NUMERO: 790

DATA: 10/01/2014

A P P U N T I

STUDENTE:

MATERIA: Studi di funzione ed Equazioni differenziali del II Ordine non Omogennee - Prof. Airale

Studi di funzione
ed Equazioni differenziali del II Ordine non Omogennee.

Sono indispensabili per chi dà anche lo scritto, ma non guastano per la maggioranza che dà solo il Test, poiché alcuni quesiti possono riguardare:

Un Dominio
Un limite a un estremo del dominio
Il segno di una f(x)
Un Asintoto Obliquo
Un estremante
Un flesso
La determinazione della funzione inversa
Una simmetria
Una parabola asintotica, ecc….

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 56

9) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{4-x^2}$

10) $f(x) = (x^2+2x)e^{x^2}$

11) $f(x) = \log(e^{3x} - e^x)$

12) $f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{\sqrt{3}}x + 2\log(\cos 2x) & \text{se } -\frac{\pi}{4} < x \leq 0 \quad f_1(x) \\ (x-2)e^{(x-2)^2} & \text{se } x > 0 \quad f_2(x) \end{cases}$

13) $f(x) = \begin{cases} \log|\operatorname{tg} 2x| & \text{se } -\frac{\pi}{4} < x < 0 \\ (x-1)\log\frac{2x-2}{x-2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

14) $f(x) = 2\operatorname{sen}x\cos x - \cos^2 x$

15) $f(x) = \cos x \cdot e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg}x}$

16) $f(x) = x\,\frac{2\log x - 3}{\log x - 2}$

17) $f(x) = \operatorname{artg}\frac{x+3}{x-3}$

18) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$

19) $f(x) = \begin{cases} \log\left(e^2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{2x(3+x)}{x-1} + 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

20) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x+2}}$

21) $f(x) = \operatorname{artg}\left[e^x(x-1)\right]$

22) $f(x) = e^{\operatorname{artg}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$

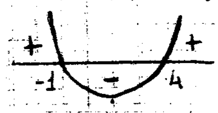
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 56

1- Studio di una f. del tipo $f(x) = f(ax^2 + bx + c)$

Data $f(x) = \text{artg}(x^2 - 3x - 4)$ disegnarne un grafico qualitativo dopo averne individuato l'asse di simmetria.
Dedurre gli eventuali flessi dal grafico.

$f(x) = \text{arctg}(x^2 - 3x - 4)$ D: R segno $f(x)$ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Rightarrow$

$f(x) = 0 : x = -1, 4$. $g(x)$ $x = 0$ $f(0) = \text{arctg}(-4) = \sim -1{,}33$



$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \text{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$; $y = \frac{\pi}{2}$ A.O

Poiché arctgx è una f. strettamente crescente risulta che l'estremante di $f(x)$ ha la stessa ascissa di quello di $g(x)$ ed è dello stesso tipo.

Min $g(x)$: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$; $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ v $g(x_v) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4) = -\frac{25}{4}$

$f(x)$ ha un Min in $\left(\frac{3}{2}; \text{arctg}\left(-\frac{25}{4}\right)\right)$

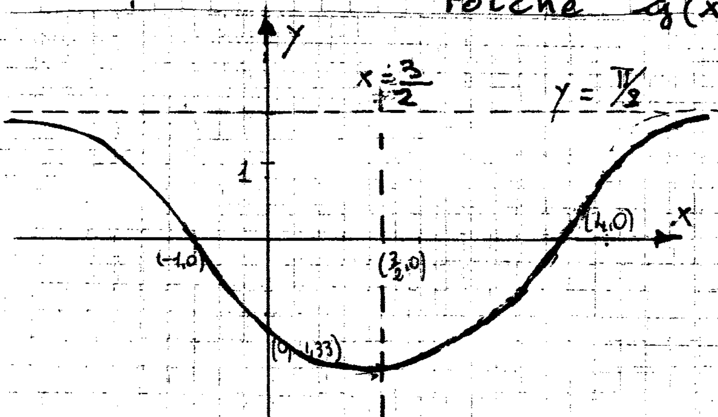
Controllo con lo studio della monotonia.

$f'(x) = \frac{2x-3}{1+(x^2-3x-4)^2}$ Poiché il Den è > 0 per $\forall x \in R \Rightarrow$ segno $f'(x)$ = segno $(2x-3)$

$2x - 3 \geq 0$; $x \geq \frac{3}{2}$

	$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	- - - - •	———
$f(x)$	↘	↗
	Min. assoluto	

Dopo lo studio del dom sarei dovuto passare a quello delle eventuali simmetrie. Poiché $g(x)$ ha una Simm. assiale rispetto a $x = \frac{3}{2}$ ne segue che anche $f(x)$ ha una Simmetria Assiale rispetto a $x = \frac{3}{2}$



Dal grafico risulta un flesso in $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ e 1 in $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. simmetria rispetto a $x = \frac{3}{2}$

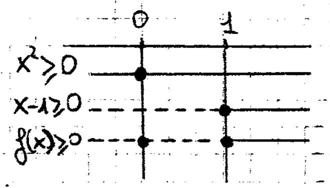
Imm $f(x) = \left[\text{arctg}\left(-\frac{25}{4}\right), \frac{\pi}{2}\right]$

3 Studio di una funzione irrazionale

Data $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ disegnarne un grafico qualitativo.
Arrestare lo studio alla $f'(x)$ e dedurre gli eventuali flessi dal grafico.
Studiare la derivabilità in O(0;0) e in P(1;0) e dire se è possibile applicare il Teorema di Rolle in OP.

$D: \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0 \quad x^2(x-1) \geq 0$



Comporta, agli estremi

$\lim_{x \to \mp\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} = x = \mp\infty \Rightarrow y = x$ AOb

trascuro l'esame di o sup.

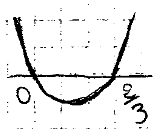
D $f'(x)$: $D: x \neq 0,1$; $\lim_{x \to 0^{\mp}} \frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}} = \lim_{x \to 0^{\mp}} \frac{\cancel{x}(3x-2)}{3\cancel{x}\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$; $\frac{-2}{0^+(-1)^2} = -\infty$; $\frac{-2}{0^-(-1)^2} = +\infty$ $\Big\}$ ⇒ in O(0,0) c'è una cuspide

$\lim_{x \to 1^{\mp}} f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$ ⇒ in (1,0) c'è un flesso a tg verticale

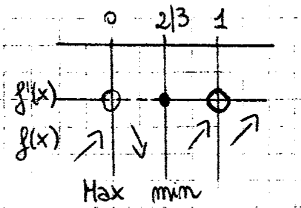
Monotonia

$f'(x) \geq 0$

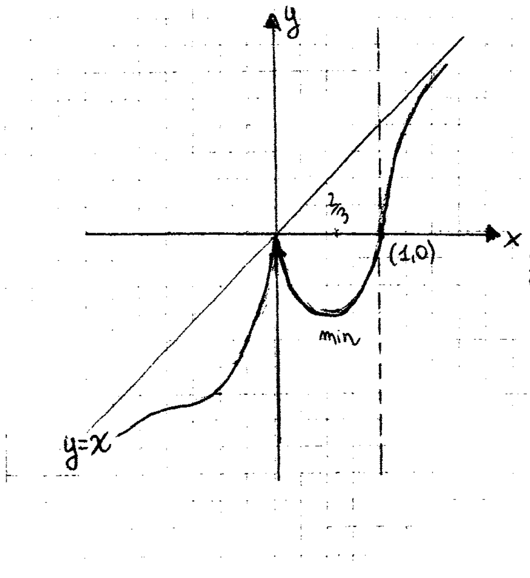
$x(3x-2) \geq 0$



$x < 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$



$y_{min} = \sqrt[3]{\frac{8}{27} - \frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8-12}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

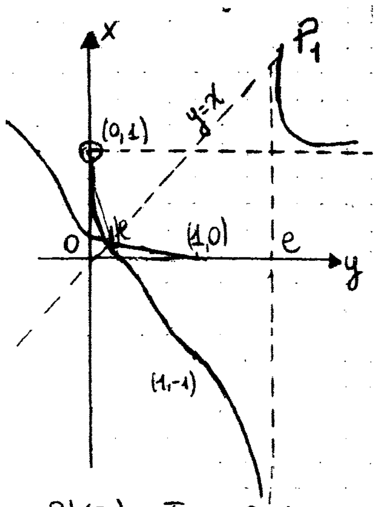


È possibile applicare il teorema di Rolle in $[0,1]$ perchè:

1) $f(x)$ è continua in $[0,1]$
2) $f(x)$ è derivabile in $[0,1]$ estremi esclusi
3) $f(0) = f(1) = 0$

Il punto c in $(0,1)$ in cui $f'(x) = 0$ è $x = \frac{2}{3}$

41



c'è un AO $y = e$ (logico: gli AV diventano AO e viceversa)

tg di flesso)

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1+1}{-1-2} = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2}{\frac{1}{e}(-1-1)^2} = -\frac{2e}{4} = -\frac{e}{2}$$

$$y = -\frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{e}\right) = -\frac{e}{2}x + 2$$

$\mathrm{dom}\, f^{-1}(x) = \mathrm{Imm}\, f(x)$

$\mathrm{Imm}\, f^{-1}(x) = \mathrm{dom}\, f(x)$

Il punto richiesto si trova sulla retta $y = x$ poichè è il simmetrico di se stesso

5- Studio di una funzione con una discontinuità particolare.

Data $f(x) = \log(\sqrt{x^2+1} - x) - 2\mathrm{artg}\ 1/x$ darne un grafico qualitativo con la determinazione dei punti di flesso e la ricerca degli eventuali Aob. Determinare i coeff ang delle tang di flesso, definire il tipo di discontinuità e dire se f(x) è derivabile in O(0;0). Determinare l'Im della f.

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) - 2\,\mathrm{artg}\frac{1}{x}$$

$$D \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{x^2+1} - x > 0 \quad \forall x \end{cases}$$

Studiare continuità e derivabilità in D

Comporta, agli estremi del D:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log(+\infty+\infty) - 2\cdot 0 = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) - 2\cdot 0 = \log 0 = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \log 1 - 2\,\mathrm{artg}(-\infty) = 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \log 1 - 2\,\mathrm{artg}(+\infty) = 0 - 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

discontinuità di I specie

6- Studio di una f(x) compresa in una striscia e di cui non è possibile calcolarne tutti gli zeri.

Data $f(x) = \text{artg}x - \frac{1}{2}x$, darne un grafico qualitativo.
Verificare che essa è compresa in una striscia.
E' necessario studiarla in tutto il suo dom?
Lo zero con x>0 è compreso in [1; Π/2] o in [Π/2; Π] ?

$f(x) = \text{artg}x - \frac{1}{2}x$ dom $\mathbb{R}$ $f(x)$ è dispari (studio per $x \geq 0$)

$f(0)=0$ Non è possibile determinare altri zeri se non con il metodo dicotomico.

Per calcolare l'AOb si usa in modo improprio la scrittura del limite:

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x \Rightarrow 2$ AOb tra loro paralleli

Monotonia

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2-1-x^2}{2(1+x^2)} = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)}$; $f'(x) \geq 0$

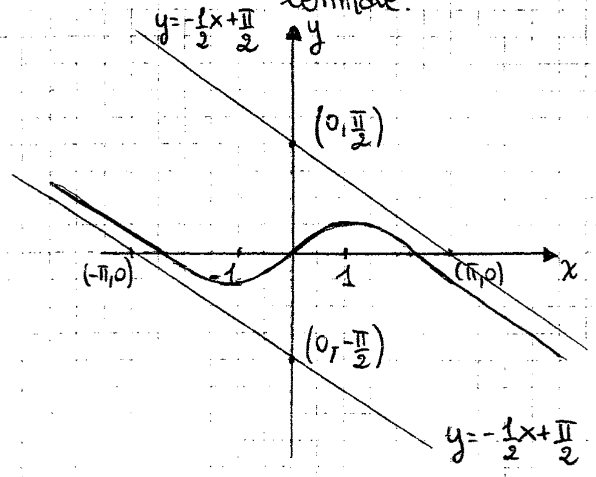
	0	1	
$f'(x)$		•	---
$f(x)$	↗		↘
		Max	

$y_{Max} = f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Concavità

$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ $f''(x) < 0$ per $\forall x > 0$

$f''(x) > 0$ per $\forall x < 0 \Rightarrow$ in $O(0,0)$ c'è un flesso deducibile anche dalla simmetria centrale.



Dal grafico risulta
1 zero di $f(x)$ in $[-\pi, 0]$
1 zero di $f(x)$ in $[0, \pi]$

$f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$

$f(\pi) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$

Lo zero è compreso in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

8 - Studio di una f(x) in cui occorre ricorrere al T di esistenza degli zeri.

Data $f(x) = \dfrac{x}{e^x + x + 1}$ darne un grafico qualitativo.

Individuare gli intervalli in cui si trovano gli eventuali AV e stremanti. Dedurre l'esistenza dei flessi dal grafico.

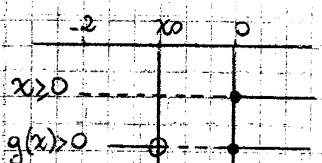
$f(x) = \dfrac{x}{e^x + x + 1}$ D: $g(x) = e^x + x + 1 \neq 0$ $g(0) = 2$ $f(0) = 0$

$g(-1) = e^{-1} > 0$ $g(-2) = e^{-2} - 1 < 0$ $f(-2) = \dfrac{2}{1 - e^{-2}} > 2$

$\Rightarrow$ $g(x)$ ammette uno zero in $[-2, -1]$ che chiamiamo x_0

$\Rightarrow$ $f(x)$ ammette un AV in $x_0 \in [-2, -1]$

Segno di $f(x)$

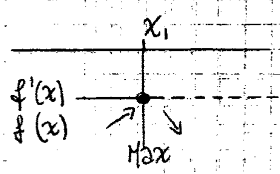


$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \mp\infty$ $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x + x + 1} = 1 \text{ (AO)} \\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x + x + 1} = 0 \text{ (AO)} \end{cases}$

$f'(x) = \dfrac{e^x + x + 1 - x(e^x + 1)}{(e^x + x + 1)^2} = \dfrac{e^x(1-x) + 1}{(e^x + x + 1)^2}$ $h(x)$

$h(-1) = 2e^{-1} + 1 > 0$ $h(0) = 2$ $h(1) = 1 > 0$ $h(2) = e^2(-1) + 1 < 0$ $h(3) = -2e^3 + 1 < h(2)$

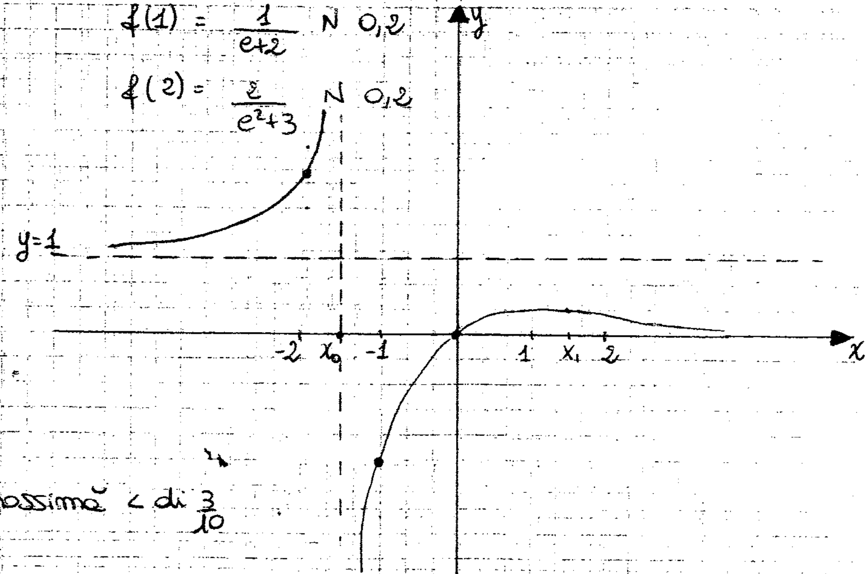
$\Rightarrow$ $h(x)$ ammette uno 0 in $x_1 \in [1, 2]$ e diventa sempre $>$ in $| \, |$ per $x \to +\infty$



$f(1) = \dfrac{1}{e+2} \sim 0{,}2$

$f(2) = \dfrac{2}{e^2+3} \sim 0{,}2$

Grafico probabile



Dal grafico risulta un flesso in $[x_1, +\infty)$

Determinare x_0 con approssimaz. $< \dfrac{3}{10}$

(uso metodo dicot.)

① Calcolo $g(-\frac{3}{2}) = e^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} + 1 + \dfrac{1}{e\sqrt{e}} = -0{,}28 < 0$

$\sim 4{,}5$

dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ dom $f'(x) = \mathbb{R}$

Infatti $f'(x)$ presenta in -2 e 2 la f di $\frac{0}{0}$, ma ha ivi una discontinuità di III specie eliminabile $\Rightarrow$ è ivi continua.

Spiegazione: le rette tangenti limiti, destra e sinistra, in ciascun punto, sono tra loro parallele $\Rightarrow$ hanno lo stesso coefficiente angolare, ma $m = f'(x) \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) \Rightarrow f'(x)$ è continua in 2.

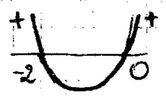
Analogamente per $x = -2$

10 - Studio di f(x) con calcolo di Area e determinazione del punto che verifica il T di Lagrange in un intervallo, per via grafica.

Data $f(x) = (x^2 + 2x)e^{x^2}$ disegnarne il grafico qualitativo con studio della concavità.
Calcolare l'A compresa fra la curva e l'asse x.
Scrivere il sistema che permette di individuare per via grafica il punto c che verifica il T di Lagrange in (0;1).

$f(x) = (x^2+2x)e^x$ dom $\forall x \in \mathbb{R}$

segno $f(x) = $ sig (x^2+2x)

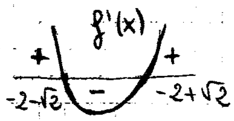


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\left(\begin{matrix}\text{prevale}\\ e^{-\infty}\end{matrix}\right)$ A.O

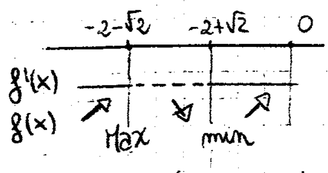
oppure applico il teorema di De l'Hopital $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x}{e^{-x}}$

$f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = e^x(x^2+4x+2)$

$f'(x) = 0$ $x^2+4x+2=0$ $x = -2 \mp \sqrt{4-2} = -2 \mp \sqrt{2}$



$2 - 2\sqrt{2} > 0$



$y_M = (\cancel{4} + 2 + 4\sqrt{2} \cancel{-4} - 2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$

$y_m = (\cancel{4} + 2 - 4\sqrt{2} \cancel{-4} + 2\sqrt{2})$

$f''(x) = e^x(x^2+4x+2) + e^x(2x+4) = e^x(x^2+6x+6)$

$f''(x) = 0$ $x^2+6x+6=0$ $x = -3 \mp \sqrt{9-6} = -3 \mp \sqrt{3}$ entrambi < 0

11· Un funzione sia esponenziale che logaritmica.
Studiare $f(x) = \log(e^{3x} - e^{x})$.
1) Dire se vi sono asintoti, punti di Max o min relativi o assoluti, flessi.
2) Disegnare un grafico qualitativo di f(x) e di | f(x) |, quest'ultimo senza eseguire calcoli o studi.
3) Studiare l'invertibiltà di f(x) e scrivere l'eq. di $f^{-1}(x)$.

D: $e^{3x}-e^{x}>0$; $e^{x}(e^{2x}-1)>0$; $e^{x}(e^{x}+1)(e^{x}-1)>0 \Rightarrow$ D: $e^{x}-1>0$; D: $\boxed{x>0}$

meglio $e^{3x}>e^{x} \Rightarrow 3x>x \Rightarrow x>0$

Segno $f(x)\geq 0$: $e^{3x}-e^{x}\geq 1$; $e^{3x}-e^{x}-1>0$ l'eq. associata, ponendo $e^{x}=z$ diventa $z^3-z-1=0$; $z(1)=-1$; $z(2)=8-2-1=5 \Rightarrow$ l'eq [1] ha uno zero in $(1,2) \Rightarrow$ la $f(x)$ ha uno zero fra 0 e $\log 2$. Per determinarlo con > approssimaz. $\Rightarrow$ metodo dicotom.

$\begin{pmatrix} z=2, & x=\ln 2 \\ z=1, & x=0 \end{pmatrix}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log[e^{x}(e^{x}+1)(e^{x}-1)] = \log(1\cdot 2\cdot 0^+) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log[\,//\,] = \log[+\infty\cdot(+\infty)(+\infty)] = +\infty$

Non vi sono asintoti V o O. Eventuali AOb :

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \log e^{x}(e^{x}+1)(e^{x}-1) = \log e^{x} + \log e^{x} + \log e^{x} = x+x+x = 3x$

$y=3x$ è l'AOb.

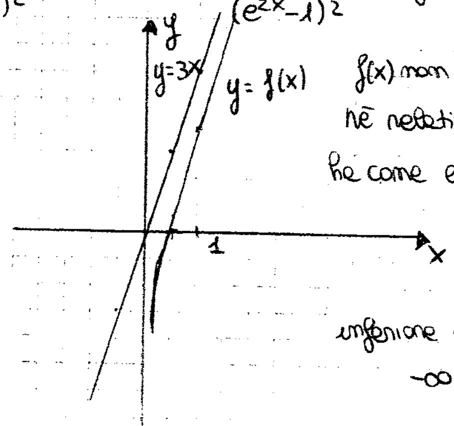
Monotonia : $f'(x) = \dfrac{3e^{3x}-e^{x}}{e^{3x}-e^{x}} = \dfrac{\cancel{e^{x}}(3e^{2x}-1)}{\cancel{e^{x}}(e^{2x}-1)}$ per $x>0$ $3e^{2x}>1$ e $e^{2x}-1>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$

$f(x)$ è sempre crescente $\Rightarrow f(x)$ è sempre invertibile in D. da y non è esplicitabile se non si sanno risolvere le eq. di III°.

da $f^{-1}(x)$ è data da $x=\log(e^{3y}-e^{y}) \Rightarrow e^{x}=e^{3y}-e^{y}$

$f''(x) = \dfrac{6e^{2x}(e^{2x}-1)-2e^{2x}(3e^{2x}-1)}{(e^{2x}-1)^2} = \dfrac{e^{2x}(\cancel{6e^{2x}}-6-\cancel{6e^{2x}}+2)}{(e^{2x}-1)^2} = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \Rightarrow f''(x)<0$ per $\forall x\in D \Rightarrow f(x)$ ha sempre concavità $\cap$.

Grafico qualitativo di $f(x)$
e di $g(x)=|f(x)|^2$



f(x) non ha min o Max né relativi né assoluti ha come estremi inferiore e superiore $-\infty$ e $+\infty$

51

Tg di flesso : $y - f(2) = f'_2 (x-2)$

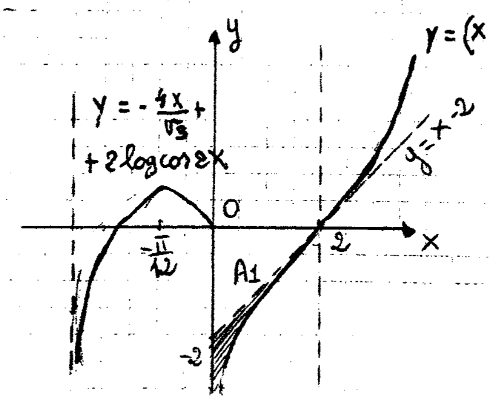
$f(2)=0$; $f'(2) = e^0(8-16+9) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow y = x-2$

$\int_0^2 (x-2)e^{(x-2)^2} dx$ pongo $x-2=t$, $dx = dt$

$\int t e^{t^2} dt = \frac{1}{2}\int 2t e^{t^2} dt = \frac{1}{2}\int f'(t) e^{f(t)} dt = \frac{1}{2} e^{f(t)} = \frac{1}{2} e^{t^2} + c = \frac{1}{2} e^{(x-2)^2} + c$

$A_1 = \frac{2^2}{2} = 2$ $\quad \int_0^2 f(x) = \left[\frac{1}{2} e^{(x-2)^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(1-e^{+4}) = -A$ perchè è al di sotto dell'asse delle x. $A = \frac{1}{2}(e^4-1)$ (compresa fra la curva e l'asse x)

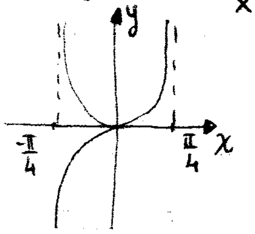
Per avere l'area compresa tra la curva e la tg di flesso devo togliere il mezzo quadrato A_1 indicato in figura $A = \frac{1}{2}(e^4-1) - 2 = \frac{1}{2}(e^4-5)$



13- Studio di una f(x) definita diversamente in due Intervalli contigui.

Data $f(x) = \begin{cases} \log|tg 2x| & se\ -\frac{\pi}{4} < x < 0 \\ (x-1)\log\frac{2x-2}{x-2} & se\ x \geq 0 \end{cases}$ **disegnarne un grafico qualitativo arrestandone lo studio alla f'(x). Ove serve ricorrere al T di Rolle per individuare l'esistenza di estremanti.**

$f(x) = \begin{cases} \log|tg 2x|; & -\frac{\pi}{4} < x < 0 \\ (x-1)\ln\frac{2x-2}{x-2}; & x \geq 0 \end{cases}$ $\quad tg\, 2x \; \left(T = \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad f_1(x) = \log(-tg\, 2x)$ dom $-\frac{\pi}{4} < x < 0$



Segno $f_1(x) \geq 0$ $\quad -tg 2x \geq 1$ $\quad -tg 2x = 1$ se $2x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$

53

14 - Una funzione trigonometrica, in cui conviene cambiare la forma prima di studiarla.

Disegnare un grafico qualitativo di $f(x) = 2\text{sen}x\cos x - \cos^2 x$. Individuare gli intervalli ove la f. cambia di segno, ha degli estremanti o dei flessi. Dire se la f. ammette una simmetria centrale rispetto a $(\pi/2; 0)$.

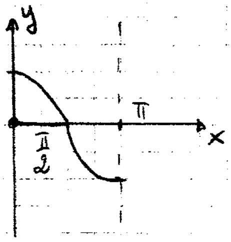
$f(x) = 2\text{sen}x\cos x - \cos x = \cos x(2\text{sen}x - \cos x)$ [1]   D: $\forall x$

oppure: $f(x) = \text{sen}2x - \frac{1+\cos 2x}{2}$ [2]

Conviene studiarla nel 2° modo poiché $T = \pi$

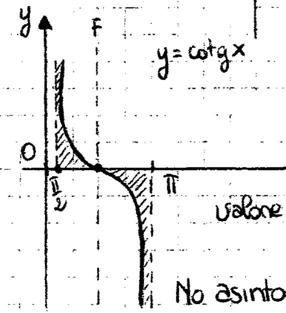
Studio $f(x)$ fra 0 e π $f(0) = f(\pi) = 0 - \frac{1+1}{2} = -1$

Segno di $f(x)$: lo studio nella forma [1]: $\cos x > 0$ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$



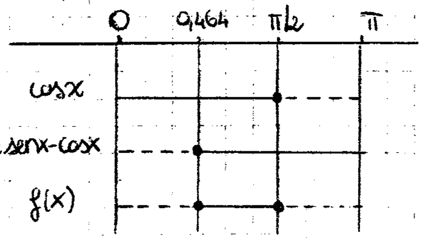
$2\text{sen}x - \cos x \geq 0$ divido per sen x che è sempre > 0 in $(0, \pi)$ estremi esclusi

$2 - \text{cotg}x \geq 0 \Rightarrow \text{cotg}x \le 2 \quad x \geq \text{arcotg}\frac{1}{2}$



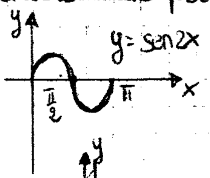
valore compreso tra $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4}$

No asintoti no comportamento agli estremi.



Monotonia: $f'(x) \geq 0$ (Derivo nella [2]) $f'(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{2}(-2\,\text{sen}2x) = 2\cos 2x + \text{sen}2x \geq 0$ [3]

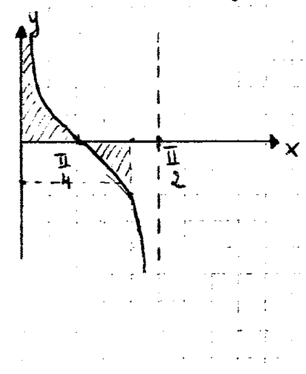
Divido tutto per sen 2x. In $(0, \frac{\pi}{2})$ non cambio di segno; in $\frac{\pi}{2} - \pi$ cambio di segno.



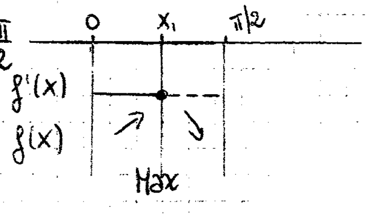
$0 - \frac{\pi}{2}$: $2\text{cotg}2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2\text{cotg}2x + 1 \geq 0$; $\text{cotg}2x \geq -\frac{1}{2}$ $x \le \frac{1}{2}\text{arcotg}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x \le \frac{1}{2}\text{tg}(-2)$

$x \le x_1$



In $0 - \frac{\pi}{2}$



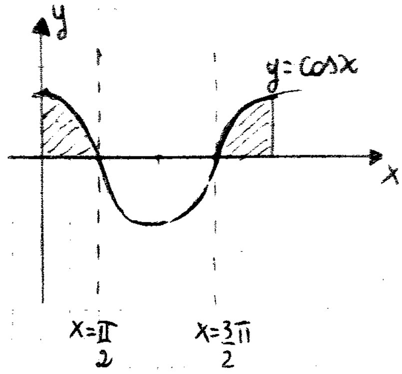
15 · Una f(x) esponenziale e periodica.

Data $f(x) = \cos x \cdot e^{\frac{1}{4}\mathrm{tg}\,x}$ disegnarne un grafico qualitativo. Dedurre dal grafico il numero dei flessi in un periodo e individuare i probabili intervalli in cui essi si trovano.

$f(x)$ è periodica con $T = 2\pi$ (mcm dei 2 periodi: $\pi, 2\pi$)

Studio $f(x)$ da 0 a 2π $\quad D\ [0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$

Segno: $e^{\mathrm{tg}x/4}$ sempre $>0 \Rightarrow$ segno $f(x) =$ segno $\cos x$



Comportamento agli estremi del D:

$f(0) = e^0 \cdot 1 = 1$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = e^{+\infty} \cdot 0^+ \left(\begin{matrix}\text{prevale}\\ e^{+\infty}\end{matrix}\right) \to \lim = +\infty$

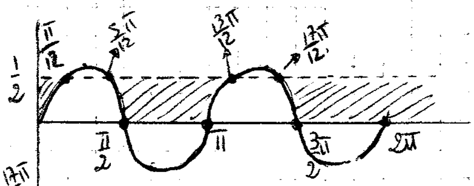
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+ \left(\frac{3}{2}\pi^+\right)} f(x) = e^{-\infty} \cdot 0 = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}\pi^-} f(x) = e^{+\infty} \cdot 0^- = -\infty$

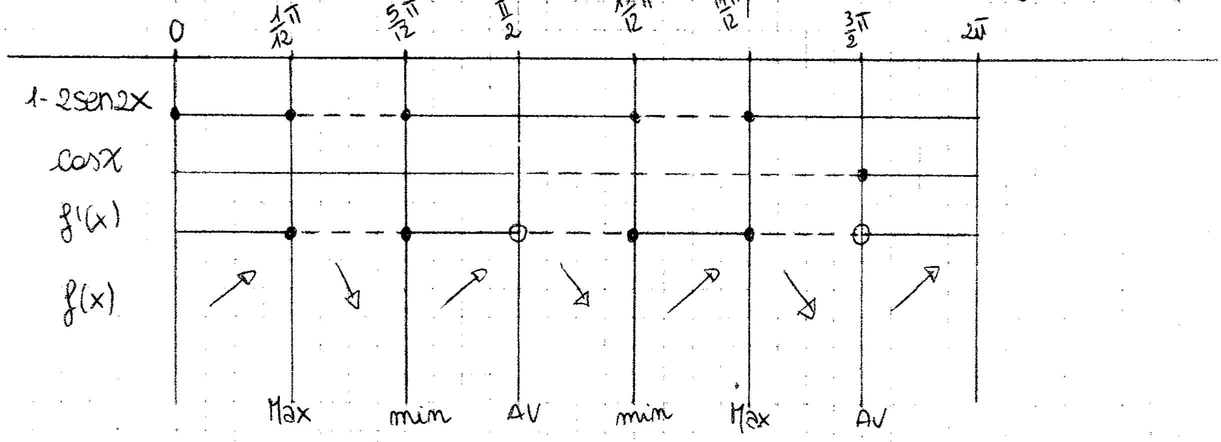
$f(2\pi) = f(0) = 1$

$$f'(x) = e^{\mathrm{tg}x/4} \cdot \frac{1}{4\cos^2 x} \cdot \cos x - e^{\mathrm{tg}x/4} \cdot \mathrm{sen}\,x = e^{\mathrm{tg}x/4}\left(\frac{1}{4\cos x} - \mathrm{sen}\,x\right) = \frac{e^{\mathrm{tg}x/4}}{4}\left(\frac{1 - 4\,\mathrm{sen}x\cos x}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{e^{\mathrm{tg}x/4}}{4}\underbrace{\left(\frac{1 - 2\,\mathrm{sen}2x}{\cos x}\right)}_{g(x)}$$ Il segno di $f'(x)$ è uguale al segno di $g(x)$

Segno di $g(x)$ $\quad \begin{cases} 1 - 2\,\mathrm{sen}2x \geq 0 & \mathrm{sen}2x \leq \frac{1}{2} \\ \cos x > 0 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \end{cases}$





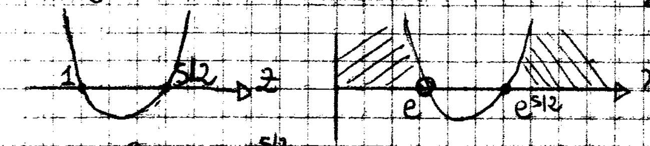
Monotonia: Per $f'(x)$ pongo $\log x = t \Rightarrow t' = \frac{1}{x}$ $\quad x = e^t$

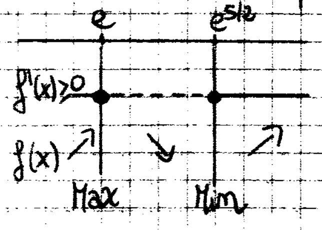
$$f'(t) = e^t\left(\frac{2t-3}{t-2}\right)\cdot t' = e^t\left(\frac{2t-3}{t-2} + \frac{2t-4-2t+3}{(t-2)^2}\right)\cdot t' =$$

$$= e^t\,\frac{(2t-3)(t-2)-1}{(t-2)^2}\cdot t' = e^t\left(\frac{2t^2-4t-3t+6-1}{(t-2)^2}\right)\cdot t'$$

Sostituendo $\Rightarrow \cancel{x}\,\dfrac{2\log^2 x - 7\log x + 5}{(\log x-2)^2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}$

$z = \log x$; $\quad 2z^2 - 7z + 5 = 0$; $\quad z_{1,2} = \dfrac{7 \mp \sqrt{49-40}}{4} < \begin{matrix} 5/2 \ (\log x - 2)^2 \\ 1 \ (2 \text{ variazioni}) \end{matrix}$

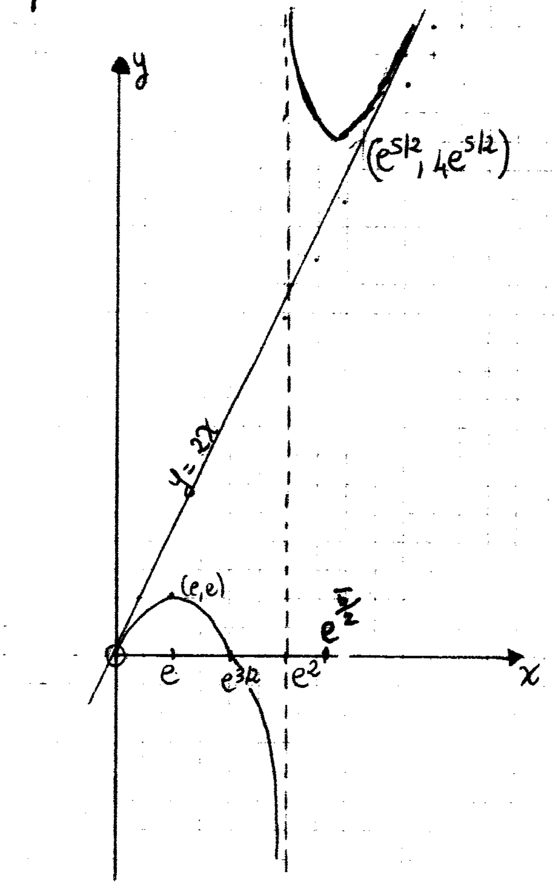




$$y\,Max = f(e) = e\,\frac{2-3}{1-2} = e$$

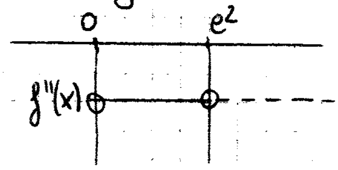
$$y\,Min = f(e^{5/2}) = e^{5/2}\,\frac{2\cdot 5/2 - 3}{5/2-2} = e^{5/2}\cdot\frac{2}{1/2} = 4e^{5/2}$$

Grafico.



$f(x)$ non ha flessi
$f''(x) \neq 0$ per $\forall x \in D$

Segno di $f''(x)$



Il segno di $f''(x)$ dipende solo dal segno di $(\log x - 2)$ ed è opposto ad esso:

$$f''(x) = \frac{g(x)}{(\log x-2)^3} \quad \text{e} \quad g(x) < 0 \ \text{per } \forall x \in D$$

N.B. C'è un errore di tracciamento nell'AO_b, che falsa leggermente il grafico.

18 Studio di una f(x) = $sen^3x + cos^3x$

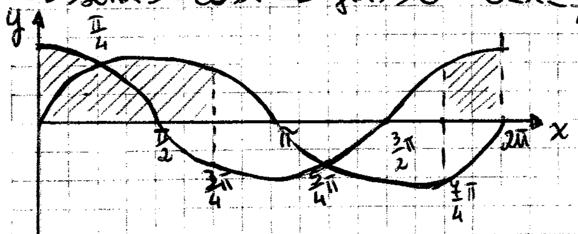
Data la f(x) = $sen^3x + cos^3x$ di T=2π disegnarne un grafico qualitativo studiandone il segno, gli estremi del periodo, la monotonia con eventuali simmetrie e la convessità arrestando lo studio del segno di $f''(x)$.

D: $\mathbb{R}$; $T = 2\pi \Rightarrow$ studiamo $f(x)$ da 0 a 2π

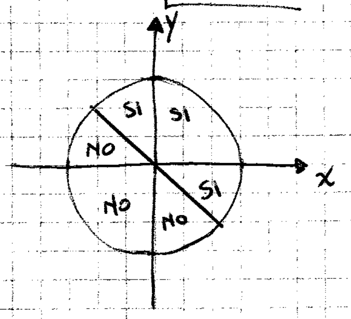
Segno: $f(x) = (senx + cosx)(sen^2x - senx\,cosx + cos^2x) = (senx+cosx)\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}sen2x\right)}_{\text{sempre} > 0}$

Il segno di $f(x)$ è il segno di $(senx+cosx) \Rightarrow senx + cosx > 0$

$\Rightarrow senx > -cosx \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad 0 < x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$



Oppure con la cfr trigonometrica.

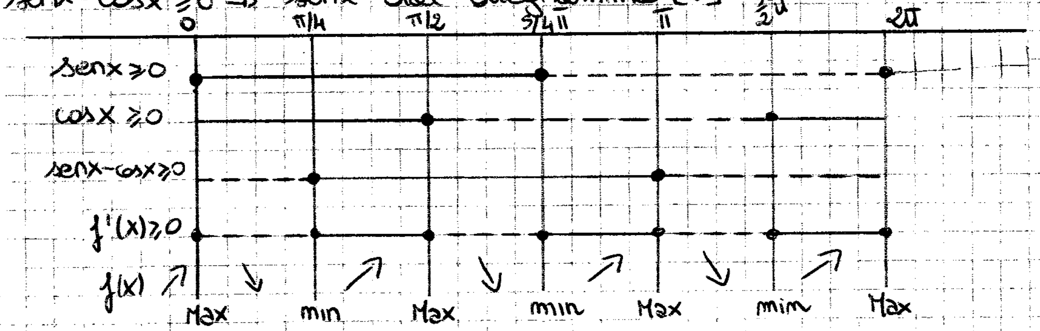


Estremi del periodo: $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 + 1^3 = 1 \Rightarrow f(2\pi) = 1$

Interse assi già calcolate: $x_1 = \frac{3}{4}\pi$; $x_2 = \frac{7}{4}\pi$

Monotonia: $f'(x) = 3sen^2x \cdot cosx - 3cos^2x = 3senx\,cosx(senx - cosx) \geq 0$

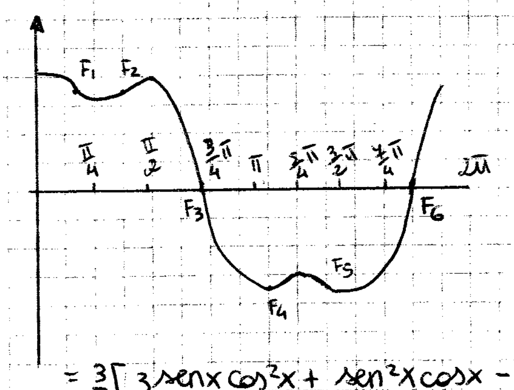
$senx - cosx \geq 0 \Rightarrow$ senx del diagramma [1]



$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = -f\left(\frac{5}{4}\pi\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^3 + 0 = 1 = -f(\pi) = -f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

f(x) ha una simmetria centrale rispetto a $\left[\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)\right]$ e a $\left(\frac{7}{4}\pi, 0\right)$



$f''(x) = D\,\frac{3}{2}sen\,2x\,(senx - cosx) =$

$= \frac{3}{2}\left[2cos2x(senx - cosx) + sen2x(cosx + senx)\right] =$

$\frac{3}{2}\left[(cos^2x - sen^2x) + 2senx\,cosx(cosx + senx)\right] =$

$= \frac{3}{2}\left[cos^2x\,senx - cos^3x - sen^3x - sen^2x\,cosx + 2\,senx\,cos^2x + 2sen^2x\,cosx\right] =$

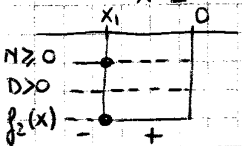
$= \frac{3}{2}\left[3senx\,cos^2x + sen^2x\,cosx - cos^3x - sen^3x\right]$

Poiché lo studio del segno di $f''(x)$ è difficoltoso rileviamo solo dal grafico che vi sono 6 flessi.

19 Studio di una $f(x) = \begin{cases} \log\left(e^2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) \ se\ x > 0 \\ \frac{2x(3+x)}{x-1} + 2 \ se\ x \leq 0 \end{cases}$

Data la $f(x) = \begin{cases} \log\left(e^2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) \ se\ x > 0 \\ \frac{2x(3+x)}{x-1} + 2 \ se\ x \leq 0 \end{cases}$ studiare fino a $f'(x)$ e dire se f(x) in 0 è derivabile e continua. Studiare anche il comportamento agli estremi del dominio, determinare gli asintoti disegnandone un grafico qualitativo.

$f_2(x) = \frac{6x+2x^2+2x-2}{x-1} = \frac{2(x^2+4x-1)}{x-1}$ $\quad x_{1,2} = -2 \mp \sqrt{5}$ $\quad$ Dom: $\forall x \leq 0$ solo $x_1 = -2-\sqrt{5} \in$ Dom



$f(0) = \frac{2\cdot(-1)}{-1} = 2$

$$\begin{array}{l|l} x^2-4x-1 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x-3 \\ // \ -3x-1 & \\ \ \ 3x-3 & \\ \ \ // \ -4 & \end{array}$$

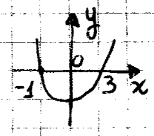
Comporta, agli estremi: $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x^2+4x-1)}{x-1} = \frac{2x^2}{x} = 2x = -\infty$

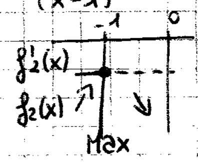
AOb. c'è perché grado Num = (g Den + 1) $\Rightarrow f(x) = 2\left(x-3-\frac{4}{x+1}\right)$ con $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{x-1} = 0$

$\Rightarrow$ AOb: $y = 2x-6$; $\lim_{x\to\infty} \frac{-4}{x-1} = \frac{-4}{-\infty} = 0^+ \Rightarrow f_2(x)$ tende all'asintoto da sopra.

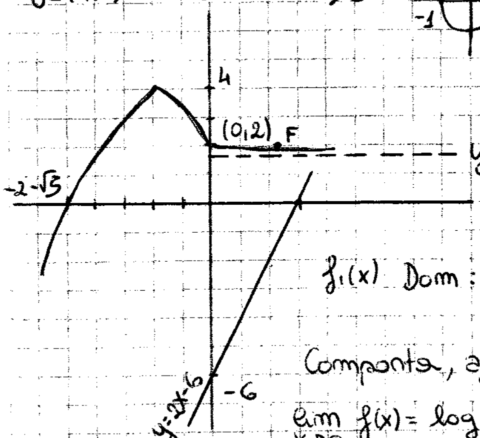
$f_2'(x) = 2\,\frac{(2x-4)(x-1)-(x^2+4x-1)}{(x-1)^2} = 2\,\frac{2x^2+2x-4-x^2-4x+1}{(x-1)^2} = 2\,\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Rightarrow$ sempre >0 in D

$f_2'(x) \geq 0 \Rightarrow x^2-2x-3 \geq 0$





$y_{MAX} = 2\cdot\frac{-4}{-2} = 2\cdot 2 = 4$



Segno di $f_1(x)$ $e^2 - e^{-\frac{1}{x}} > 1$ di difficile studio lo risolvo con AO e $f_2'(x)$

$f_1(x)$ Dom: $e^2 - e^{-\frac{1}{x}} > 0$; $e^2 - \frac{1}{e^{1/x}} = \frac{e^{2+\frac{1}{x}}-1}{e^{1/x} > 0}$, Num >0 $e^{2+\frac{1}{x}} > 0$ ovvero per $\forall x > 0$

Comporta, agli estremi del D.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \log(e^2 - e^{-\infty}) = \log e^2 = 2 \Rightarrow f(x)$ è continua in 0.

$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim(e^2 - e^0) = \log(e^2-1) = $ A. Orizz.

Monotonia: $f_1'(x) = \frac{-e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{e^2 - e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{-e^{-\frac{1}{x}}}{x^2(e^2 - e^{-1/x})} < 0$ per $\forall x \in$ Dom $\Rightarrow f_2(x)$ è sempre decrescente $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(x)$ è sempre compresa fra 2 e $\ln(e^2-1)$

Derivabilità: $f_2'(0) = \left.\frac{2(x^2-2x-3)}{(x-1)^2}\right|_0 = -6$; Per $f_1'(0) = \frac{e^{-\infty}}{0^2(e^2-e^{-\infty})} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0^+} f_1'(x) = \begin{pmatrix} \text{pongo } \frac{1}{x} = z \Rightarrow x = \frac{1}{z} \\ \text{con} \lim_{x\to 0} z = +\infty \end{pmatrix} = \lim_{z\to\infty} \frac{e^{-z}\cdot z^2}{(e^2 - e^{-z})} = \frac{z^2}{e^z\cdot e^2}$ prevale il Den. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ lim è 0 $\Rightarrow f_2'(x) = -6$; $\lim_{x\to 0} f_1'(x) = 0 \Rightarrow$ 1) $f(x)$ in zero non è derivabile

2) $f_1'(x)$ in 0 ha una tg orizzontale $\Rightarrow f_1(x)$ ha un Flesso.

21 Studio di una f(x) = artg$[e^x(x-1)]$

Data una f(x) = artg$[e^x(x-1)]$ disegnarne un grafico qualitativo determinandone il dominio e il comportamento agli estremi di esso arrestando lo studio alla monotonia.

D: $\mathbb{R}$ segno $f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x(x-1) \geq 0 \to x-1 \geq 0$ $\boxed{x \geq 1}$

Comportamento agli estremi:

$$\lim_{x \to -\infty} \text{artg}[e^x(x-1)] = \text{artg}[0(-\infty)]$$

$$\lim_{x \to -\infty} [e^x(x-1)] = \text{dH} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = \text{dH} = \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = 0$$

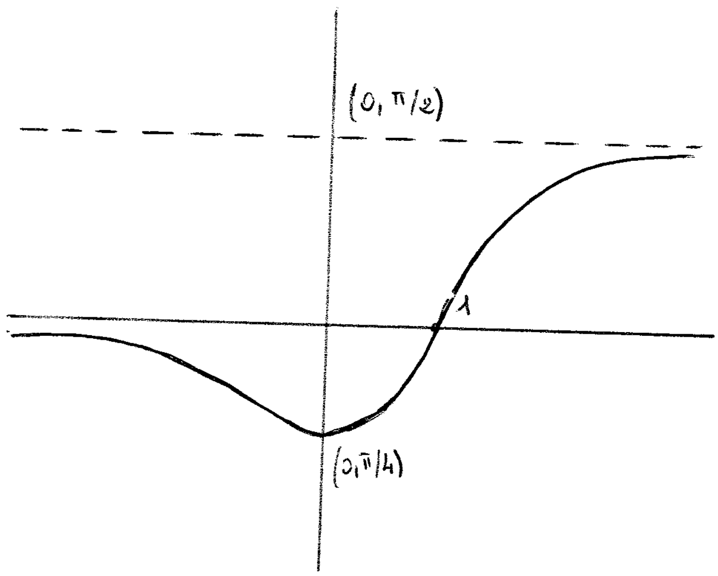
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{artg}\,0 = 0 \Rightarrow \text{AO} \qquad f(0) = \text{artg}[1(-1)] = -\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{artg}[+\infty(+\infty)] = \text{artg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2} \text{ AO}$$

Monotonia: $f'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}(x-1)^2} \cdot [e^x(x-1+1)] = \frac{e^x \cdot x}{1+e^{2x}(x-1)^2} \cdot [e^x(x-1+1)] = \frac{e^x \cdot x}{1+e^{2x}(x-1)^2}$

$f'(x) \geq 0 \quad x \geq 0$

		0	
$f'(x)$	- - -	●	———
$f(x)$	↘		↗



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 56

23 Studio di una $f(x) = \operatorname{artg}\frac{x+2}{x} + \frac{1}{2}x$

Data una $f(x) = \operatorname{artg}\frac{x+2}{x} + \frac{1}{2}x$ disegnarne un grafico probabile determinandone il dominio e il comportamento agli estremi di esso, gli asintoti, la monotonia e la convessità.

$f(x) = \operatorname{artg}\frac{x+2}{x} + \frac{1}{2}x \qquad D: x \neq 0$

Comport. agli estremi: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{artg}1 + \frac{1}{2}(-\infty) = \frac{\pi}{4} - \infty = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} + \infty = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \operatorname{artg}\frac{2}{0^-} + 0 = \operatorname{artg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \operatorname{artg}\frac{2}{0^+} + 0 = \operatorname{artg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$

Asintoti: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x & \text{Aob} \\ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x & \text{Aob} \end{cases}$

Monotonia

$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{(x+2)^2}{x^2}} \cdot \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-2}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-2}{\frac{x^2+x^2+4x+4}{x^2}\cdot x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-\cancel{4}+2x^2+4x+\cancel{4}}{2x^2+4x+4} =$

$= \frac{2(x^2+2x)}{(2x^2+4x+4)} = \frac{x^2+2x}{2(x^2+2x+2)} \quad \Delta<0 \Rightarrow \text{Den}>0 \text{ per } \forall x$

segno di $f'(x)$ = segno di x^2+2x $\quad -2 \qquad 0$

$f'(x)$: $+ \quad -2 \quad - \quad 0 \quad +$

$f(x)$: $\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

Max

$y_{MAX} = \operatorname{artg}\frac{-2+2}{2} + \frac{1}{2}(-2) = \operatorname{artg}0 - 1 = -1$

Max in $(-2, -1)$

Convessità: $f''(x) = \frac{1}{2}\frac{(2x+2)(x^2+2x+2)-(2x+2)(x^2+2x)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{2(x+1)(x^2+2x+2-x^2-2x)}{(x^2+2x+2)^2} =$

$= \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}$

$f''(x)$: $- \quad -1 \quad + \quad 0 \quad +$

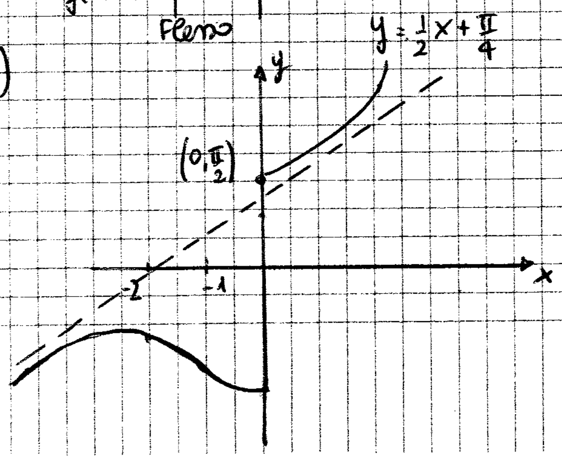
$f(x)$: $\cap \quad \cup \quad \cup$

Flesso

$f''(x) \geq 0, \; x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$y_F = f(-1) = \operatorname{artg}\frac{-1+2}{-1} + \frac{1}{2}(-1) = \operatorname{artg}(-1) - \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$F\left(-1, -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$



6.7

6

25 Studio di una f(x) = x ln²x

Data la f(x) = x ln²x disegnarne un grafico qualitativo, studiarne la monotonia e la convessità e calcolare l'area compresa fra la curva e l'asse y e la tg di flesso.

D: $x>0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ per $\forall x \in D$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0(+\infty) = (dH) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{x(-x^{-2})} = \frac{2\ln x \cdot x^2}{\cancel{x}} =$

$= 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\cdot x^{-2}} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\cancel{x}} = 0$

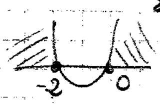
Oppure: $\ln x$ è di ∞ di 0 ∞omo per $x\to 0$ mentre x è 0 di $0 = 1 \Rightarrow$ prevale lo 0 (o l'∞omo).

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(+\infty)^2 = +\infty$ Si vede subito che non vi sono AOb perché $\ln^2 x \to \infty$ per $x\to\infty$ quindi ad ∞ la $f(x)$ diventa $x\cdot\infty$ mentre se ci fosse l'asintoto dovrebbe diventare $mx+n$.

Monotonia

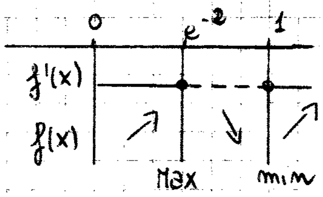
$f'(x) \geq 0$; $f'(x) = \ln^2 x + \cancel{x}\, 2\ln x \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x(\ln x + 2) \geq 0$

$z(z+2) = 0 \begin{cases} z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$

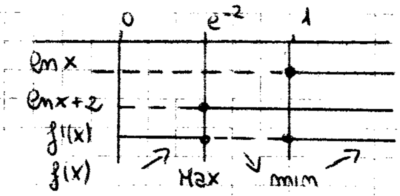


$z \leq -2 \vee z \geq 0$

$-2 \leq \ln x \vee \ln x \geq 0 \qquad e^{-2} \leq x \leq 1$



oppure



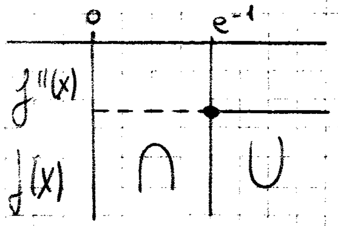
$y_{MAX} = f(e^{-2}) = e^{-2}\ln^2(e^{-2}) = e^2[\ln(e^{-2})]^2 = \frac{4}{e^2}$

$y_{min} = 1\cdot\ln^2 1 = 1\cdot 0 = 0$

$f''(x) = \frac{1}{x}(\ln x + 2) + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(2\ln x + 2) = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$

x sempre $>0 \Rightarrow$ segno $f''(x) =$ segno $(\ln x + 1) \Rightarrow \ln x + 1 \geq 0 \quad \ln x \geq -1 \Rightarrow x \geq e^{-1}$

$y_F = e^{-1}[\ln e^{-1}]^2 = e^{-1}(-1)^2 = e^{-1}$



26 Studio di una $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1}$

Data la $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1}$ studiarne il segno, il dominio e il comportamento agli estremi, la monotonia e la convessità ed infine disegnarne un grafico qualitativo.

dom: $e^x-1 \neq 0$ $e^x \neq 1$ $x \neq 0$ per $x=0$ AV destro

segno di $f(x)$ = segno $(e^x-1) \Rightarrow f(x)>0$ per $x>0$

Comporta. agli estremi del dom:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{-\infty-1} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^-$ AO; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (AV)

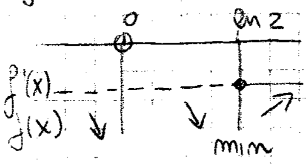
Non ci sono intersez. con gli assi. Eventuale AOb:

$\frac{e^{2x}}{e^x-1} = \frac{e^{2x}-1+1}{e^x-1} = \frac{\cancel{(e^x-1)}(e^x+1)}{\cancel{e^x-1}} + \frac{1}{e^x-1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^x+1) + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1} =$

$= e^x+1$ funz. asintotica.

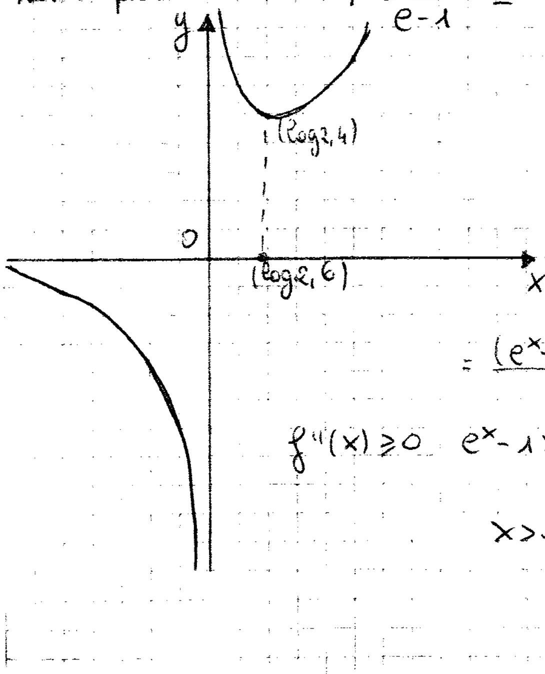
Monotonia: $f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x-1)-e^x\cdot e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}(2e^x-2-e^x)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^2} =$

$f'(x) \geq 0$: $e^x-2 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 2 \Rightarrow x \geq \ln 2$



$y_{min} = \frac{e^{2\log 2}}{e^{\log 2}-1} = \frac{(e^{\log 2})^2}{2-1} = 2^2 = 4$

Altri punti: $x=1$ $y = \frac{e^2}{e-1} \simeq \frac{(2,718)^2}{1,718} \simeq 4,3$



$f''(x) = \frac{[2e^{2x}(e^x+2)+e^{2x}\cdot e^x](e^x-1)^2-2(e^x-1)e^x e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^4} =$

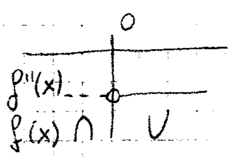
$= \frac{(e^x-1)e^{2x}[(2e^x-4+e^x)(e^x-1)-2e^x(e^x-2)]}{(e^x-1)^4} =$

$= \frac{(e^x-1)e^{2x}[3e^{2x}-3e^x-4e^x+4-2e^{2x}+4e^x]}{} =$

$= \frac{(e^x-1)e^{2x}[e^{2x}-3e^x+4]}{(e^x-1)^2}$ ← $\Delta<0$ il trinomio è sempre >0

$f''(x) \geq 0$ $e^x-1>0$ $e^x>1$

$x>0$



·Una f(x) con valore assoluto.

Studiare $f(x) = x^2 - \left| 18x^2 - \frac{3}{2}x^4 \right|$

Arrestare lo studio alla $f'(x)$, determinare i punti di non derivabiltà, disegnare un grafico qualitativo e calcolare l'A compresa fra la curva e l'asse delle x.

$$f(x) = x^6 - |18x^2 - 3/2x^4| = \begin{cases} x^6 + \frac{3}{2}x^4 - 18x^2 = x^2(x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 18) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ x^6 - \frac{3}{2}x^4 + 18x^2 = x^2(x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 18) & \text{se } g(x) \leq 0 \end{cases}$$

D: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 18x^2 - \frac{3}{2}x^4 \geq 0$; $x^2(18 - \frac{3}{2}x^2) \geq 0$; $18 - \frac{3}{2}x^2 \geq 0$; $6 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0 \Rightarrow 12 - x^2 \geq 0$

$f_1(x) = x^2(x^4 + 3/2x^2 - 18)$ $\quad$ D: $-2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}$

Studio $f(x)$ in $[0, 2\sqrt{3}]$ perchè $f_1(x)$ è pari

$f(2\sqrt{3}) = 12(144 - 18 + 3/2 \cdot 12) = 1728$

Altri eventuali zeri

$2x^4 + 3x^2 - 36 = 0$; $x^2 = \frac{-3 \mp \sqrt{9 + 288}}{4} =$

$= \begin{cases} (-3 - \sqrt{297})/4 & \text{non accettabile} \\ (-3 + \sqrt{297})/4 = z_2 \end{cases}$

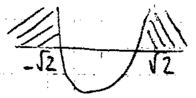
$x = \mp\sqrt{z_2} \simeq \mp\sqrt{7/2}$

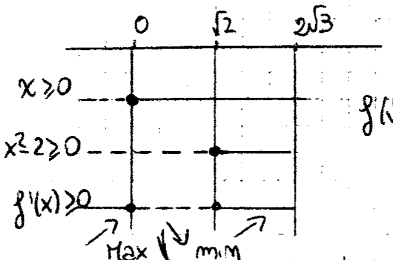
Per calcolare $f'(x)$: $D(x^6 - 18x^2 + 3/2x^4) =$

$= 6x^5 - 36x + 6x^3 = 6x(x^4 + x^2 - 6) =$

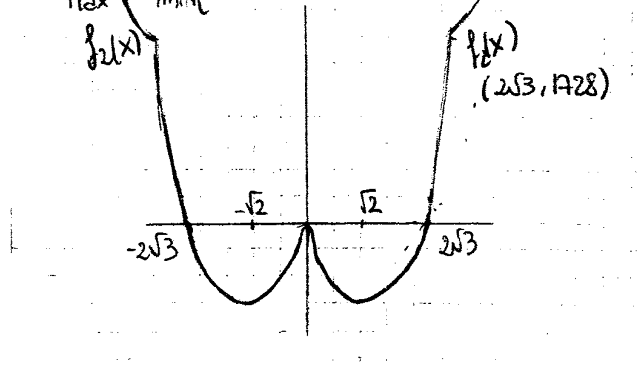
$= 6x(x^2+3)(x^2-2)$

$f'(x) \geq 0 \quad 6x(x^2-2) \geq 0$





$f(\sqrt{2}) = 2[4 - 18 + 3] = -22$



$\Delta < 0 \Rightarrow f_2(x)$

$f_2(x) = x^2(x^4 - 3/2x^2 + 18)$ sempre > 0

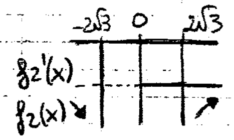
D: $x < -2\sqrt{3} \vee x > 2\sqrt{3}$

$y(\mp 2\sqrt{3}) = 1728 \Rightarrow f(x)$ è continua

$f_2(x) = x^6 + 18x^2 - \frac{3}{2}x^4$

$f_2'(x) = 6x^5 + 36x - 6x^3 = 6x(x^4 - x^2 + 6)$

$\Delta < 0 \Rightarrow$



$\lim_{x \to \mp\infty} f_2(x) = +\infty$

In $x = \mp 2\sqrt{3}$ $f(x)$ è derivabile?

No perchè dimostriamo che per $x = \mp 2\sqrt{3}$ ci sono due punti angolosi:

$\lim_{x \to 2\sqrt{3}^-} f'(x) = 6 \cdot 2\sqrt{3}(144 + 12 - 6) = 12\sqrt{3} \cdot 152 = 1824\sqrt{3}$

$\lim_{x \to 2\sqrt{3}^+} f'(x) = 6 \cdot 2\sqrt{3}(144 - 12 + 6) = 12\sqrt{3} \cdot 138 = 1656\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ punto angoloso

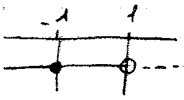
Idem per $x = -2\sqrt{3}$

71

23 Studio di una $f(x) = (x-1)\, e^{\frac{(x+1)^2}{1-x}}$

Data una $f(x) = (x-1)\, e^{\frac{(x+1)^2}{1-x}}$ disegnarne un grafico qualitativo determinandone il dominio, il segno e il comportamento agli estremi arrestando lo studio alla monotonia.

D: $x \neq 1$, segno: $f(x) > 0 \Rightarrow x > 1$ Segno di $\frac{(x+1)^2}{1-x}$



Comporta, agli estremi

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0^- \cdot e^{\frac{4}{0^+}} = 0^- \cdot e^{+\infty} = \infty$ AV $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0^+ e^{\frac{4}{0^-}} = 0^+ \cdot e^{-\infty} = 0^+ 0^+ = 0^+$

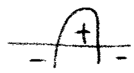
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = x \cdot e^{\frac{x^2}{-x}} = x \cdot e^{-x} = -\infty \cdot \infty = \infty$

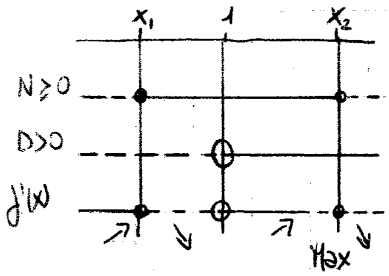
$\lim_{x\to \infty} f(x) = (x-1)\, e^{\frac{(x+1)^2}{1-x}} = +\infty \cdot e^{\frac{x^2}{-x}} = +\infty \cdot e^{-x} = +\infty \cdot 0 = 0$ AO

Monotonia: $f'(x) \geq 0$ $f'(x) = e^{\frac{(x+1)^2}{1-x}} \left(1 + (x-1) \cdot \frac{2(x+1)(1-x) + (x+1)^2}{(1-x)^2 (x-1)}\right) =$

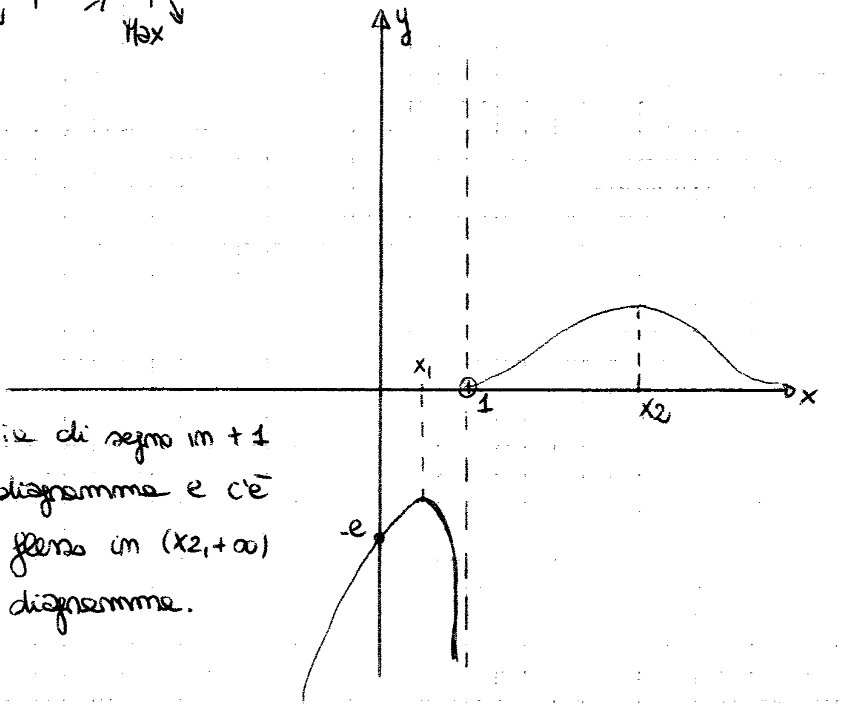
$= e^{\frac{(x+1)^2}{1-x}} \left(\frac{x-1+2-2x^2+2x+1}{x-1}\right) = e^{g(x)} \cdot \frac{-x^2+3x+2}{x-1}$

$-x^2+3x+2 \geq 0$ $x^2-3x-2=0$ $x = \frac{3 \mp \sqrt{17}}{2}$ $x_1 = -0{,}56$ $x_2 = 3{,}56$





$f(0) = -1 \cdot e^1 = -e$



$f''(x)$ cambia di segno in $+1$ come da diagramma e c'è un altro flesso in $(x_2, +\infty)$ come da diagramma.

73

ED del II Ordine non lineari.

Modello: $y'' + ay' + by = g(x)$ (1)

Oltre all'integrale generale y_o, si calcola l'integrale particolare y_p.
La soluzione dell'Ed è data da: $y = y_o + y_p$.
Su tale equazione s'imposta l'eventuale soluzione di un problema di Cauchy, calcolando prima y' e poi imponendo le condizioni $y(x_0) = y_1$, $y'(x_0) = y_2$.

Per calcolare y_p, quattro casi:

a) $g(x) = P(x)\,e^{ux}$

1) $u \neq \lambda_1, \lambda_2$ o λ: $y_p = Q(x)\,e^{ux}$
grado $Q(x)$ = grado $P(x)$

2) $u = \lambda_i$ con molteplicità m : $y_p = x^m Q(x)\,e^{ux}$
$m = 1$ se $u = \lambda_1 \vee \lambda_2$; $m = 2$ se $u = \lambda = \lambda_{1,2}$

b) $g(x) = e^{ux}[P_n(x)\cos\vartheta x + Q_m(x)\,\text{sen}\,\vartheta x]$

1) $\omega \pm i\vartheta \neq \lambda_1, \lambda_2 \left(\begin{smallmatrix} u \neq \alpha \\ \text{vel} \\ \vartheta \neq \omega \end{smallmatrix}\right) y_p = e^{ux}[P_1(x)\cos\vartheta x + Q_1(x)\,\text{sen}\,\vartheta x]$

2) $\omega \pm i\vartheta = \lambda_1, \lambda_2\ (u = \alpha;\ \vartheta = \omega)$ valida sia se λ_1, λ_2 sono cc., sia se sono reali. Vedi Es.27

$$y_p = x \cdot e^{ux}[P_1(x)\cos\vartheta x + Q_1(x)\,\text{sen}\,\vartheta x]$$

Vale sempre: il grado Max di $P_1(x)$, $Q_1(x)$ = grado $P_n(x)$, $Q_m(x)$

Per determinare le costanti che compaiono nei Polinomi $P_1(x)$ e $Q_1(x)$ si calcolano y'_p e y''_p, poi si sostituisce nella (1) e si applica il principio di identità dei Polinomi.

Se i calcoli sono troppo complessi lasciar perdere.
Vedere gli esempi negli esercizi.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 56

Esercizi.

1) $\begin{cases} y''-4y'+4y=4x^2+2 \\ y(0)=0;\quad y'(0)=0 \end{cases}$ [1] $\lambda^2-4\lambda+4=0;\ \lambda_{1,2}=2;\ y_0=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

Per y_p: siamo nel caso a);

$\lambda=2;\ v=0;\ v\neq\lambda$ sottocaso 1) $y_p=ax^2+bx+c;\ y_p'=2ax+b;\ y_p''=2a$

$2a-8ax-4b+4ax^2+4bx+4c=4x^2+2;$ $\begin{cases} 2a-4b+4c=2 \\ 4a=4 \Rightarrow a=1 \\ b-2a=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$

$4ax^2+4(b-2a)x+2a-4b+4c=4x^2+2;$

$\cancel{2}-8+4c=\cancel{2};\ c=2;\ y_p=x^2+2x+2$

$y=y_0+y_p=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+x^2+2x+2;\ y'=e^{2x}(2c_1+c_2+2c_2x)+2x+2$

$\begin{cases} 0=c_1+c_2 \\ 0=2c_1+c_2+2 \end{cases}$ $c_2=2 \Rightarrow$ $y=-2e^{2x}+2xe^{2x}+x^2+2x+2$

$0=c_1+2 \Rightarrow c_1=-2$

2) $\begin{cases} y''-8y'+17y=34x+1 \\ y(0)=0;\ y'(0)=0. \end{cases}$ $\lambda^2-8\lambda+17=0;\ \lambda=4\pm i;\ \alpha=4;\ \omega=1.$

$y_0=c_1e^{4x}\cos x+c_2e^{4x}\operatorname{sen}x$

Per y_p: 1° caso: $\omega=0$. $y_p=ax+b;\ y_p'=a;\ y_p''=0.$

$0-8a+17ax+17b=34x+1;$ $\begin{cases} 17a=34 \Rightarrow a=2 \\ -8a+17b=1 \Rightarrow b=1 \end{cases}$ $y_p=2x+1$

$y=c_1e^{4x}\cos x+c_2e^{4x}\operatorname{sen}x+2x+1;\ y'=c_1e^{4x}(4\cos x-\operatorname{sen}x)+c_2e^{4x}(4\operatorname{sen}x+\cos x)+2$

$\begin{cases} 0=c_1+1 \Rightarrow c_1=-1 \\ 0=-1\cdot 4+c_2+2 \Rightarrow c_2=2 \end{cases}$ $\Rightarrow y=-e^{4x}\cos x+2e^{4x}\operatorname{sen}x+2x+1$

3] $\begin{cases} y''-5y'-6y=16e^{-2x} \\ y(0)=2;\ y'(0)=3 \end{cases}$ $\lambda^2-5\lambda-6=0;\ \lambda_{1,2}=+6,-1;\ y_0=c_1e^{-x}+c_2e^{6x}$

Per y_p: $\alpha'=-2;\ y_p=a\cdot e^{-2x};\ y_p'=-2ae^{-2x}$

$y_p''=4ae^{-2x} \Rightarrow 4a+10a-6a=16;\ 8a=16;\ a=2;\ y_p=2e^{-2x}$

$y=c_1e^{-x}+c_2e^{6x}+2e^{-2x};\ y'=-c_1e^{-x}+6c_2e^{6x}-4e^{-2x}$

$\begin{cases} \cancel{2}=c_1+c_2+\cancel{2} \\ 3=-c_1+6c_2-4 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1=-c_2 \\ 3=7c_2-4 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=1 \end{cases}$ $y=-e^{-x}+e^{6x}+2e^{-2x}$ [2]

Quesito: Quale delle seg. affermazioni è vera per la 2] ? a] $\lim_{x\to-\infty} y$ $\lim_{x\to+\infty} y$

b] y è illimitata sia superiormente che inferiormente

c] $\exists x$ tale che $y(x)<0$ d] $y=f(x)$ ammette zeri

e] Nessuna delle precedenti.

La a] $\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{y\to\cancel{100}}=+\infty$ (Per $-\infty$: $-e^{+\infty}+0+2e^{2\infty}=+\infty$

Per la c] $y=\frac{1}{e^{2x}}(-e^{x}+e^{4x}+2)>0$ Inoltre: se fosse vera la c] lo sarebbe anche la d] 3

7) $\begin{cases} y''+2y'=x \\ y(0)=4;\ y'(1)=2 \end{cases}$ $\lambda_{1,2}=0,-2;\ y_0=c_1+c_2e^{-2x};\ g(x)=x \Rightarrow \alpha'=0,\ m=1$

$y_p=x(ax+b)=ax^2+bx;\ y'_p=2ax+b;\ y''_p=2a \Rightarrow$

$2a+4ax+2b=x \Rightarrow 4a=1;\ a+b=0 \Rightarrow a=\frac{1}{4};\ b=-\frac{1}{4};\ y_p=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x$

$y=c_1+c_2e^{-2x}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x;\ y'=-2c_2e^{-2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4};\ \begin{cases} 4=c_1+c_2 \\ 2=-2c_2e^{-2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \end{cases}$

$\frac{7}{4}=-2c_2e^{-2} \Rightarrow c_2=-\frac{7}{8}e^2;\ c_1=4-\frac{7}{8}e^2;\ y=4-\frac{7}{8}e^2-\frac{7}{8}e^{2-2x}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x$

Variante della 7) $y''+2y'=x;\ y'=z \Rightarrow y''=z'$

$z'=-2z+x;\ a(x)=2;\ A(x)=-2x;\ z=e^{-2x}\int xe^{2x}dx=$

$\left[\begin{matrix} f(x)=x & g'(x)=e^{2x} \\ f'(x)=1 & g(x)=+\frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right]$ $z=e^{-2x}\left[+\frac{1}{2}xe^{2x}-\int+\frac{1}{2}e^{2x}dx\right]=$

$=e^{-2x}\left[\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x})+c_1\right]=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+c_1e^{-2x}$

$y=\int z\,dx=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+c_1e^{-2x}+c_2$

8) $\begin{cases} y''-2y'+y=2xe^x \\ y(0)=1;\ y'(0)=2 \end{cases}$ $;\lambda^2-2\lambda+1=0;\ \lambda_{1,2}=1;\ y_0=e^x(c_1+c_2x)$

$\alpha=1=\lambda_{1,2} \Rightarrow m=2;\ y_p=x^2(ax+b)e^x=(ax^3+bx^2)e^x$

$y'_p=e^x(3ax^2+2bx+ax^3+bx^2)=e^x[ax^3+(3a+b)x^2+2bx]$

$y''_p=e^x[ax^3+(3a+b)x^2+2bx+3ax^2+(6a+2b)x+2b]=e^x[ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b)x+2b$

$\Rightarrow e^x[\cancel{ax^3}+\cancel{(6a+b)x^2}+(6a+4b)x+2b-\cancel{2ax^3}+\cancel{(-6a-2b)x^2}-4bx+\cancel{ax^3}+\cancel{bx^2}]=2xe^x$

$\cancel{e^x}(6ax+2b)=2x\cancel{e^x};\ a=\frac{1}{3},\ b=0;\ y_p=\frac{1}{3}x^3e^x;\ y=e^x\left(c_1+c_2x+\frac{x^3}{3}\right)$

$y'=e^x\left(c_1+c_2x+\frac{x^3}{3}+c_2+x^2\right)$

$\begin{cases} 1=c_1 \\ 2=c_1+c_2 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1=1 \\ c_2=1 \end{cases}$ $y=e^x(1+x+\frac{1}{3}x^3)$

9) $\begin{cases} y''-10y'+24y=24x^2+52x+20 \\ y(0)=4\quad y'(0)=0 \end{cases}$ $\lambda^2-10\lambda+24=0.$

$\lambda_{1,2}=4,6\quad y_0=c_1e^{4x}+c_2e^{6x}$

$y_p=ax^2+bx+c;\ y'=2ax+b;\ y''=2a \Rightarrow$

$2a-10(2ax+b)+24(ax^2+bx+c)=24x^2+52x+20$

$24ax^2+(-20a+24b)x+2a-10b+24c=24x^2+52x+20$

$\begin{cases} 24a=24 \Rightarrow a=1 \\ -20a+24b=52 \Rightarrow 24b=72 \Rightarrow b=3 \\ 2a-10b+24c=20 \Rightarrow 24c=48 \Rightarrow c=2 \end{cases}$ $\begin{array}{|l} y_p=x^2+3x+2 \\ y=c_1e^{4x}+c_2e^{6x}+x^2+3x+2 \end{array}$

$y'=4c_1e^{4x}+6c_2e^{6x}+2x+3$

$y'(0)=0$
$y(0)=4$ $\begin{cases} 0=4c_1+6c_2+3 \\ \cancel{4}\,2=c_1+c_2+\cancel{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=4c_1+6c_2+3; \\ -8=-4c_1-4c_2 \end{cases}$

$-8=2c_2+3 \Rightarrow c_2=-\frac{11}{2}$

$y=\ e^{4x}-\frac{11}{2}e^{6x}+x^2+3x+2.$ $2=c_1-\frac{11}{2} \Rightarrow c_1=\frac{15}{2}$

13) Risolvere la seguente ED e dire se nel caso $c_1 = -c_2$, la y cambia di segno in 0.

$y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$; $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, 1$; $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

$y_p = x \cdot Q(0) e^{-2x} = \alpha x e^{-2x}$; $y_p' = \alpha e^{-2x}(1-2x)$; $y_p'' = -2\alpha e^{-2x}(1-2x-1)$

$\Rightarrow \alpha \cancel{e^{-2x}}(\cancel{4x}+1-\cancel{2x}-\cancel{2x}) = 3\cancel{e^{-2x}}$ $\alpha = 3$; $y_p = 3xe^{-2x}$.

$\underline{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + 3xe^{-2x}} = e^{-2x}(c_1 + 3x) + c_2 e^{x}$

$\lim_{x \to 0^-} y = c_1 + 0^- + c_2 = 0^-$; $\lim_{x \to 0^+} y = 0^+$, nell'Hp fatta y cambia di segno in $O(0,0)$.

14) Risolvere la seg. ED e dire qual è l'O_{∞}mo di y per $x \to 0$ se c_1 (termine noto di y_0) vale 0 e se $c_2 = 1/2$.

$y'' - y' = \cos x$; $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, 1$; $y_0 = c_1 + c_2 e^{x}$

$y_p = e^0(\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \operatorname{sen} x)$; $y_p' = -\alpha_1 \operatorname{sen} x + \alpha_2 \cos x$; $y_p'' = -\alpha_1 \cos x - \alpha_2 \operatorname{sen} x$

$-\alpha_1 \cos x - \alpha_2 \operatorname{sen} x + \alpha_1 \operatorname{sen} x - \alpha_2 \cos x = \cos x$; $(-\alpha_1 - \alpha_2)\cos x + (\alpha_1 - \alpha_2)\operatorname{sen} x = \cos x$

$\begin{cases} -\alpha_2 - \alpha_1 = 1 \\ -\alpha_2 + \alpha_1 = 0 \end{cases}$ $\quad y_p = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x$

$-2\alpha_2 = 1$; $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$; $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$; $\quad y = c_1 + c_2 e^{x} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x \Rightarrow$ per $x \to 0$

nelle Hp fatte: $y = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) +$
$- \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{4} + \cancel{\frac{x^3}{12}} - \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

15) Risolvere la seguente ED e dire se le soluzioni ammettono limite per $x \to \infty$.

$y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x$; $\lambda^2 + 4 = 0$; $\lambda = \pm 2i$; $\alpha = 0$, $\omega = 2$; $y_0 = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$

$v = \alpha = 0$; $\vartheta = \omega = 2$; $y_p = xe^{0x}[a\cos 2x + b \operatorname{sen} 2x]$; $y_p = \boxed{x}[a\cos 2x + b\operatorname{sen} 2x]$

$y_p' = a\cos 2x + b \operatorname{sen} 2x + x[-2a \operatorname{sen} 2x + 2b\cos 2x] = \operatorname{sen} 2x(-2ax + b) + \cos 2x(2bx + a)$

$y_p'' = 2\cos 2x(-2ax + b) + \operatorname{sen} 2x(-2a) - 2\operatorname{sen} 2x(2bx + a) + \cos 2x(2b) =$
$= \cos 2x(-4ax + 4b) + \operatorname{sen} 2x(-4bx - 4a)$; sostituisco:

$\cos 2x(-4ax + 4b) + \operatorname{sen} 2x(-4bx - 4a) + 4ax\cos 2x + 4bx \operatorname{sen} 2x =$
$\cos 2x(\cancel{-4ax} + 4b + \cancel{4ax}) + \operatorname{sen} 2x(\cancel{-4bx} - 4a + \cancel{4bx}) = \operatorname{sen} 2x$;

$4b = 0 \Rightarrow b = 0$; $-4a = 1 \Rightarrow a = -1/4$; $y_p = x(-\frac{1}{4}\cos 2x) = -\frac{x}{4}\cos 2x$

$y = y_0 + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{x}{4}\cos 2x = \cos 2x\left(c_1 - \frac{1}{4}x\right) + c_2 \operatorname{sen} 2x$

Non esiste lim. per $x \to \infty$.

19) Metodo alternativo per la 18):
$t' = -t + \cos x \operatorname{sen} x$; $A(x) = \int -1\,dx = x$
$t = e^{x} \int (\cos x + \operatorname{sen} x) e^{-x} dx$
Occorre spezzare l'$\int$ in due $\int$ e calcolare ciascuno di essi applicando per 2 volte il metodo per parti con trasporto a sinistra di $-\int$. $\Rightarrow$ È più conveniente il metodo classico di soluzione di un'ED non omogenea applicato a pag. precedente.

20) Data $y'' + (\alpha+2)y' + 2\alpha y = 0$, determinare le costanti di integrazione in modo che $\lim_{x\to+\infty} y_0 = 0$.
$\lambda^2 + (\alpha+2)\lambda + 2\alpha = 0$; con somma e prodotto: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = -\alpha$
Se $\alpha = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; $y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$
$\lim_{x\to+\infty} y_0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{c_1 + c_2 x}{e^{2x}} = 0$; Vi sono altri valori di α?
Se $\alpha \neq 2$: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\alpha x}$ $\boxed{1}$ Se $\alpha = 0$; $y = c_1 e^{-2x} + c_2$
$\lim_{x\to\infty} y_0 = c_2$; Se $\alpha \neq 2$ ma > 0 : $\lim_{x\to+\infty} y_0 = 0$
Se $\alpha < 0$ $\lim_{x\to+\infty} y_0 = 0 + c_2 \cdot (+\infty) = \pm\infty$. Conclusione: la richiesta è soddisfatta per $\forall \alpha > 0$

21) $x'' + 6x' + 8x = 3e^{-2t}$ $(x = f(t))$ $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$ $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$.
$x_0 = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-2t}$; $\lambda_2 = u$, $m = 1$ $P(t) = 3$; $Q(t) = a$.
$x_p = a t e^{-2t}$ $x_p' = a e^{-2t} - 2ate^{-2t} = ae^{-2t}(1-2t)$
$x_p'' = -2ae^{-2t}(1-2t) + ae^{-2t}(-2) = -2ae^{-2t}(\cancel{1-2t+1})$ $2-2t$
$ae^{-2t}(-4 + \cancel{4t} + 6 - \cancel{12t} + \cancel{8t}) = ae^{-2t}(2) = 2ae^{-2t} = 3e^{-2t}$
$2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ $x_p = \frac{3}{2} t e^{-2t}$
$\boxed{1}$ $x = c_1 e^{-4t} + e^{-2t}(c_2 + \frac{3}{2}t)$ Verificare se esistono soluz. limitate su $(0, +\infty)$

Non ci sono AV, $x(t)$ è continua in $[0, +\infty) \Rightarrow x(t)$ può essere illimitata solo per $t \to +\infty$. $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \Rightarrow$ $x(t)$ è limitata in $(0, +\infty)$ per $\forall c_1, c_2 \in R$.

25) $y'' - 2y' = 3\,\text{sen}\,3x + 2\cos 3x$; $\lambda_{1,2} = 0, 2$. $y_0 = c_1 + c_2 e^{2x}$

$y_p = A\,\text{sen}\,3x + B\cos 3x$;

$y'_p = 3A\cos - 3B\,\text{sen}$; $y''_p = -9A\,\text{sen}\,3x - 9B\cos 3x$

$-9A\,\text{sen} - 9B\cos - 6A\cos + 6B\,\text{sen} = 3\,\text{sen} + 2\cos$

$(-9A + 6B)\,\text{sen}\,3x + (-9B - 6A)\cos 3x = 3\,\text{sen}\,3x + 2\cos 3x$

$$\begin{cases} -9A + 6B = 3 & \cdot 2 \\ -6A - 9B = 2 & \cdot(-3) \end{cases} \quad \begin{cases} -18A + 12B = 6 \\ 18A + 27B = -6 \end{cases} \quad -6A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

$$// \quad 39B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$y_p = -\frac{1}{3}\,\text{sen}\,3x$

$y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}\,\text{sen}\,3x$

26) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{2x}$ **[1]** $\begin{cases} \lambda_{1,2} = +1, +3 \\ y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} \end{cases}$

$y_p = (ax+b)e^{2x}$; $y'_p = e^{2x}(2ax + 2b + a)$

$y''_p = e^{2x}(4ax + 4b + 2a + 2a) = e^{2x}(4ax + 4b + 4a)$

Sostituisco nella **[1]** eliminando e^{2x}:

$4ax + 4b + \cancel{4a} - 8ax - 8b - \cancel{4a} + 6ax + 6b + 3a = 2x + 1$

$2ax + 2b + 3a = 2x + 1$

$$\begin{cases} -2a = 2 \Rightarrow a = -1 \\ 2b + 3a = 1 \Rightarrow 2b - 3 = 1 \Rightarrow 2b = 4;\ b = 2 \end{cases}$$

$y_p = (-x+2)e^{2x}$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + (2-x)e^{2x}$

27) $y'' - 4y' = 2xe^{4x}$ **[2]** $\lambda_{1,2} = 4, 0$; $\upsilon = 4$, $\vartheta = 0 \Rightarrow m = 1$

$y_0 = c_1 + c_2 e^{4x}$; $y_p = x(ax+b)e^{4x} = (ax^2 + bx)e^{4x}$

$y'_p = e^{4x}(4ax^2 + 4bx + 2ax + b) = e^{4x}[4ax^2 + (4b+2a)x + b]$

$y''_p = e^{4x}[16ax^2 + (16b+8a)x + 4b + 8ax + 4b + 2a] =$

$= e^{4x}[16ax^2 + (16b + 16a)x + 8b + 2a] \Rightarrow$ sostituisco $\begin{cases} \text{nella} \\ [2] \end{cases}$

$\cancel{16ax^2} + (\cancel{16b} + 16a)x + 8b + 2a - \cancel{16ax^2} + (-\cancel{16b} - 8a)x - 4b = 2x$

$8ax + 4b + 2a = 2x$; $8a = 2$; $a = \frac{1}{4}$; $4b + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}2} = 0$; $b = -\frac{1}{8}$

$y_p = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\right)e^{4x}$

$y = c_1 + c_2 e^{4x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\right)e^{4x}$ 11