NUMERO: 795

DATA: 20/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Antonellini

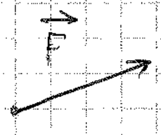
MATERIA: Fisica I + Eserc.

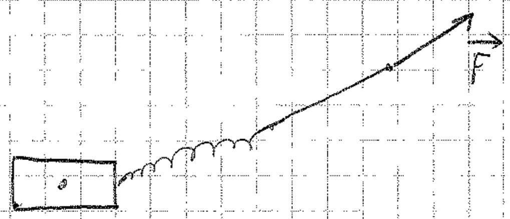
Prof. Agnello

STATICA e DINAMICA

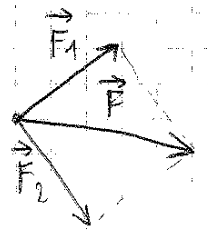
21/03/2013

FORZA



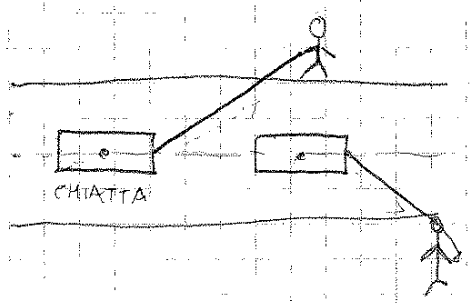


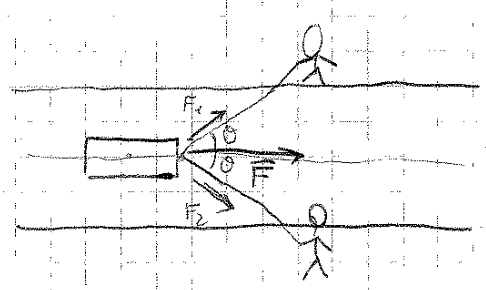
Ogni azione è direzionale, imprime una direzione allo spostamento: ha anche verso



$$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2$$

F è ancora una forza: v. ls.





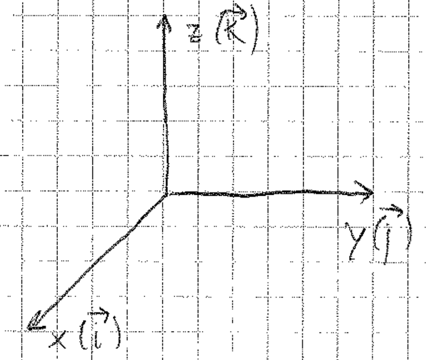
→ mezzeria

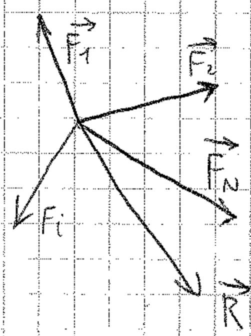
$F_1 = F_2$

$$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2$$

l'operazione di somma, non è dunque astratta

SOMMA di N FORZE CONCORRENTI





$$\vec{F_i} = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k} \qquad i = 1, 2, \dots N$$

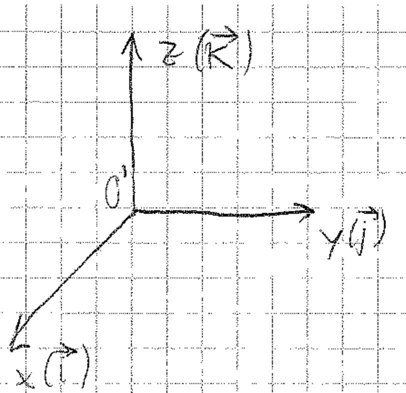
$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_N} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F_i})$$

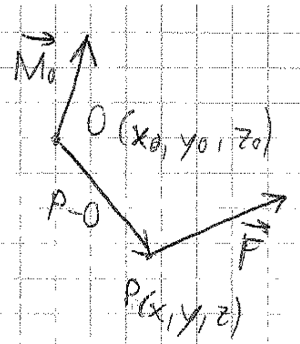
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F_i}) = \sum_{i=1}^{N} (F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (F_{ix}\vec{i}) + \sum_{i=1}^{N} (F_{iy}\vec{j}) + \sum_{i=1}^{N} (F_{iz}\vec{k}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} F_{ix}\right)\vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{N} F_{iy}\right)\vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{N} F_{iz}\right)\vec{k} =$$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$





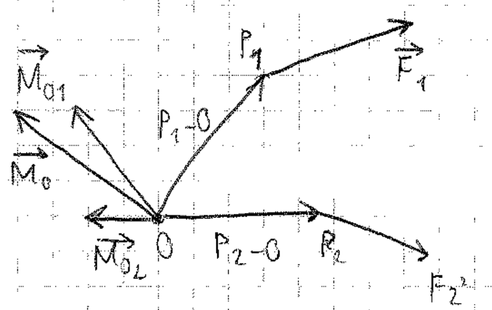
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$(P-O) = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

$$\vec{M}_0 = (P-O) \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= [(y-y_0)F_z - (z-z_0)F_y]\vec{i} + [(z-z_0)F_x - (x-x_0)F_z]\vec{j} +$$
$$+ [(x-x_0)F_y - (y-y_0)F_x]\vec{k}$$

I MOMENTI POLARI si SOMMANO



$$\vec{M}_{01} = (P_1-O) \wedge \vec{F}_1$$

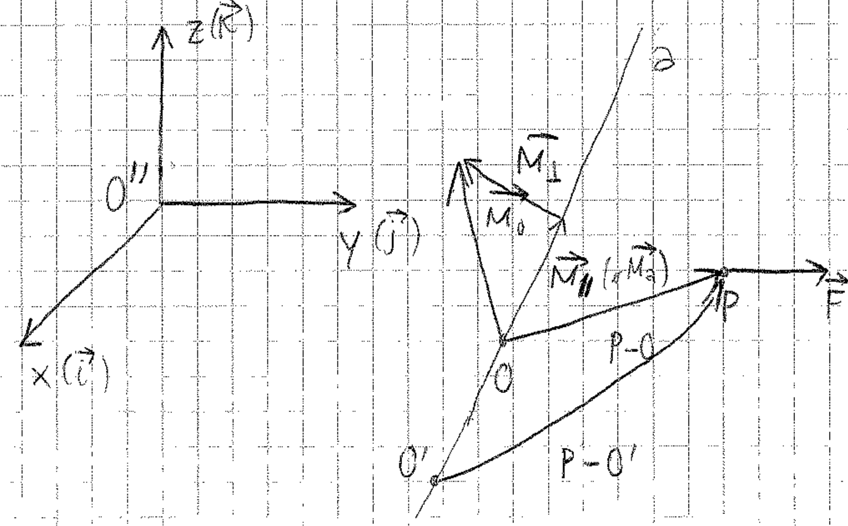
$$\vec{M}_{02} = (P_2-O) \wedge \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{02}$$

Più in generale, con N momenti polari:

$$\boxed{\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{N} [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i]}$$

MOMENTO ASSIALE di una FORZA



$$\vec{M}_0 = \vec{M}_\perp + \vec{M}_a$$

$\vec{M}_a$: momento assiale della forza $\vec{F}$ calcolato rispetto alla retta a
(attitudine della forza a produrre una rot. attorno alla retta)

Verifichiamo che $\vec{M}_a$ NON dipende dal Punto sulla Retta

$$\vec{M}_{O'} = (P-O') \wedge \vec{F} = \qquad P-O' = (P-O) + (O-O')$$

$$= (P-O) \wedge \vec{F} + (O-O') \wedge \vec{F} = \vec{M}_0 + (O-O') \wedge \vec{F} =$$

$$= \vec{M}_\perp + \vec{M}_a + (O-O') \wedge \vec{F} = \vec{M}_a + \vec{M}_\perp + \vec{M}_\perp'$$

La Componente parallela NON CAMBIA

cambia solo quella PERPENDICOLARE

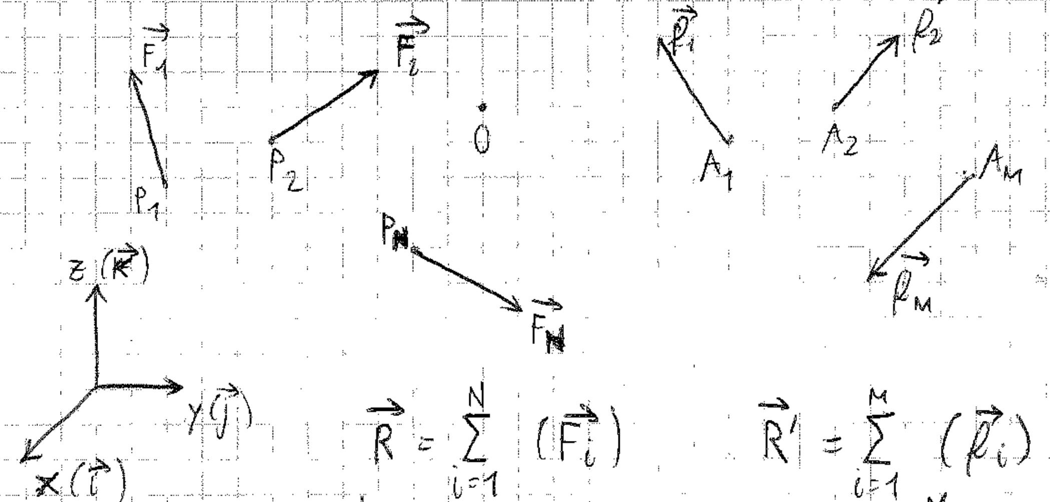
(la componente di momento che contribuisce è perpendicolare a $(O-O')$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 436

SOMMA di 2 FORZE PARALLELE

04/04/2013

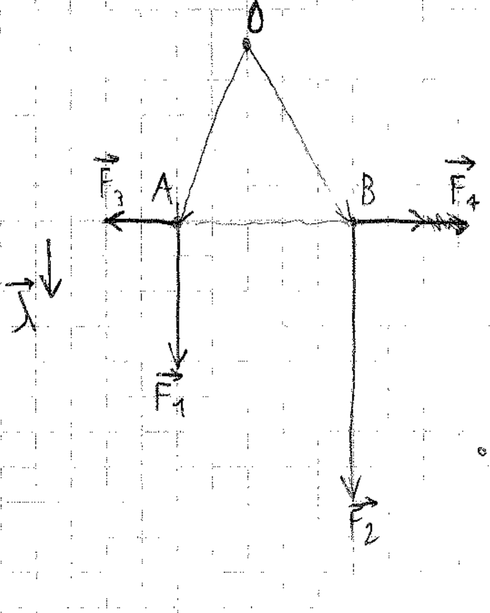
"Due Sistemi di forze sono equivalenti quando hanno la stessa risultante $\vec{R}$ e lo stesso momento risultante $\vec{M}_0$ calcolato rispetto ad un punto qualsiasi"



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i) \qquad \vec{R}' = \sum_{i=1}^{M} (\vec{f}_i)$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{N} [(P_i - 0) \wedge \vec{F}_i] \qquad \vec{M}_0' = \sum_{i=1}^{M} [(A_i - 0) \wedge \vec{f}_i]$$

$$\vec{R} = \vec{R}' \qquad \vec{M}_0 = \vec{M}_0'$$



$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{\lambda} \qquad \vec{F}_2 = F_2 \vec{\lambda}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_1 \vec{\lambda} + F_2 \vec{\lambda} =$$
$$= (F_1 + F_2)\vec{\lambda} = \vec{R} = R\vec{\lambda}$$

$$R = F_1 + F_2$$

- Inseriamo ~~ora~~ le forze $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ tali che:

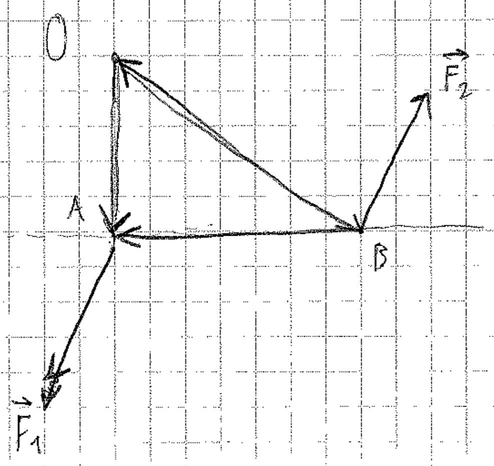
$$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0 \implies \vec{F}_4 = -\vec{F}_3$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad \vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$$

$$\vec{M}_0 = (A-0) \wedge \vec{F}_1 + (B-0) \wedge F_2$$

$$\vec{M}_0' = (A-0) \wedge \vec{F}_1 + (B-0) \wedge \vec{F}_2 + (A-0) \wedge \vec{F}_3 + (B-0) \wedge \vec{F}_4 =$$
$$= \vec{M}_0 + (A-0) \wedge \vec{F}_3 + (B-0) \wedge \vec{F}_4$$

COPPIE di FORZE



$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0 \implies \vec{F_2} = -\vec{F_1}$$

$$\vec{M_0} = (A-O) \wedge \vec{F_1} + (B-O) \wedge \vec{F_2} =$$

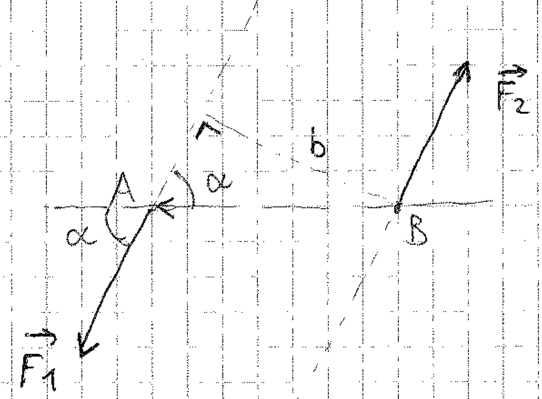
$$= (A-O) \wedge \vec{F_1} - (B-O) \wedge \vec{F_1} =$$

$$= (A-O) \wedge \vec{F_1} + (O-B) \wedge \vec{F_1} =$$

$$= [(A-O) + (O-B)] \wedge \vec{F_1} =$$

$$= (A-B) \wedge \vec{F_1}$$

Il momento ~~polage~~ di una coppia di forze è una vettore NON APPLICATO



$$\|\vec{M_0}\| = |A-B| \cdot F_1 \sin\alpha = F_1 \cdot b$$

$$M_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i F_i\right) \vec{i} \wedge \vec{\lambda} + \left(\sum_{i=1}^{N} y_i F_i\right) \vec{j} \wedge \vec{\lambda} + \left(\sum_{i=1}^{N} z_i F_i\right) \vec{k} \wedge \vec{\lambda}$$

$$\vec{M}_0' = (C-0) \wedge \vec{R} = (x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k}) \wedge R\vec{\lambda} =$$

$$= x_c R \vec{i} \wedge \vec{\lambda} + y_c R \vec{j} \wedge \vec{\lambda} + z_c R \vec{k} \wedge \vec{\lambda}$$

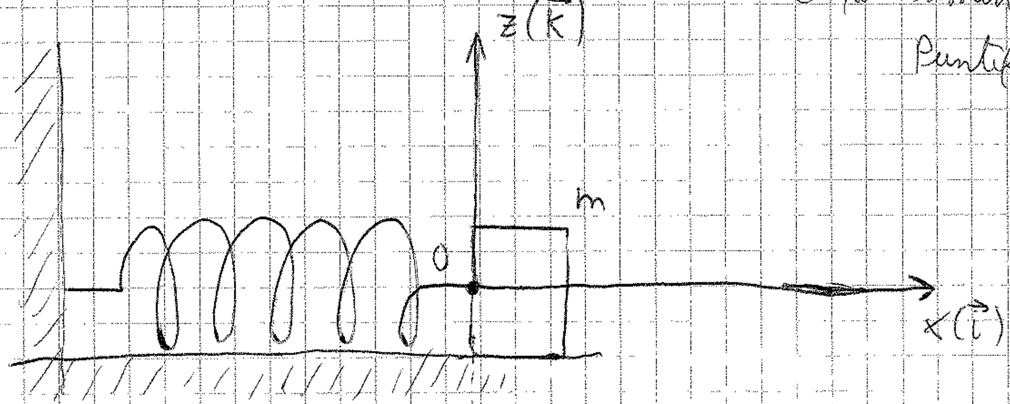
$$x_c R = \sum_{i=1}^{N} (x_i F_i) \qquad x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i F_i)}{\sum_{i=1}^{N} F_i}$$

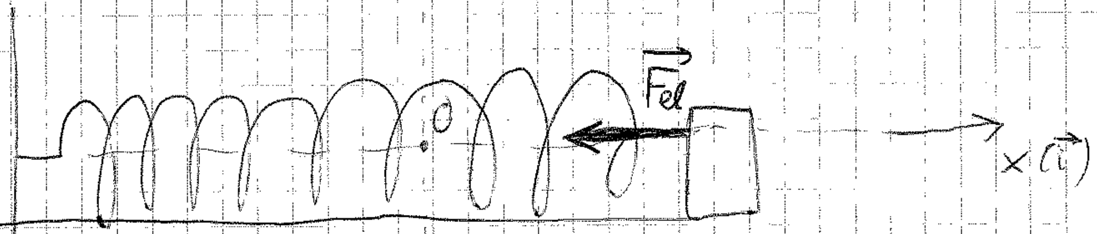
$$y_c R = \sum_{i=1}^{N} (y_i F_i) \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i F_i)}{\sum_{i=1}^{N} F_i}$$

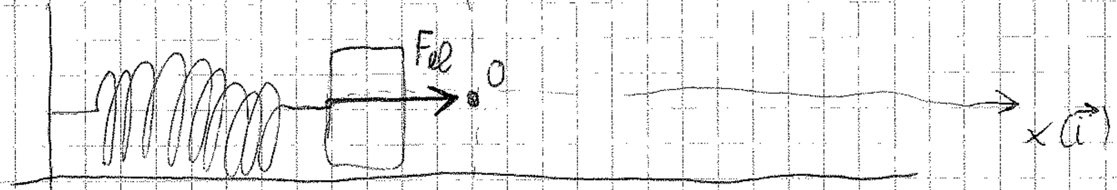
$$z_c R = \sum^{N} (z_i F_i) \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} (z_i F_i)}{\sum_{i=1}^{N} F_i}$$

FORZA ELASTICA

Corpo assunto come Puntiforme







$$F_{el} = -\underbrace{K}_{\text{COSTANTE ELASTICA della MOLLA}} x \vec{i}$$

$$[K] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{N}{m} = Kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{m} = Kg \cdot s^{-2}$$

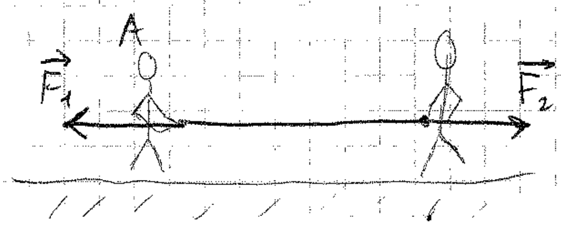
- discorde col versore i con allungamento
- Concorde " " i " compressione

\+ è alto K, + la molla è rigida e devo imprimere maggiore forza x spostare l'oggetto

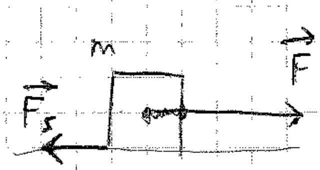
FORZE di ATTRITO

1) STATICO
2) DINAMICO

1) F. di ATTR. STATICO



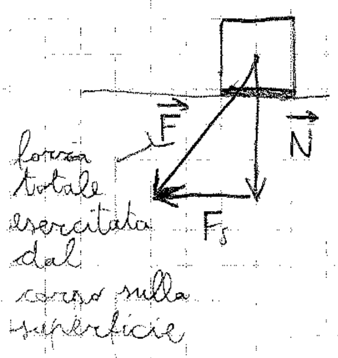
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$$



Il corpo non si muove perché

$$\vec{F} + \vec{F_s} = 0$$

Se aumento $\vec{F}$ e il corpo non si muove, s'intende che la F_s è aumentata; il corpo si muoverà solo quando F sarà superiore alla forza di attrito stat. max



$\vec{N}$ è perpendicolare alla sup. di contatto

$$F_s = \underbrace{f_s}_{\text{Coeff. di Attrito statico (adimensionale)}} \cdot N$$

f_s dipende ~~da~~:
1) dalla natura dei materiali per il 90%
2) dalla rugosità delle superfici per il 10%

→ f_s NON dipende dall'estensione della superficie di contatto

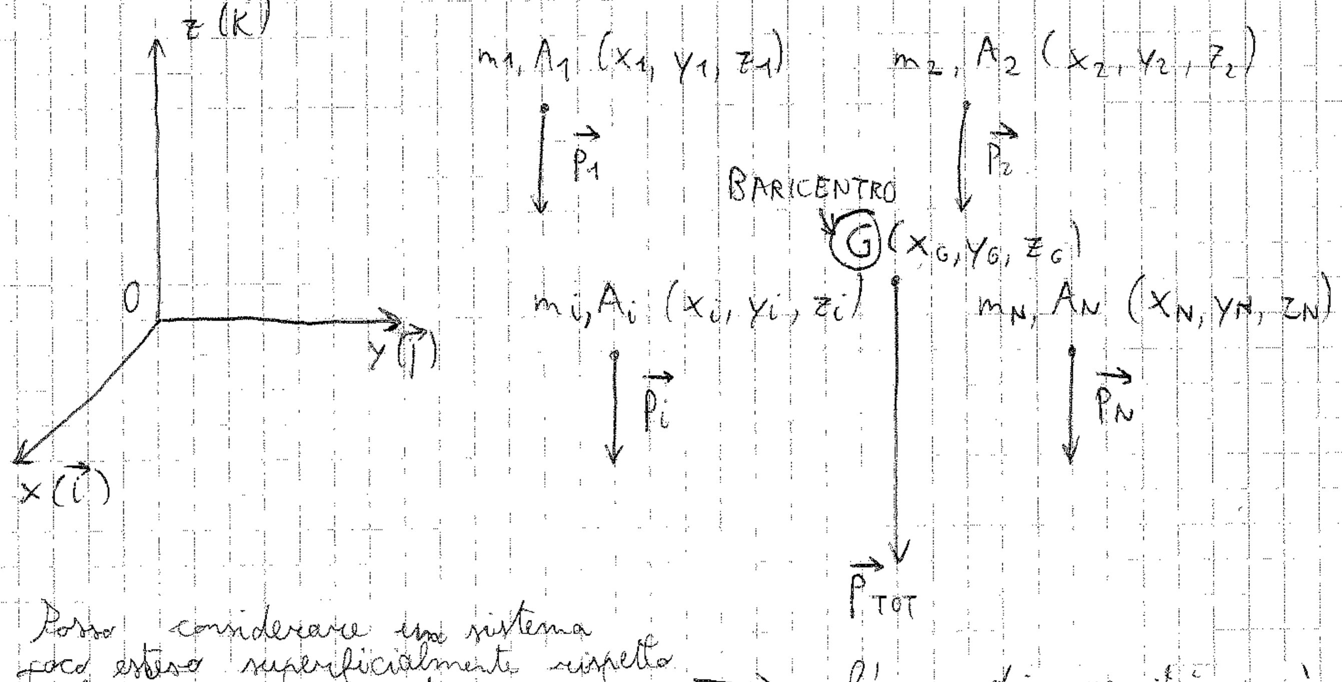
FORZA di ATTRITO VISCOSO (riguarda i fluidi)

Dopo un certo momento la velocità raggiunge un valore limite (con F cost)

$$\vec{F_v} = -\underbrace{\beta}_{\text{Coeff. di ATTRITO VISCOSO}} \vec{v}$$

$$[\beta] = \frac{[F]}{[v]} = Kg \cdot \frac{\cancel{m}}{s^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{s}}{\cancel{m}} = Kg \cdot s^{-1}$$

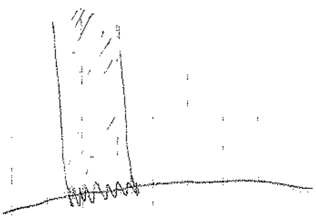
BARICENTRO di un SISTEMA di N Masse Puntiformi



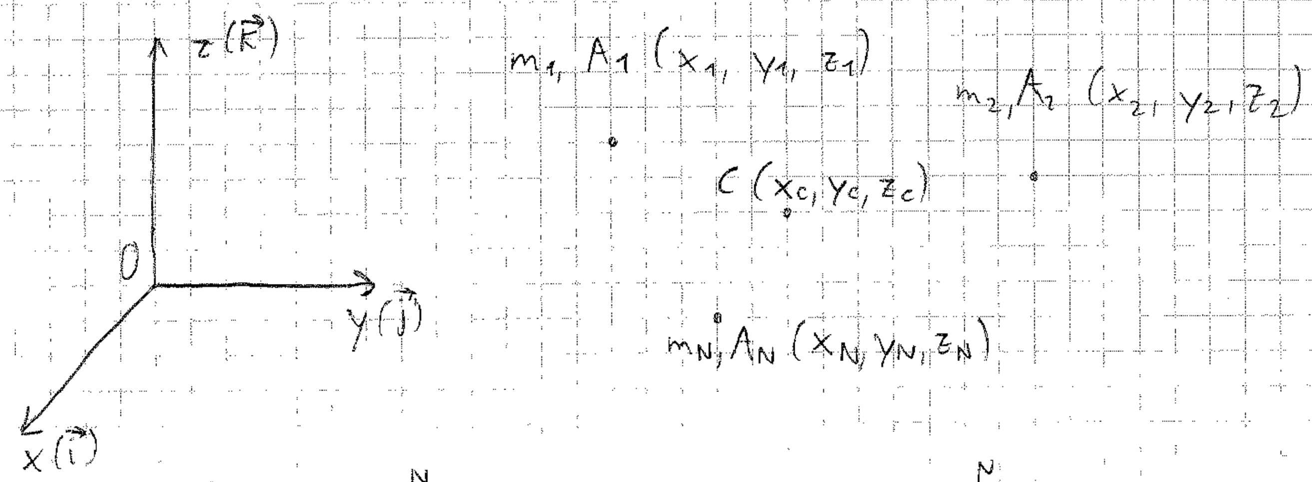
Posso considerare un sistema poco esteso superficialmente rispetto alla superficie terrestre $\Longrightarrow$ l'acc. di gravità avrà la stessa direzione

$\Downarrow$

~~la~~ le forze peso varie avranno la stessa direzione



CENTRO di MASSA C di un Sistema di N masse Puntiformi

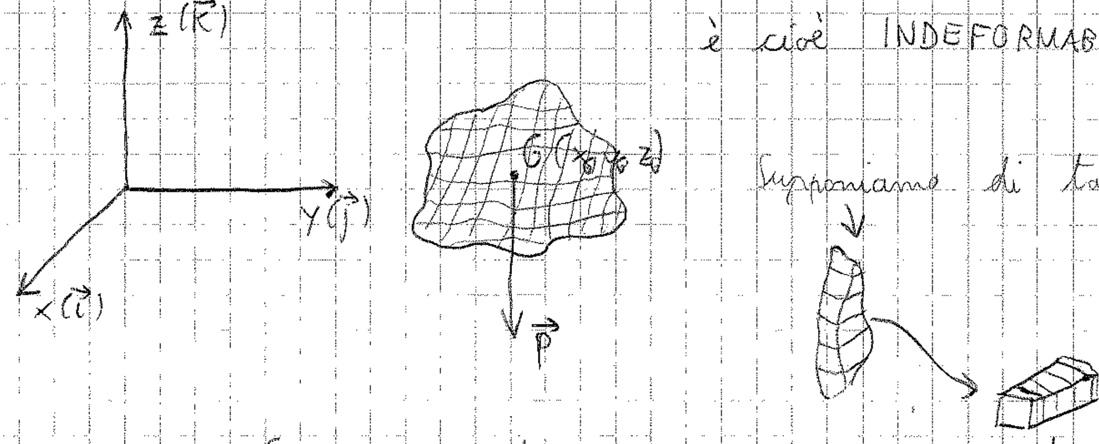


$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} (x_i m_i) \\ y_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} (y_i m_i) \\ z_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} (z_i m_i) \end{cases} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Il baricentro ed il centro di massa sono 2 punti concettualmente distinti, ma, con g uniforme vengono a coincidere

BARICENTRO di un CORPO RIGIDO

Il corpo rigido è un'astrazione, è un corpo che non si può deformare: è ideale. È definito come un corpo in cui la distanza tra 2 punti rimane sempre invariata, è cioè INDEFORMABILE

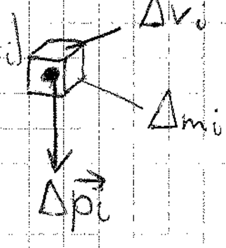


Otteniamo tanti (N) piccoli cubetti

Supponiamo di avere tenuto nei tagli un passo costante, mantenendo cioè la stessa dist. dai piani di taglio

i-esimo volumetto di N volumetti

• i-esimo cubetto



$$\Delta \vec{p_i} = \Delta m_i \cdot \vec{g_i}$$

La densità deve essere costante, altrimenti si incorre in errori ed imprecisioni

in errore incorriamo sicuramente se il blocco è esterno, superficiale: il baricentro può essere esterno

In questo modo ottengo un sistema di N forze peso parallele

Per annullare l'errore bisogna far tendere a zero il volume del cubo in modo che la forza peso sia applicata al centro e che si conoscano le coordinate precise.

$$x_G = \frac{1}{M} \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int_M x \, dm =$$

integrale esteso a tutta la massa del corpo

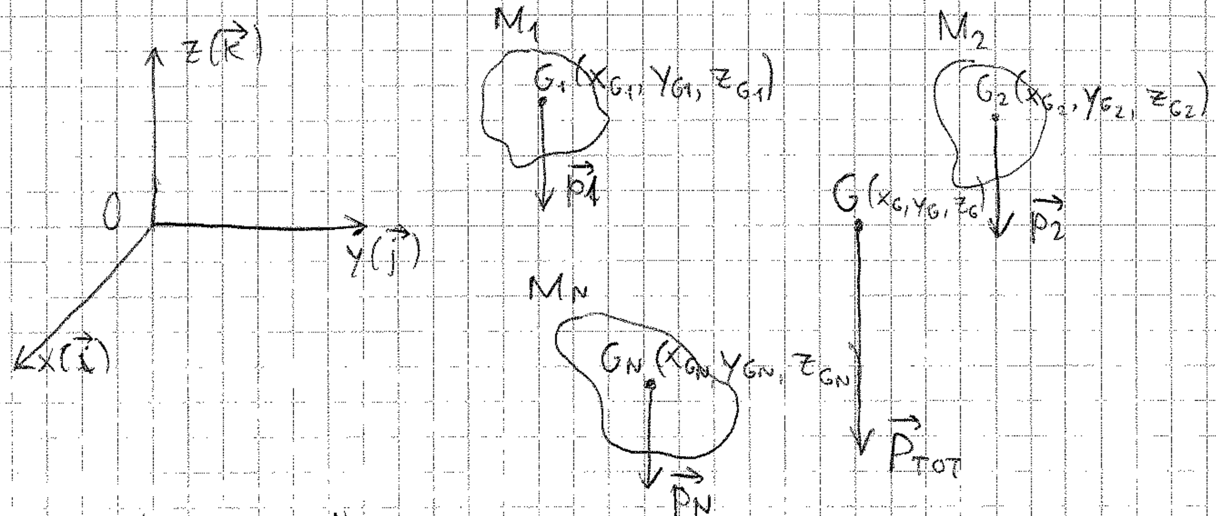
$$= \frac{1}{M} \int_V x \rho(x, y, z) \, dV$$

integrale esteso a tutto il volume

Applicando il medesimo procedimento a y_G e z_G, otteniamo:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \int_M x \, dm = \frac{1}{M} \int_V x \rho(x, y, z) \, dV \\ y_G = \frac{1}{M} \int_M y \, dm = \frac{1}{M} \int_V y \rho(x, y, z) \, dV \\ z_G = \frac{1}{M} \int_M z \, dm = \frac{1}{M} \int_V z \rho(x, y, z) \, dV \end{cases}$$

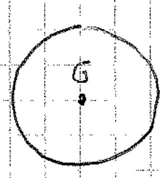
BARICENTRO dei BARICENTRI



$$\vec{P}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} (M_i \vec{g}) = g\left(\sum_{i=1}^{N} M_i\right) = M_{TOT} \cdot \vec{g}$$

(considerando $\vec{g}$ costante nel sistema) dove $M_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} M_i$

- SFERA $\rho = \text{cost}$

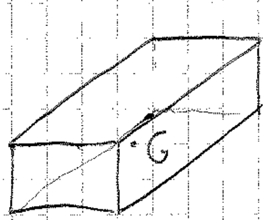


G è nel centro della sfera

- CILINDRO $\rho = \text{cost}$

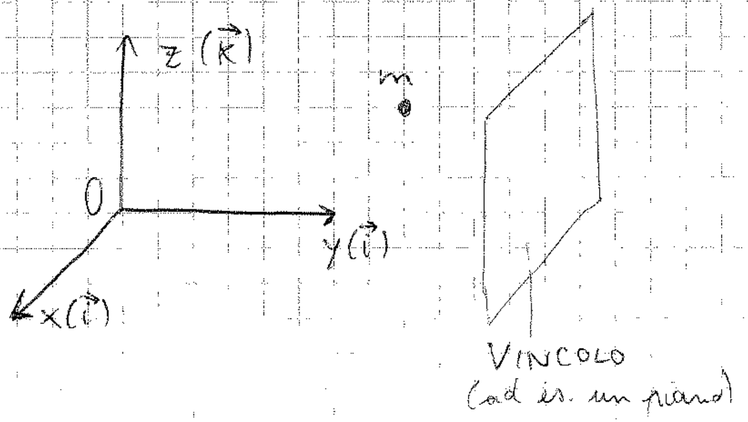
G è sull'asse a metà altezza

- PARALLELEPIPEDO $\rho = \text{cost}$

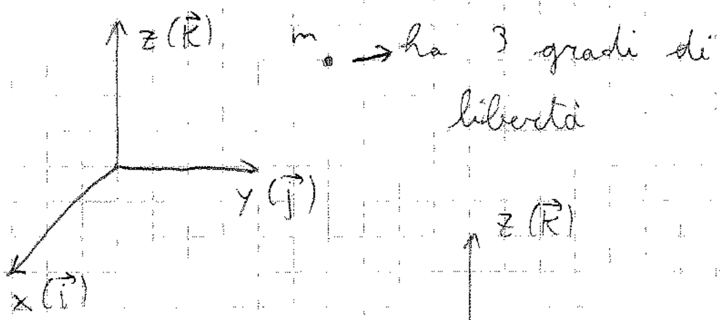


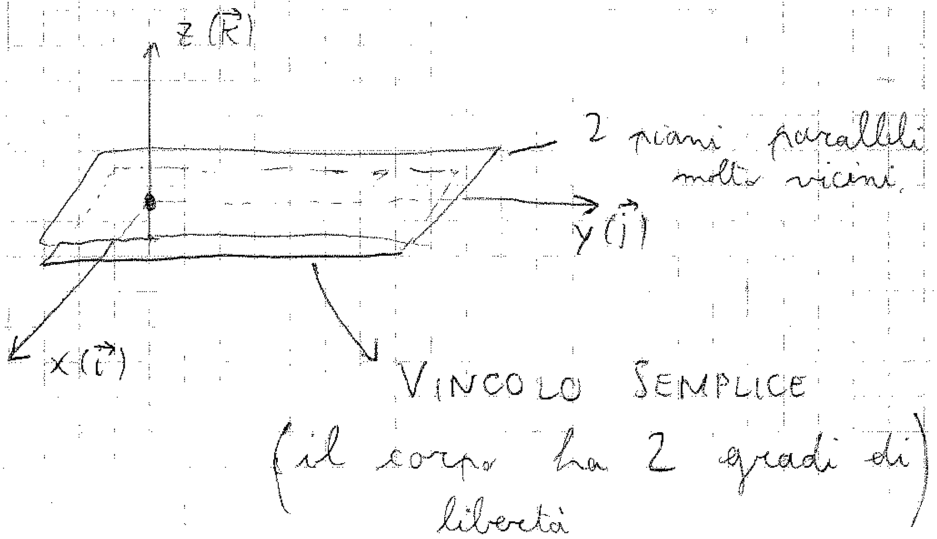
G è nel centro geometrico

Un corpo non libero, cioè incapace di muoversi in tutte le direzioni, è tale quando è soggetto ad ostacoli detti VINCOLI.
Il corpo, pertanto, si dice VINCOLATO.



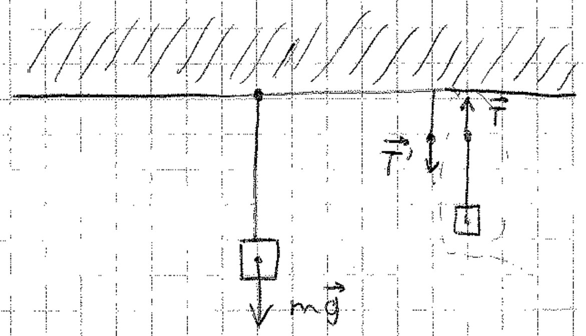
GRADI di LIBERTÀ: i gradi di libertà coincidono con il numero di coordinate a cui può essere assegnato un valore qualsiasi e il corpo è in grado di occupare la posizione individuata da quelle coordinate

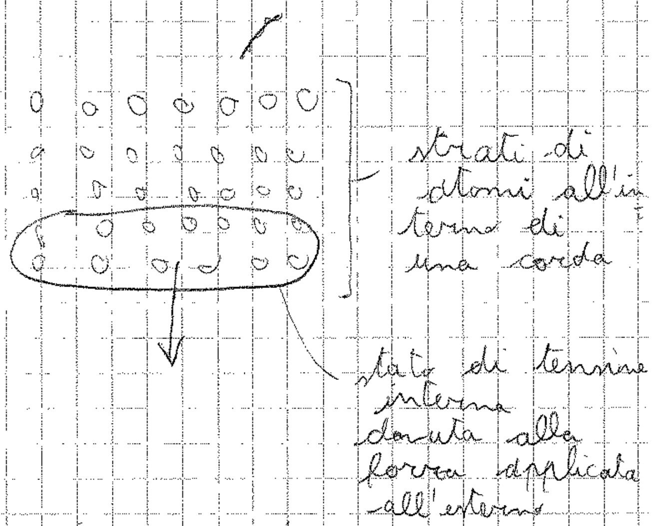




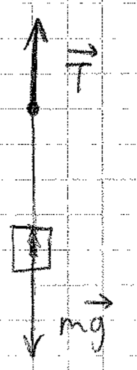
"Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo puntiforme sia in equilibrio è che la risultante di tutte le forze attive e passive o vincolari applicate al corpo sia nulla"

TENSIONI delle FUNI





$$T = T'$$



esaminiamo questa parte

$$\vec{T} + m\vec{g} = 0 \qquad \vec{T} = -m\vec{g}$$

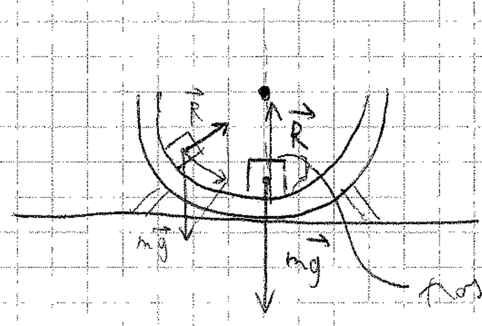
$$\vec{T} = -T\vec{K} \qquad m\vec{g} = mg\vec{K}$$

$$-T\vec{K} + mg\vec{K} = 0$$

$$\cdot\vec{K}) \quad -T + mg = 0 \implies mg = T$$

EQUILIBRIO STABILE, INSTABILE, INDIFFERENTE

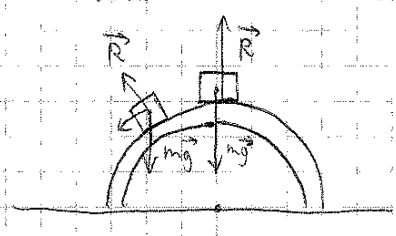
- EQUILIBRIO STABILE



all'inizio $\vec{R} + m\vec{g} = 0$

posizione di equilibrio STABILE: il corpo, anche se spostato, tende sempre a tornare all'equilibrio

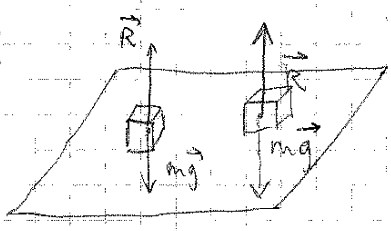
- EQUILIBRIO INSTABILE



all'inizio: $\vec{R} + m\vec{g} = 0$

Spostando il corpo, esso non torna più nella posizione di equilibrio

- EQUILIBRIO INDIFFERENTE

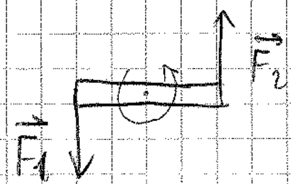


$\vec{R} + m\vec{g} = 0$

Spostando il corpo esso rimane sempre in equilibrio, senza tendere a ritornare nell'iniziale equilibrio

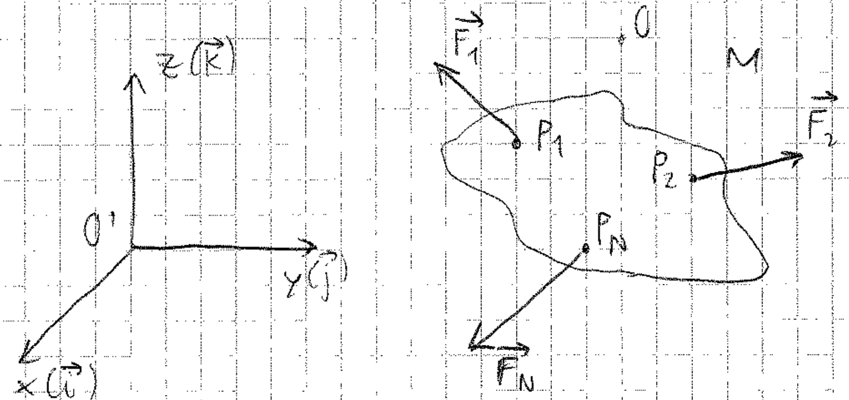
STATICA del CORPO RIGIDO

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$



Non è + sufficiente, per un corpo rigido, che la risultante $\vec{R}$ sia nulla, affinché sia in equilibrio.

"Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido sia in equilibrio, è che la risultante $\vec{R}$ di tutte le forze attive e passive o vincolari e il momento risultante $\vec{M_0}$ calcolato rispetto ad un punto qualsiasi, siano nulli."



$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = 0 \\ \vec{M_0} = \sum_{i=1}^{N} \left[(P_i - O) \wedge \vec{F_i} \right] = 0 \end{cases} \qquad \forall O$$

(punto O)

DINAMICA CLASSICA del CORPO PUNTIFORME

07/04/2013

La Dinamica si basa su 3 principi:

1°) PRINC: "PRINCIPIO di INERZIA"

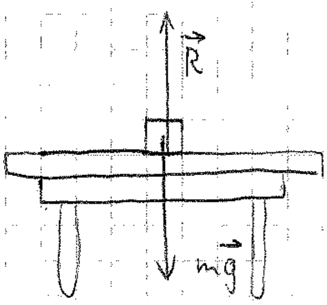
2° " : "LEGGE di AZIONE delle FORZE"

3° " : "LEGGE o PRINCIPIO di AZIONE e REAZIONE"

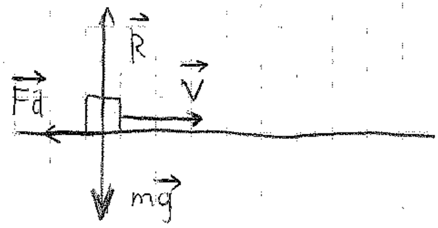
- Principio è un'affermazione fino a quel momento inconfutabile.

1) "PRINCIPIO di INERZIA"

"Un corpo libero, cioè non soggetto ad alcuna azione esterna, mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme"

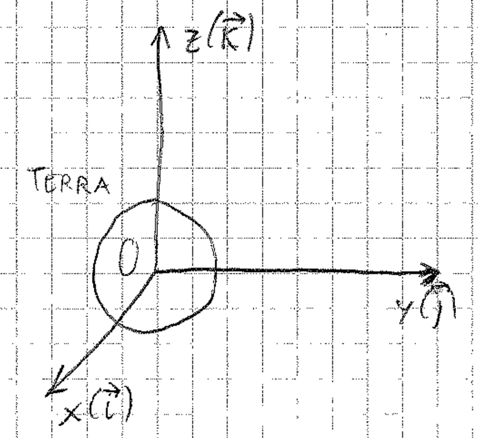


$$\vec{R} + m\vec{g} = 0$$

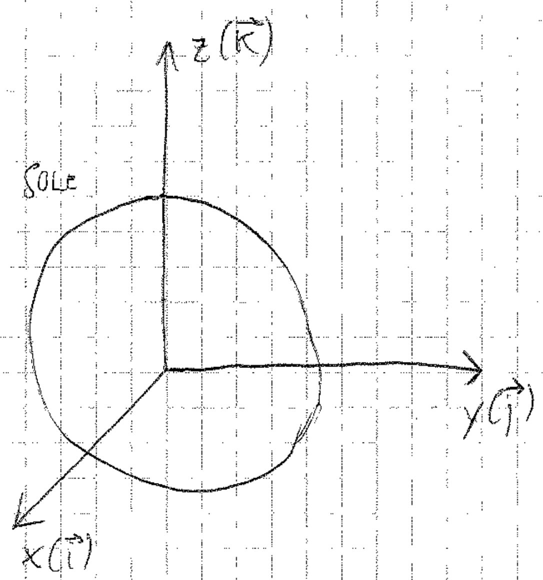


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 436

SIST. di RIF. GEOCENTRICO

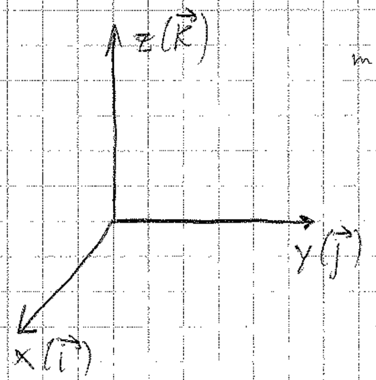


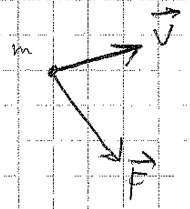
SIST. di RIF. ELIOCENTRICO



È, in assoluto, non inerziale.

2) LEGGE di AZIONE delle FORZE



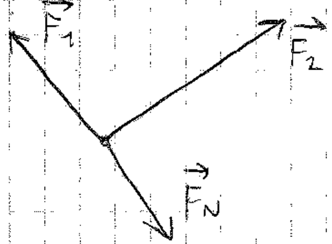


(ricordando che: $\vec{p} = m\vec{v}$)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

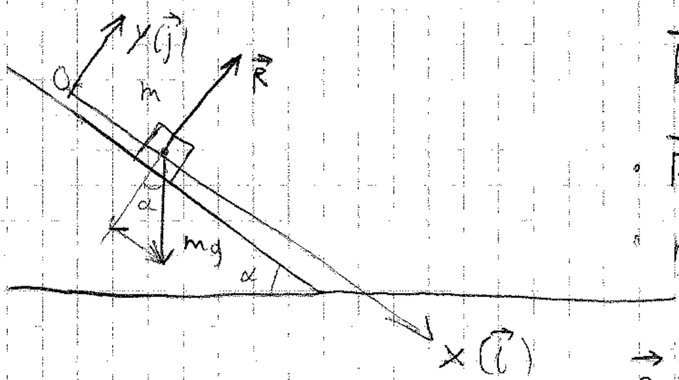
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

legge di azione delle forze



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$



$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

- $\vec{R} = R\vec{j}$
- $m\vec{g} = mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$R\vec{j} + mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}$$

- $\vec{i}$) $mg\sin\alpha = ma_x$
- $\vec{j}$) $R - mg\cos\alpha = ma_y$
- $\vec{z}$) $0 = ma_z$

R è uguale a mg cosα perché abbiamo supposto il piano sufficientemente robusto a sostenere il corpo.

$$\begin{cases} a_x = g\sin\alpha \\ R = mg\cos\alpha, \Longrightarrow a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = g\sin\alpha\,\vec{i}$$

$$\begin{cases} \vec F_1 = \frac{d\vec p_1}{dt} \\ \vec F_2 = \frac{d\vec p_2}{dt} \\ \vec F_3 = \frac{d\vec p_3}{dt} \\ \dots \\ \vec F_N = \frac{d\vec p_N}{dt} \end{cases}$$

Sommando tutti i primi e i secondi membri rispettivamente:

$$\vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 + \dots \vec F_N = \frac{d\vec p_1}{dt} + \dots + \frac{d\vec p_N}{dt}$$

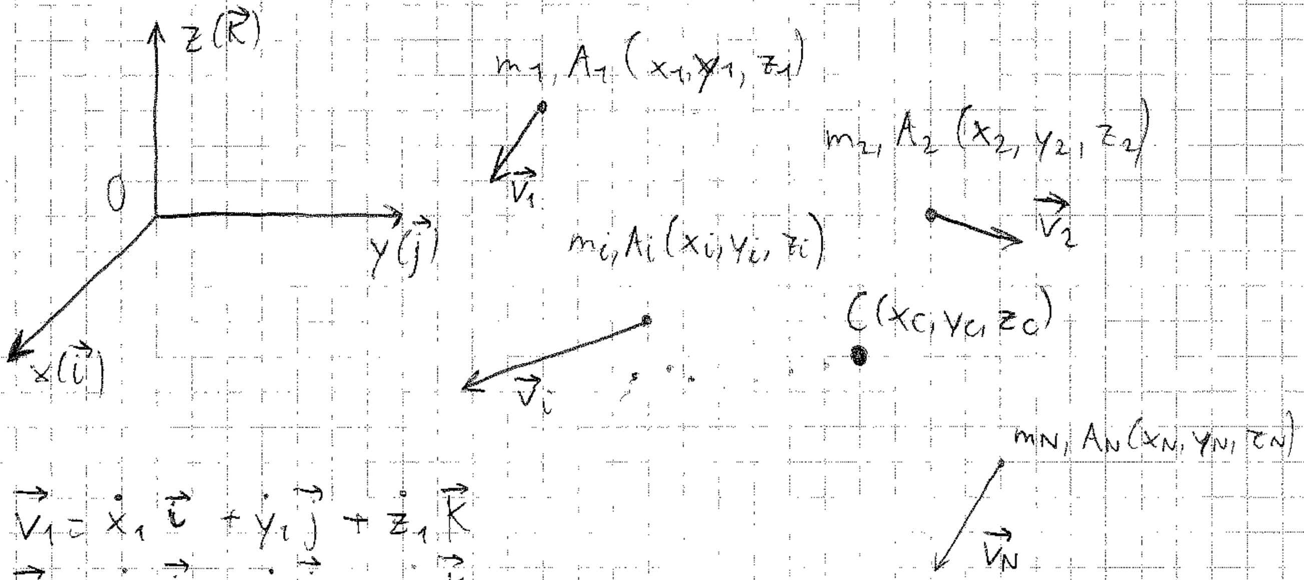
$$\underbrace{0}_{\text{le forze saranno uguali e contrarie a 2 a 2}} = \frac{d}{dt}\left\{\vec p_1 + \vec p_2 + \dots \vec p_N\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec p_{TOT}}{dt} = 0 \implies \underbrace{\vec p_{TOT}}_{\text{totale}} = cost$$

→ "La quantità di moto di un sistema isolato di N corpi puntiformi interagenti tra di loro è costante".

... Ricordando il <u>CENTRO di MASSA</u>

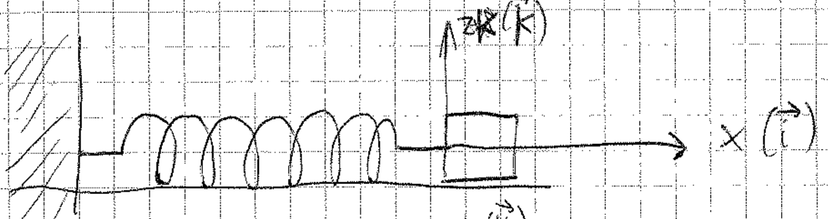


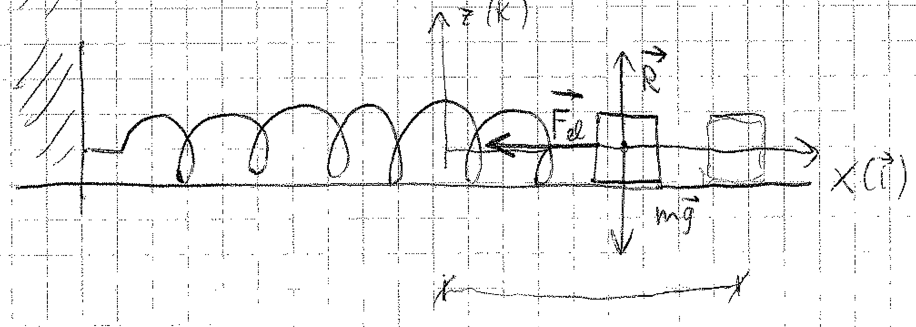
$$\vec v_1 = \dot x_1 \vec i + \dot y_1 \vec j + \dot z_1 \vec k$$
$$\vec v_2 = \dot x_2 \vec i + \dot y_2 \vec j + \dot z_2 \vec k$$
$$\vec v_i = \dot x_i \vec i + \dot y_i \vec j + \dot z_i \vec k$$
$$\vec v_N = \dot x_N \vec i + \dot y_N \vec j + \dot z_N \vec k$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 436

11/04/2013 II parte

OSCILLAZIONI LIBERE





$$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$$

$$\vec{R} = R\vec{K} \qquad m\vec{g} = -mg\vec{K} \qquad \vec{F}_{el} = -Kx\vec{i}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{K}$$

$t_0 = 0$

$x(t_0) = x_0 \qquad v_x(t_0) = 0$

$z(t_0) = 0 \qquad v_z(t_0) = 0$

$y(t_0) = 0 \qquad v_y(t_0) = 0$

$$R\vec{K} - mg\vec{K} - Kx\vec{i} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{K}$$

$\cdot \vec{i})$ $\quad -Kx = ma_x$

$\cdot \vec{j})$ $\quad 0 = ma_y$ $\quad \Longrightarrow \quad a_y = 0 \qquad \frac{dv_y}{dt} = 0 \qquad v_y = cost = 0$

$\frac{dy}{dt} = 0 \qquad y = cost = 0$

$\cdot \vec{k})$ $\quad R - mg = ma_z$

$a_z = 0 \quad (R = mg)$

$\frac{dv_z}{dt} = 0 \qquad v_z = cost = 0$

$\frac{dz}{dt} = \qquad z = cost = 0$

Il corpo si muove solo nella direzione x:

$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad a_x = \ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ sostituendo $\frac{K}{m} = \omega_0^2$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Eq. DIFF. del MOTO ARMONICO SEMPLICE

$t=0 \qquad \theta(t=0)=\theta_0$

$\qquad\quad \dot\theta(t=0)=0$

$-T\vec\lambda + mg\cos\theta\vec\lambda - mg\sin\theta\vec\mu = -mr\dot\theta^2\vec\lambda + mr\ddot\theta\vec\mu$

- $\vec\lambda)\quad -T+mg\cos\theta = -mr\dot\theta^2$
- $\vec\mu)\quad -mg\sin\theta = mr\ddot\theta$

$T = mg\cos\theta + mr\dot\theta^2 \Longrightarrow$ Tensione MAX con $\theta=0$, infatti
- $mg\cos\theta$ è max;
- velocità è max ($v = r\dot\theta$)

$r\ddot\theta + g\sin\theta = 0$

$\ddot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \Longrightarrow \ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0$ $\quad \boxed{\begin{array}{c}\sin\theta \cong \theta \\ (\theta\to 0)\end{array}}$

Posto $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

$\boxed{\ddot\theta + \omega_0^2\theta}$ Eq. diff. del MOTO ARMONICO

$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\begin{cases} \theta_0 = A\sin\varphi \\ 0 = A\omega_0\cos\varphi \end{cases} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow A=\theta_0$

$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \Longrightarrow$ + è lungo il filo, + è lento a muoversi

$$\vec{F} + \vec{F_s} + \vec{R} + m\vec{g} = 0$$

$\vec{R} = R\vec{u}$ $\quad m\vec{g} = -mg\,\vec{u}$ $\quad \vec{F_s} = f_s mg\vec{i}$ $\quad \vec{F} = m(-\vec{a}) = -ma\vec{i}$

$$R\vec{u} + -mg\,\vec{u} + f_s mg\vec{i} - ma\vec{i} = 0$$

$\cdot\vec{u})$ $\quad R - mg = 0$

$\cdot\vec{i})$ $\quad f_s mg - ma = 0$ $\quad a_{lim} = f_s g$

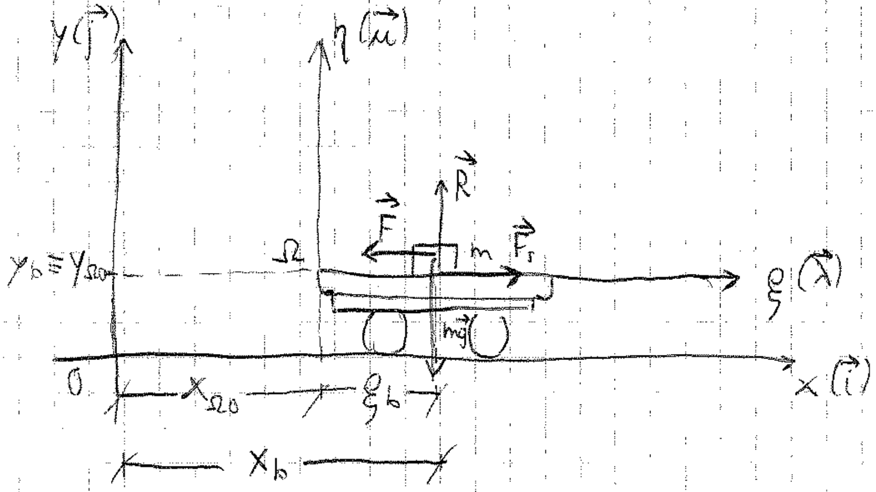
Ma potevo trovare l'acc. in un altro modo?
Consideriamo il sistema di rif. assoluto, in cui non vediamo l'acc. (e dunque la forza) fittizia.

$$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

$$R\vec{j} + -mg\vec{j} + f_s mg\vec{i} = ma\vec{i}$$

$\cdot\vec{j})$ $\quad R - mg = 0$

$\cdot\vec{i})$ $\quad f_s \cancel{m} g = \cancel{m} a$ $\quad a_{lim} = f_s g$



(v. pag. succ.)

$\vec{F} = m(-\vec{a})$ $\quad \vec{a} = a\vec{i}$

$$\begin{cases} a_x = f_d g \\ a_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = f_d g \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \qquad v_y = cost = 0 \quad \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y = cost$$

$$y(t) = y_{\Omega 0}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = f_d g \qquad \int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t f_d g \, dt \qquad v_x = f_d g \cdot t$$

$$\frac{dx}{dt} = f_d g t \qquad \int_{x_{\Omega 0} + \xi_b}^{x} dx = \int_0^t f_d g t' dt'$$

$$\begin{cases} x(t) = x_{\Omega 0} + \xi_b + \frac{1}{2} f_d g t^2 \\ y(t) = y_{\Omega 0} \end{cases}$$

Vediamolo ora con il SIST. di RIF. ASSOLUTO

$$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F_d} = m\vec{a_m}$$

$$\vec{R} = R\vec{j} \qquad m\vec{g} = -mg\vec{j} \qquad \vec{F_d} = f_d mg\vec{i} \qquad \vec{a_m} = a_m\vec{i}$$

$$R\vec{j} - mg\vec{j} + f_d mg\vec{i} = ma_m\vec{i}$$

$$\cdot\vec{j}) \quad R - mg = 0 \Rightarrow R = mg$$

$$\cdot\vec{i}) \quad f_d \cancel{m} g = \cancel{m} a_m \Rightarrow a_m = f_d g$$

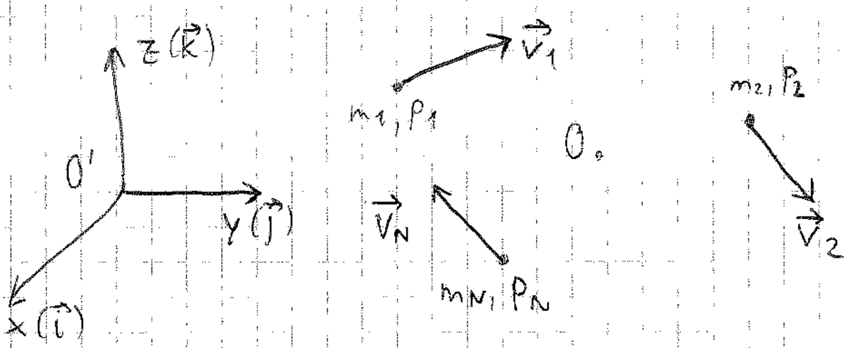
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = f_d g\vec{i}$$

$$\begin{cases} a_x = f_d g \\ a_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{L}_0 = (P-O) \wedge (m\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} =$$

$$= [mv_z(y-y_0) - mv_y(z-z_0)]\vec{i} + [mv_x(z-z_0) - mv_z(x-x_0)]\vec{j} + [mv_y(x-x_0) - mv_x(y-y_0)]\vec{k}$$

I MOMENTI POLARI della QUANTITÀ di MOTO si SOMMANO



$$\vec{L}_{O_1} = (P_1 - O) \wedge (m_1 \vec{v}_1)$$

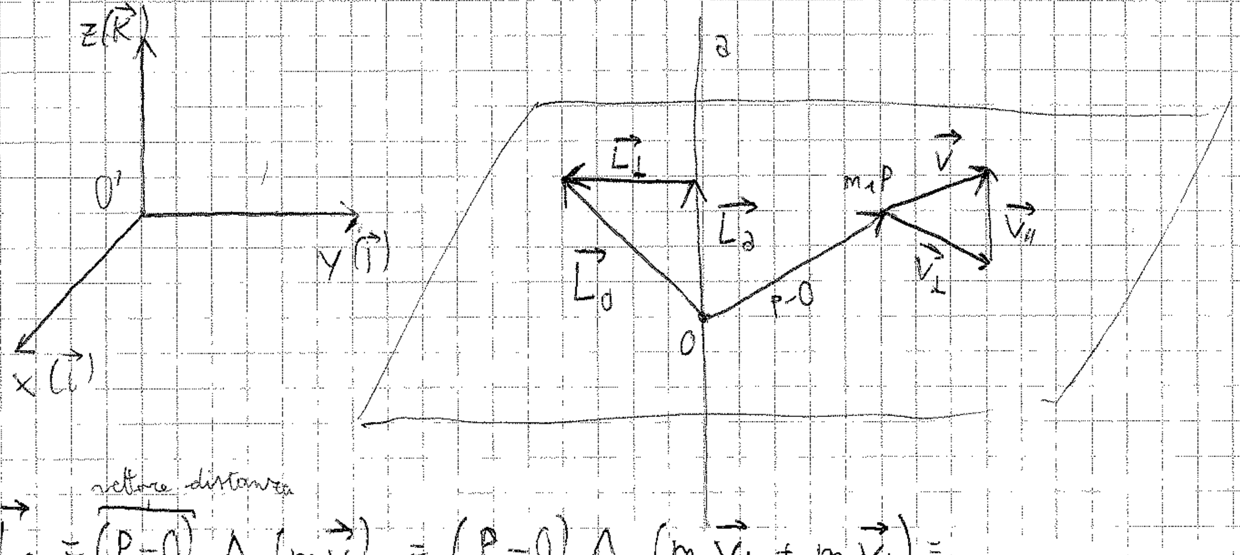
$$\vec{L}_{O_2} = (P_2 - O) \wedge (m_2 \vec{v}_2)$$

$$\dots$$

$$\vec{L}_{O_N} = (P_N - O) \wedge (m_N \vec{v}_N)$$

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^{N} [(P_i - O) \wedge (m_i \vec{v}_i)]$$

MOMENTI ASSIALI della QUANT. di MOTO di SOMMANG



$$\vec{L}_0 = \overbrace{(P-O)}^{\text{vettore distanza}} \wedge (m\vec{v}) = (P-O) \wedge (m\vec{v}_\parallel + m\vec{v}_\perp) =$$

$$= \underbrace{(P-O) \wedge (m\vec{v}_\parallel)}_{\vec{L}_\perp} + \underbrace{(P-O) \wedge (m\vec{v}_\perp)}_{\vec{L}_a}$$

$$\boxed{\vec{L}_a = (P-O) \wedge (m\vec{v}_\perp)}$$

(Continua a pag. succ.)

$$\frac{d(P-O)}{dt} \wedge (m\vec{v}) = (\vec{v}-\vec{v_0}) \wedge (m\vec{v}) = -v_0 \wedge (m\vec{v})$$

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = -\vec{v_0} \wedge (m\vec{v}) + \vec{M_0}$$

$$\boxed{\vec{M_0} = \frac{d\vec{L_0}}{dt} + \vec{v_0} \wedge (m\vec{v})}$$

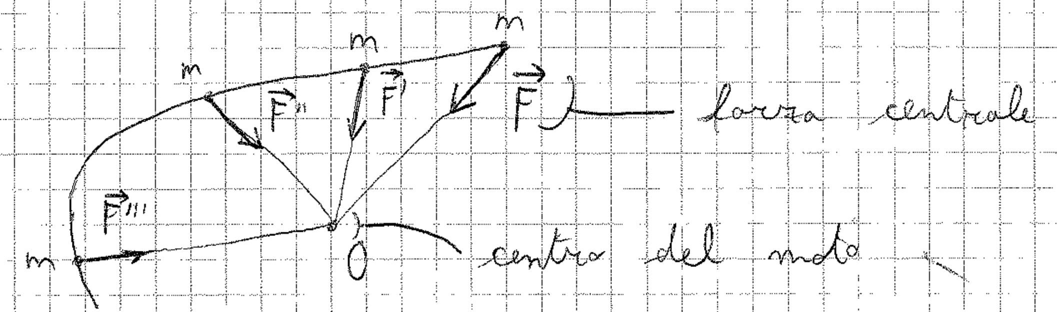
$\boxed{T}$: "Il momento polare totale di tutte le forze agenti sul corpo, calcolato rispetto al punto O, è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento polare della quantità di moto del corpo calcolato rispetto allo stesso punto O più il prodotto esterno tra la velocità di questo punto e la quantità di moto del corpo

Se $\vec{v_0} = 0$ oppure $\vec{v_0} \wedge (m\vec{v}) = 0 \implies$

$$\vec{M_0} = \frac{d\vec{L_0}}{dt}$$

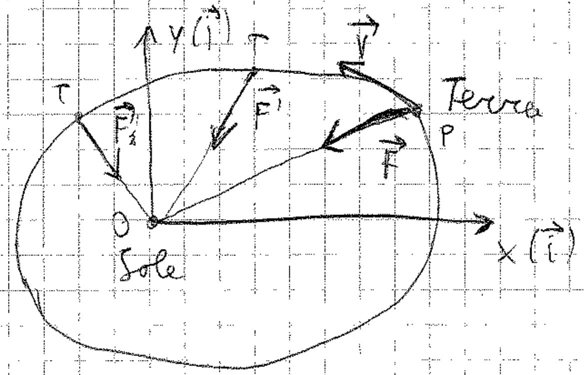
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 436

FORZE CENTRALI e MOTI CENTRALI



Se la forza centrale è l'unica forza che agisce sul corpo, il moto si dice CENTRALE.

es) Moto di Rivoluzione della Terra



Consideriamo la forza gravitaz. tra Sole e Terra; essa è una forza centrale: anche il MOTO sarà CENTRALE (le forze gravitazionali ~~tra~~ la Terra e ~~subisce~~ dagli altri pianeti sono trascurabili)

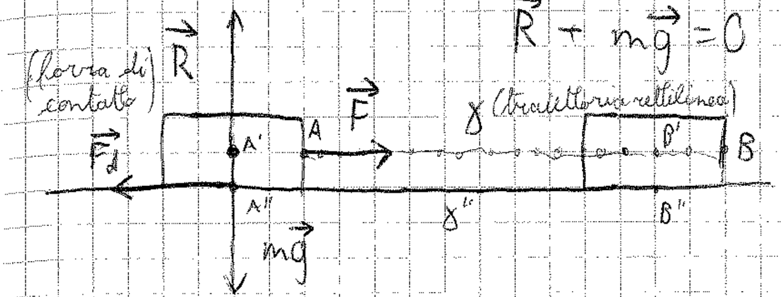
"I MOTI CENTRALI sono MOTI PIANI"

$$\vec{L}_0 = (P-O) \wedge m\vec{V}$$

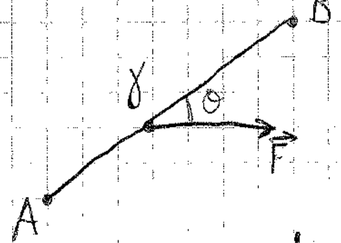
$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \qquad \vec{M}_0 = 0 \qquad \vec{L}_0 = \text{cost}$$

LAVORO delle FORZE

$\vec{R} + m\vec{g} = 0$



Noi la forza continuiamo ad applicarla, altrimenti il baule si ferma



Supponiamo la traiettoria RETTILINEA e che la FORZA APPLICATA sia COSTANTE

L=

$$\mathcal{L}_{AB,\gamma} = \vec{F} \cdot (B-A)$$

$$\mathcal{L}_{AB,\gamma} = F \cdot |B-A| \cos\theta \begin{cases} > 0, & \text{con } \cancel{\tfrac{\pi}{2}} \le 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \\ = 0, & \text{con } \theta = \frac{\pi}{2} \\ < 0, & \text{con } \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$

es) $\mathcal{L}_{AB,\gamma} = \vec{F} \cdot (B-A) = F\,|B-A| > 0$

$$m\vec{g} \cdot (B-A) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}_{A'B',\gamma'} = m\vec{g} \cdot (B'-A') = 0$$

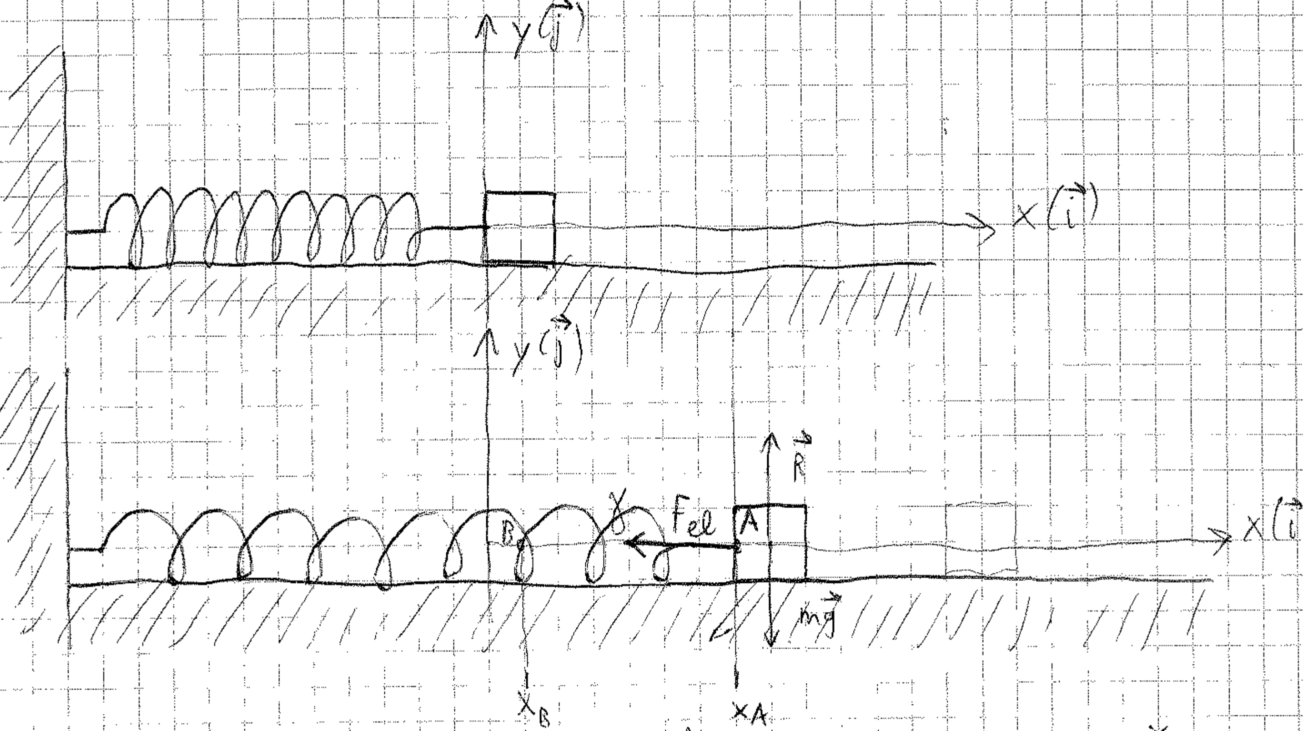
→ La forza peso esercita un lavoro nullo, essendo perpendicolare

$$\mathcal{L}_{A'',B'',\gamma''} = \vec{F}_d \cdot (B''-A'') < 0$$

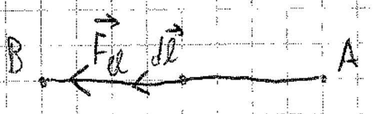
$$[\mathcal{L}] = N \cdot m = Kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = J$$

(Joule: unità di misura dell'energia)

LAVORO della FORZA ELASTICA



$$\mathcal{L}_{AB,\gamma} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec F \cdot d\vec l = \int_{A,\gamma}^{B} \vec F_{el} \cdot d\vec l = \int_{A,\gamma}^{B} (-Kx\vec i)(dx\,\vec i) = -K\int_{x_A}^{x_B} x\,dx$$



$$\vec F_{el} = -Kx\vec i$$

$$d\vec l = \underbrace{dx}\,\vec i$$

lo lascio positivo: il segno lo faccio stabilire all'integrale ed i suoi estremi d'integrazione

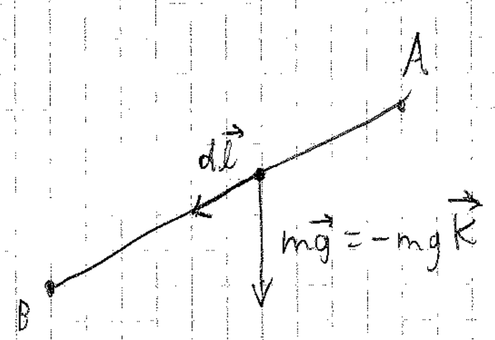
$$\boxed{\mathcal{L}_{AB,\gamma} = \frac{1}{2}Kx_A^2 - \frac{1}{2}Kx_B^2}$$

Il lavoro dipende solo dal punto di partenza e da quello di arrivo, NON dalla traiettoria

- ~~In conclusione~~: TRAIETTORIA γ_2:

$$\mathcal{L}_{AB,\gamma_2} = \int_{A,\gamma_2}^{B} m\vec{g} \cdot d\vec{l} = \int_{A,\gamma_2}^{B} (-mg\vec{K})(dx\vec{i} + dz\vec{K}) =$$

$$= -\int_{z_A}^{0} mg\, dz = mg\, z_A$$



$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dz\vec{k}$$

Dunque:

$$\boxed{\mathcal{L}_{AB,\gamma_1} = mg\, z_A = \mathcal{L}_{AB,\gamma_2}}$$

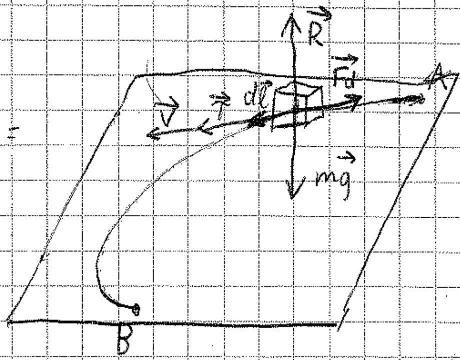
→ Il lavoro NON dipende quindi dalla traiettoria, ma soltanto dai valori iniziali e finali

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 436

- TRAIETTORIA γ_2:

$$\mathcal{L}_{AB,\gamma_2} = \int_{A,\gamma_2}^{B} \vec{F}_d \cdot d\vec{l} = \int_{A,\gamma_2}^{B} (-f_d\, mg\, \vec{T}) \cdot (dl\, \vec{T}) =$$

$$= -f_d\, mg \int_0^{\pi R} dl$$



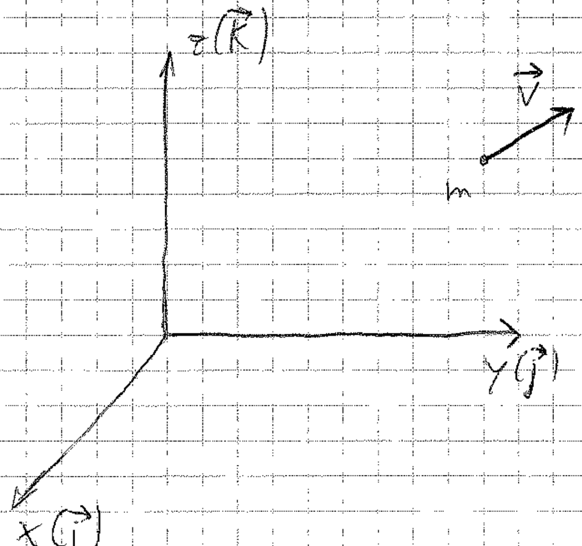
$$\boxed{\mathcal{L}_{AB,\gamma_2} = -f_d\, mg\, \pi R}$$ anche questa è negativa e dipende dalla traiettoria

- $\vec{v} = v\vec{T}$
- $\vec{F}_d = -f_d\, m g\, \vec{T}$

$$\boxed{\mathcal{L}_{AB,\gamma_1} \neq \mathcal{L}_{AB,\gamma_2}} \rightarrow$$ I 2 lavori sono diversi

- $d\vec{l} = dl\,\vec{T}$

ENERGIA CINETICA



$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

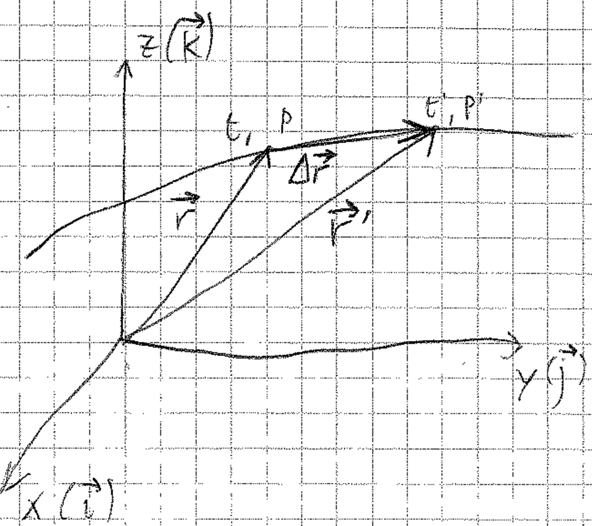
$$[T] = Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = J$$

$\vec{v} = v\vec{\tau}$ $\qquad$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{a} = \cancel{d\vec{v}}\,\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$

$d\vec{l} = d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$d\vec{l} = v\,dt\,\vec{\tau}$



Sostituendo:

$$\mathcal{L}_{AB,\gamma} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(m\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + m\frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right)\cdot\left(v\,dt\,\vec{\tau}\right) =$$

$$= \int_{A,\gamma}^{B} m\,\frac{dv}{dt}\,v\,dt = \int_{v_A}^{v_B} m\,v\,dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = T_B - T_A$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{AB,\gamma} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = T_B - T_A}$$

$\boxed{T}$: "Il lavoro fatto da tutte le forze che agiscono ~~su~~ di un corpo per spostarlo da una posizione A ad una posizione B lungo una traiettoria γ è uguale all'energia cinetica del corpo nella posizione finale meno l'energia cinetica del corpo nella posizione ~~finale~~ iniziale".

4) ROTORE

$$\vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k}$$

con A_x, A_y, A_z continue e derivabili almeno una volta

$$\mathrm{Rot}\vec{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\mathrm{Rot}\,A(x,y,z) = \nabla \wedge \vec{A}(x,y,z)$$

Oss 1: L'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria

$$\int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_{W(A)}^{W(B)} dW = \underbrace{W(A)}_{} - W(B)$$

per sapere quanto vale uno dei due, devo definire l'altro arbitrariamente

Per questo è definita a meno di una costante, non riesco a calcolarlo direttamente

Oss 2: • $\vec{F} \cdot d\vec{l} > 0 \Rightarrow dW < 0$: l'eng. pot. diminuisce

• $\vec{F} \cdot d\vec{l} < 0 \Rightarrow dW > 0$: " " " aumenta

Oss 3: Per ogni forza conservativa esiste la sua energia potenziale.

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad ; \quad d\vec{l} = dx\, \vec{i} + dy\, \vec{j} + dz\, \vec{k}$$

$$dW(x,y,z) = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = -\frac{\partial W}{\partial x} dx - \frac{\partial W}{\partial y} dy - \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z}$$

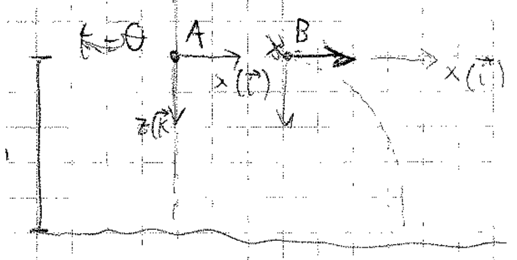
$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial W}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial W}{\partial z} \vec{k} = -\text{grad } W$$

$$\vec{F} = -\text{grad } W = -\nabla W$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad h = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

---

5) Due sferette che si trovano alla stessa altezza h vengono liberate all'istante $t=0$.
La prima cade verticalmente verso il basso.
La seconda invece è lanciata con velocità v_0 orizzontale di modulo 20 m/s.
Sapendo che l'altezza $h = 10$ m e che non c'è attrito con l'aria, determinare l'istante di tempo in cui toccano il suolo e la velocità all'impatto.



$t=0$ $\quad x_A(t=0) = 0 \quad v_{0Ax} = 0$ $\quad y_A(t=0) = \quad v_{0Ay} = 0$ $\quad z_B(t=0) = 0 \quad v_{0Az} = 0$

$x_{0B} = 0 \quad v_{0xB} = 20$ m/s $\quad y_{0B} = 0 \quad v_{0yB} = 0 \quad z_{0B} = 0 \quad v_{0zB} = 0$

A)
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}(t-t_0) + \frac{1}{2} a_{0x}(t-t_0)^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}(t-t_0) + \frac{1}{2} a_{0y}(t-t_0)^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z}(t-t_0) + \frac{1}{2} a_{0z}(t-t_0)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 0 + 0 \\ y(t) = 0 + 0 + 0 \\ z(t) = 0 + 0 + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}43$ s $\quad t_A = t_B$

$v_z = v_{0z} + a_z t = 0 + g \cdot t$ (v. altra pag)

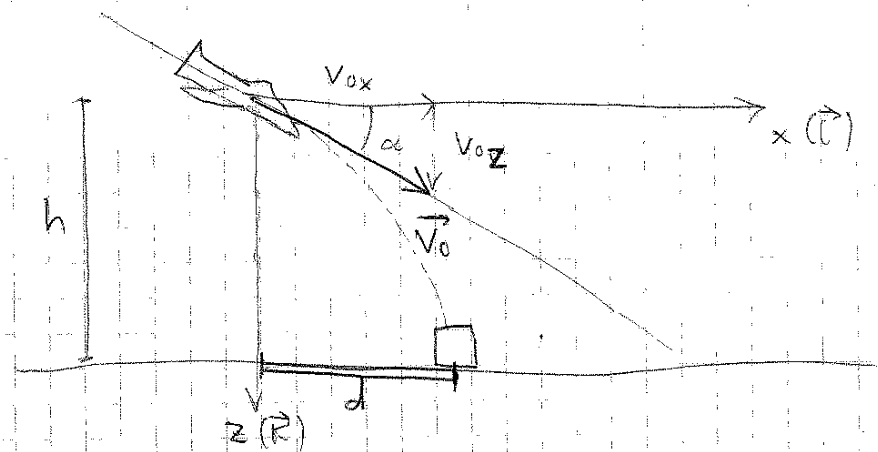
B)
$$\begin{cases} x(t) = \ldots \\ y(t) = \ldots \\ z(t) = \ldots \end{cases} \qquad \vec{a} = \vec{g} \qquad a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = g\vec{k} \qquad a_z = g$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 20\frac{m}{s} t + \frac{1}{2} 0 = 20\frac{m}{s} t \\ y(t) = 0 + 0 + 0 \\ z(t) = 0 + 0 + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$\vec{v} = v_x\vec{i} + \underbrace{v_y\vec{j}}_{0} + v_z\vec{k}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{(20\frac{m}{s})^2 + (}$

Es. 3) Un bombardiere vola a velocità costante v_0 seguendo una retta inclinata verso il basso di un angolo α con l'orizzontale. Se il pilota volesse centrare un bersaglio sganciando una bomba da una quota h, a quale distanza orizzontale dal bersaglio dovrebbe sganciarla?
(si trascuri la resistenza dell'aria e le dimensioni del bersaglio)



$t_0 = 0$ $\qquad x_0 = 0\ m \qquad v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \vec{g} = g\vec{k}$

$y_0 = 0\ m \qquad v_{0y} = 0\ m/s \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = g \Rightarrow (*)$

$z_0 = 0 \qquad v_{0z} = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot 1 \qquad a_x = a_y = 0\ m/s^2\ ;\ a_z = g$

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \Longrightarrow v_x = cost = v_0\cos\alpha$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \Longrightarrow v_y = cost = 0$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_x(t-t_0)^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_y(t-t_0)^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_z(t-t_0)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 0 + v_0(t-t_0) + 0 \\ y(t) = 0 + 0 + 0 = 0 \\ z(t) = 0 + \overset{v_0 \sin\alpha \cdot t}{\cancel{0}} + \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha \\ y(t) = 0\ m \\ z(t) = \frac{1}{2}g t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha \end{cases} \qquad x(t) = \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2\sin^2\alpha}} - 1\right)$$

$h = \frac{1}{2}g t^2 + v_0 t \sin\alpha \cancel{\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$ $\qquad x(t) = v_0 \cdot \cancel{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \cos\alpha \cdot t$

$\cancel{\frac{1}{2}}g t^2 + 2v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 2h = 0$

$t_{1,2} = \frac{-v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2hg}}{g} \Big\langle \ = \frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2hg} - v_0\sin\alpha}{g} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}\cdot\left(\sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2\sin^2\alpha}} - 1\right)$

N.B. il segno meno si riferisce all'altro (tempo indietro)

$x_N(t=0) = d \qquad v_{x_N}(t=0) = v_0$

$z_N(t=0) = \cancel{0}h \qquad v_{z_N}(t=0)$

$\vec{a}_N = \vec{a}_{x_N}\,\vec{i} + a_{y_N}\,\vec{j} + a_{z_N}\vec{k} = \vec{0}$

$$\begin{cases} x_N(t) = d + v_0 \cdot t \\ z_N(t) = h \end{cases}$$

$h = \frac{1}{2} g\, t_1^2 \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$x(t=t_1) = d + v_0 \cdot t_1 = x_1$

$d = x_1 - v_0 t_1 = \cancel{x_1}$

$x_P(t=t_1) = v_1 \cdot t_1 = v_1 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

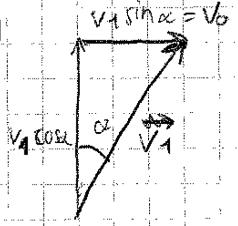
$$d = v_1 t_1 - v_0 t_1 = (v_1 - v_0)\, t_1 = \underbrace{(v_1 - v_0)}_{} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

x raggiungerla, v_1 deve essere maggiore di v_0

1) $v_0 \cancel{t} = v_1 \sin\alpha \cancel{t}$

$\sin\alpha = \frac{v_0}{v_1} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{v_0}{v_1}\right)$

2)



$\sqrt{v_1^2 - v_0^2} = v_1 \cos\alpha$

$l = v_1 \cos\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$

$-g t^2 + 2 v_1 \cos\alpha\, t - 2l = 0$

$g t^2 - 2 v_1 \cos\alpha\, t + 2l$

$t_{1,2} = \frac{v_1 \cos\alpha \pm \sqrt{v_1^2 \cos^2\alpha - 2lg}}{g} = \begin{cases} \frac{v_1 \cos\alpha + \sqrt{v_1^2 \cos^2\alpha - 2lg}}{g} \\ \frac{v_1 \cos\alpha - \sqrt{v_1^2 \cos^2\alpha - 2lg}}{g} \end{cases}$

è il minimo

3) $v_1^2 \cos^2\alpha - 2lg \geq 0$

$v_1^2 - v_0^2 - 2lg \geq 0$

$v_1^2 \geq (v_0^2 + 2lg)$

$\frac{dx_s}{dt} = v_{xs} = 0 \qquad x_s = cost = b$

$\frac{dz_s}{dt} = v_{zs} = -gt \qquad \int_{h_0}^{z_s} dz_s = -\int_0^t g\,t\,dt$

$\frac{dy_s}{dt} = v_{ys} = 0 \qquad y_s = cost = 0$

$t = 0 \qquad x_c(t=0) = 0 \qquad v_{xc}(t=0) = 0$

$z_c(t=0) = h_1 \qquad v_{zc}(t=0) = 0$

$\vec{a_c} = a_c \vec{i}$

$\vec{a_c} = a_{xc}\vec{i} + a_{yc}\vec{j} + a_{zc}\vec{k} = a_c\vec{i} \implies a_{xc} = a_c$

$a_{yc} = a_{zc} = 0$

$\frac{dv_{xc}}{dt} = a_{xc} = a_c \qquad \int_0^{v_{xc}} dv_{xc} = \int_0^t a_c\,dt$

$v_{xc} = a_c t$

$\frac{dv_{yc}}{dt} = a_{yc} = 0 \qquad v_{yc} = cost = 0$

$\frac{dv_{zc}}{dt} = a_{zc} = 0 \qquad v_{zc} = cost = 0$

$\frac{dx_c}{dt} = v_{xc} = a_c \cdot t \qquad \int_0^{x_c} dx_c = \int_0^t a_c\,t\,dt$

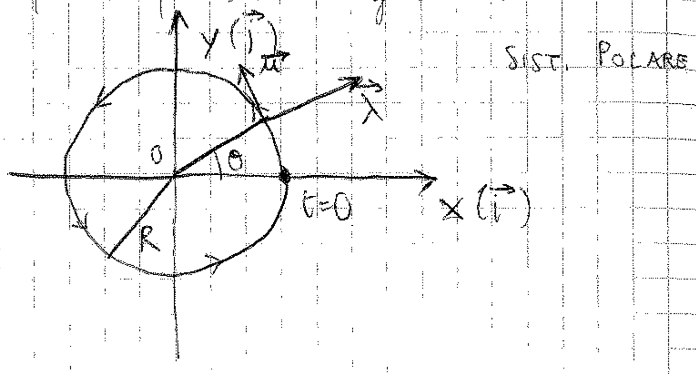
$x_c = \frac{1}{2} a_c \cdot t^2$

$\frac{dz_c}{dt} = v_{zc} = 0 \qquad z_c = cost = h_1$

$\frac{dy_c}{dt} = v_{yc} = 0 \qquad y_c = cost = 0$

$\begin{cases} x_s(t) = b \\ z_s(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_c(t) = \frac{1}{2} a_c t^2 \\ z_c(t) = h_1 \end{cases}$

Es 2) Un corpo puntiforme si muove su di una traiettoria circolare di raggio r partendo da fermo con velocità che in modulo cresce secondo la legge $v = Kt^2$.
Che velocità avrà il corpo dopo dieci giri esatti



$t=0 \qquad \theta(t=0)=0$

$$\begin{cases} \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u} \\ \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{\lambda} + r\ddot{\theta}\vec{u} \end{cases}$$

$v = R\dot{\theta} = Kt^2$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Kt^2}{R} \Rightarrow \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{Kt^2}{R}\,dt$$

l'ang. θ è nullo a t=0

$$\theta(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{K}{R}\cdot t^3$$

$$\underbrace{2\pi\cdot 10}_{\text{angolo } \theta \text{ dopo 10 giri}} = \frac{1}{3}\frac{K}{R}t_1^3 \Rightarrow t_1^3 = \frac{6\pi\cdot 10\cdot R}{K} \Rightarrow t_1 = \left(\frac{60\pi}{\cancel{R}}\cdot\frac{R}{K}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$v = Kt_1^2 = K\left(\frac{60\pi R}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$v_0 + b t_1 = 2 v_0$$

$$v_0 + \cancel{b} \cdot \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4\pi r b}}{\cancel{b}} = 2 v_0$$

$$\cancel{v_0} - \cancel{v_0} + \sqrt{v_0^2 + 4\pi r b} = 2 v_0$$

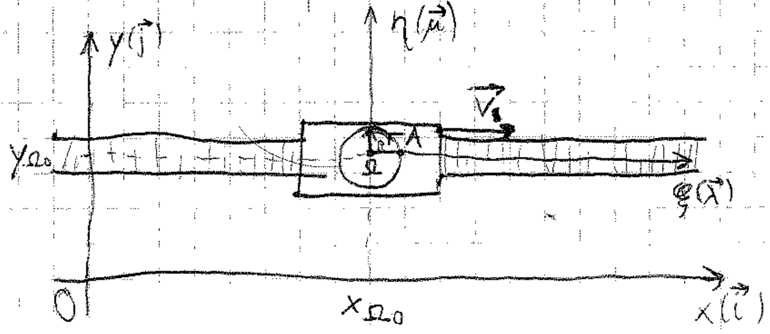
$$v_0^2 + 4\pi r b = 4 v_0^2$$

$$\cancel{4\pi r}\, b = \frac{3 v_0^2}{4\pi r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{r} + \frac{3 v_0^2}{4\pi r^2} t \qquad \ddot{\theta} = \frac{3 v_0^2}{4\pi r^2}$$

$$\vec{a} = -r\left(\frac{v_0}{r} + \frac{3 v_0^2}{4\pi r^2} t\right)^2 \vec{\lambda} + \frac{3 v_0^2}{4\pi r} \vec{\mu}$$

Es. 2) Un carrello si sposta su delle rotaie rettilinee a vel. v_S = cost.
Un oggetto puntiforme descrive sul carrello, dei cerchi di raggio R, attorno al punto Ω con velocità angolare ω_0 = cost.
Determinare le eq. parametriche del moto dell'oggetto puntiforme in un sistema di rif. solidale ad un osservatore posto a terra.



$\vec{V}_S = V_S \vec{i} = \vec{V}_\Omega$

il corpo si trova in A con t=0

$t_0 = 0 \quad x(t=0) = x_{\Omega 0} + R \; (= \hat{A}) \qquad \xi(t=0) = R$

$y(t=0) = y_{\Omega 0} \qquad \eta(t=0) = 0$

$\theta(t=0) = 0$

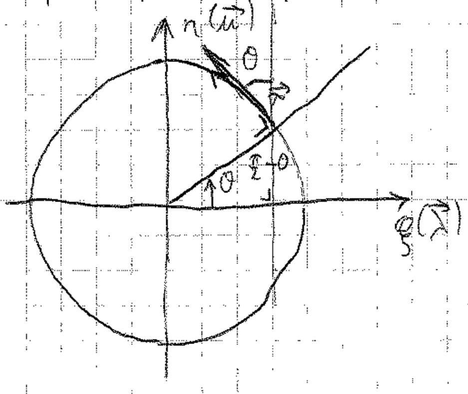
$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{K} = \dot{\theta} \vec{K}$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \qquad \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega_0 \, dt$

$\theta(t) = \omega_0 t$

$\vec{V}_P = \vec{V}_P^{(r)} + \vec{V}_P^{(t)}$

$\vec{V}_P^{(t)} = \vec{V}_\Omega + \overbrace{\vec{\omega}^{(t)} \wedge (P-\Omega)}^{0} = \vec{V}_\Omega = V_S \vec{i}$



$\vec{V}_P^{(r)} = R\dot{\theta}\vec{\tau}$

$\vec{\tau} = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} = -\sin(\omega_0 t)\vec{i} + \cos(\omega_0 t)\vec{j}$

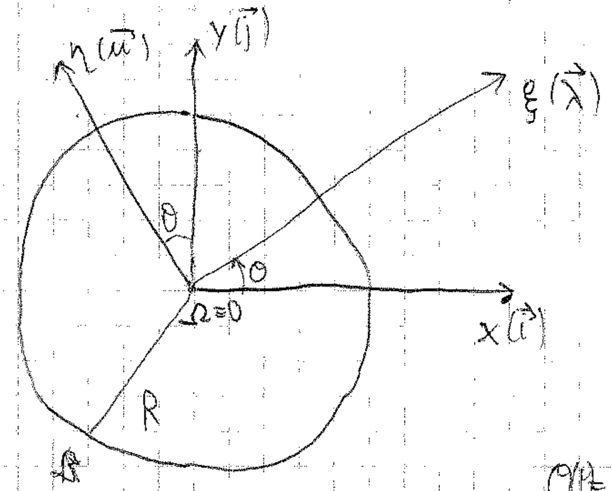
$\vec{V}_P = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = -R\omega_0 \sin(\omega_0 t)\vec{i} + R\omega_0 \cos(\omega_0 t)\vec{j} + V_S \vec{i}$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -R\omega_0 \sin(\omega_0 t) + V_S$

$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = R\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

Es 3)

Un uomo si trova su una piattaforma circolare piana ed orizzontale a distanza $\frac{R}{2}$ dal piano (asse piattaforma).
Questa ruota senza attrito nel suo ~~piano~~ che coincide con il suo piano con velocità angolare ω_0 cost. All'istante $t=0$ l'uomo si avvia in direzione radiale seguendo una linea bianca che rappresenta il diametro della piattaforma diretto verso l'esterno a velocità v_0 cost rispetto alla piattaforma.
Scrivere la velocità dell'uomo in un sist. di rif. fisso solidale con il terreno, con il centro coincidente col centro della piattaforma.



- $t=0$

$x(t=0)=\frac{R}{2}$ $\quad \theta(t=0)=0$

$y(t=0)=0$ $\quad \xi(t=0)=R/2$

$\eta(t=0)=0$

$$\vec{\omega}_0=\omega_0\vec{k} \qquad \omega_0=\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta(t)=\omega_0 t \Longleftarrow \int_0^\theta d\theta=\int_0^t \omega_0\,dt$$

$$\vec{v}_P=\vec{v}_P^{(r)}+\vec{v}_P^{(t)}$$

$$\vec{v}_P^{(t)}=\underbrace{\vec{v}_\Omega}_{=0}+\vec{\omega}^{(t)}\wedge(P-\Omega)=\dot{\theta}\vec{k}\wedge\xi(t)\vec{\lambda}=\omega_0\,\xi(t)\vec{u}$$

$$\vec{v}_P^{(r)}=\dot{\xi}\vec{\lambda}=v_0\vec{\lambda}$$

$$\dot{\xi}=v_0 \qquad \frac{d\xi}{dt}=v_0 \qquad \int_{R/2}^{\xi}d\xi=\int_0^t v_0\,dt \qquad \xi(t)=\frac{R}{2}+v_0 t$$

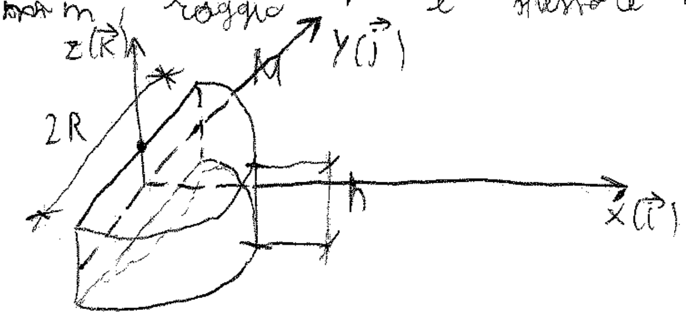
$$\vec{v}_P^{(t)}=\omega_0\left[\frac{R}{2}+v_0 t\right]\vec{u}$$

$$\vec{v}_P=v_0\vec{\lambda}+\omega_0\left[\frac{R}{2}+v_0 t\right]\vec{u}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 436

Es. 4)

Calcolare il baricentro di un semidisco omogeneo di massa m, raggio r e spessore h.



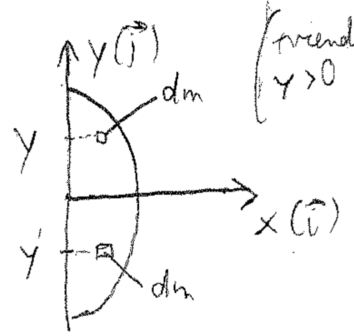
l'integrale è una sommatoria di infiniti valori infinitesimi

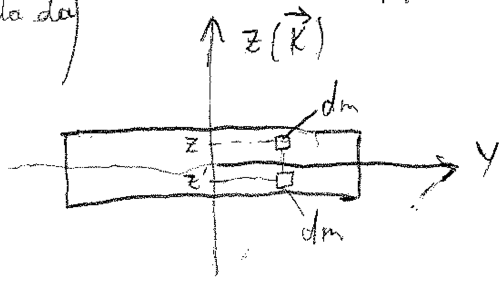
$$x_G = \frac{1}{M}\int_M x\,dm$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int_M y\,dm = 0$$

$$z_G = \frac{1}{M}\int_M z\,dm = 0$$

(prendiamo fetta da $y>0$)

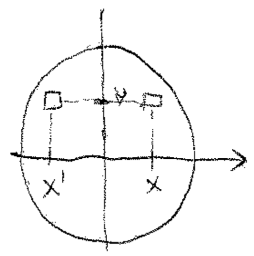




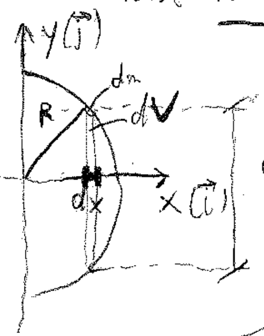
$y' = -y$ $\qquad$ $z' = -z$

N.B.: dai 2 ultimi disegni, notiamo che c'è sempre un dm simmetrico che annulla il dm cercato

Se fosse un disco, sarebbe $G = (0,0,0)$



MA NON lo è!



dV = altezza fettina $= 2\sqrt{R^2 - x^2}$

$$dV = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx \cdot h$$

$$x_G = \frac{1}{M}\rho\int_0^R x\,2h\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$\rho = \frac{M}{\frac{\pi R^2 h}{2}} = \frac{2M}{\pi R^2 h}$$

$$= \frac{2V}{\cancel{M}}\cdot\frac{2\cancel{M}}{\pi R^2 \cancel{h}}\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi R^2}\cdot\left[-\frac{1}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R$$

$$\boxed{x_G = \frac{4}{\pi R^2}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}}$$

LIBRI di TEORIA (+ TECNICI i primi, + discorsivi i secondi)

1) MENCUCCINI - SILVESTRINI, Fisica 1 - Meccanica, Termodinamica 63,75 €
" " , Fisica 2 - Elettromagnetismo e OTTICA 63,75 €
(LIGUORI EDITORE) (Elettrostatica)

2) ROSATI, Editrice Ambrosiana
- Fisica Generale: Meccanica, ... 60 €
- " " : Elettricità, ... 62,50€

3) MAZZOLDI, ... Edi SES
- Fisica VOL. I 38, €
- " " II 39 €

4) HALLIDAY - RESNI - WALKER
- Fondamenti di Fisica : Meccanica ... 45,70 €
" " " : Elettrologia 41,30 €

5) SERWAY - JAWETT Edi SES
- Fisica per Scienze e Ingegneria VOL I 38, €
" " " " " VOL II

—— O ——

Poi c'è, gratuito un libro di M. AGNELLO (nostro prof.)

6) M. Agnello
- Metrologia, Meccanica, Termodinamica e Elettromagnetismo

https: // stor-agnello. polito. it: 990
ID: ~~Stud~~ studenti
pass: studenti - agnello
forse è _