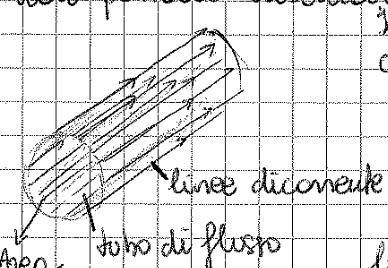
si vede che se $\theta < 90$ il liquido bagna il tubo e risale in esso ($h>0$)
se $\theta > 90°$ il liquido non bagna il tubo ed è depresso ($h<0$)

FLUSSO DEL FLUIDO

Il flusso di un fluido può essere estremamente complesso, come dimostrano le correnti rapide di un fiume o le fiamme vorticose di un falò. Ma alcune situazioni possono essere idealizzate con modelli semplici. Un fluido ideale è incomprimibile (cioè la sua densità non varia) e non ha attrito interno (cioè viscosità).
I liquidi sono incomprimibili nella maggior parte dei casi. L'attrito interno provoca sollecitazioni di taglio quando due strati adiacenti di fluido si muovono in modo reciproco, come quando il fluido scorre all'interno di un tubo o intorno a un ostacolo. In alcuni casi possiamo trascurare queste forze di taglio rispetto alle forze che derivano dalle differenze di gravitazione e di pressione.

FLUSSO COSTANTE

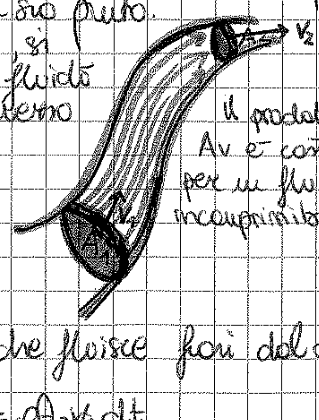
Il percorso di una singola particella in un fluido in movimento è detto linea di corrente.
Se il modello di flusso complessivo non cambia con il tempo, il flusso si chiama flusso costante. In un flusso costante, ogni elemento di fluido che passa attraverso un punto dato segue la stessa linea di corrente. In questo caso la "mappa" della velocità del fluido in vari punti dello spazio rimane costante anche se la velocità di una particella particolare può variare in modulo e direzione durante il suo moto.
Le linee di corrente che passano attraverso il bordo di un elemento di superficie immaginario, formano un tubo chiamato tubo di flusso. Nessun fluido può attraversare le pareti laterali di un tubo di flusso, i fluidi in diversi tubi di flusso non possono mischiarsi.



Il flusso costante è anche detto laminare a causa degli strati di scorrimento adiacenti del fluido uniformemente accostati l'uno all'altro.

L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Si consideri una porzione di un tubo di flusso tra due sezioni trasversali stazionarie con area A_1 e A_2. Nessun liquido fluisce dentro o fuori attraverso i lati del tubo perché la velocità del fluido è tangente alla parete in ogni suo punto.
Durante un piccolo intervallo di tempo dt, il fluido a A_1 si muove di una distanza $ds_1 = v_1 dt$, quindi un cilindro di fluido con altezza ds_1 e volume $dV_1 = A_1 v_1 dt$ fluisce nel tubo attraverso A_1. Durante questo stesso intervallo, un cilindro di volume $dV_2 = A_2 v_2 dt$ fuoriesce dal tubo attraverso A_2. Sia il liquido incomprimibile (la densità ha lo stesso valore ovunque) e sia dm_1 la quantità di fluido che scorre nel tubo attraverso A_1 durante dt:



Il prodotto Av è costante per un fluido incomprimibile

$dm_1 = \rho A_1 v_1 dt$ e dm_2 la massa del liquido che fluisce fuori dal tubo attraverso A_2 durante dt:

$$dm_2 = \rho A_2 v_2 dt$$

In un flusso costante la massa totale nel tubo è costante, con

$$dm_1 = dm_2 \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ}$$ (per fluidi incomprimibili)

La quantità $Q = Av$ rappresenta tutto il volume di fluido che è passato attraverso A in un secondo, tale quantità è detta PORTATA del tubo di flusso.

$$Q = \frac{dV}{dt} = Av \qquad [Q] = [A][v] = [L]^3[T]^{-1}$$ SI unità di misura: m^3/s

$dW_g + dW_p = dK$

$$\underbrace{(\rho dV)g(z_1-z_2) + (p_1-p_2)dV = \boxed{\frac{1}{2}(\rho dV)[v_2^2-v_1^2]}}$$

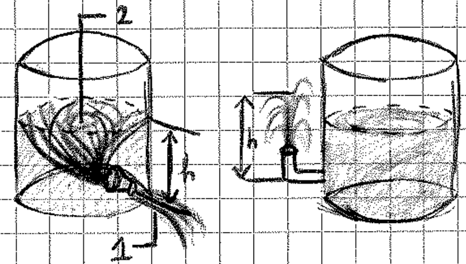
In un flusso costante di un fluido incomprimibile e non viscoso, la pressione, la velocità del fluido e l'elevazione in due punti sono legate da tale relazione

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$ EQUAZIONE DI BERNOULLI

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

Applicazioni dell'equazione di Bernoulli:

1) velocità di flusso



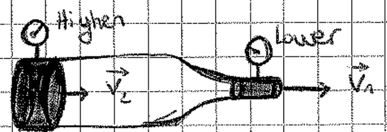
La tanica è aperta e aperta nella superficie. Bisogna trovare un'espressione per la velocità del liquido in uscita dal tubo.
Applichiamo l'equazione di Bernoulli al punto 1 e 2 della figura.

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad p_1 = p_2 = p_{atm} \mid v_1 = 0 \mid (z_2 - z_1) = h$$

$$p_{atm} = p_{atm} + \rho g (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \implies v_2 = \sqrt{2gh}$$

Se il tubo ha una curvatura di fuoriuscita verso l'alto, un fluido non viscoso raggiungerebbe l'altezza h.

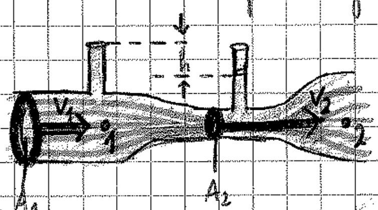
2) tubo orizzontale



Se un fluido ideale scorre attraverso un tubo orizzontale, a causa dell'equazione di continuità, la velocità è maggiore dove la sezione è più piccola: $A_1v_1 = A_2v_2 \rightarrow v \propto \frac{1}{A}$
a causa dell'equazione di Bernoulli, poiché z = costante,
la sua pressione è minore quando la velocità è maggiore: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$

Segue che la pressione è maggiore quando la sezione è più larga.

3) tubo di Venturi



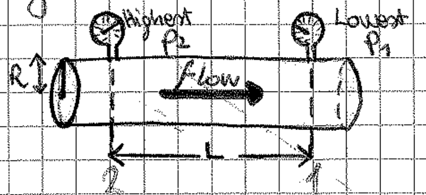
Un misuratore di Venturi viene utilizzato per misurare la velocità del flusso in un tubo. La parte stretta del tubo è detta gola. Si derivi un'espressione per la velocità di flusso v_1 in termini di aree in sezione trasversale e la differenza nell'altezza h del livello del liquido nei due tubi verticali.
Il tubo è orizzontale, così che $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$
ma per l'equazione di continuità:

$$A_1v_1 = A_2v_2 \rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1, \text{ perciò: } p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left[\frac{A_1}{A_2}v_1\right]^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] \longrightarrow \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$$

LEGGE DI POISEUILLE

Si consideri un tubo orizzontale con raggio costante R. Siano p_1 e p_2 rispettivamente i valori della pressione applicata alle estremità della lunghezza L del tubo. Il flusso sia laminare (costante).



La portata del volume $Q = \frac{dV}{dt}$ attraverso questa lunghezza di tubo è data da:

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_2 - p_1)}{8 \eta L}$$

TURBOLENZA

Quando la velocità di un certo fluido che scorre supera un certo valore critico, il flusso non è più costante. Il flusso diventa estremamente irregolare e complesso e cambia continuamente col il tempo, non vi è un modello di stato stazionario. Questo flusso caotico e irregolare si chiama TURBOLENZA.

- L'equazione di Bernoulli non è applicabile alle regioni in cui vi è turbolenza perché il flusso non è costante.
- Maggiore è la viscosità maggiore è la tendenza per il fluido di fluire in fogli o lamine ed è quindi più probabile che il flusso sia costante (laminare).
- Per un flusso di una certa viscosità, la velocità di flusso è un fattore determinante per l'insorgere di una turbolenza. Un modello di flusso stabile a bassa velocità improvvisamente diventa instabile quando viene raggiunta la velocità critica.
- Nell'aorta il normale flusso del sangue è laminare, ma un piccolo disturbo come una patologia cardiaca può provocare una turbolenza. Le turbolenze producono rumore, per questo è utile fare diagnosi ascoltando il flusso del sangue con uno stetoscopio.

Anche la legge di Poiseuille vale solo per il flusso laminare. Per un tubo cilindrico di raggio R, la transizione tra flusso laminare e turbolento si verifica quando il parametro $\mathcal{R}$ (numero di Reynold) dato da: $\mathcal{R} = \frac{\rho v R}{\eta}$ diventa uguale al valore critico di 1200.
La velocità critica in questo caso è allora:

$$v_c = 1200 \frac{\eta}{\rho R}$$

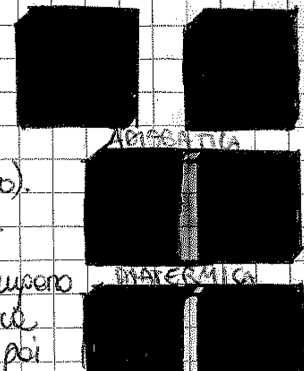
Per $v > v_c$ avviene una repentina diminuzione del flusso volumetrico anche se la differenza di pressione ai capi del tubo non cambia. Il modello di flusso è instabile. Aumentando la differenza di pressione si genera un nuovo regime stabile di flusso turbolento. Con queste condizioni la legge di Poiseuille deve essere cambiata in:

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{K_1}{R} \frac{\rho v_m^2}{2}$$

dove v_m è la velocità media del fluido, K_1 è un fattore di proporzionalità denominato COEFFICIENTE DI RESISTENZA, che è costante su un'ampia gamma di valori di $\mathcal{R}$ ($1200 - 10^5$).
Si noti che in un flusso turbolento la differenza di pressione è necessaria per una data velocità di flusso v che sia proporzionale a v^2 e non v come nel flusso laminare.

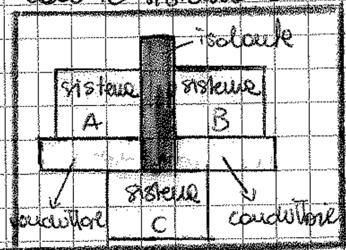
PARETI ISOLANTI E CONDUTTRICI, EQUILIBRIO TERMICO

Supponiamo di avere due sistemi isolati A e B. Ognuno di loro è in uno stato di equilibrio (le sue variabili termodinamiche non cambiano). Cosa succede se li mettiamo a contatto? Ciò dipende dalla parete che li separa.
Se la parete è ADIABATICA, o perfettamente isolante, se A e B persistono nei loro stati di equilibrio (in generale, diversi tra loro). Ciò significa che le variabili termodinamiche dei due sistemi non cambiano.



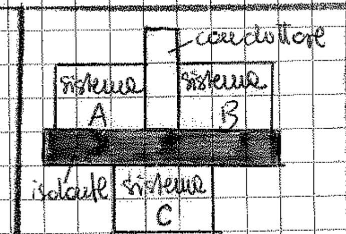
Se la parete è DIATERMICA o perfettamente conduttrice se A e B raggiungono uno stato di equilibrio comune, diverso da quelli iniziali. Ciò significa che le variabili termodinamiche del sistema iniziale cambiano, per poi diventare di nuovo stabili e diversi valori di X', Y', Z'.
Chiamiamo EQUILIBRIO TERMICO lo stato, descritto da valori costanti delle variabili termodinamiche, che due o più sistemi raggiungono quando vengono messi in contatto attraverso una parete di conduzione.

a) Se i sistemi A e B sono in equilibrio termico con il sistema C



Prendiamo in considerazione tre sistemi, A, B e C, che non sono inizialmente in equilibrio termico.
Li circondiamo con una scatola isolante in modo che possano interagire solo tra loro. Poi separiamo A e B con una parete isolante, ma lasciamo che il sistema C interagisca con entrambi i sistemi, attraverso delle pareti conduttrici.
Aspettiamo che venga raggiunto l'equilibrio termico (cioè quando le variabili termodinamiche non variano più). In questo modo sia A che B sono in equilibrio termico con C, ma sono anche in equilibrio termico tra loro? Per scoprirlo isoliamo il sistema C dai sistemi A e B con un'ideale parete isolante e sostituiamo la parete tra A e B con una parete conduttrice.
Tale esperimento non dimostra alcun cambiamento, il che vuol dire che se C è inizialmente in equilibrio termico con A e B allora A e B sono anch'essi in equilibrio termico tra loro.

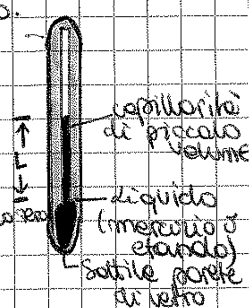
b) in seguito i sistemi A e B sono in equilibrio termico l'uno con l'altro



TEMPERATURA

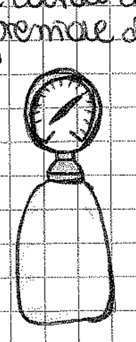
Il concetto di temperatura ruota attorno all'idea di "caldo" e "freddo" basato sul nostro senso del tatto. Tutto ciò è piuttosto vago e spesso i sensi possono essere ingannati, ma molte proprietà della materia dipendono dalla temperatura.

a) cambiamenti della temperatura causano cambiamenti nel volume del liquido.



La lunghezza di un'asta metallica, la pressione del vapore in una caldaia, la capacità di un filo di condurre corrente elettrica, e il colore di un oggetto incandescente - tutte queste proprietà dipendono dalla temperatura. Per usare la temperatura come misura del caldo e del freddo, abbiamo bisogno di costruire una scala termica. Per farlo possiamo usare qualsiasi proprietà misurabile di un sistema che varia a seconda del calore. Sia X tale quantità chiamata PROPRIETÀ TERMOMETRICA.
Nella figura a) X è la lunghezza della colonna di liquido nel tubo capillare che aumenta quando il liquido diventa più caldo. Nella figura b) X è la pressione del gas contenuto in un cilindro a volume costante. La pressione, misurata dal manometro, aumenta o diminuisce appena il gas diventa più caldo o più freddo. In ogni caso, X varia con il caldo o con il freddo quindi può essere usato per creare un termometro.

b) cambiamenti della temperatura causano cambiamenti della pressione del gas



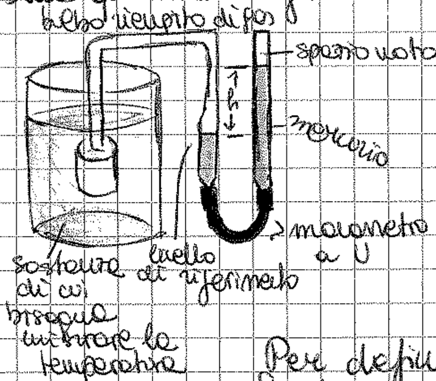
Definizione dello strumento e del processo di misura.
Una volta scelta la grandezza di X che dipende dal calore, cerchiamo di associare ad ogni valore di X un valore arbitrario della temperatura

TEMPERATURA EMPIRICA

Supponiamo di confrontare la temperatura misurata dal nostro termometro con quella misurata da un altro termometro (basato su un'altra proprietà termometrica, per esempio la pressione di un gas a volume costante). Quando si esegue la calibrazione dei due termometri in modo che essi concordino a 0° e 100°, non è detto che essi coincidano nelle temperature intermedie. Questo perché abbiamo assunto la proprietà termometrica come lineare alla temperatura, ma non è così!
Inoltre, anche se usiamo due termometri dello stesso tipo ma basati su materiali diversi, noteremo qualche discordanza nelle temperature intermedie. Qualsiasi scala di temperatura così definita dipende sempre da una qualche specifica proprietà del materiale usato. Questa è la ragione per cui queste scale vengono definite EMPIRICHE.

TEMPERATURA ASSOLUTA

Ora vedremo che è possibile definire una scala di temperatura che non dipende dal materiale utilizzato. Usiamo un termometro a gas a volume costante, la proprietà termometrica è la pressione, che aumenta con la temperatura.
Una quantità di gas viene posta in un bulbo termicamente conduttore. Il volume può essere mantenuto costante sollevando o abbassando il braccio destro del manometro a U in modo che il livello del mercurio sul braccio sinistro sia sempre al livello di riferimento.



La pressione è data da: $p = \rho g h$ [ρ è la densità del mercurio]

La proprietà termometrica che sfruttiamo per definire la temperatura è, naturalmente, la pressione del gas. Si assume che: $T = \alpha \cdot p$ [dove α è una costante di proporzionalità]

Per definire α abbiamo bisogno di un solo punto di riferimento. Scegliamo il punto triplo dell'acqua che si verifica a 0,01 °C e a una pressione di 4,58 mm Hg in cui:

$T_{tr} = \alpha \cdot p_{tr}$
- T_{tr} è definito come $T_{tr} = 273{,}16\,K$;
- p_{tr} viene misurato. Ha un valore ben definito per un dato termometro contenente una determinata quantità di gas.

$\alpha = \dfrac{T_{tr}}{p_{tr}}$

Una volta definito α, la temperatura di un corpo è definita da:

$T = \dfrac{T_{tr}}{p_{tr}}\, p$ dove p è la pressione del gas quando il termometro è messo in contatto con il corpo.

Questa temperatura dipende ancora dal gas utilizzato nel termometro: se cambiamo il gas usato, l'intera curva è diversa e quindi anche la temperatura rilevata.
Supponiamo che il termometro contenga azoto (N_2). Sia p_{tr} la pressione al punto triplo. Con questa funzione costruiamo la funzione termometrica. Poi abbiamo messo il termometro a contatto con il sistema la cui temperatura deve essere misurata (S), si legge la pressione e si ottiene T_1. Ora cerchiamo di diminuire la quantità di gas (= numero di moli) nel bulbo: la pressione al punto triplo è ora ancora più bassa di prima e anche la temperatura. Sia essa T_2. Diminuendo ancora il numero di moli dal bulbo, p_{tr} diminuisce ulteriormente come anche la temperatura del sistema. Traccio la temperatura misurata del sistema S come una funzione della pressione al punto triplo (si ottiene la curva in figura).
Se ora sostituiamo al posto dell'azoto nel termometro l'elio, e ripetiamo le stesse procedure, otteniamo altri valori di p_{tr} e altri valori di temperatura: riducendo il numero di moli nel bulbo, p_{tr} diminuisce ma la temperatura misurata aumenta.