NUMERO: 791

DATA: 10/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE:

MATERIA: Analisi Accessibile

Prof. Airale

Analisi Accessibile

Una didattica completa e sintetica per un approccio all'Analisi Matematica per tutti gli studenti provenienti da una qualsiasi Scuola Media Superiore, indipendentemente dalla preparazione di base.
Un testo che ha prodotto decine e decine di novità, tra cui uno schema generale per affrontare un Limite, uno per un Integrale, una formula "magica" per risolvere all'istante oltre un miliardo di Limiti, le varianti dei Limiti che portano al numero e, le varianti degli Integrali che portano all'arctgf(x), le associazioni per memorizzare gli Sviluppi in Serie di Mac Laurin, una guida completa per gli Integrali per parti, per le Equazioni Differenziali.... e tanto, molto tanto, altro ancora.

Una visione dell'Analisi dove interessa meno il Know Why, ma più il Know How.

Primo: Come passare il Test ?

Indice generale delle Dispense

I. Come si studia.

Tecniche e Strategie per affrontare al meglio il Test d'esame.

Come far rendere al meglio la Laurea in Ingegneria.

II. Prerequisiti.

Regole necessarie di Aritmetica, che molti hanno dimenticato, indispensabili per il calcolo di Limiti e Integrali.

Algebra di I e II Liceo Scientifico.

Come verificare in 25" le soluzioni di un'eq. di II grado

Disequazioni a 1 o 2 variabili. Disequazioni irrazionali. Le scorciatoie e le associazioni.

Retta, parabola, iperbole equilatera, valori assoluti.

Trigonometria. Definizioni, formulari, tabelle, ecc…

La sequenza dei valori fondamentali di senx ha una logica?

Varianti della sinusoide.

Logaritmi ed esponenziali.

III. Limiti.

Teoria su Generalità e Limiti. Tutti gli ordini di infinito.

Compendio per esercizi sui Limiti.

Schema generale per la risoluzione di un Limite.

Asintoti. Tre metodi per calcolare un Asintoto Obliquo.

Preminenza della base o dell'esponente nel calcolo delle Forme d'indeterminazione del tipo 1 , 0 , ?

Una formula magica per risolvere in 20" un limite fra oltre 10 Possibilità.

212 Esercizi risolti.

VII. Integrali Indefiniti.

Teoria. Formule e regole d'Integrazione.
Tutti i trucchi per il calcolo di un Integrale.
Le varianti che portano all'arctangente.
Metodo dei fratti semplici. Una scorciatoia.
Integrali per parti. Come memorizzare i tre fondamentali.
Una famiglia di Integrali, in cui f(x) e g'(x) sono difficilmente individuabili. Schema generale per risolvere un Integrale.
233 Esercizi risolti.

VIII. Integrali Definiti.

Teoria e generalità. Calcolo di Aree. Valor Medio.
Scorciatoie nel caso di f(x) pari o dispari.
Problemi di Cauchy mascherati. Il Teorema di Archimede.
129 Esercizi risolti.

VIII. Integrali impropri.

Le due famiglie di Integrali impropri.
Semplici regole per risolverne facilmente la maggior parte.
Integrali impropri calcolati con l'ausilio di funzioni maggioranti o minoranti.
58 Esercizi risolti.
71 Esercizi risolti di ripasso su Integrali indefiniti, definiti, impropri.

IX. Equazioni differenziali, (ED).

Eq. differenziali del I ordine a variabili separabili.
Gestione delle costanti nel caso di esponenziali e logaritmi.
Problemi di Cuchy.
ED del I Ordine a variabili non separabili.
Esercizi che richiedono altri schemi, già assegnati agli esami.

Infatti contengono:

1) **decine di studi di funzione, quasi tutte assegnate negli scritti prima che fossero introdotti i Test a risposta chiusa.**
2) **Equazioni differenziali del II Ordine non omogenee, con calcolo dell'Integrale particolare e relativi problemi di Cauchy**
3) **Molti esercizi, soprattutto su Limiti, Derivate Sviluppo in serie, Numeri Complessi e Integrali la cui esecuzione supera i 10', quindi non assegnabili nei Test.**

Pensateci bene. Mettete in pericolo il superamento dell'esame. Se nel vostro futuro non c'è la necessità di conseguire anche la Laurea Specialistica (la media non è importante) e se nel vostro futuro c'è Analisi II, piuttosto migliorate la preparazione sugli Integrali.

Iriel l'elfo e la Gara per la Successione

Il disegno sintetizza il trailer del fantasy:

"Iriel l'elfo e la gara per la successione"che vi fornirà una nuova versione del mondo elfico, dove i "cattivi" siamo noi, gli umani, con l'insaziabile fame di territori da conquistare e spogliare, mentre gli elfi non vivono in palazzi, ma sono perfettamente integrati con la natura che li circonda.

Un romanzo che dà anche una risposta alla domanda"Perché gli elfi sono pochi, nonostante possano vivere anche mille anni?" La risposta è El Nean Dil, l'Ultima Giovinezza, che condizionerà le scelte sentimentali del protagonista.

El Nean Dil sarà la vera protagonista del romanzo, più di Iriel, dal faccino fanciullesco, la sua arma segreta contro gli avversari che lo sottovalutano. Un teen ager simpatico, capace di buttarsi a capofitto in ogni avventura, per quanto spericolata, e di uscirne vittorioso. Ma non sempre indenne.

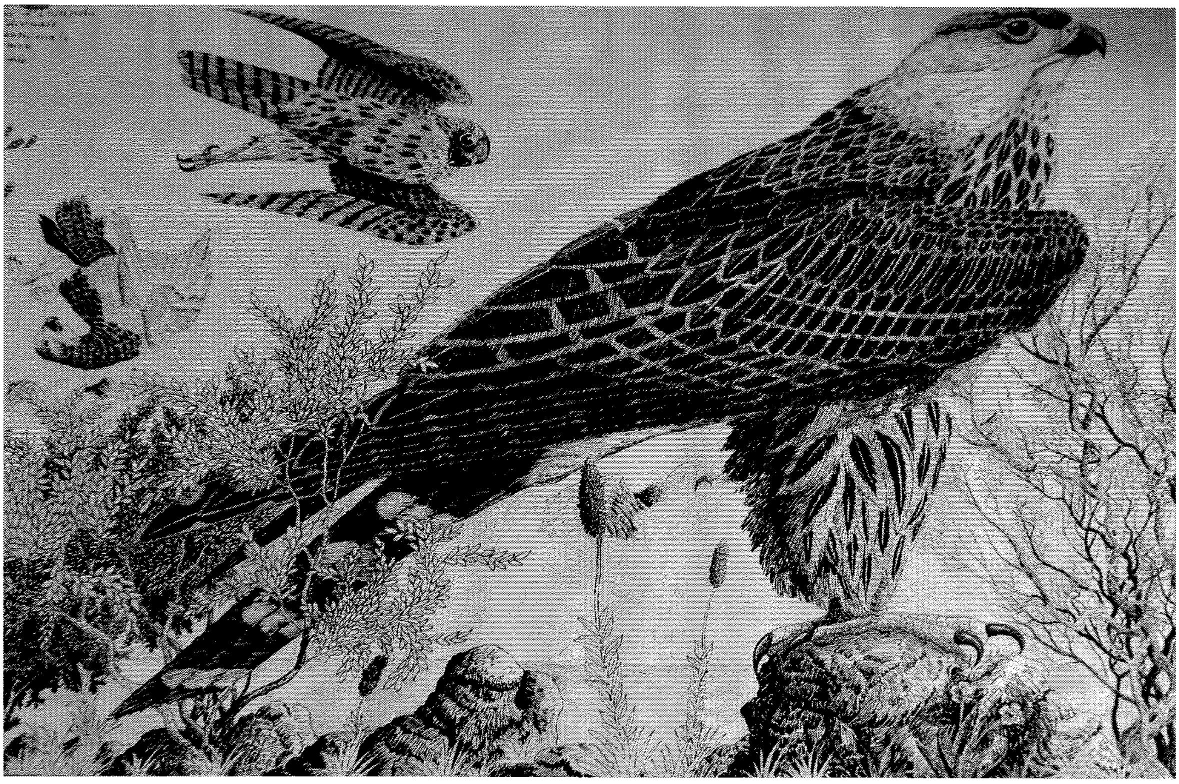
Un romanzo che coniuga al meglio la regola delle tre: avventura, azione e amore.

E anche una buona dose di di umorismo, nelle figure del nano Rokan, detto Spaccaferro, e del calderaio Muriel.

A proposito: nell'immagine Iriel è presente. Dove?

Per esclusione la risposta è ovvia e dà un indizio di quanta parte giochi la magia nella vicenda.

"I GRANDI DI GREYSEA" è al confine tra fantasy e fantascienza. Greysea, sul pianeta omonimo, è un'isola simile alla Nuova Zelanda. Un mondo aspro, con *poco legno*, dove la vita è possibile solo sulle foci dei fiumi. Le Grandi Maree obbligano le popolazioni a migrare, ogni generazione, dalla Città Alta a quella Bassa e viceversa, con lotte feroci per accaparrarsi le case migliori. Il legno è la moneta corrente, il manico di un coltello è la paga giornaliera, il possesso degli alberi dà diritto all'appartenenza a una casta, la brama di legno scatena le guerre. La vicenda si svolge nell'arco di due generazioni con drammatici risvolti. Ressa, una bellissima e intrepida eroina è la protagonista della prima generazione. Lotta con ostinazione feroce ogni volta che la malvagità umana spinge lei e i figli nei quartieri degli uomini topi, i fuoricasta. Il figlio Tiran, il protagonista della seconda, passerà, insieme ai fratelli, da nobile a fuoricasta. E' un combattente temibile come Ettore di Troia e un condottiero intelligente come Giulio. Da fuoricasta riuscirà a risalire la china e a conquistare tutto Greysea orientale, aiutato dagli enormi poteri dei Grandi, i giganteschi cetacei che scatenano le Grandi Maree, venerati come divinità. Ma il loro disegno è come la lama di una spada: *taglia da entrambe le parti.* Ho dato particolare importanza alla cultura, in senso antropologico, dai rituali ai modi di dire, dai costumi alla religione e alla cucina.
Fra i miei romanzi è il più originale, il più maturo, il più ben scritto.



Shenan di Arishdale, il Giudice Guerriero.

Dopo la fulgida fase dell'espansione è iniziata per l'Impero di Conn quella della lenta decadenza. Le prime terre perdute sono state le steppe al di là delle Montagne Splendenti, abitate dai feroci morak, i barbari nomadi, che ora insidiano i valichi. I lussi e gli sprechi impoveriscono l'Impero obbligandolo ad allentare la sorveglianza sulle terre di confine. Banditi e barbari accorrono come lupi famelici su una carcassa da spolpare, finché un Conner decide di servirsi degli Esper, i giovani capaci di spodestare o affiancare la mente degli animali. Nasce il corpo dei **Giudici Guerrieri e dei loro Aiutanti: le Zanne, il Vista Acuta, il Naso sulla Pista, gli Occhi nel Buio, gli Zoccoli e il Pungiglione.**

Là dove una centuria non riesce a snidare una banda di predoni, un Giudice porta sempre a compimento la sua missione. E pesa molto meno sulle disastrate casse imperiali. A voi l'avventura sanguinosa e profondamente umana di Shenan di Arishdale. Un romanzo epico, che mette a nudo l'anima del protagonista, con i dubbi e le angosce che accompagnano la solitudine imposta dal ruolo e dal voto di castità per tutta la durata del mandato.

Un fantasy che vi farà volare sulle ali di un falcone, penetrare le tenebre con gli occhi di un rapace notturno, seguire le peste col fiuto di un cane lupo, galoppare con gli zoccoli di uno stupendo sauro, scatenare zanne e artigli con la potenza distruttrice di una tigre o di un leopardo.

Presenze e un simpatico teen ager che è funambulo, acrobata, spadaccino e poliglotta.
Hanno in corpo un piccolo Demone del Terzo Livello, innestato dal malvagio stregone Arrenius, una fiammella vorace che li divorerà se non gli riporteranno il secondo Occhio di Hr'hillel, che unito all'altro, darà allo stregone poteri immensi.
Il lungo viaggio attraverso i Regni Occidentali, il Mare di Issel e i Regni Meridionali è una sequenza incredibile di disavventure, dovute alla Maledizione di M'bokuso, il possessore dell'Occhio,

Spade e pugnali che tintinnate,
piedi che arroganti avanzate ,
mani che avide vi protendete,
quali pericoli vi attendono sappiate:
Spiriti irati acqua e terra germineranno,
feroci assassini i boschi vomiteranno,
mostri affamati dalla sabbia spunteranno,
fulmini brucianti saetteranno,
e turbini e tempeste
venti rabbiosi solleveranno.
Signori crudeli e e guardie irate,
guerre e pirati e belve affamate
e cento e cento altre calamità
sul cammino proibito vi attenderanno.

La compagnia sembra non avere scampo: le maledizioni degli stregoni non si possono annullare. Viene in loro soccorso una "contro maledizione" che fa sì che riescano a sopravvivere alle molteplici disavventure. Solo uno perirà nel viaggio di ritorno, quando saranno coinvolti nell'assedio di una città, dalle armate del Balivo, noto come Sava il Debosciato. Le disavventure sono mitigate dalle divertenti battute e litigi fra Oregh e Orphius, i giganti gemelli, su chi sia il più scervellato, o fra i giganti e i nani, specialmente Silpius, dalla lingua corrosiva come il vetriolo. Poi vi sono le vicende amorose delle amazzoni, seguaci del Trantismo, la Religione Orientale in cui l'erotismo ha una parte fondamentale. Chi sono i due fortunati?
O forse è meglio dire sfortunati, dato il caratterino piccante delle amazzoni.

I) Come si studia?

Cominciare dal ripasso delle Scuole Medie Superiori, dopo aver colmato le vostre lacune e appreso i piccoli accorgimenti essenziali, ad esempio la verifica ultra rapida di un'equazione di II grado.

Se non possedete il ripasso, <u>non potete affrontare lo studio dell'Analisi!</u>
Darete l'esame 5 volte e vi stireranno cinque volte.
Al 99,9%.
Nello 0,1% passerete per fondello, ovvero per gli scarti residuali della curva gaussiana delle probabilità.
Poi vi salderanno il conto a Fisica I e ad Analisi II.
Con tanti auguri.
Ve l'ha scritto il medico di impiccarvi al nodo scorsoio della poltronite acuta?
La grandissima rottura della Matematica è che bisogna saperla tutta, *<u>ma proprio tutta.</u>*
E' come una catena:

- **ogni anello è legato ai precedenti**
- **proverbio arabo: una catena è tanto forte quanto lo è il più debole dei suoi anelli.**

Verissimo, specie per Analisi e dintorni.

Scusassero se devo spiegare quello che ai più sembra ovvio, *<u>ma non lo è per tutti.</u>*

che racconta? A cominciare da quella dei 4 (quattro) milioni di posti di lavoro nel marzo 2013.

Avete voluto la bicicletta, cioè il Poli?

Dovete imparare a pedalare nel modo giusto!

Se spremerete sudore nel modo giusto sono sicuro che lo farete, come sono sicuro che sarete nel terzo che arriverà fino in fondo. Se non vi va, potete sempre rinunciare a fregiarvi del titolo di Ingegnere. A Scienze dell'Informazione e a Scienze Politiche c'è tanto posto. Peccato che siano fabbriche di disoccupati, sottoccupati o, i più fortunati, occupati in tutt'altro, fuorché quello che hanno studiato.

II) Eseguire i test per argomenti _nell'ordine indicato._

Prima di eseguire ogni Test studiare il ripasso di teoria sull'argomento.

- **Prima memorizzare tutto perfettamente**
- **Poi passare all'esecuzione dei Test**
- **Memorizzare anche gli altri argomenti connessi.**

Per i Limiti occorre conoscere le formule di Derivazione e lo Sviluppo in Serie, perché vi sono applicazioni della regola di de l'Hopital e quesiti sugli o piccolo.

Ricordate: nelle Scienze esatte, Matematica, Fisica, Chimica e dintorni, una regola o una formula non si può saperla _abbastanza._

O la si sa o non la si sa!

C'è solo il bianco e il nero, il grigio non esiste!

Basta una parola mancante, una parentesi tonda al posto di una quadra e siete fuori gioco. Per questo Analisi e dintorni sono delle grandi rotture di cabasisi, per dirla alla Montalbano.

1] $\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x^3)^2}{\int_0^x \operatorname{sen}^3 t^3 \cdot t^2 dt} =$ a] 0 b] $+\infty$ c] 3 d] 1 e] -1

Se intuite subito che prima si deve applicare la regola di dH e poi lo SVS di ML bene, se no passate oltre.

$$= (dH) \lim_{x \to 0} \frac{2(1-\cos x^3)\operatorname{sen} x^3 \cdot 3\cancel{x^2}}{\operatorname{sen}^3 x^3 \cdot \cancel{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{2(1-\cos x^3) \cdot 3}{\operatorname{sen}^2 x^3} =$$

$$= (SVS) = \lim_{x \to 0} \frac{2(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^6}{\cancel{2}}) \cdot 3}{x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{x^6 \cdot 3}{x^6} = 3 \Rightarrow la\ c]$$

2) Date $f(x) = \left(\operatorname{artg} x\sqrt{2} + \operatorname{artg} \frac{x(1-\sqrt{2})}{1+x^2\sqrt{2}}\right)$, g(x)= artgx allora vale: a] f'(x) = g'(x)

<u>b] f'(x)</u> = -g'(x) c] f'(x) = 2g'(x) d] g'(x) = 2f'(x) e] nessuna delle precedenti

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{1+2x^2} + \frac{1}{1 + \frac{x^2(1-\sqrt{2})^2}{(1+x^2\sqrt{2})^2}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})(1+x^2\sqrt{2}) - x(1-\sqrt{2})\,2\sqrt{2}x}{(1+x^2\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1+2x^2} + \frac{\cancel{(1+x^2\sqrt{2})^2}}{(1+x^2\sqrt{2})^2 + x^2(3-2\sqrt{2})} \cdot \frac{1+\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2} - 2x^2 - 2\sqrt{2}x^2 + 4x^2}{\cancel{(1+x^2\sqrt{2})^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1+2x^2} \quad \frac{2x^2 - 3\sqrt{2}x^2 + 1 - \sqrt{2}}{\underbrace{1 + 2x^4 + \cancel{2\sqrt{2}x^2} + 3x^2}_{2x^4+3x^2+1} - \cancel{2\sqrt{2}x^2}} = \frac{x^2(2-3\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}}{(2x^2+1)(x^2+1)} + \frac{\sqrt{2}}{1+2x^2}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2}x^2} + \cancel{\sqrt{2}} + 2x^2 - \cancel{\sqrt{2}x^2} + 1 - \cancel{\sqrt{2}}}{(2x^2+1)(x^2+1)} = \frac{2x^2+1}{(2x^2+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$$

=> la a] Ma che faticaccia! Nello stesso tempo potevate risolvere due test! Inoltre più complicati sono i calcoli, <u>maggiore è il rischio di commettere qualche errore!</u>

3) Data $f(x) = \operatorname{artg} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ => f'(x) vale: a] $2\operatorname{sen} 2x$ b] $\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\cos x}$

c] $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{1-\cos x}$ d] $\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1+\cos x}$ e] 1/2

$$= \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \int \cancel{2}\log x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{4}2}x^{\overset{3}{\cancel{4}}}dx = \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \int \log x\cdot x^3 dx$$

$$\left[\begin{array}{ll} f(x)=\log x & g'(x)=x^3 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=\frac{1}{4}x^4\end{array}\right] = \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\log x - \int\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{1}{4}x^{\overset{3}{\cancel{4}}}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \frac{1}{8}x^4\log x + \frac{1}{48}x^4 + c = \frac{1}{4}x^4\left(\log^2 x - \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{12}\right) + c$$

Il tempo necessario è di circa 4 minuti, cioè ancora nel limite dell'accettabile, poiché i calcoli non presentano particolari difficoltà. Ma per l' $\int x^2 \log^3 x\,dx$ il calcolo è ben più lungo.

$$\left[\begin{array}{ll} f(x)=\log^3 x & g'(x)=x^2 \\ f'(x)=3\log^2 x\cdot\frac{1}{x} & g(x)=\frac{1}{3}x^3\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^3\log^3 x - \int \cancel{3}\log^2 x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^{\overset{2}{\cancel{3}}}dx = \frac{1}{3}x^3\log^3 x - \int x^2\log^2 x\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} f(x)=\log^2 x & g'(x)=x^2 \\ f'(x)=2\log x\cdot\frac{1}{x} & g(x)=\frac{1}{3}x^3\end{array}\right] = \frac{1}{3}x^3\log^3 x - \frac{1}{3}x^3\log^2 x + \int 2\log x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{1}{3}x^{\overset{2}{\cancel{3}}}dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\left[\log^3 x - \log^2 x\right] + \frac{2}{3}\int x^2\log x\,dx = \left[\begin{array}{ll} f(x)=\log x & g'(x)=x^2 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=\frac{1}{3}X\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^3\left[\log^3 x - \log^2 x\right] + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\log x - \int\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{1}{3}x^{\overset{2}{\cancel{3}}}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\left[\log^3 x - \log^2 x + \frac{2}{3}\log x - \frac{2}{9}\right] + c.$$

---

6) Sia da calcolare l' $\int \frac{e^x\left[(1+x^2)\operatorname{artg}x+1\right]}{(1+x^2)(e^x\operatorname{artg}x+1)}dx$ se non capite in fretta che, posto e^x artangx + 1 = t, tutto il resto è = dt, => l' ∫ è = log (e^xartangx + 1) + c, lasciate perdere.

7) A volte capite che è il caso di passare oltre dal tipo di risposte proposte. Eccone un esempio.

Sia data $F(x) = \int \frac{1}{1+\operatorname{tg}x}dx$, allora $F(x)$ vale:

a] $\frac{1}{2}\log|1+\operatorname{tg}x| - \frac{1}{4}\log(1+\operatorname{tg}^2 x) - \frac{1}{2}x + c$

b] $\frac{1}{2}\log\frac{|1+\operatorname{tg}x|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} + \frac{1}{2}x + c$

c] $\frac{1}{2}\log\left[(1+\operatorname{tg}x)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\right] - \frac{1}{2}x + c$

d] $\frac{1}{2}\log\left[|1+\operatorname{tg}x|\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\right] + \frac{1}{2}x + c$

e] nessuna delle precedenti.

2. Indicare sempre una risposta per i rimanenti!

Con 0,15 punti di penalizzazione per ogni risposta errata, il gioco non è equo. Le probabilità per i Test non sono a favore del banco, cioè dell'esaminatore, ma a favore del giocatore, cioè lo studente.
Una volta tanto che al Poli sono stati indulgenti, non volente approfittarne?
Questo vale per l'anno 2014, per il 2015 non si sa.

3. Cercate di avere almeno 10 risposte esatte e di escludere 1 o 2 possibilità dai quesiti rimanenti.

Se **ne escludete anche una sola, per tutti gli altri quesiti, le probabilità di esservi tolta Analisi I di torno sono circa l'85%.**

Se ne escludete 2 salgono a oltre il 93%, *con tre salgono a oltre il 98%!*

a] Considero la $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ho tolto al Den. $+x^2$ che è $> 0 \Rightarrow$

$f_1(x)$ è una f. maggiorante di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

b] Considero $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Ho sostituito 1 a $\sqrt{x}$. Poichè in $[0,1)$ si ha: $1 > \sqrt{x} \Rightarrow f_2(x)$ è una f. minorante della $f(x)$ assegnata.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\text{artg}\,x\right]_0^1 = \text{artg}\,1 - \text{artg}\,0 = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ assume un valore K con $\frac{\pi}{4} < K < 2$.

Poichè $\frac{\pi}{4} \sim 0,78 > \frac{1}{2}$ la risposta c] è errata, ma l'$\int$ converge a un valore finito $\Rightarrow$ la e].

Tempo di soluzione, se siete molto svegli e preperati, circa 3', due minuti e mezzo persi.

Se non possedete sulle dita le funzioni maggioranti e minoranti è meglio lasciar perdere

$$= 2\log|t+1| - \int \frac{+2t-1+1}{t^2-t+1}\,dt =$$

$$= 2\log|t+1| - \int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2-t+1}\,dt =$$

$$= 2\log|t+1| - \log(t^2-t+1) + \int \frac{dt}{(t^2-t+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}} =$$

$$= \log\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\,dt + \int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

Prendendo la scorciatoia delle formule derivate dall' $\int \frac{1}{n^2x^2+m^2}\,dx$ (Vedi dispensa sugli $\int$ definiti) posso scrivere:

$$= \log\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

(Infatti se $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$)

= Tanti auguri!

E' una rogna e pure lunga! Una pagina e mezza di calcoli e 15' quasi sicuramente sprecati, perché in una pagina e mezza di calcoli, con l'ansia da esame, un errore ci scappa, al 90%. Se non siete riusciti ad applicare una delle due scorciatoie precedenti, mettete una risposta a muzzo e passate a un altro quesito.

Solo un masochista, o la biro più veloce del Poli poteva tentare di risolvere il quesito così!

9) $\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\,dx$ (analogamente all'esempio n° 5 conviene razionalizzare)

$= \int \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}\,dx = \int \frac{x+\cancel{1}+x-\cancel{1}+2\sqrt{x^2-1}}{2}\,dx$

$= \int x\,dx + \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ldots$ procedere col metodo di integrazione per parti.

10) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx + \int \frac{1\,dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} + \operatorname{artg} x + c$

11) $\int \frac{16+4x+x^2}{4+x} = \int \frac{16+8x+x^2-4x}{4+x}\,dx = \int \frac{(4+x)^{\cancel{2}}}{\cancel{4+x}}\,dx - \int \frac{4x+16-16}{4+x}\,dx =$

$= 4x + \frac{x^2}{2} - \int \frac{4\cancel{(4+x)}}{\cancel{4+x}}\,dx + \int \frac{16\,dx}{4+x} = \cancel{4x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{4x} + 16\log|4+x| + c$

Verifica: $D\left[\frac{x^2}{2} + 16\log|4+x|\right] = x + \frac{16}{4+x} = \frac{4x+x^2+16}{4+x}$ OK!

Oppure si poteva eseguire la: $\begin{array}{l|l} x^2+4x+16 & x+4 \\ \hline -x^2-4x & x \\ \hline // \quad // \quad 16 = R & \end{array}$

e poi scrivere: $\int x\,dx + \int \frac{16}{4+x}\,dx = \ldots$

12) $\int \frac{2\log x+1}{x(\log^2 x+\log x)}\,dx$ $\left(\begin{array}{l} \log x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{array}\right) = \int \frac{2t+1}{t^2+t}\,dt = \log|t^2+t| + c$

$= \log|\log^2 x + \log x| + c$

13) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,2x - \mathrm{sen}^2 2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2x\,dx}{\sqrt{1-1+2\,\mathrm{sen}\,2x-\mathrm{sen}^2 2x}} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2x}{1-(\mathrm{sen}\,2x-1)^2}\,dx$ $\left(\begin{array}{l} \mathrm{sen}\,2x - 1 = t \\ \Rightarrow 2\cos 2x\,dx = dt \end{array}\right)$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + c = \frac{1}{2}\arcsin(\mathrm{sen}\,2x - 1) + c$

14) $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$ (dalle formule di bisezione: $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x$

$= \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

7. Se avete un dubbio su una formula, impostare un semplice esempio numerico.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^K-1}{x}$ **= ? Procedo per induzione.**

Pongo K=1; $\lim_{x\to 0}\frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}$ **= 1**

Pongo K=2 e trascuro gli infinitesimi di O superiore

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$$

Per induzione deduco che: $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^K-1}{x}=K$

b) Non ricordate la formula di duplicazione del coseno?

(Sotto strizza da esame tutto è possibile!)

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ **oppure** $\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x$ **?**

Pongo $x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{3}$

Sostituisco nella prima formula:

$$\frac{1}{2}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=2\cdot\frac{3}{4}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

OK! L'uguaglianza è verificata => la formula è corretta

Dato il seguente limite, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x}{x+1}-\frac{x^4+3x}{x^2}\right)$ allora esso vale: a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) 1 e] nessuna delle precedenti.

Trascuro subito le costanti e gli ∞ di ordine inferiore:

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+\cancel{3x}}{x+\cancel{1}}-\frac{x^4+\cancel{3x}}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x}-\frac{x^4}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x-x)=0 \quad \Rightarrow \text{la b]}$$

Eseguo invece la sottrazione entro parentesi, riducendo le due frazioni a un'unica frazione:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+3x^3-x^5-x^4-3x^3-3x}{(x+1)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4-\cancel{3x}}{x^3+\cancel{3x}^2}$$

Ora posso trascurare le costanti e gli ∞ di ordine inferiore:

$$=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$$

La risposta corretta è invece la a].

Ancora un esempio sull'errore di trascurare subito le costanti e gli ∞ di ordine inferiore.

Dato $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{3^{\frac{x^2+2x}{x+5}}}$ esso vale: a) $\frac{1}{3}$ b) 27 c) 3 d) 1 e) $+\infty$

Se procedo come prima: $=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{3^{\frac{x^2}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{3^x}=1\Rightarrow$ la b)

Error! Occorre applicare prima la regola del quoziente di 2 potenze con la stessa base:

$$=\lim_{x\to+\infty}3\;x-\frac{x^2+2x}{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-x^2-2x}{x+5}=\lim_{x\to+\infty}3^{\frac{3x}{x}}=3^3=27$$

=> la b)

Conclusione: <u>attenti alle scorciatoie!</u>
Prima di imboccarle fateci un pensierino!

11. E mi raccomando, ragazzi: nervi a posto e lasciate l'ansia a casa!

- Bravo te! - direte voi - Quando risolvi i quesiti, tranquillo e pacifico alla tua scrivania, non hai mica la strizza da esame, che ti manda nel pallone totale, vale a dire in un mondo fatto di nebbia densa, scura e pure asfissiante.

Penultimo consiglio, il più prezioso di tutti!

Subito prima che si accenda quel maledetto, carognesco, sadico, fetente schermo con quelle affermazioni che paiono inventate da un extraterrestre assetato del vostro sangue, RILASSATEVI, RILASSATEVI, e ancora RILASSATEVI!

Abituatevi <u>sempre, prima di ogni esame</u>, a qualche minuto di training autogeno, simile alla meditazione zen:

Occhi chiusi - Concentrarsi sulla respirazione

Respirazione lenta e regolare - Escludere tutto il resto!

Il casino intorno a voi, l'aula, il PC che vi sta davanti.

Siete Decio Massimo Meridio, Comandante delle legioni del nord, pronto a scatenare l'inferno contro le torme dei feroci Germani che vogliono infilare la vostra testa su una lancia.

Siete il Gladiatore, nell'arena del Colosseo. Vi sfregate le mani con la sabbia, aspettando di vedere l'armato o la belva che dovrete affrontare. Niente e nessuno può battervi!

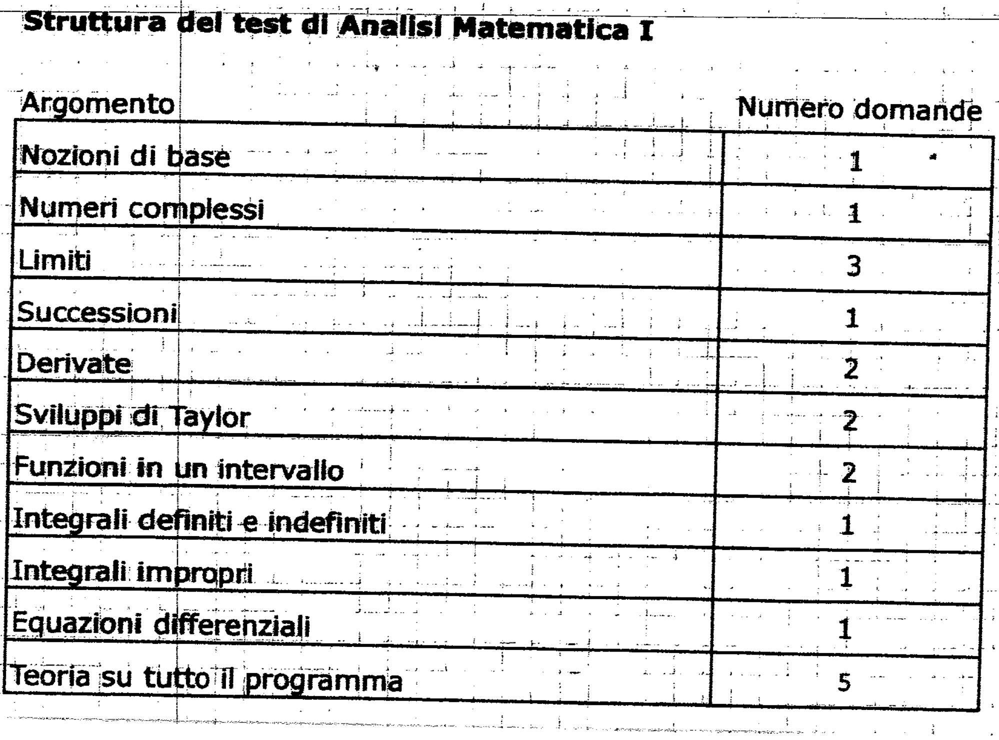
Neanche quei fottuti quesiti che tra poco compariranno sullo schermo, perché avete imparato a dominare la paura, a relegarla in un angolo della vostra mente, imbavagliata e bene impacchettata.

Mi sono documentato sulla figura della mitologia del Sol Levante della Dea della Luce Amaterasu. E' perfetta!

Sei la Dea che ha vinto le tenebre primordiali!
Che sono mai le tenebre dell'Analisi in confronto a un Universo privo di Sole?
La luce che sgorga dalla tua mente può trionfare su queste meschine tenebre!
Fa vedere quanto vali, Amaterasu!
Siamo tutti con te, in attesa che dal tuo specchio sgorghi repentino il raggio che squarci le ombre di quei malefici, orridi, sadici Test!

Hai il POTERE!
Nulla e nessuno può sconfiggerti!

I sei mesi spesi per preparare la Tesi finale partecipando a un progetto saranno i meglio spesi del Poli, ed entreranno nel vostro curriculum. Prima pensate a togliervi di torno Analisi I e tutti gli esami dei primi due anni.
Perciò dedicate molta attenzione agli INTEGRALI.
Si può superare il Test senza sapere nulla sugli Integrali *ma poi c'è Analisi II che è quasi tutta a base di Integrali* !



Struttura del test di Analisi Matematica I

Argomento	Numero domande
Nozioni di base	1
Numeri complessi	1
Limiti	3
Successioni	1
Derivate	2
Sviluppi di Taylor	2
Funzioni in un intervallo	2
Integrali definiti e indefiniti	1
Integrali impropri	1
Equazioni differenziali	1
Teoria su tutto il programma	5

Dopo il primo appello la struttura va preso con le molle. Dei Docenti hanno assegnato 4 quesiti sulle Successioni, o 5 sulle Eq. Differenziali. Tutti i quesiti richiedono di sapere sulla punta delle dita quanto avete appreso (o avreste dovuto apprendere) nei primi 4 anni di Liceo Scientifico. Se non è così, adeguatevi, e di corsa! Senza le basi il Test diventa un terno al Lotto! Forse è più conveniente sciropparsi quelle pallose regole e formule dalle potenze ai logaritmi. *Memorizzare, memorizzare e poi ancora memorizzare. Fino alla paranoia.*

Sintesi

1. **Eseguire i Test per argomenti nell'ordine, le Simulazioni d'esame cominciando dalle ultime, che più rispecchiano la tendenza alle tortuosità del ragionamento che al calcolo**
2. **Prima dello svolgimento di esercizi e simulazioni possedere molto bene la teoria**
3. **All'esame concentrarsi su 15-16 domande. Scartare subito quelle tipo Mission Impossible**
4. **Cercare di avere almeno 10 risposte esatte, sulle rimanenti cercare di escludere almeno una possibilità e segnare comunque un risultato**
5. **Mettere in relazione fra loro le risposte**
6. **Sono possibili delle semplificazioni, specie per limiti, derivate e integrali?**
7. **Per un dubbio su una formula impostare un semplice esempio numerico**
8. **Usare tutte le formule ausiliarie, le avvertenze e i trucchi suggeriti nei compendi**

Dispensa IV

Derivate.

Teoria e compendi sulle Derivate.
Formule e regole. Come associare le Derivate Fondamentali a quelle di funzione di funzione.
Le formule secondarie più richieste.
Derivate logaritmiche. <u>Le più rognose.</u>
<u>Derivate semplificabili</u>.
Derivate come verifica degli Integrali.
Applicazioni dei Teoremi di Rolle, Lagrange, De l'Hopital.
<u>I casi che violano le Hp del T. di Lagrange.</u>
160 Esercizi risolti.

Integrali Indefiniti

Formule di integrazione

$\int$ immediati	$\int$ di funzione di funzione
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$ [1]	$\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ ; \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \log\, \lvert x \rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log\, \lvert f(x) \rvert + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{loga} + c$	In generale per passare dalla prima alla seconda colonna: 1) x→ f(x) 2) Dentro l'$\int$ ci deve essere $f'(x)$
$\int senx\, dx = -cosx + c$	
$\int cosx\, dx = senx + c$	
$\int (1+tg^2x)dx = tgx + c$	
$\int \frac{1}{cos^2x}\, dx = tgx + c$	
$\int (1+cotg^2x)dx\ \cancel{\frac{dx}{1+cotg^2x}} = -cotgx + c$	
$\int \frac{1}{sen^2x}\, dx = -cotgx + c$	Altri esempi:
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctgx + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\, dx = arctg\ f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arcsenx + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = arcsen\ f(x) + c$
$\int senhxdx = coshx + c$	
$\int \frac{1}{cosh^2x} = tghx + c$	
$\int Kdx = kx + c$	Le ultime tre formule della prima colonna sono un caso particolare della [1] in cui α vale : $0, -\frac{1}{2}, -2$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + c$	
$\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\, dx = -\frac{1}{f(x)} + c$

$D\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x)$ $\qquad$ $D\int_{x_0}^{g(x)} f(t)\,dt = f(x)\cdot g'(x)$

Derivata di una funzione.

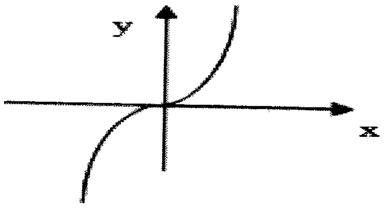
Si indica con y',f'(x),Dy,Df(x),$\frac{dy}{dx}$
E' il limite del RI quando l'incremento della variabile indipendente tende a 0.

Dalle [1]e[2] si ha: f'(x)=$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
f'(x_0)=$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è la derivata calcolata nel punto x_0

Dalla [3] si ottiene Dsenx=$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$ = cosx Dcosx = -senx

La Dx^n si può calcolare col metodo di induzione (Dx,Dx^2, Dx^3,... e così via)
Le Dtgx e Dcotgx con la formula della derivata di un quoziente
Le De^x e Dlogx coi limiti fondamentali:
$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$=$\lim_{h\to 0}\frac{e^x-e^h-e^x}{h}$=$e^x$ $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$=$e^x$
Dlogx=$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-logx}{h}$=$\lim_{h\to 0}log\frac{\frac{x+h}{x}}{h}$=$\lim_{h\to 0}log(1+\frac{h}{x})$ pongo $\frac{h}{x}$=z h=xz se h→0 z→ 0
=$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+z)}{zx}=\frac{1}{x}$
Ripetiamo la [4] : RI f(x)=3x^2-x+1 calcolata nel punto x=1 è uguale a :3h+5
f'(1)= $\lim_{h\to 0}(3h+5)$=5 controllo:f'(x)=6x-1;f'(1)=6-1=5 ok!

c)**Un punto di flesso a tangente verticale**:f'(x_0)=$\pm\infty$



Es. f(x)=$\sqrt[5]{x^3}$ è dispari → f'(x)=$\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$ è pari
f'(x)=+∞ per x→ $0^\pm$

NB: se f(x) ha in x_0 una cuspide o un flesso a tg veticale f'(x)ha in x_0 un AV.

NB: si ha una cuspide o un flesso a tangente verticale se f(x) = $x^{m/n}$ con m < n; una cuspide se f(x) è pari, un flesso a tangente verticale se f(x) è dispari.

Ne segue,se è dato un quesito del tipo:
Quali tra le seguenti f(x) ammettono in O una cuspide?
a)f(x)=$\sqrt[7]{x^5}$;
b)f(x)=$\sqrt[7]{x^3}$;
c)$\sqrt[7]{x}$;
d)$\sqrt[7]{x^6}$;
e)nessuna delle precedenti.

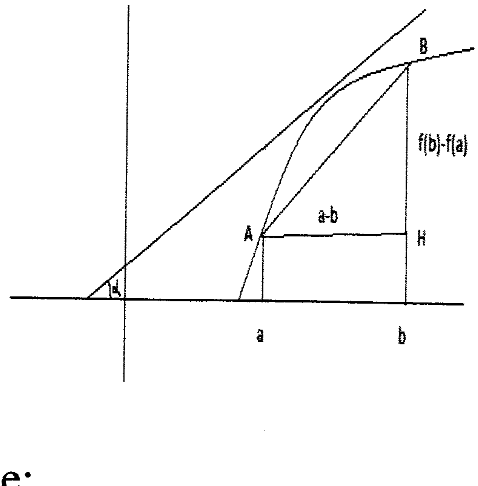
Risposta immediata :a),b),c) no perchè sono dispari.d) si perhè è pari e appartiene alla famiglia f(x)=$\sqrt[n]{x^m}$ con m<n.

Teorema Rolle: se f(x) C [a, b] e derivabile in (a, b), e se f(a) = f(b), allora ∄c € (a, b) tale che f'(c) = 0 .

L'enunciato può essere anche scritto: se f(x) C [a, b] e ivi derivabile, al massimo estremi esclusi (idem per il Teorema di Lagrange) …
Applicazione: se f(x) C [0, 5] e f(0) = f(2) = f(5) e f(x) è di classe C_2 => ∃c_1€(0,2) tale che f''(c_3) = 0 => f(x) ammette almeno un flesso in (0,5)

NB:**1-** il Teorema di Rolle è un caso particolare del Teorema di Lagrange: la corda AB è orizzontale => se f'(c) = 0 => ∃c tale che la tangente alla curva in (c, f(c)) è parallela alla corda.
2- il Teorema di Rolle viene usato per dimostrare il Teorema di Cauchy che viene utilizzato per dimostrare il Teorema di Lagrange.

Teorema di Lagrange: data f(x) C [a, b] e derivabile in (a, b) allora ∄c € (a, b) | f'(c) = [f(b) – f(a)]/(b - a).
Interpretazione geometrica: Consideriamo il triangolo ABH dove AH = b – a e
BH = f(b) – f(a) allora per definizione di tangente trigonometrica si ha:
tgα = BH/AH = f'(c)
allora f'(c) = [f(b) – f(a)]/(b - a) perché ∃c € (a, b) tale che la retta tangente a f(x) in c è parallela alla corda AB.



Conseguenze Teorema di Lagrange:

a)Se f(x) C [a, b] e f'(x0) = 0 per ∀x0 € [a,b] allora f(x) è costante in[a, b] Viceversa, se f(x) = k in [a, b] allora f'(x) = 0 in [a, b]

NB: questa regola si applica anche alle Successioni.

$\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{\log(n^2+1)}{\log(n^3+1)}=+\frac{\infty}{\infty}$ pongo n=x $\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{\log(x^2+1)}{\log(x^3+1)}=$ dH =

$=\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{2x(x^3+1)}{(x^2+1)(3x^2)}=\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\frac{2}{3}$

Regole di Derivazione:

Per derivare una generica <u>funzione irrazionale</u>: $\mathbf{D\,\sqrt[n]{f(x)^m}}$ bisogna scriverla:

D $f(x)^{m/n}$ e poi applicare la formula della $Df(x)^{\alpha}$

Es.D $\sqrt[3]{sen^2x}$ = D$(senx)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}(senx)^{-}\frac{1}{3}\cdot cosx=\frac{2cosx}{3\sqrt[3]{senx}}$

Derivata di una funzione composta: **Df[g(x)]=f'[g(x)]g'(x)**

Una <u>costante moltiplicativa</u> può essere portata fuori dal segno di derivata.

Dkf(x) = kDf(x) [1]

La <u>derivata di una somma algebrica</u> è uguale alla somma algebrica delle derivate dei singoli addendi:

D [f(x) ± g(x)] = Df(x) ± Dg(x) [2]

La **[1]** e la **[2]** possono essere compendiate nella formula:

D[λf(x) + μg(x)] = λf'(x) ± μg'(x) [3]

Lo stesso vale per l'operatore di integrale, la **[3]** ci dice che gli operatori di derivata e di integrale sono delle Applicazioni Lineari.

Derivata logaritmica:

da Dlogf(x) = $\frac{f'(x)}{f(x)}$ = f'(x) = f(x)Dlogf(x) [6]

E' necessario ricorrere alla [6] tutte le volte che la variabile x compare sia nella base sia nell'esponente della funzione: y = $f(x)^{g(x)}$

Una derivata logaritmica particolarmente complessa, assegnata in un test agli appelli di febbraio 2010:

$Dx^{(x^x)}$=$x^{(x^x)}$Dlog$x^{(x^x)}$=$x^{(x^x)}$D($x^{(x)}$logx)= $x^{(x^x)}$[(Dx^x)logx+$x^x\frac{1}{x}$]=
$x^{(x^x)}[(x^x Dlogx^x)logx + x^x\frac{1}{x}]$

Ho due scelte,a) mettere in evidenza x^x,b)scrivere $x^x\frac{1}{x}$ = x^{x-1} e poi mettere in evidenza x^{x-1}.

Scelgo la b = $x^{(x^x)}x^{x-1}$[xD(xlogx)logx+1]=Scelgo di scrivere
$x^{(x^x)}x^{x-1}$=$x^{(x^x+x-1)}$[x(logx+x$\frac{1}{x}$)logx+1]

Scelgo di eseguire la moltiplicazione=$x^{(x^x+x-1)}$[xlog^2x+xlogx+1]

La difficoltà maggiore non sta nel calcolo, ma nel riconoscere l'esattezza dello stesso.

Infatti nello svolgimento sono state operate 3 scelte (se mettere in evidenza,applicare l'inverso della regola del prodotto di due potenze con la stessa base ecc..)

IL RISULTATO PUO' ESSERE SCRITTO IN 8 MODI DIVERSI!

Tanti auguri di imbroccare quello scelto dal docente!

Semplice !

Il primo addendo è sempre $x \cdot f(x)$.

Il secondo addendo contiene la $D f(x)$

Per $\int \log x \, dx$ il secondo addendo è $- \frac{1}{D \log x}$

Per $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ il secondo addendo è : $- \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{D \operatorname{arctg} x} \right)$

Per $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$ il secondo addendo è proprio : $\frac{1}{D \operatorname{arcsen} x}$

Semplice, no?

Bastava solo pensarci.

Ritorniamo alle nostre Derivate.

4) $D\left[e^x(x-1)\right] = e^x(x-1) + e^x =$

$= e^x(x \cancel{-1} \cancel{+1}) = e^x \cdot x$

Meglio: nella $D(e^x \cdot f(x))$ mettere subito in evidenza e^x.

Idem per $D(e^{f(x)} \cdot g(x))$, tanto $e^{f(x)}$, sia che la si derivi o non la si derivi, compare sempre in ogni addendo.

5) $D\left[\frac{1}{4}x^2(2\log x - 1)\right] = \frac{1}{2}x(2\log x - 1) + \frac{1}{4}x^2 \cdot \frac{2}{x} =$

$= \frac{1}{2}x(2\log x - 1) + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(2\log x \cancel{-1} \cancel{+1})$

$= x \log x$

10) $D\,(x\,tg x + \log x) = \cancel{tg x} + \frac{x}{\cos^2 x} - \cancel{\frac{sen x}{\cos x}} = \frac{x}{\cos^2 x}$

11) $D\,\frac{e^x}{10}\left(5 - 2\,sen 2x - \cos 2x\right) =$

$= \frac{e^x}{10}\left(5 - \cancel{2\,sen 2x} - \cos 2x - 4\cos 2x + \cancel{2\,sen 2x}\right)$

$= \frac{e^x}{10}\left(1 - \cos 2x\right) = \frac{e^x}{10}\left(\cancel{1} - \cancel{1} + 2\,sen^2 x\right) =$

$= e^x\,sen^2 x$

12) $D\left[\frac{1}{2}\left(x^4 - 2x^2 + 2\right)e^{x^2}\right] =$

$= \frac{1}{2}e^{x^2}\left[\left(4x^3 - 4x\right) + \left(x^4 - 2x^2 + 2\right)\cdot 2x\right] =$

$= \frac{1}{2}e^{x^2}\left[\cancel{4x^3} - \cancel{4x} + 2x^5 - \cancel{4x^3} + \cancel{4x}\right] =$

$= \frac{1}{2}e^{x^2}\cdot 2x^5 = x^5 e^{x^2}.$

13] $D\left(e^x \log\cos\sqrt{x}\right) =$

$= e^x\left[\log\cos\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{sen\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\right] =$

$= e^x\left[\log\cos\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\,tg\sqrt{x}\right]$

14] $D\left[\frac{1}{2}x\left(\cos\log x + sen\log x\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\log x + sen\log x + x\left(-sen\log x\cdot\frac{1}{x} + \cos\log x\cdot\frac{1}{x}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\log x + \cancel{sen\log x} - \cancel{sen\log x} + \cos\log x\right]$

$= \cos\log x.$

CONSOLATEVI. NEL GENNAIO 2013 E' STATA DATA, COME QUESITO LA $D(x)^{x^{x^{2}}}$.

**Se avete del tempo da perdere, scoprite in quanti modi può essere scritto il risultato.
Io no. Spesso tra lavori casalinghi, annessi e connessi, Analisi, Chimica, Fisica e Geometria lavoro 11 (eleven) ore al giorno. Niente male per un over settanta.
Però si resta in forma. (ore 7 di un mattino del dicembre 2013).**

19) $D(x^2 e^x \cos x) = e^x(2x\cos x + x^2\cos x - x^2 \operatorname{sen} x)$

$= x e^x[\cos x(2-x) - x \operatorname{sen} x] =$ oppure

$= x e^x[2\cos x + x(\cos x - \operatorname{sen} x)]$

20] $D[x\log x(\log x - 2) + 2x] =$

$= \log x(\log x - 2) + x \cdot \frac{1}{x}(\log x - 2) + x\log x \cdot \frac{1}{x} + 2 =$

$= \log^2 x \cancel{-2\log x} + \cancel{\log x} \cancel{-2} + \cancel{\log x} \cancel{+2} = \log^2 x$

21] $D[\cos x(2-x^2) + 2x\operatorname{sen} x] =$

$= -\operatorname{sen} x(2-x^2) - \cancel{2x\cos x} + 2\operatorname{sen} x + \cancel{2x\cos x} =$

$= \cancel{-2\operatorname{sen} x} + x^2\operatorname{sen} x + \cancel{2\operatorname{sen} x} = x^2\operatorname{sen} x$

22] $D(x^3 e^x \operatorname{arcsen} x) =$ (metto subito in evidenza $(x^2 e^x)$ =

$= x^2 e^x(3\operatorname{arcsen} x + x\operatorname{arcsen} x + x/\sqrt{1-x^2})$

$= x^2 e^x[\operatorname{arcsen} x(3+x) + x/\sqrt{1-x^2}]$

l'alternativa è meno elegante.

26] $$D\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}x+1}{\operatorname{sen}x-1}\cdot\log\frac{\operatorname{sen}x-1}{\operatorname{sen}x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{(\operatorname{sen}x+1)^2}{(\operatorname{sen}x-1)^2}}\cdot\frac{\cos x(\operatorname{sen}x-1)-\cos x(\operatorname{sen}x+1)}{(\operatorname{sen}x-1)^2}\log\frac{\operatorname{sen}x-1}{\operatorname{sen}x+1}+$$

$$+\operatorname{artg}\frac{\operatorname{sen}x+1}{\operatorname{sen}x-1}\cdot\frac{\operatorname{sen}x\cancel{+1}}{\operatorname{sen}x\cancel{-1}}\cdot\frac{\cos x(\operatorname{sen}x+1)-\cos x(\operatorname{sen}x-1)}{(\operatorname{sen}x+1)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(\operatorname{sen}x-1)^2}}{(\operatorname{sen}x-1)^2+(\operatorname{sen}x+1)^2}\cdot\frac{-2\cos x}{\cancel{(\operatorname{sen}x-1)^2}}\cdot\log\frac{\operatorname{sen}x-1}{\operatorname{sen}x+1}+$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}x+1}{\operatorname{sen}x-1}\cdot\frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^2x-1}=$$

$$=\frac{-\cancel{2}\cos x}{\cancel{2}(\operatorname{sen}^2x+1)}\log\frac{\operatorname{sen}x-1}{\operatorname{sen}x+1}+\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}x+1}{\operatorname{sen}x-1}\cdot\frac{2\cancel{\cos x}}{-\cos^{\cancel{2}}x}=$$

$$=-\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2x+1}\log\frac{\operatorname{sen}x-1}{\operatorname{sen}x+1}+\frac{2}{\cos x}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}x+1}{\operatorname{sen}x-1}\right)$$

Oppure si poteva raccogliere a fattor comune $(-2\cos x)$.

È chiaro che se trovate un esercizio così nel Test d'Esame, mettete una risposta attendibile e passate oltre.

Attendibile significa:

Nella $D\operatorname{artg}\frac{f(x)}{g(x)}$ nel risultato $g(x)$ <u>non</u> compare al Den.

Derivate di un quoziente

Formula: $D\,\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$

Regola: la Derivata di una frazione è uguale a una frazione avente:
come Den il quadrato del Den;
come Num la D del Num · Den (non derivato)
− la D del Den · Num (non derivato).

Ricordare:

$D\,\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se sia $P(x)$ che $Q(x)$ sono di I grado
è $= \dfrac{K}{Q^2(x)}$

---

29) $$D\,\frac{1-3x}{x^2-3} = \frac{-3(x^2-3)-2x(1-3x)}{(x^2-3)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2+9-2x+6x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{3x^2-2x+9}{(x^2-3)^2}$$

30) $$D\,\frac{5x^2-1}{x+2} = \frac{10x(x+2)-(5x^2-1)\cdot 1}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{10x^2+20x-5x^2+1}{(x+2)^2} = \frac{5x^2+20x+1}{(x+2)^2}$$

35) $$D\,\frac{\log x-1}{\log x+1}=D\left(\frac{\overset{1}{\cancel{\log x+1}}}{\cancel{\log x+1}}-\frac{2}{\log x+1}\right)$$

$$=-2\cdot D\,(\log x+1)^{-1}=2\,(\log x+1)^{-2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{2}{x\,(\log x+1)^2}$$

36) $$D\,\frac{\operatorname{senh}^2 x+1}{\cosh^2 x-1}=D\,\frac{\operatorname{senh}^2 x+1}{\operatorname{senh}^2 x}=$$

$$=D\left(1+\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\right)=$$

$$=D\,(\operatorname{senh} x)^{-2}=-2\operatorname{senh} x^{-3}\cdot\cosh x$$

$$=\frac{2\cosh x}{\operatorname{senh}^3 x}=\frac{2\operatorname{tgh} x}{\operatorname{senh}^2 x}$$

37) $$D\,\frac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{senh} 2x}=D\,\frac{\cancel{\operatorname{senh} x}}{\cosh x}\cdot\frac{1}{\cancel{2\operatorname{senh} x}\cosh x}$$

$$=D\,(\cosh x)^{-2}=\frac{-2\operatorname{senh} x}{\cosh^3 x}=$$

$$=\frac{-2\operatorname{tgh} x}{\cosh^2 x}=-2\operatorname{tgh} x\cdot\left(1-\operatorname{tgh}^2 x\right)$$

l'ultimo passaggio è ricavato dalla formula fondamentale: $\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1$

=> dividendo tutto per $\cosh^2 x$ si ha:

$$1-\operatorname{tgh}^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x}$$

42] $D\frac{4\operatorname{arctg}^2 x+1}{\operatorname{arctg}x-1}$ $\left(\text{pongo } \operatorname{artg}x=t \rightarrow \frac{1}{1+x^2}=t'\right)$

$$= D\frac{4t^2+1}{t-1}\cdot t' = \frac{8t(t-1)-(4t^2+1)}{(t-1)^2}\cdot t' =$$

$$= \frac{8t^2-8t-4t^2-1}{(t-1)^2}\cdot t' = \frac{4t^2-8t-1}{(t-1)^2}\cdot t' =$$

$$= \frac{4\operatorname{arctg}^2 x-8\operatorname{arctg}x-1}{(\operatorname{arctg}x-1)^2(1+x^2)}$$

43) $D\frac{\operatorname{arcsen}^2 x+\operatorname{arcsen}x-1}{\operatorname{arcsen}x+2} =$

$$= D\left(\frac{\operatorname{arcsen}^2 x-3}{\operatorname{arcsen}x+2} + \frac{\overset{1}{\cancel{\operatorname{arcsen}x+2}}}{\cancel{\operatorname{arcsen}x+2}}\right)$$

$$= D\frac{t^2-3}{t+2}\cdot t' \left(\text{con } t'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{2t(t+2)-t^2+3}{(t+2)^2}t' = \frac{t^2-4t+1}{(t+2)^2}\cdot t'$$

$$= \frac{\operatorname{arcsen}^2 x-4\operatorname{arcsen}x+1}{(\operatorname{arcsen}x+2)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

Esercizio risolvibile in 3'-4' specie
se non si scrivono le ridondanze
(i ripetuti t' e denominatori
e (con t' = ...)

$$= \frac{(\operatorname{sen}x - \cos x)(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x\cos x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen}x\cos x)^2}$$

$$= \frac{4(\operatorname{sen}x - \cos x\,(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x)}{\operatorname{sen}^2 2x}$$

Se il risultato fosse stato assegnato in questa forma, sarebbe stato complesso e un po' tortuoso arrivarci.

54) $D\left(\operatorname{tg}x + \frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen}x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}x}$$

55) $D\,\frac{4}{(x^2+\pi)^2} = 4 \cdot \frac{2x\cdot(-2)}{(x^2+\pi)^3} = \frac{-16x}{(x^2+\pi)^3}$

56) $D\log\operatorname{cotg}^2 x = 2D\log|\operatorname{cotg}x| =$

$$= 2\left|\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{cotg}x}\right|$$

57) $D\log\sqrt{\frac{\operatorname{sen}x}{1+2\cos x}} = \frac{1}{2}D\log\frac{\operatorname{sen}x}{1+2\cos x}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{1+2\cos x}}{\operatorname{sen}x} \cdot \frac{\cos x(1+2\cos x) - 2\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}x}{(1+2\cos x)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\cos x + 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x(1+2\cos x)}$$

$$= \frac{\cos x + 2\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x}{2\operatorname{sen}x(1+2\cos x)} = \frac{4\cos^2 x + \cos x - 2}{2\operatorname{sen}x(1+2\cos x)}$$

64) $D\, 4\cos^2 x^2 = 4\cdot 2\cos x^2 \cdot (-\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x =$

$= -8x \operatorname{sen} 2x^2$

65) $D\, \operatorname{tg}^2\sqrt{3x} = \frac{\cancel{2}\operatorname{tg}\sqrt{3x}}{\cos^2\sqrt{3x}}\cdot\frac{3}{\cancel{2}\sqrt{3x}} = \frac{3\operatorname{sen}\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\cdot\cos^3\sqrt{3x}}$

66) $D\left(7^{x^2}+x^{\sqrt{7}}\right) = 2x\cdot 7^{x^2}\cdot\log 7 + \sqrt{7}\cdot x^{\sqrt{7}-1}$

67) $D\log \operatorname{tg}^2 2x = \frac{2\cancel{\operatorname{tg}2x}(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{\operatorname{tg}^{\cancel{2}}2x} = \frac{2(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{\operatorname{tg}2x}$

68) $D\, e^{x^2}\cdot\log(1+x^2) = e^{x^2}\left(2x\cdot\log(1+x^2)+\frac{2x}{1+x^2}\right) =$

$= 2x\cdot e^{x^2}\left(\log(1+x^2)+\frac{1}{1+x^2}\right)$

69) $D\log_{2x}^{4} = D\left(\frac{\log 4}{\log 2x}\right) =$

$= 2\log 2\, D(\log 2+\log x)^{-1} = \frac{-2\log 2}{(\log 2+\log x)^2}\cdot\frac{1}{x}$

70) $D\frac{x}{\log_2^x} = D(x\log_2^x) =$

$= \log_2 x + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\log 2} = \frac{\log x}{\log 2}+\frac{1}{\log 2} = \frac{\log x+1}{\log 2}$ [1]

$= \frac{\log x+\log e}{\log 2} = \frac{\log ex}{\log 2}$ [2]

Normalmente ci si arresta alla [1] ma il risultato potrebbe essere scritto nella forma [2]

75) $D\left[(x^2+1)^2\,\text{artg}\,x\,\log(1+x^2)\right] =$

$$= 2\cdot 2x(x^2+1)\,\text{artg}\,x\log(1+x^2) + \frac{(x^2+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2+1}}\log(x^2+1)\cdot 2x +$$

$$+ (x^2+1)^{\cancel{2}}\,\text{arctg}\,x\,\frac{2x}{\cancel{(1+x^2)}}$$

$$= 2x(x^2+1)\left[\text{artg}\,x\log(1+x^2) + \log(x^2+1) + \text{arctg}\,x\right]$$

76] Determinare la retta tangente alla $f(x) = (x^2+1)^2\,\text{artg}\,x\,\log(1+x^2)$ nel suo punto di ascissa $x = \sqrt{3}$

l'eq. è: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f(\sqrt{3}) = (3+1)^2\cdot\frac{\pi}{3}\log(1+3) = 16\,\frac{\pi}{3}\,2\log 2 =$$

$$= \frac{32}{3}\pi\log 2$$

$$f'(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\cdot 4\left[\frac{\pi}{3}\cdot 2\log 2 + 2\log 2 + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 8\sqrt{3}\left[2\log 2\left(\frac{\pi}{3}+1\right) + \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow$$

l'equazione richiesta è:

$$y = 8\sqrt{3}\left[2\log 2\left(\frac{\pi}{3}+1\right) + \frac{\pi}{3}\right](x-\sqrt{3}) + \frac{32}{3}\pi\log 2$$

77] $D(\log x + \text{artg}\log x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(1+\log^2 x)}$

$$\frac{1+1+\log^2 x}{x(1+\log^2 x)} = \frac{2+\log^2 x}{x(1+\log^2 x)}$$

Ciò è dovuto alla particolarità della famiglia di funzioni del tipo: $f(x) = \text{arctg}\,\frac{g(x)}{h(x)}$, che ammettono dei punti di discontinuità, mentre sono derivabi in R.

80) $D\,\text{arctg}(\text{sen}x+\cos x) = \frac{\cos x-\text{sen}x}{1+(\text{sen}x+\cos x)^2} =$

$= \dots = \frac{\cos x-\text{sen}x}{2(1+\text{sen}x\cos x)}$ oppure:

$= \frac{\cos x-\text{sen}x}{2+\text{sen}2x}$

81) $D\,\text{artg}\,\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2} =$

$= \frac{\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^2+(x+1)^2}\cdot\frac{-2}{\cancel{(x-1)^2}} = \frac{-2}{2(x^2+1)} = -\frac{1}{x^2+1} =$

$= D(-\text{artg}x)$

Vale la stessa osservazione della 79)

$f_1(x) = \text{artg}\,\frac{x+1}{x-1}$ e $f_2(x) = (-\text{artg}x)$

verificano le Hp di una delle conseguenze del Teorema di Lagrange ma *non* ne verificano la tesi.

82) $D\,\text{arccos}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\cdot D(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{\cancel{1}+x^2\cancel{-1}}{1+x^2}}}\cdot\cancel{2}x\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} =$

$= \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}}}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\cancel{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2}$

meglio $= \frac{x}{|x|(1+x^2)} = D\,\text{artg}|x|$

86) $$D\left(\text{arcsen}x\cdot\sqrt{1\cdot x^2}\right)=\cancel{\frac{1}{\sqrt{1\cdot x^2}}\cdot\sqrt{1\cdot x^2}}^{\,1}+\frac{\text{arcsen}x(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}-2x\,\text{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

87) $$D\,\frac{x\,\text{tgh}x}{x-\text{tgh}x}=\frac{[\text{tgh}x+x(1-\text{tg}^2hx)](x-\text{tgh}x)-}{(x-\text{tgh}x)^2}$$

$$-\frac{x\,\text{tgh}x(\cancel{1-1}+\text{tg}^2hx)}{}=$$

$$=\frac{\cancel{x\,\text{tgh}x}+x^2(1-\text{tg}^2hx)-\text{tgh}^2x-\cancel{x\,\text{tgh}x}-x\,\text{tg}^2hx-x\,\text{tgh}^3x}{(x-\text{tgh}x)^2}$$

$$=\left[x^2-\text{tgh}^2x\,(x^2-1+x-x\,\text{tgh}x)\right]/(x-\text{tgh}x)^2$$

88) $$D(\text{senh}^2x+1)=D(\cancel{\text{senh}^2x}+\cosh^2x-\cancel{\text{senh}^2x})$$

$$=2\cosh x\cdot\text{senh}x=\text{senh}2x$$

89) $$D\,\frac{\text{senh}x+1}{\cosh x+1}=\frac{\cosh x(\cosh x+1)-\text{senh}x(\text{senh}x+1)}{(\cosh x+1)^2}$$

$$=\frac{\cosh^2x+\cosh x-\text{senh}^2x-\text{senh}x}{(\cosh x+1)^2}$$

$$=\frac{1+\cosh x-\text{senh}x}{(\cosh x+1)^2}=\frac{1}{\cosh x+1}-\frac{\text{senh}x}{(\cosh x+1)^2}$$

90) $$D\,\frac{\text{tgh}x+1}{\text{tgh}x-1}\quad\begin{pmatrix}\text{tgh}x=t\\1-\text{tgh}^2x=t'\end{pmatrix}=\left(D\,\frac{t+1}{t-1}\right)\cdot t'=$$

$$=\frac{t-1-(t+1)}{(t-1)^2}\cdot t'=\frac{\overset{-2}{\cancel{t}-1-\cancel{t}-1}}{(t-1)^2}\cdot t'=$$

$$=\frac{2(\text{tgh}^2x-1)}{(\text{tgh}x-1)^2}=\frac{2(\text{tgh}x+1)\cancel{(\text{tgh}x-1)}}{(\text{tgh}x-1)^{\cancel{2}}}$$

Derivate logaritmiche

$$D f(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} D \log f(x)^{g(x)}$$

94) $D\, x^{2x} = x^{2x} D \log x^{2x} = x^{2x} D\, 2x \log x = 2x^{2x}(\log x + 1)$

95) $D\,(\sin x)^{x} = (\sin x)^{x} D \log (\sin x)^{x} = (\sin x)^{x} D(x \log \sin x) =$
$(\sin x)^{x}\,(\log \sin x + x \operatorname{cotg} x)$

96) $D\,(3^{\sin 2x} + 9^{\cos 2x}) = 3^{\sin 2x} \log 3 \cdot 2\cos 2x + 9^{\cos 2x}\, 2\log 3\,(-2 \operatorname{sen} 2x) =$
$= 2 \log 3\,(3^{\operatorname{sen} 2x} \cdot \cos 2x - 2 \cdot 9^{\cos 2x} \cdot \operatorname{sen} 2x)$

97) $D\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} = D\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log \frac{1}{2} =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \frac{-\log 2}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

98) $D\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{2\sin^2 2x} = D \sqrt{3}^{\,2\sin^2 2x} = (\sqrt{3})^{2\sin^2 2x} \cdot 2(2 \sin 2x \cdot \cos 2x) \cdot 2 \log \sqrt{3} =$

$$= (\sqrt{3})^{2\sin^2 2x} \sin 4x \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \log 3 = (\sqrt{3})^{2\sin^2 2x} \cdot \sin 4x \cdot 2 \log 3$$

La 97) e la 98) <u>non sono</u> derivate logaritmiche, poiché la base è una costante.

99) $D\,(\sin x)^{\cos x} = (\sin x)^{\cos x} \cdot D \cos x \log \sin x = (\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x \log \sin x + \right.$
$\left. + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right] = (\sin x)^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x \left[-\log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right] =$
$= (\sin x)^{(\cos x + 1)}\left[-\log \sin x + \operatorname{tg}^2 x\right]$

100) $D\,(x^3+1)^{x^2-1} = (x^3+1)^{x^2-1} D(x^2-1) \log(x^3+1) =$
$(x^3+1)^{x^2-1}\left(2x \log(x^3+1) + \frac{3x^2(x^2-1)}{x^3+1}\right) = (x^3+1)^{x^2-1}\left(2x \log(x^3+1) + \frac{3x^2(x-1)}{x^2-x+1}\right)$

101) $D\,(\sin x)^{x^2+1} = (\sin x)^{x^2+1} D\,(x^2+1) \log \sin x = (\sin x)^{x^2+1}\left(2x \log \sin x + \right.$
$\left. + (x^2+1) \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^{x^2+1} \cdot \left(2x \log \sin x + (x^2+1) \operatorname{cotg} x\right)$

102) $D\,(\log x)^{\log x} = (\log x)^{\log x} D \log\left[(\log x)^{\log x}\right] = (\log x)^{\log x} D(\log x \cdot \log\log x) =$
$(\log x)^{\log x}\left(\frac{\log\log x}{x} + \frac{\overset{1}{\cancel{\log x}}}{\cancel{\log x} \cdot x}\right) = \frac{1}{x}(\log x)^{\log x}(\log\log x + 1)$

$f'(e) = \frac{1}{e}$, $f'(e^2) = \frac{1}{e^2} \cdot 2^2 (\log 2 + 1) = \frac{4}{e^2}(\log 2 + 1)$

114) $$D\,\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}=\frac{\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2-x^2}}\cdot x-\sqrt{2-x^2}}{x^2}=\frac{\cancel{-x^2}-2+\cancel{x^2}}{x^2\sqrt{2-x^2}}=\frac{-2}{x^2\sqrt{2-x^2}}$$

115) $$D\,2\log\left(x^2-3x+1\right)=\frac{2(2x-3)}{x^2-3x+1}$$

116) $$D\,\mathrm{tg}\,e^{x^2+3}=\frac{2xe^{x^2+3}}{\cos^2 e^{x^2+3}}$$

117) $$D\log\sin\sqrt{2x+1}=\frac{1}{\sin\sqrt{2x+1}}\cdot\cos\sqrt{2x+1}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\cdot\mathrm{cotg}\sqrt{2x+1}$$

118) $$D\left(\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\right)=\frac{-\sin x\left(1+\cos^2 x\right)-\cos x\left(2\cos x\right)\left(-\sin x\right)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}$$

119) $$D\log_x(x+1)=D\,\frac{\log(x+1)}{\log x}=\frac{1}{\log^2 x}\left(\frac{\log x}{x+1}-\frac{\log(x+1)}{x}\right)$$

120) $$D\log_{\log x}x=D\,\frac{\log x}{\log\log x}=\frac{1}{x\log^2\log x}\left(\log\log x-\frac{\overset{1}{\cancel{\log x}}}{\cancel{\log}\,x}\right)$$

121) $$D\left[2\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{4x+1}{2x^2}\right]=\frac{2}{1+x^2}+\frac{8x^{\cancel{2}}-(4x+1)\cancel{4x}}{4x^{\cancel{4}3}}=\frac{2}{1+x^2}-\frac{\overset{1}{\cancel{4}}+\overset{2}{\cancel{8}}x}{\cancel{4}x^3}$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}-1-x^2-2x-\cancel{2x^3}}{x^3\left(1+x^2\right)}=\frac{-(1+x)^2}{x^3\left(1+x^2\right)}$$

122) $$D\left[x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}\right]=$$

$$\arcsin\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x}\;2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1-2x}{4\sqrt{x-x^2}}=$$

$$=\arcsin\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2}\,\frac{\cancel{(1-x)}}{1-\cancel{x}+\cancel{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1-2x}{4\sqrt{x-x^2}}=$$

$$\arcsin\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}\,(1-x)}+\frac{1-2x}{4\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}=\arcsin\sqrt{x}$$

129) Determinare l'eq.ne della retta tg a $f(x) = \log(x+e^x)$ per $x=0$

$f(0) = \log 1 = 0$; $f'(0) = \left.\frac{e^x+1}{e^x+x}\right|_0 = 2$, $y-0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x$

130) Dimostrare che $F(x) = 2\sin^2 x \pm 5$; $G(x) = 1-\cos 2x$ sono due primitive della stessa $h(x)$.

a) dimostro che $F'(x) = G'(x)$: $F'(x) = 4\sin x\cos x$

$G'(x) = 2\sin 2x = 4\sin x\cos x = F'(x)$

b) $G(x) = 1-(1-2\sin^2 x) = 2\sin^2 x = F(x)+5 \Rightarrow$ Se $F(x)$ e $G(x)$ differiscono per una cost $\Rightarrow$ hanno D eguali

131) $D\left(\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + \log\left(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right)\right) =$

$$= \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{\cos x\left(\sqrt{1+\cos^2 x} - \sin x \frac{-2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)}{1+\cos^2 x} + \frac{-\sin x \frac{-2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\overset{1}{1+\cancel{\cos^2 x}}}{\underset{2}{1+\cancel{\cos^2 x}+\sin^2 x}} \cdot \frac{\cos x(1+\cos^2 x)+\sin^2 x\cos x}{\cancel{(1+\cos^2 x)}\sqrt{1+\cos^2 x}} - \frac{\sin x\left(\sqrt{1+\cos^2 x}+\cos x\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)} =$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos^2 x+\sin^2 x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} - \frac{\sin x\left(\sqrt{1+\cos^2 x}+\cos x\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)} =$$

$$= \frac{\cos x\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right) - \sin x\left(\sqrt{1+\cos^2 x}+\cos x\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{\left(\sqrt{1+\cos^2 x}+\cos x\right)}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}\cancel{\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)}} = \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

132) $D\,\frac{x^2\log x - x\log x + 1\,(-1+1)}{x\log x + 1} = D\left(\frac{x^2\log x + 2}{x\log x + 1} - 1\right)$

$= \frac{\left(2x\log x + x^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{x}}\right)(x\log x + 1) - (x^2\log x + 2)(\log x + 1)}{(x\log x + 1)^2}$

$= \frac{2x^2\log^2 x + 2x\log x + \cancel{x^2\log x} + x - \cancel{x^2\log x} - \cancel{{}^2\log x} - 2\log x - 2}{(x\log x + 1)^2}$

$= \frac{x^2\log^2 x + 2x\log x - 2\log x + x - 2}{(x\log x + 1)^2}$

133) $D\,\log_{\cos x}\sin x = D\,\frac{\log\sin x}{\log\cos x} =$

$= \frac{\frac{\cos x}{\sin x}\log\cos x - \log\sin x\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{(\log\cos x)^2} = \frac{\cot g\,x\,\log\cos x + \log\sin x\,tg\,x}{\log^2\cos x}$

134) $D\,\frac{\sin(x+30°)}{\sin(x-45°)} = \left(\begin{array}{c}\text{per non usare Werner}\\ \text{sviluppare, togliere 2 a num}\\ \text{e a den e poi derivare}\end{array}\right) =$

$= D\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\sin x + \frac{1}{\cancel{2}}\cos x}{\sin x\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,D\,\frac{\sqrt{3}\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sqrt{3}\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = [\ \ ]$

135) Dimostrare che la $F(x) = \left(\operatorname{arctg} x\sqrt{2} + \operatorname{arctg}\frac{x(1-\sqrt{2})}{1+x^2\sqrt{2}}\right)$ e $y = \operatorname{arctg} x$ differiscono per una costante

$D\left[\operatorname{arctg} x\sqrt{2} + \operatorname{arctg}\frac{x(1-\sqrt{2})}{1+x^2\sqrt{2}}\right] =$

$\frac{\sqrt{2}}{1+2x^2} + \frac{1}{1+\frac{x^2(1-\sqrt{2})^2}{(1+x^2\sqrt{2})^2}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})(1+x^2\sqrt{2}) - x(1-\sqrt{2})\,2\sqrt{2}\,x}{(1+x^2\sqrt{2})^2} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{1+2x^2} + \frac{\cancel{(1+x^2\sqrt{2})^2}}{(1+x^2\sqrt{2})^2 + x^2(3-2\sqrt{2})} \cdot \frac{1+\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}-2x^2-2\sqrt{2}x^2+4x^2}{\cancel{(1+x^2\sqrt{2})^2}}$

143) $\dot{D} \log \frac{1+\cot g x}{1-\cot g x} = D\left[\log(1+\cot g x) - \log(1-\cot g x)\right] = ⊛$

ricordando che $\left(\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\cot g^2 x\right)$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x(1+\cot g x)} - \frac{1}{\sin^2 x(1-\cot g x)} =$$

$$\frac{1+\cancel{\cot g x}-1-\cancel{\cot g x}}{\sin^2 x(1-\cot g^2 x)} = \frac{-2(1+\cot g^2 x)}{1-\cot g^2 x} = \frac{2(\cot g^2 x+1)}{\cot g^2 x - 1}$$

144) $D\, \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = D\, \frac{2\cancel{\sin x}\cos x}{\cos 2x \cdot \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}} = D\, \frac{2\cos^2 x - 1 + 1}{2\cos^2 x - 1} =$

$$D\left[1+(2\cos^2 x - 1)^{-1}\right] = \frac{-4\cos x \sin x}{-(2\cos^2 x-1)^2} = \frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x} = \frac{2\operatorname{tg} 2x}{\cos 2x}$$

145) $D\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\,[1] = D\sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} = D\,\frac{1+\sin x}{\cos x} =$

$$= \frac{\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cancel{1+\sin x}}{(\cancel{1+\sin x})(1-\sin x)} = \frac{1}{1-\sin x}$$

(Potevo nella [1] moltiplicare Num e Den per (1-sen x))

146) $D\, \frac{x^2\log x + x\log x + 1}{x\log x + 1} = D\left(x-1+\frac{2-x}{x\log x+1}\right)$

$x^2\log x + x\log x + 1 \;\big|\; x\log x + 1$

$-x^2\log x \qquad -x \qquad\quad x-1$

// $\quad -x\log x - x + 1$

$\quad\;\; + x\log x \qquad\; + 1$

$\quad\;\; // \qquad -x+2$

RICORDA:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisore}} = \text{quoziente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisore}}$$

$$= \cdots 1 + \frac{-x\log x + (2-x)(\log x + 1)}{x\log x}$$

Altre derivate semplificabili

147) $D\,\frac{1-\cos^2 x-\sin x}{\sin^3 x-\sin^2 x}=D\,\frac{\sin^2 x-\cancel{\sin x}}{\sin x\left(\sin^2 x-\cancel{\sin x}\right)}=D\,\sin x^{-1}$

$=-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x=-\frac{\text{cotg}\,x}{\sin x}$

148) $D\,\frac{x^3+1}{x^2+1}=$

$$\begin{array}{l|l} x^3+1 & x^2+1 \\ \hline -x^3-x & x \\ \hline // \; 1-x & \end{array}$$

$=D\left(x+\frac{1-x}{x^2+1}\right)=1+\frac{-(x^2+1)-2x(1-x)}{(x^2+1)^2}=$

$1+\frac{-x^2-1-2x+2x^2}{(x^2+1)^2}=1+\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{x^4+2x^2+\cancel{1}+x^2-2x-\cancel{1}}{(x^2+1)^2}=\frac{x(x^3+3x-2)}{(x^2+1)^2}$

149) $D\,\frac{x^3+2}{x^2-1}=D\left(\frac{x^3+1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}\right)=D\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)-\frac{2x}{(x^2-1)^2}=$

$D\left(\frac{x^2}{x-1}-\overset{1}{\cancel{\frac{x-1}{x-1}}}\right)-\frac{2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}-\frac{2x}{(x^2-1)^2}=$

$\frac{2x^2-2x-x^2-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x(x-3)}{(x^2-1)^2}$

150) $D\,\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$ (scomponendo con Ruffini al Num e raccoglimento parziale al Den)

$=D\,\frac{\cancel{(x-1)^2}(x+2)}{\cancel{(x-1)^2}(x+1)}=\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+2}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$

154) $D\,\frac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1} = D\,\frac{x^2-x+1}{x^4+2x^2+1-x^2}$

$= D\,\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)^2-(x)^2} = D\,\frac{\cancel{x^2-x+1}}{(x^2+x+1)\cancel{(x^2-x+1)}}$

$= D\,(x^2+x+1)^{-1} = -(2x+1)(x^2+x+1)^{-2}$

$= -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

Volendo si potevano saltare un paio di passaggi.

155) Procedere in modo analogo per la $D\,\frac{x^4+4x^2+16}{x^2+2x+4}$

solo che qui si deve operare il gioco di prestigio sul Numeratore.

156) $D\,\frac{\text{sen}x-\cos x-2}{\text{sen}x+\cos x-2} =$

$= D\left(\frac{\cancel{\text{sen}x+\cos x-2}}{\cancel{\text{sen}x+\cos x-2}}^{\,1} - \frac{2\cos x}{\text{sen}x+\cos x-2}\right)$

$= 2\,\frac{\text{sen}x(\text{sen}x+\cos x-2)-\cos x(\cos x-\text{sen}x)}{(\text{sen}x+\cos x-2)^2}$

$= 2\,\frac{\text{sen}^2x+\text{sen}x\cos x-2\,\text{sen}x-\cos^2x+\text{sen}x\cos x}{''}$

$= 2\cdot\frac{2\,\text{sen}^2x+2\,\text{sen}x\cos x-2\,\text{sen}x-1}{(\text{sen}x+\cos x-2)^2}$