



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 781

DATA: 04/12/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Rossi A.

MATERIA: Elettromagnetismo Applicato

Prof. Tartaglia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

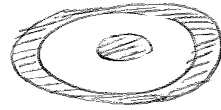
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

ELETTROMAGNETISMO

L'insieme di conduttori de uniscous e n-poli
 nel caso più semplice e' chiamato linea.

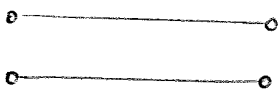
Il problema della linea bifilare viene analizzato
 come un problema unidimensionale, dipendente
 soltanto da una sola variabile geometrica.

Abbiamo visto diverse rapp. di linea:



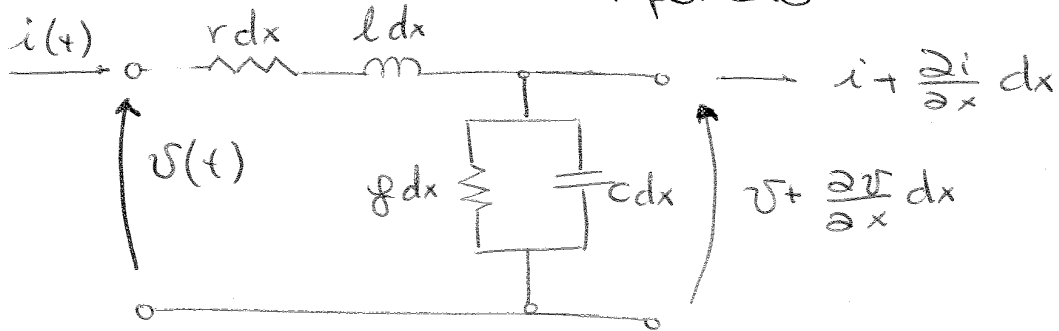
Di una linea dobbiamo rappresentar con il
 modello le sue caratteristiche.

Un esempio basilare può essere:



oppure una linea con una resistenza.

Considerando un tratto infinitesimo di linea
 posso rappresentarlo come riportato



i parametri ϵ , r , g e c sono per unità di
 lunghezza.

Applico Kirchhoff:

Tensioni

$$V(t) - V(t) - \frac{\partial V(t)}{\partial x} dx = r dx \cdot i + l dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

Correnti

$$i(t) - (i(t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx) = g dx \cdot (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) + c dx \frac{\partial}{\partial t} (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx)$$
- >0 infinitesimo nel caso <- >0 ①

stesse considerazioni valgono per le correnti

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = r g i + (rc + lg) \frac{\partial i}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

le equazioni si semplificano nel caso stazionario dove abbiamo solo i termini r e g

Analizziamo alcuni casi particolare:

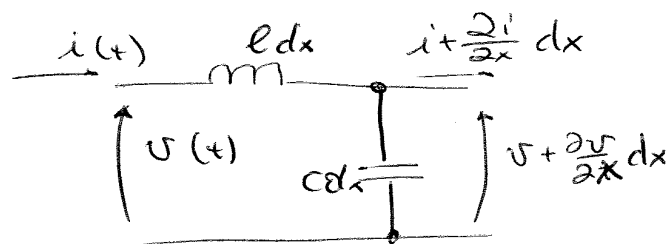
- TRANSITORIO :
 - linee senza perdite
 - linee distorcute
 - " caso generale
- PERIODICO :
 - " regime sinusoidale

CASO 1 : LINEE SENZA PERDITE

pongo $r = g = 0$

le equazioni diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$



una possibile soluzione della prima equazione può avere la forma

$$v(x, t) = F(x - at) \quad \text{dove } F \text{ è una}$$

funzione qualsiasi purché derivabile almeno due volte pertanto avrò:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = F'(x - at) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F''(x - at) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -a F'(x - at) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 F''(x - at) \end{cases}$$

però scrivendo la formula $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ con le precedenti forme ricavo

$$F''(x - at) = lc a^2 F''(x - at)$$

(2)

$$F(x-ct) = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{c}} g(x-ct) + cost$$

quando $cost = 0$

ricordo che F e G sono proporzionali

$$Z_{00} = \sqrt{\frac{\epsilon}{c}} \quad \text{impedenza caratteristica}$$

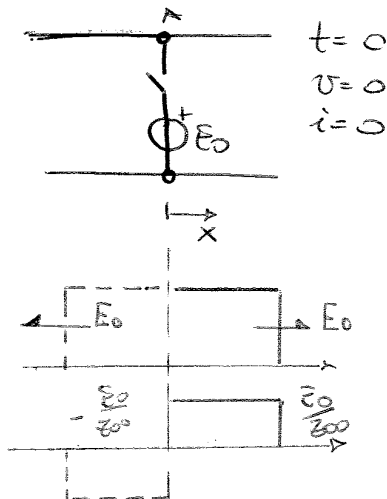
In generale avremo $v = \pm Z_{00} i$

$$\begin{cases} v^+ = Z_{00} i^+ & \text{definizione con;} \\ v^- = -Z_{00} i^- & \text{proporzionalità proporzionale} \\ & \text{proporzionalità reciproca} \end{cases}$$

Per risolvere il problema oltre che conoscere lo stato iniziale devo conoscere le condizioni al contorno.

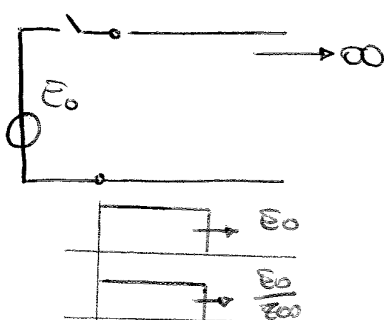
Pertanto se la linea è di lunghezza finita devo sapere presto quale e come c'è a fine a linea.

Linee senza perdite, limitate nei due sensi



Quando si chiude l'interruttore del morsetto parte un onda di tensione del valore E_0 e si propaga in direzione $\pm x$ all'infinito

Linee infinite in una direzione



Può essere un esempio (simulazione) del caso di una fulmineazione della linea.

Con la chiusura dell'interruttore parte un'onda di tensione E_0

$$\begin{cases} \beta^2 = r g \\ +2\beta = -(rc + lg) \alpha \\ 1 = l c \alpha^2 \end{cases}$$

dalla Terza ricaviamo $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{lc}}$

dalla prima ricaviamo $\beta = +\sqrt{rg}$ (necessariamente con il più)

dalle sostituzioni delle 1^a e 3^a nella seconda Troviamo

$$4rg = (rc + lg)^2 \alpha^2 \Rightarrow 4rg = (rc + lg)^2 \cdot \frac{1}{lc}$$

$$4rclg = r^2c^2 + l^2g^2 + 2rc lg$$

ossia $r^2c^2 + l^2g^2 - 2rc lg = 0$

$$\hookrightarrow (rc - lg)^2 = 0 \text{ condizione di Heaviside}$$

per tanto deve valere la

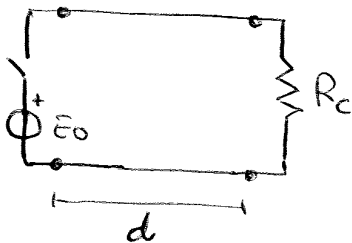
condizione $rc = lg \Rightarrow$ se si verifica la linea è non distorta

$\beta =$ costante di attenuazione.

Si può fare il medesimo ragionamento sulla corrente.

CASI APPLICAZIONE 1

Si consideri una linea di lunghezza d e si esprima una condizione iniziale omogenea $t=0 \begin{cases} i=0 \\ v=0 \end{cases} \forall x$



Nell'istante $t=0$ si chiude l'interruttore e il carico e il generatore richiedono l'applicazione delle equazioni dei bipoli

connessi alle estremità delle linee (cond. continue)

Trovo de a inizio linea

$$v = E_0$$

$$i = \frac{E_0}{Z_{00}}$$

valori le separate notazione

$$v_1^+ = E_0$$

$$i_1^+ = \frac{E_0}{Z_{00}}$$

(4)

dalla prima ricavo

$$i_2^- = \frac{E_0 - \frac{R_c}{Z_{00}} E_0}{R_c + Z_{00}} = \frac{E_0}{Z_{00}} \cdot \left(\frac{Z_{00} - R_c}{Z_{00} + R_c} \right)$$

dalla seconda

$$V_2^- = V_1 + \left(\frac{R_c - Z_{00}}{R_c + Z_{00}} \right) V_1$$

coefficiente di riflessione e pada linee

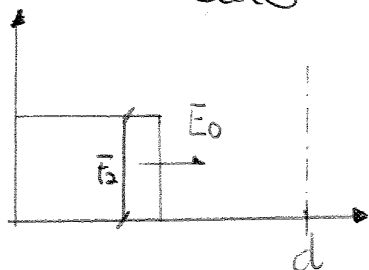
L'onda riflessa raggiungerà l'inizio linea dove si avrà una nuova riflessione questa volta con un coefficiente

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_{00}}{R_g + Z_{00}}$$

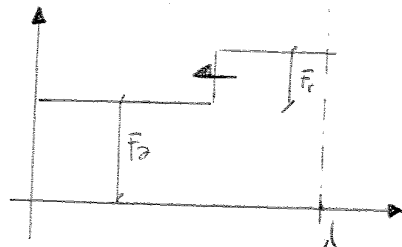
l'onda arrivata al generatore deve avere la tensione del generatore + TOT, il TOT sarà riflesso.

- se $R_c > Z_{00}$ $\Gamma_c = \frac{R_c - Z_{00}}{R_c + Z_{00}}$ $\Gamma_c < 1$ $V_2^- < V_1$
- se $R_c = Z_{00}$ $\Gamma_c = 0$

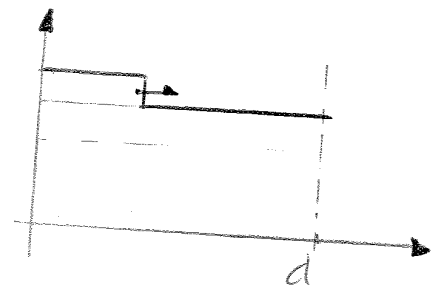
andamento della onde.



$\Gamma_c =$ fronte andata

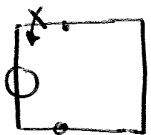


$\Gamma_r =$ fronte ritorno



APPLICAZIONE 2

linea in corto



il fattore di riflessione $\Gamma_c = -1$

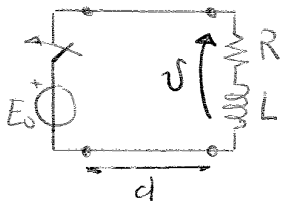
portanto gli andamenti saranno

per la tensione un aumento tra

E_0 e \emptyset mentre la corrente

è qui riflessa e cambia segno

LINEA SU CARICO INDUTTIVO



Considero generatore ideale

parto dalla condizione iniziale

$$0 \rightarrow \frac{d}{a} \quad 0 \rightarrow t_1$$

$$v_1^+ = E_0 \quad i_1^+ = \frac{E_0}{Z_{00}}$$

al carico $eo \quad v = Ri + L \frac{di}{dt}$

$$\frac{d}{a} \rightarrow 2 \frac{d}{a} \quad t_1 \rightarrow 2 t_1$$

$$v = v_1^+ + v_2^-$$

$$i = i_1^+ + i_2^-$$

sostituisco i valori nell'equazione

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2^- = \\ -Z_{00} i_2^- \end{array} \right.$$

$$E_0 + v_2^- = L \frac{d}{dt} \left(\frac{E_0}{Z_{00}} + i_2^- \right) + R \left(\frac{E_0}{Z_{00}} + i_2^- \right)$$

$$E_0 - Z_{00} i_2^- = L \frac{di_2^-}{dt} + \frac{R E_0}{Z_{00}} + R i_2^-$$

$$E_0 - Z_{00} i_2^- = L \frac{di_2^-}{dt} + \frac{R}{Z_{00}} E_0 + R i_2^- \quad \text{scrisso eq. differenziale}$$

$$L \frac{di_2^-}{dt} + (R + Z_{00}) i_2^- + E_0 \left(\frac{R}{Z_{00}} - 1 \right) = 0$$

la soluzione sarà:

$$i_2^- = i_2^-(0mo) + i_2^-(par)$$

$$* \quad i_2^-(0mo)$$

$$A = \frac{-\varepsilon_0 (z_{00} + R) - \varepsilon_0 (z_{00} - R)}{z_{00} (z_{00} + R)} = - \frac{2 \varepsilon_0}{z_{00} + R}$$

così da:

$$i_2^- = \frac{\varepsilon_0}{z_{00}} \frac{z_{00} - R}{z_{00} + R} - \frac{2 \varepsilon_0}{z_{00} + R} e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

e ottego $i(t)$

$$i = i_1^+ + i_2^- = \frac{\varepsilon_0}{z_{00}} + \frac{\varepsilon_0}{z_{00}} \frac{z_{00} - R}{z_{00} + R} - \frac{2 \varepsilon_0}{z_{00} + R} e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

$$\boxed{i} = \frac{2 \varepsilon_0 z_{00}}{z_{00} (z_{00} + R)} - \frac{2 \varepsilon_0}{z_{00} + R} e^{-\frac{t'}{\tau}} = \boxed{\frac{2 \varepsilon_0}{R + z_{00}} (1 - e^{-\frac{t'}{\tau}})}$$

$$V = v_1^+ + v_2^- = \varepsilon_0 - z_{00} i_2^-$$

sostituisco i_2^-

$$V = \varepsilon_0 - z_{00} \cdot \frac{\varepsilon_0 (z_{00} - R)}{z_{00} (z_{00} + R)} + \frac{z_{00} 2 \varepsilon_0}{z_{00} + R} e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

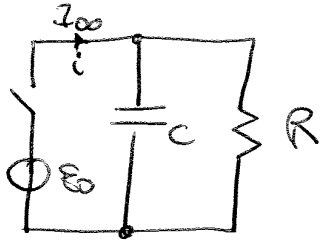
$$= \frac{\varepsilon_0 z_{00} + \varepsilon_0 R - \varepsilon_0 z_{00} + \varepsilon_0 R}{z_{00} + R} + \frac{z_{00} 2 \varepsilon_0}{z_{00} + R} e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

$$= \frac{2 \varepsilon_0 R}{z_{00} + R} + \frac{2 \varepsilon_0 z_{00}}{z_{00} + R} e^{-\frac{t'}{\tau}} = \frac{2 \varepsilon_0}{z_{00} + R} (R + z_{00} e^{-\frac{t'}{\tau}})$$

$$\boxed{V} = \boxed{\frac{2 \varepsilon_0 R}{z_{00} + R} \left(1 + \frac{z_{00}}{R} e^{-\frac{t'}{\tau}} \right)}$$

Partono due onde dal generatore una di tensione e una di corrente

CIRCUITO SU CARICO CAPACITIVO



$$v_1^+ = \mathcal{E}_0$$

$$i_1^+ = \frac{\mathcal{E}_0}{Z_0}$$

$$\begin{cases} v = v_1^+ + v_2^- \\ i = i_1^+ + i_2^- \end{cases}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{Z_0} + i_2^- = C \frac{d}{dt} (v_1^+ + v_2^-) + \frac{v_1^+ + v_2^-}{R}$$

$$\frac{\mathcal{E}_0}{Z_0} - \frac{v_2^-}{Z_0} = C \frac{d}{dt} v_2^- + \frac{\mathcal{E}_0}{R} + \frac{v_2^-}{R}$$

$$C \frac{d v_2^-}{dt} + v_2^- \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_0} \right) + \mathcal{E}_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{Z_0} \right) = 0$$

la soluzione è:

$$v_2^- = \text{omo} + \text{part}$$

* omogenea associata

$$C \frac{d v_2^-}{dt} + v_2^- \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_0} \right) = 0$$

$$\frac{d v_2^-}{v_2^-} = - \frac{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_0} \right)}{C} dt \Rightarrow v_2^- = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

* integrale particolare

$$\frac{d}{dt} \rightarrow 0$$

$$v_2^- \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_0} \right) = - \mathcal{E}_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{Z_0} \right)$$

$$v_2^- = \mathcal{E}_0 \frac{R - Z_0}{R + Z_0}$$

$$v_2^- = \mathcal{E}_0 \frac{R - Z_0}{R + Z_0} + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

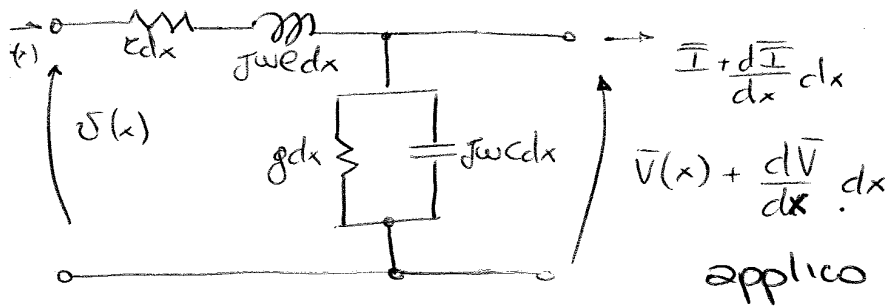
impongo le condizioni iniziali:

$$v = v_1^+ + v_2^- (t=0) = 0$$

Fbis

LINCA A REGIME SINUSOIALE

Abbiamo detto del modello della linea e' il seguente con i parametri per unita' di lunghezza



$$-\frac{dV}{dx} = (r + j\omega l) \bar{I}$$

$$-\frac{d\bar{I}}{dx} = (g + j\omega c) \bar{V}$$

derivo nuovamente la prima

$$-\frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} = (r + j\omega l) \frac{d\bar{I}}{dx} \quad \text{sostituisco il valore } \frac{d\bar{I}}{dx}$$

$$-\cancel{\frac{d^2 \bar{V}}{dx^2}} = \cancel{-} (r + j\omega l) (g + j\omega c) \bar{V} \Rightarrow \frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} = \bar{\gamma}^2 \bar{V}$$

facco lo stesso caso con la corrente

$$-\frac{d^2 \bar{I}}{dx^2} = (g + j\omega c) \frac{d\bar{V}}{dx} \quad \text{sostituisco } \frac{d\bar{V}}{dx}$$

$$+\frac{d^2 \bar{I}}{dx^2} = + (g + j\omega c) (r + j\omega l) \bar{I} \Rightarrow \frac{d^2 \bar{I}}{dx^2} = \bar{\gamma}^2 \bar{I}$$

$\bar{\gamma}$ = costante di propogazione

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)} = \alpha + j\beta$$

$$\bar{\gamma}^2 = m + jn = (r + j\omega l)(g + j\omega c) = \underbrace{rg}_{m} + j\omega cr + j\omega lg + \underbrace{\omega^2 lc}_{n}$$

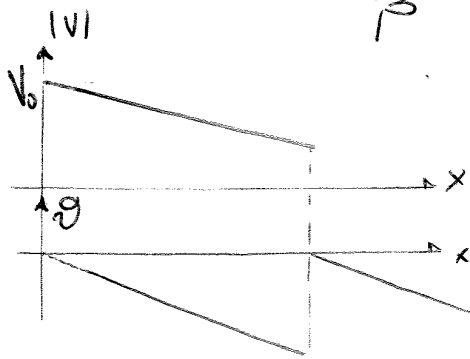
$$\Rightarrow \begin{cases} m = rg - \omega^2 lc \\ n = \omega cr + \omega lg \end{cases}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + m}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - m}{2}}$$

$\beta\lambda$ è una rotazione di fase $\beta\lambda = 2\pi$

ricavo $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ determinata lunghezza d'onda



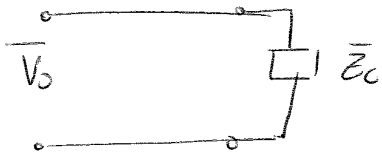
nel caso senza perdite
 $Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = -Z_{00} \frac{A+B}{A-B} = Z(x=0)$
 $Z_0 = Z_{00} \Rightarrow A=0$

$\gamma^2 = -\omega^2 LC \Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{LC}$ ossia $\alpha=0$

però essendo $\alpha = \frac{1}{\tau c}$ allora

$\gamma \approx \frac{2\pi f}{a} = \frac{2\pi}{\tau a}$

CASO PARTICOLARE 2 (Linea di lunghezza finita)



le espressioni sono

$\bar{V} = \bar{A} e^{\bar{\gamma}x} + \bar{B} e^{-\bar{\gamma}x}$
 $\bar{I} = -\frac{\bar{A}}{Z_{00}} e^{\bar{\gamma}x} + \frac{\bar{B}}{Z_{00}} e^{-\bar{\gamma}x}$

sfruttiamo le funzioni iperboliche

$$\begin{cases} e^{\bar{\gamma}x} = \text{ch } \bar{\gamma}x + \text{sh } \bar{\gamma}x \\ e^{-\bar{\gamma}x} = \text{ch } \bar{\gamma}x - \text{sh } \bar{\gamma}x \end{cases} \equiv \begin{cases} \text{ch } \bar{\gamma}x = \frac{e^{\bar{\gamma}x} + e^{-\bar{\gamma}x}}{2} \\ \text{sh } \bar{\gamma}x = \frac{e^{\bar{\gamma}x} - e^{-\bar{\gamma}x}}{2} \end{cases}$$

riscrivo le tensioni

$$\bar{V} = \bar{A} \text{ch } \bar{\gamma}x + \bar{A} \text{sh } \bar{\gamma}x + \bar{B} \text{ch } \bar{\gamma}x + \bar{B} \text{sh } \bar{\gamma}x$$

$$= \frac{(\bar{A} + \bar{B})}{P} \text{ch } \bar{\gamma}x + \frac{(\bar{A} - \bar{B})}{Q} \text{sh } \bar{\gamma}x$$

chiamo i termini $A+B=P$
 $A-B=Q$

impedenza ingresso linea $\frac{V_0}{I_0} = Z_0 = Z_{00} \frac{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_{00} \operatorname{sh} \gamma d}{Z_{00} \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}$

" usata/carica linea $\frac{V_d}{I_d} = Z_c$ verificato

$$\frac{Z_0}{Z_c} = \frac{Z_{00}}{Z_c} \frac{Z_c \cdot \operatorname{ch} \gamma d + Z_{00} \operatorname{sh} \gamma d}{Z_{00} \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}$$

→ CASI PARTICOLARI $Z_c = Z_{00} \Rightarrow Z_0 = Z_{00} = \cos T$

PARAMETRI SIGNIFICATIVI

quodoprio in tensione

$$\frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_0} = \frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i} = \frac{\cancel{1/0} \operatorname{ch} \gamma d - \cancel{1/0} \frac{Z_{00} \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_{00} \operatorname{sh} \gamma d} \operatorname{sh} \gamma d}{\cancel{1/0}}$$

$$= \frac{Z_c \operatorname{ch}^2 \gamma d + \cancel{Z_{00} \operatorname{ch} \gamma d \operatorname{sh} \gamma d} - \cancel{Z_{00} \operatorname{ch} \gamma d \operatorname{sh} \gamma d} - Z_c \operatorname{sh}^2 \gamma d}{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_{00} \operatorname{sh} \gamma d}$$

$$= \frac{Z_c (\operatorname{ch}^2 \gamma d - \operatorname{sh}^2 \gamma d)}{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_{00} \operatorname{sh} \gamma d} = \frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_c \operatorname{ch} \gamma d + \bar{Z}_{00} \operatorname{sh} \gamma d}$$

quodoprio in corrente

$$\frac{\bar{I}_u}{\bar{I}_0} = \frac{\bar{V}_u / \bar{Z}_c}{\bar{V}_0 / \bar{Z}_0} = \frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_0} \cdot \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_c} = \frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_c \operatorname{ch} \gamma d + \bar{Z}_{00} \operatorname{sh} \gamma d} \cdot \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_c}$$

$$= \frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_c \operatorname{ch} \gamma d + \bar{Z}_{00} \operatorname{sh} \gamma d} \cdot \frac{\bar{Z}_{00}}{\bar{Z}_c} \cdot \frac{\cancel{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_{00} \operatorname{sh} \gamma d}}{Z_{00} \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}$$

$$= \frac{\bar{Z}_{00}}{Z_{00} \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}$$

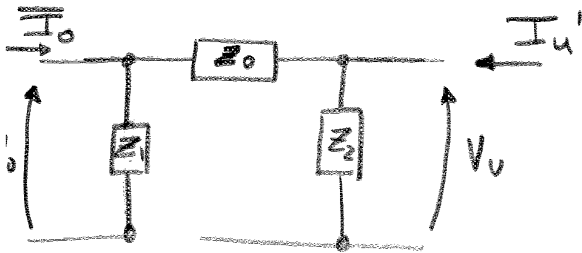
calcolo i parametri dove per simmetria $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$

$$\frac{\bar{I}_0}{V_u} \Big|_{\bar{I}'_u=0} = \frac{1}{\bar{z}_0} = \frac{1}{z_{00}} \operatorname{sh} \gamma d \Rightarrow z_0 = \frac{z_{00}}{\operatorname{sh} \gamma d}$$

$$\frac{V_0}{V_u} \Big|_{\bar{I}'_u=0} = \frac{z_1 + z_0}{z_0} = \operatorname{ch} \gamma d$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_0 &= z_0 \operatorname{ch} \gamma d \Rightarrow \bar{z}_1 = z_0 (\operatorname{ch} \gamma d - 1) \\ &= z_{00} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \gamma d - 1)}{\operatorname{sh} \gamma d} = z_{00} \frac{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma d}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{\gamma d}{2} \operatorname{ch} \frac{\gamma d}{2}} = z_{00} \operatorname{tgh} \frac{\gamma d}{2} \end{aligned}$$

la linea e π



risolviamo i parametri con un corto ai morsetti di uscita

$$\frac{\bar{I}'_u}{\bar{I}_0} \Big|_{V_u=0} = - \frac{z_1}{z_1 + z_0} = - \operatorname{ch} \gamma d$$

$$\frac{V_0}{\bar{I}'_u} \Big|_{V_u=0} = - z_0' = - z_{00} \operatorname{sh} \gamma d \rightarrow - \frac{z_{00}}{\operatorname{sh} \gamma d}$$

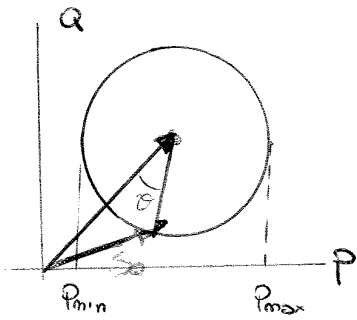
$$\begin{cases} z_0 = z_{00} \operatorname{sh} \gamma d \\ z_1 = z_2 = \frac{z_{00}}{\operatorname{tgh} \frac{\gamma d}{2}} \end{cases}$$

Tale da poter stabilire che

$$\bar{I}_u = \frac{V_0}{z_2} - \frac{V_u}{z_1} \quad e \quad \bar{I}_0 = \frac{V_0}{z_1} - \frac{V_u}{z_2}$$

$$\bar{z}_1 = z_{00} \operatorname{th} \gamma d$$

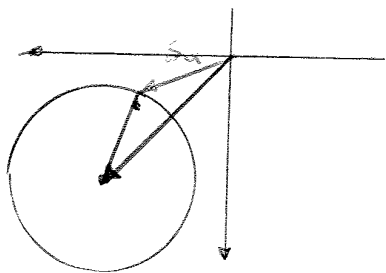
$$\bar{z}_2 = z_{00} \operatorname{sh} \gamma d$$



Il settore θ corrisponde al termine $\frac{|V_0|^2}{z_1^*}$ mentre il settore $\pi - \theta$ corrisponde al termine $-\frac{|V_0||V_u|}{z_2^*}$

al variare di θ il settore θ si sposta su di una circonferenza e so lo segue. Posso inoltre individuare una P_{max} e una P_{min}

grafico anche la S_u



dove z_1 è il termine $\frac{|V_u|^2}{z_1^*}$ e z_2 " " " " $\frac{|V_0||V_u|}{z_2^*}$

Troviamo ora la potenza messa in gioco nella linea

$$\begin{aligned} \bar{S}_e &= \bar{S}_0 - \bar{S}_u = \frac{|V_0|^2}{z_1^*} - \frac{|V_0||V_u|}{z_2^*} e^{j\theta} + \frac{|V_u|^2}{z_1^*} - \frac{|V_0||V_u|}{z_2^*} e^{-j\theta} = \\ &= \frac{|V_0|^2 + |V_u|^2}{z_1^*} - \frac{|V_0||V_u|}{z_2^*} (e^{-j\theta} + e^{j\theta}) \end{aligned}$$

ricordando $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos \theta$?

Scriviamo

$$\begin{cases} z_1 = R_1 + jX_1 \\ z_2 = R_2 + jX_2 \end{cases}$$

ricavo la potenza dissipata lungo linea

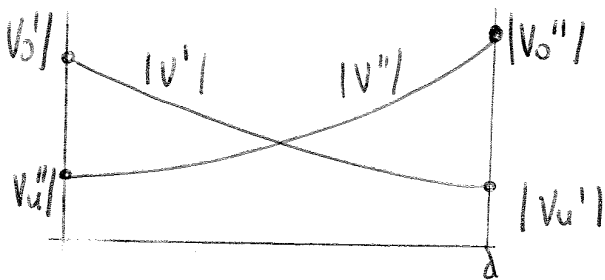
$$\begin{aligned} \text{Re}[\bar{S}_0 - \bar{S}_u] &= P = \text{Re}\left[\frac{|V_0|^2 + |V_u|^2}{z_1^*}\right] - \text{Re}\left[\frac{|V_0||V_u|}{z_2^*}\right] 2 \cos \theta \\ &= \text{Re}[\bar{S}_0] - \text{Re}[\bar{S}_u] = \frac{|V_0|^2}{|z_1^*|^2} R_1 - \frac{|V_0||V_0|}{|z_2^*|^2} e^{j\theta} R_2 + \frac{|V_u|^2}{|z_1^*|^2} R_1 - \frac{|V_u||V_0| e^{-j\theta}}{|z_2^*|^2} R_2 \\ &= \frac{|V_0|^2 + |V_u|^2}{|z_1^*|^2} R_1 - 2 \frac{|V_0||V_0|}{|z_2^*|^2} R_2 \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \frac{|V_0|^2 + |V_u|^2}{|z_1^*|^2} R_1 - 2 \frac{|V_0||V_0|}{|z_2^*|^2} R_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

Precedendo l'espressione

$$V = A e^{rx} + B e^{-rx} = B e^{-rx} + A e^{rd} \cdot e^{-rd} e^{rx} = B e^{-rx} + \frac{A e^{rd}}{A'} \cdot e^{-r(d-x)} = B e^{-rx} + A' e^{-r(d-x)}$$

↳ moltiplica $\circledast 1$

Si osserva che $B e^{-rx}$ è un'onda diretta partendo dal valore iniziale $V_0' = B$ e il termine $A' e^{-r(d-x)}$ è un'onda riflessa $V_0'' = A'$



Introduciamo una quantità detta rapporto di riflessione r (fattore di riflessione)

$$r = \frac{V_0''}{V_0'} = \frac{A e^{rd}}{B e^{-rd}}$$

abbiamo detto che $\bar{V} = P \operatorname{ch} \gamma x + Q \operatorname{sh} \gamma x$

dove $A = \frac{P+Q}{Z}$; $B = \frac{P-Q}{Z}$

$$\bar{V} = \frac{\left(\frac{P+Q}{Z}\right) e^{\gamma d}}{\left(\frac{P-Q}{Z}\right) e^{-\gamma d}} \Rightarrow \begin{cases} P = V_0 \\ Q = -V_0 \frac{Z_0 \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_0 \operatorname{sh} \gamma d} \end{cases}$$

$$\bar{V} = V_0 \cdot \frac{\left[1 - \frac{Z_0 \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_0 \operatorname{sh} \gamma d}\right]}{\left[1 + \frac{Z_0 \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_0 \operatorname{sh} \gamma d}\right]} \cdot e^{2\gamma d} =$$

$$= \frac{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_0 \operatorname{sh} \gamma d - Z_0 \operatorname{ch} \gamma d - Z_c \operatorname{sh} \gamma d}{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_0 \operatorname{sh} \gamma d + Z_0 \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d} \cdot e^{2\gamma d}$$

CARTA DI Smith

$$z = \frac{z_c - z_{00}}{z_c + z_{00}} = \frac{\frac{z_c}{z_{00}} - 1}{\frac{z_c}{z_{00}} + 1}$$

posto $y = \frac{z_c}{z_{00}} = x + jy$

$$z = z + jw$$

$$z = \frac{y - 1}{y + 1} = \frac{x + jy - 1}{x + jy + 1} = z + jw$$

opero

$$x + jy - 1 = zx + zjy + z + jwx - wy + jw$$

$$x - 1 = zx + z - wy$$

$$zy + wx + w = y$$

$$\begin{cases} zx + z - x + 1 = wy = \frac{w^2(1+x)}{1-z} \\ y(1-z) = w(1+x) \end{cases}$$

$$\rightarrow y = \frac{w(1+x)}{1-z}$$

dalla prima

$$\frac{zx + z - x + 1}{w} = y$$

uguagliando le due $\frac{zx + z - x + 1}{w} = \frac{w(1+x)}{1-z}$

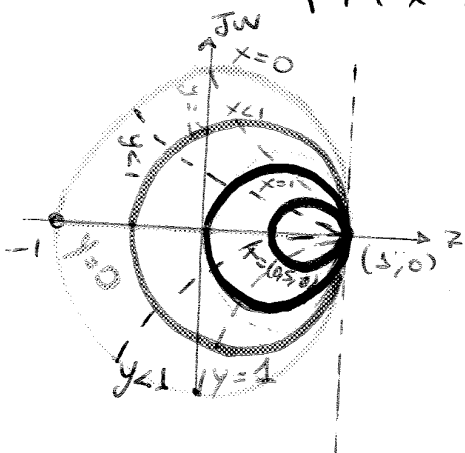
da cui

$$z^2 + w^2 - z \frac{x_0}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$$

Tale eq. rappresenta una circonferenza nel piano z, w . Il raggio e il centro sono:

$$C = \left(\frac{x}{1+x}, 0 \right) \quad R = \frac{1}{1+x}$$

(a $x = x_0$)
costanti



le circonferenze passano tutte per il punto $x = (1, 0)$

l'occhio è derivato rispetto ad r

$$\frac{d\bar{I}_0}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-rd}(1-r)}{1+re^{-2rd}} \right) = e^{-rd} \cdot \frac{-rd-1 - re^{-2rd} - e^{-2rd} + re^{-2rd}}{(1+re^{-2rd})^2} = 0$$

la condizione di rade nulla la derivata e'

$$-1 - e^{-2rd} = 0 \quad \text{essendo } r = \alpha + j\beta$$

$$e^{-2rd} = e^{-2\alpha d} e^{-2j\beta d} = 1 \cdot e^{-j(2n+1)\pi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \Rightarrow \text{linea senza perdite} \\ 2\beta d = (2n+1)\pi \end{array} \right.$$

dalla seconda scrivo $d = (2n+1) \frac{\pi}{2\beta}$

$$\Rightarrow \text{essendo } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$d = (2n+1) \frac{\pi}{2 \cdot 2\pi} \cdot \lambda = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$$

Si ottiene quindi il risultato di una linea
senza perdite e di lunghezza uguale a un
numero dispari di quarti di lunghezza d'onda
soddisfa le condizioni per cui, se si applica
una tensione $V_0 = \cos t$, si ottiene nel carico
una $I_c = \cos t$ oppure I_c .

un dispositivo che soddisfa tali condizioni
 è detto giroscopio ideale.

ricavo ora la funzione \bar{V} in funzione di \bar{V}_c

$$V = V_c \frac{e^{-jx} + r e^{-rd} e^{-r(d-x)}}{e^{-rd} (1+r)} = V_c \frac{e^{r(d-x)} + r e^{-r(d-x)}}{1+r} =$$

divide sopra e sotto e^{-rd}

$$= V_c \frac{e^{ry} + r e^{-ry}}{1+r} \quad \text{dove } y \text{ è pari a } y = d-x$$

essendo

$$r = \alpha + j\beta$$

$$V = V_c \left[\frac{e^{\alpha y} e^{j\beta y} + r e^{-\alpha y} e^{-j\beta y}}{1+r} \right] =$$

$$= \frac{V_c}{1+r} \left[e^{\alpha y} (\cos \beta y + j \sin \beta y) + r e^{-\alpha y} (\cos \beta y - j \sin \beta y) \right]$$

$$= \frac{V_c}{1+r} \left[\cos \beta y \left[\frac{e^{\alpha y} + r e^{-\alpha y}}{1+r} \right] + \sin \beta y \left[\frac{e^{\alpha y} - r e^{-\alpha y}}{1+r} \right] \right]$$

$$\bar{V} = V_c \left(a \cos \beta y + j b \sin \beta y \right)$$

poiché il valore di "a" deve essere costante rispetto alla variabile y si rende uguale a 0 b derivata di a rispetto a y e si ottiene

$$\frac{da}{dy} = \alpha e^{\alpha y} - r \alpha e^{-\alpha y} = 0 \Rightarrow \alpha (e^{\alpha y} - r e^{-\alpha y}) = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

unico valore

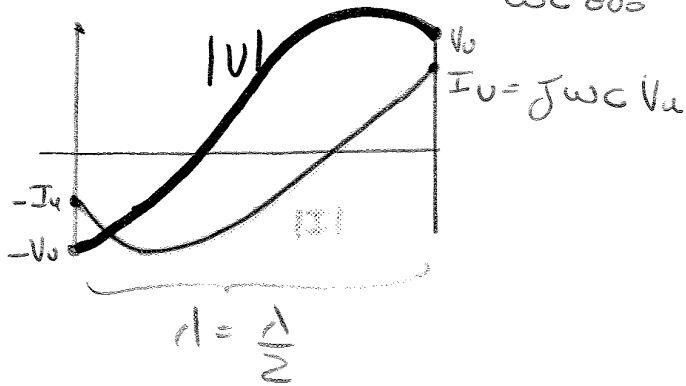
per tanto prendo $\alpha = 0$

$$\begin{cases} a = \frac{e^{0y} + r e^{-0y}}{1+r} = 1 \\ b = j \frac{e^{0y} - r e^{-0y}}{1+r} = j \frac{1-r}{1+r} = j \frac{z_{oc}}{z_c} \end{cases}$$

• conico ricattivo $Z_c = \frac{1}{j\omega c}$ ma su linea a $\frac{d}{2}$

$$V = V_u \cdot (\cos \beta y - \omega c Z_{00} \sin \beta y)$$

$$I = I_u \left(\cos \beta y + \frac{1}{\omega c Z_{00}} \sin \beta y \right)$$



Analisi comportamentale:

→ linea senza perdite e vuoto

$$\bar{Z}_{00} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$Z_0 = Z_{00} \frac{Z_c \operatorname{ch} \gamma d + Z_{00} \operatorname{sh} \gamma d}{Z_{00} \operatorname{ch} \gamma d + Z_c \operatorname{sh} \gamma d}$$

$$= Z_{00} \frac{Z_c + Z_{00} \frac{\operatorname{sh} \gamma d}{\operatorname{ch} \gamma d}}{Z_{00} + Z_c \frac{\operatorname{sh} \gamma d}{\operatorname{ch} \gamma d}}$$

se $\gamma = j\beta$ \rightarrow $\alpha = 0$ ($r = g = 0$)

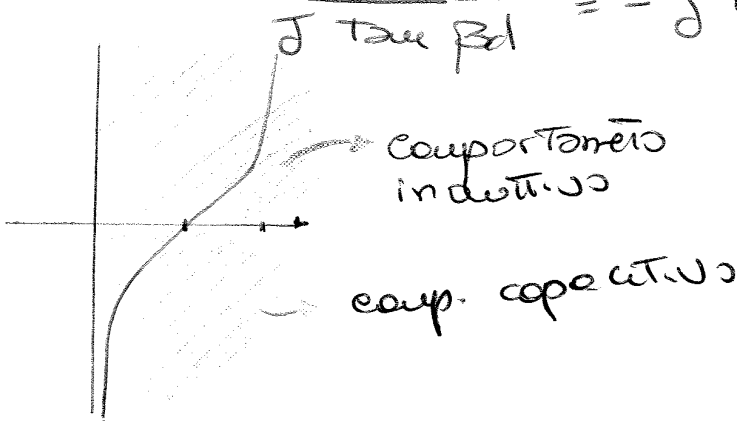
$$T_{gh}(j\beta d) = j T_g \beta d$$

per quanto

$$\bar{Z}_0 = \bar{Z}_{00} \frac{Z_c + j \bar{Z}_{00} \tan \beta d}{\bar{Z}_{00} + j Z_c \tan \beta d}$$

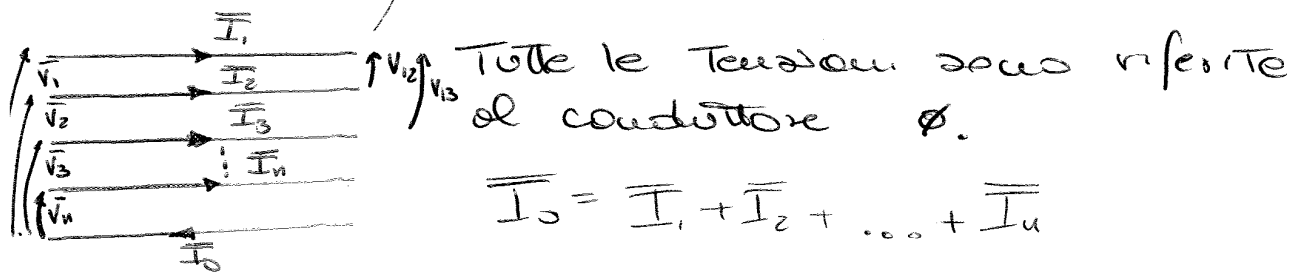
nel caso a vuoto ($Z_c = \infty$)

$$\bar{Z}_0 = \frac{\bar{Z}_{00}}{j \tan \beta d} = -j \bar{Z}_{00} \cot \beta d$$



Linee Multifilari

Se consideri la linea costituita da n conduttori sul piano, in un mezzo di permittività ϵ e permeabilità μ .



introducendo le matrici delle impedenze e delle ammettenze posso scrivere che

$$-\frac{d}{dx} [\bar{V}] = [\bar{Z}] [\bar{I}] \quad [\bar{Z}] = \begin{bmatrix} R_{11} + j\omega L_{11} & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$-\frac{d}{dx} [\bar{I}] = [\bar{Y}] [\bar{V}] \quad [\bar{Y}] = [\bar{G} + j\bar{B}]$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [\bar{V}] = \underbrace{[\bar{Z}][\bar{Y}]}_P [\bar{V}]$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [\bar{I}] = \underbrace{[\bar{Y}][\bar{Z}]}_{P_T} [\bar{I}]$$

analogo con linee bifase $\frac{d^2 V}{dx^2} = \gamma^2 V$
 $\frac{d^2 I}{dx^2} = \gamma^2 I$

I vettori di tensione e corrente sono espressi in funzione delle corrispondenti grandezze modali $[\bar{V}^0]$ ed $[\bar{I}^0]$ con le seguenti espressioni:

$$[\bar{V}] = [\bar{M}] [\bar{V}^0]$$

$$[\bar{I}] = [\bar{N}] [\bar{I}^0]$$

$n \times 1$ $n \times n$ $n \times 1$

in cui $[\bar{M}]$ ed $[\bar{N}]$ sono le matrici degli autovettori rispettivamente di $[\bar{P}]$ e di $[\bar{P}_T]$

$$[\bar{M}] \neq [\bar{N}]$$

SOSTITUISCO nell'espressione delle linee

$$[V] = [M] [\text{ch } \gamma^{\circ} x] [\Pi^{-1}] [V_0^{\circ}] - [M] [\text{sh } \gamma^{\circ} x] [Z_{00}^{\circ}] [N^{-1}] [I_0^{\circ}]$$

$$[I] = [N] [\text{sh } \gamma^{\circ} x] [\Pi^{-1}] [V_0^{\circ}] + [N] [\text{ch } \gamma^{\circ} x] [N^{-1}] [I_0^{\circ}]$$

$$[\text{cosh } \gamma^{\circ} x] = \begin{bmatrix} \text{ch } \gamma_1^{\circ} x & & \\ & \ddots & \\ & & \text{ch } \gamma_n^{\circ} x \end{bmatrix}$$

dove $[Z_{00}^{\circ}] = [M] [\gamma_0^{\circ}]^{-1} [\Pi^{-1}] [Z]$

in generale si vede la simmetria fisica dei conduttori.

Impongo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} -\frac{1}{z_0} \cdot (A e^{2\frac{\ell}{2}} + B e^{-2\frac{\ell}{2}}) = I_0 & x = \frac{\ell}{2} \\ -\frac{1}{z_0} \cdot (A e^{-2\frac{\ell}{2}} - B e^{2\frac{\ell}{2}}) = I_0 & x = -\frac{\ell}{2} \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro.

$$-\frac{1}{z_0} \cdot (A e^{2\frac{\ell}{2}} - A e^{-2\frac{\ell}{2}} - B e^{-2\frac{\ell}{2}} + B e^{2\frac{\ell}{2}}) = 0$$

$$A \cdot (e^{2\frac{\ell}{2}} - e^{-2\frac{\ell}{2}}) + B (e^{2\frac{\ell}{2}} - e^{-2\frac{\ell}{2}}) = 0.$$

$$A = -B$$

Andiamo a sostituire nella prima.

$$-\frac{1}{z_0} \cdot (A e^{2\frac{\ell}{2}} + A e^{-2\frac{\ell}{2}}) = I_0$$

$$2 \cdot -\frac{A}{z_0} \cdot \left(\frac{e^{2\frac{\ell}{2}} + e^{-2\frac{\ell}{2}}}{2} \right) = I_0$$

$$-\frac{2A}{z_0} \cdot \cosh\left(2\frac{\ell}{2}\right) = I_0$$

$$A = -\frac{I_0 \cdot z_0}{2 \cosh\left(2\frac{\ell}{2}\right)}$$

$$i(x) = z + \frac{I_0 \cdot z_0}{2 \cosh\left(2\frac{\ell}{2}\right)} \cdot \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \right)$$

$$i(x) = I_0 \cdot \frac{\cosh(x)}{\cosh\left(2\frac{\ell}{2}\right)}$$

coerente di flusso magnetico originale.

Forma differenziale o puntuale

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

→ legge di Ampere

mostra che un campo elettrico nel tempo può produrre (indurre) un campo magnetico.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

\vec{H} vettore intensità campo magnetico ($\frac{A}{m}$)

\vec{J} " " densità di corrente ($\frac{A}{m^2}$)

\vec{D} " " densità flusso elettrico ($\frac{C}{m^2}$)

→ Legge Gauss

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

ρ = densità volumica di carica libera

→ Conservazione della carica

Una corrente che lascia una superficie chiusa S comporta una riduzione delle quantità di carica in essa contenute.

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

parto da $\text{div } \vec{D} = \rho \Rightarrow \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\Rightarrow \text{div } \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

→ potenziali scalari e vettoriali

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} d\tau$$

$$\Rightarrow \text{rot } \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} d\tau$$

$$\textcircled{2} \text{ rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Abbiamo quindi trovato:

$$\begin{cases} \nabla^2 A - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu \mathbf{J} = 0 \\ \nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \end{cases}$$

ricavo:

$$\begin{cases} A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{r} dt \\ V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{r} dt \end{cases}$$

de rapp. & formule
dei potenziali
ritardati.

Il potenziale è legato alle sorgenti con un certo ritardo. Questo dipende da 2 elementi.

① la distanza dal punto di vista ad esempio



② Il tempo che ci mette la sorgente a creare una certa variazione in un punto dello spazio.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}}$$

Analisi campi in regime sinusoidale

Sostituiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Rightarrow -\omega^2$$

avro' le equazioni:

$$\begin{cases} -\nabla^2 \bar{V} - \omega^2 \mu \epsilon \bar{V} = \frac{\bar{\rho}_s}{\epsilon} \\ -\nabla^2 \bar{A} - \omega^2 \mu \epsilon \bar{A} = \mu \bar{\mathbf{J}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equazioni delle} \\ \text{onde} \end{array}$$

ricavo
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_s e^{-j\frac{r}{c}}}{r} \cdot d\tau$$

→

$$\text{rot rot } \vec{H} = 0 \quad j \omega \epsilon \vec{E}$$

$$\hookrightarrow \text{rot rot } \vec{H} = \text{rot} (j \omega \hat{\epsilon} \vec{E}) = j \omega \hat{\epsilon} \text{rot } \vec{E} = j \omega \hat{\epsilon} (-j \omega \mu) \vec{H}$$

$$\text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \omega^2 \mu \hat{\epsilon} \vec{H} = \gamma^2 \vec{H}$$

caso particolare di campo elettrico e magnetico con 1 sola componente

$$\vec{E} = E_x \vec{i} \quad \vec{H} = H_y \vec{j}$$

onda piana uniforme
con mezzi omogenei e
privi di sorgente

$$\rho = 0 \quad \text{div } \vec{D} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = -j \omega \mu \vec{H}}$$

calcolo

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \vec{i} + (-j \omega \mu H_y) \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{k} = -j \omega \mu H_y \vec{j}$$

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = +j \omega \mu H_y}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = j \omega \hat{\epsilon} \vec{E}}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = j \omega \hat{\epsilon} E_x \vec{i}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \vec{k} = j \omega \hat{\epsilon} E_x \vec{i}$$

$$\boxed{-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j \omega \hat{\epsilon} E_x}$$

↳ controllo il segno

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu^2 \epsilon^2$$

$$\textcircled{1} \text{ e } \textcircled{2} \Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \omega^4 \mu^2 \epsilon^2 + \omega^2 \mu^2 \sigma^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2}$$

prendo somma e differenza quadrati

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \end{cases} \rightarrow \text{ricavo da } \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + j \omega^2 \mu \sigma}$$

ricavo

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{2} (\omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2} - \omega^2 \mu \epsilon) \\ \beta^2 &= \frac{1}{2} (\omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2} + \omega^2 \mu \epsilon) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2} - \omega^2 \mu \epsilon}{2}} \\ \beta = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2} + \omega^2 \mu \epsilon}{2}} \end{cases}$$

possiamo analizzare 3 casi:

- 1) mezzi senza perdite $\sigma \rightarrow 0$
- 2) mezzi conduttori perfetti $\sigma \rightarrow \infty$
- 3) " ordinari

1) Mezzi senza perdite $\boxed{\sigma = 0}$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \epsilon - \omega^2 \mu \epsilon}{2}} = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

pertanto

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (\text{solo immag.}) \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (\text{solo parte reale}) \end{aligned}$$

mentre la velocità di propagazione costante

$$\begin{aligned} \lambda \neq \alpha T &= \frac{\alpha}{f} = \frac{\omega T}{\beta} = \frac{2\pi}{f} \cdot \frac{1}{\beta} = \boxed{\frac{2\pi}{\beta}} = \\ &= \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{\alpha_0}{f \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \end{aligned} \quad \alpha = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\Delta z}{T} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$\bar{P} = \frac{|E^+|^2}{\eta^*} e^{-2\alpha z} - \frac{|E^-|^2}{\eta^*} e^{2\alpha z} + \frac{|E^-||E^+|}{\eta^*} e^{j\varphi_-} \cdot e^{j\varphi_+} e^{j2\beta z} +$$

$$- \frac{|E^+||E^-|}{\eta^*} e^{j\varphi_+} e^{j\varphi_-} e^{-j2\beta z}$$

ricordo e fattor comune

$$= \frac{1}{\eta^*} \left\{ \left[|E^+|^2 e^{-2\alpha z} - |E^-|^2 e^{2\alpha z} \right] + |E^-||E^+| \left[e^{-j(\varphi_+ - \varphi_- - 2\beta z)} - e^{j(\varphi_+ - \varphi_- - 2\beta z)} \right] \right\}$$

con formule Trigonometriche

$$= \frac{1}{\eta^*} \left[|E^+|^2 e^{-2\alpha z} - |E^-|^2 e^{2\alpha z} + |E^+||E^-| (-2j \sin(\varphi_+ - \varphi_- - 2\beta z)) \right]$$

posso scrivere:

$$\bar{P}_m = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_m^+}{\eta} e^{-2\alpha z} \cos \varphi}_{\text{densità potenza media onda progressiva}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_m^-}{\eta} e^{2\alpha z} \cos \varphi}_{\text{densità pot. media onda regressiva}} - \underbrace{\frac{\epsilon_m^- \epsilon_m^+}{\eta} \sin \varphi \sin(2\beta z + \varphi_+ - \varphi_-)}_{\text{accoppiamento tra le due onde}}$$

nel caso di regime sinusoidale permanente si semplificano:

$$\frac{d\hat{E}_x}{dz} = j\omega\mu\hat{H}_y$$

$$\frac{d\hat{H}_y}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon)\hat{E}_x$$

↳ PASSO A DERIVATE ORDINARIE POICHÉ FASORI VETTORI DI CAMPO SONO SOLO FUNZIONI DI z MENTRE PRIMA ANCHE DI t.

$$\frac{d\hat{H}_y}{dz} = -j\omega\hat{E}\hat{E}_x = -j\omega(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega})\hat{E}_x = -j\omega\epsilon\hat{E}_x - \sigma\hat{E}_x = -(\sigma - j\omega\epsilon)\hat{E}_x$$

dove $\hat{E} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$

Tali equazioni sono ottenute da alcune considerazioni

$$\rho = 0$$

$$\text{div } D = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } B = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}_y$$

$$\text{rot } \vec{H}_y = j\omega\hat{E}\hat{E}_x$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{k}$$

$$\text{rot } \vec{H}_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \hat{k}$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\hat{E}\hat{E}_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\mu H_y$$

$$\frac{d}{dz} \begin{cases} \frac{d\hat{E}_x}{dz} = j\omega\mu\hat{H}_y \\ \frac{d\hat{H}_y}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon)\hat{E}_x \end{cases} \equiv \begin{cases} \frac{d^2\hat{E}_x}{dz^2} = j\omega\mu \frac{d\hat{H}_y}{dz} \\ \frac{d^2\hat{H}_y}{dz^2} = -(\sigma + j\omega\epsilon) \frac{d\hat{E}_x}{dz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{E}_x}{dz^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\hat{E}_x = \hat{\gamma}^2\hat{E}_x \\ \frac{d^2\hat{H}_y}{dz^2} = -(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu\hat{H}_y = \hat{\gamma}^2\hat{H}_y \end{cases}$$

possiamo ricavare α e β

$$\alpha + j\beta = \hat{\gamma}$$

$$m + jn = \hat{\gamma}^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma$$

prelevando il quadrato del primo

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = \hat{\gamma}^2$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = m \\ n = 2\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 = m + \beta^2 = m + \frac{n^2}{4\alpha^2}$$

prelevando m.c.m.

$$4\alpha^4 - 4\alpha^2 m - n^2 = 0$$

$$\alpha^4 - \alpha^2 m - \frac{n^2}{4} = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + n^2}}{2} = \frac{-\omega^2 \mu \epsilon + \sqrt{\omega^2 \mu^2 (\epsilon^2 + \sigma^2)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\omega^2 \mu \left(\sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2} - \omega^2 \mu \epsilon \right) \right]$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 - m = \frac{1}{2} \left[\omega^2 \mu \left(\sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) \right]$$

$$\beta = \sqrt{\beta^2}$$

Possiamo avere 3 casi:

- 1) mezzo senza perdite $\sigma = 0$
- 2) mezzo conduttore perfetto $\sigma \rightarrow \infty$
- 3) " ordinario

1) mezzo senza perdite $\sigma = 0$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \hat{\gamma} = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

la propagazione del onda nel mezzo non subisce attenuazione.

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$$

potenzi $\rho_{\eta} = \dots$

corrente di spostamento (impedenza nomeale di coppia)

Poss. quindi definire un buon conduttore de un dielettrico

BUON CONDUTTORE

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$$

Coste. costante prop. $\hat{\gamma}$ e Imped. Intrinseca

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} =$$

$$\sqrt{j\omega\mu\sigma \left(1 + \frac{j\omega\epsilon}{\sigma}\right)} =$$

$$= \sqrt{j\omega\mu\sigma}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = j\omega\mu\sigma$$

$$2\beta\alpha = \omega\mu\sigma \Rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{\frac{j\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu/\sigma}{1 + \frac{j\omega\epsilon}{\sigma}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1 + j)$$

$$= \eta \angle \theta_\eta = \eta \angle 45^\circ$$

BUON DIELETTRICO

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$$

$$\hat{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} + j\right)} =$$

$$= \sqrt{j\omega\mu \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} + j \right)}$$

$$= j\omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Il concetto di profondità di penetrazione ^{per effetto pelle} intrinseca può essere sintetizzato di massa conduttrice.

ANTENNE

Le antenne sono dispositivi che generano campi elettromagnetici e possono essere trasmettitori e ricevitori.

L'onda è un segnale. Ci occupiamo del disturbo delle antenne, perché è un problema di compatibilità.

Partendo dalla distribuzione di corrente \vec{J}_s calcolando:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_s e^{-jk_0 r}}{r} dz \quad \text{potenziale}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \text{rot } \vec{H}$$

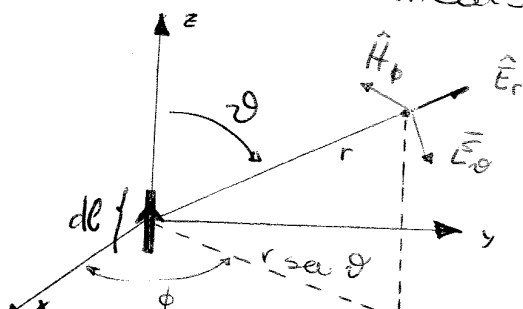
ricavato da $\text{rot } \vec{H} = \underbrace{0}_{\text{messa a zero}} + j\omega \epsilon \vec{E}$
(conduttore)

definiamo il n° d'onda $k_0 = \beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{a} = \frac{2\pi f}{a}$

Considero un sistema di riferimento sferico $P(r, \vartheta, \phi)$ secondo i tre versori $(u_r, u_\vartheta, u_\phi)$

DIPOLLO HERTZIANO

È costituito da un elemento infinitesimo di lunghezza dl e cui è associato un flusso di corrente \hat{I} invariante per ogni pto dell'elemento stesso.



singolarmente sviluppa

$$\begin{aligned} \vec{a}_r \frac{\partial (H\varphi \cdot \sin\vartheta \cdot r)}{\partial \vartheta} &= r \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \cdot \frac{I_{de}}{4\pi} \sin\vartheta \cdot e^{-j\beta_0 r} \left(\frac{j\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right) \\ &= r \frac{I_{de}}{4\pi} \cdot e^{-j\beta_0 r} \left(\frac{j\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \cdot \frac{\partial \sin^2\vartheta}{\partial \vartheta} = \\ &= r \frac{I_{de}}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \left(\frac{j\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) 2 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{aligned}$$

da cui ricavare \vec{E}_r

$$\vec{E}_r = \frac{1}{j\omega\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \cdot r \frac{I_{de}}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \left(\frac{j\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) 2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

scrivo $\omega = \alpha \cdot \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \beta_0$

$$= 2 \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{j\beta_0\epsilon r} \cdot \frac{I_{de}}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \cos\vartheta \left(\frac{j\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right)$$

↳ posto in parentesi

poi moltiplico e divido $\sqrt{\epsilon}$

$$= 2 \frac{\sqrt{\mu\epsilon} \cdot \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{I_{de}}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \cos\vartheta \left(\frac{j\beta_0}{j\beta_0 r^2} + \frac{1}{j\beta_0 r^3} \right)$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{I_{de}}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \cos\vartheta \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\beta_0 r^3} \right)$$

posto fuori da parentesi β_0^2 e $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$

$$= 2 \eta_0 \frac{I_{de}}{4\pi} e^{-j\beta_0 r} \cos\vartheta \cdot \beta_0^2 \left(\frac{1}{(\beta_0 r)^2} + \frac{j}{\beta_0^3 r^3} \right)$$

$$\vec{H} = -\frac{I dl}{4\pi} \vec{u}_\varphi \left[\left(\sin \vartheta (-j\beta_0) \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r} + \frac{e^{-j\beta_0 r}}{r^2} (-\sin \vartheta) \right) \right] =$$

$$= \vec{u}_\varphi \frac{I dl}{4\pi} \sin \vartheta e^{-j\beta_0 r} \left(\frac{j}{\beta_0 r} + \frac{1}{(\beta_0 r)^2} \right) \beta_0^2$$

Trovato \vec{H} ricavato \vec{E}

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} u_r & u_\varphi & u_\varphi \cdot r \sin \vartheta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \varnothing & \varnothing & r \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\vec{u}_r \frac{\partial (H_\varphi \sin \vartheta \cdot r)}{\partial \vartheta} - \vec{u}_\varphi r \cdot \frac{\partial (H_\varphi r \sin \vartheta)}{\partial r} \right] =$$

ho 2 componenti

$$\begin{cases} E_r = 2 \frac{I dl}{4\pi} \eta_0 \beta_0^2 \cos \vartheta \left[\frac{1}{(\beta_0 r)^2} - j \frac{1}{(\beta_0 r)^3} \right] e^{-j\beta_0 r} \\ E_\vartheta = + \frac{I dl}{4\pi} \eta_0 \beta_0^2 \sin \vartheta \left(j \frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2} - j \frac{1}{\beta_0^3 r^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

nel audire ci sono campi lontani e campi vicini

← distanza dalle sorgente grande rispetto la lunghezza d'onda.

↓ distanza dalle sorgente modesta rispetto la lunghezza d'onda.

CAMPO VICINO

$$\beta_0 r = \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{e^{-j\beta_0 r}}{\beta_0 r} \approx 1 \right|$$

infatti risulterà

$$\frac{1}{\beta_0 r} \ll \frac{1}{\beta_0^2 r^2}$$

ricorriamo alla potenza media totale irradiata integrando il vettore di Poynting su un opportuna superficie chiusa che racchiude l'antenna.

$$\vec{P} = (\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

$$\overline{P_{media}} = \overline{S_m} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = 15 \pi \left(\frac{dl}{\lambda_0}\right)^2 |\hat{I}|^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{a}_r \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

$$\overline{P_r} = \oint_S \overline{P_m} \cdot d\vec{s} = 80 \pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda_0}\right)^2 \frac{|\hat{I}|^2}{2}$$

$$\oint U d\Omega$$

$U = \text{pot. media nel tempo}$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$U = \frac{\overline{P}}{4\pi} r^2$$

* Nota Tecnica di stimolo: compi per traslazione. Per esempio \vec{E} e \vec{H} ~~sono~~ calcolati alle distanze D_1 e D_2 sono legati $|\vec{E}_{D2}| = \frac{D_1}{D_2} |\vec{E}_{D1}|$, cioè l'intensità dei campi ~~decrece~~ ^{decrece} con l'innalzamento delle distanze dalle

Definiamo ^{campi} ~~superficie~~ ^{superficie} guadagno direttivo

$$g(\vartheta, \phi) = \frac{U(\vartheta, \phi)}{\frac{P_r}{4\pi}} = \frac{4\pi U(\vartheta, \phi)}{\oint U d\Omega}$$

Se consideriamo l'antenna isotropa il guadagno direttivo sarebbe 1

$$\text{pertanto } \oint U d\Omega = 4\pi U$$

e definiamo la direttività di un sistema D la direttività di un'antenna coincide col guadagno direttivo esecuto nella direzione in cui questo risulta massimo

$$D = \frac{U_{max}}{U_{media}} = \frac{4\pi U_{max}}{P_r}$$

$$U = \frac{r^2 |\vec{E}|^2}{\eta_0^*}$$

La potenza messa in gioco nei conduttori dipende naturalmente dalla loro geometria e dall'effetto pelle causato dalle variazioni temporale delle correnti stesse.

$$R_{di\text{ radiazione}} = \frac{P_r}{|I_{rms}|^2} = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda_0}\right)^2$$

Dipolo magnetico

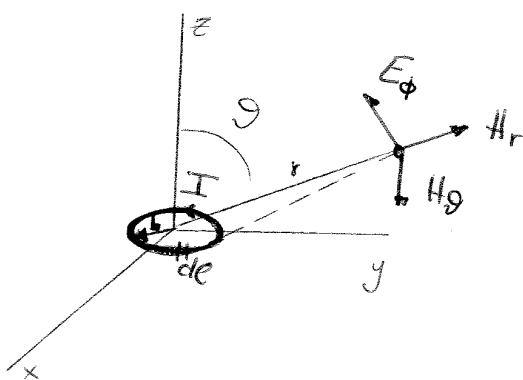
Il duale del dipolo elettrico è il dipolo magnetico o spira di corrente.

Una spira di raggio b molto piccolo e giacente nel piano xy è percorsa da corrente il cui verso è \hat{z} . Il momento magnetico associato a questa spira è

$$m = I \pi b^2 \quad (A m^2)$$

Superficie della spira

lungo z



$$H = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{e^{-j\beta_0 r_1}}{r_1} dl$$

$$e^{-j\beta_0 r_1} = e^{-j\beta_0 r} e^{-j\beta_0(r_1-r)} \approx e^{-j\beta_0 r} [1 - j\beta_0(r_1-r)]$$

seppero $A = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} (1 + j\beta_0 r) e^{-j\beta_0 r} \sin\theta$

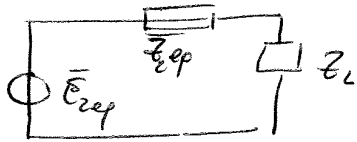
abbiamo le seguenti componenti.

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = 0$$

$$E_\phi = -j \frac{\omega \mu_0 m \beta_0^2}{4\pi} \cdot \sin\theta \left(j \frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{\beta_0^2 r^2} \right) e^{-j\beta_0 r}$$

il circuito è schematizzabile come



dove $\bar{Z}_{zep} = \frac{Z_I Z_0}{Z_I + Z_0} + Z_0 =$
 $= \frac{(Z_{11} + Z_{12}) Z_{12}}{Z_{11} - Z_{12} + Z_{12}} + Z_{22} - Z_{12}$

$= Z_{12} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}} + Z_{22} - Z_{12} = Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}$

ponendo $Z_{12} = Z_{21} = Z_0 = \emptyset$ allora $Z_{zep} = Z_{22}$

$E_{zep} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_I} V_1 = \frac{Z_{12}}{Z_{12} + Z_{11} - Z_{12}} V_1 = \frac{Z_{12}}{Z_{11}} V_1 = \bar{Z}_{12} \bar{I}_1$

$\bar{I}_2' = \frac{\bar{E}_{zep}}{Z_{zep} + Z_L} = \frac{\bar{Z}_{12} \bar{I}_1}{\bar{Z}_{22} + Z_L}$

↓
 non trascurabile
 parte corrente
 grande visto
 da e' parte
 Trasmissione.

del p.to di vista energetico

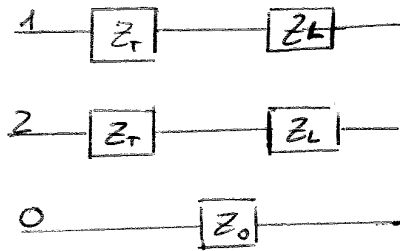
$S_1 = V_1 \bar{I}_1^* \approx \bar{Z}_I |I_1|^2$
 $S_2 = V_2 \bar{I}_2^* \approx \bar{Z}_L |I_2|^2$ $\left| \frac{S_2}{S_1} \right| = \frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_I} \left| \frac{\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{22} + Z_L} \right|^2$

La trascurabilità del campo irradiato dalle correnti \vec{I}_c
 Consideriamo i capi elettrici irradiati dai due conduttori
 a una distanza d dal centro dei due conduttori



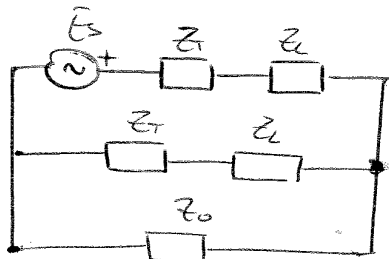
Pertanto le correnti di modo comune apparentemente trascurabili sono in grado di produrre un campo irradiato di intensità significativa.

Portando da



possono presentarsi diverse situazioni

CASO 1



$$\bar{E}_s = (\bar{Z}_T + \bar{Z}_L) \bar{I}_1 + \bar{Z}_0 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$$

$$0 = (\bar{Z}_T + \bar{Z}_L) \bar{I}_2 + \bar{Z}_0 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$$

Troviamo le correnti di modo comune o modo differenziale

sottraiamo membro a membro

$$\bar{E}_s = (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) (\bar{Z}_T + \bar{Z}_L) \Rightarrow \bar{I}_d = \frac{\bar{E}_s}{(\bar{Z}_T + \bar{Z}_L) 2}$$

somma membro a membro

$$\bar{E}_s = (\bar{Z}_T + \bar{Z}_L + 2\bar{Z}_0) (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \Rightarrow \bar{I}_c = \frac{\bar{E}_s}{2(\bar{Z}_T + \bar{Z}_L + 2\bar{Z}_0)}$$

per limitare le \vec{I}_c devo aumentare lo \vec{Z}_0

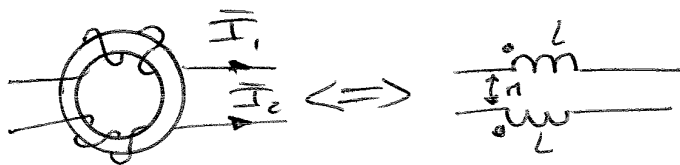
171 con un'ovvolgimento.

Uno dei metodi più efficaci per la riduzione delle correnti di modo comune consiste nello utilizzo di bobine di blocco del modo comune.

L'induttanza del anellino vale:

$$L = \frac{1}{R} = \mu_r \mu_0 \frac{S_{ep}}{l_{ep}}$$

Una coppia di fili percorsi dalle correnti \vec{I}_1 e \vec{I}_2 viene avvolta attorno a un nucleo ferromagnetico. Si osservi con che verso tali fili vengono avvolti.



ipotesi di nuclei avvolgimenti identici
 $L_1 = L_2 = L$

Se gli avvolgimenti sono simmetrici e se tutto il flusso è confinato nel nucleo, cioè se tutto il flusso di un avvolgimento si concatena completamente con l'altro si ha $L = M$

pertanto in tali condizioni un induttore di modo comune non ha alcun effetto sulle correnti di modo differenziale; esso rappresenta invece un'induttanza $2L$ in serie ai conduttori per le correnti di modo comune.

$$\vec{E}_1 = j\omega (L_{11} \vec{I}_1 + M \vec{I}_2)$$

$$\vec{E}_2 = j\omega (M \vec{I}_1 + L_{22} \vec{I}_2)$$

secondo l'ipotesi: $L_{11} = L_{22} = M \Rightarrow (N_1 = N_2)$

$$\frac{N_1^2}{R} = \frac{N_2^2}{R} = \frac{N_1 \cdot N_2}{R}$$

L'attenuazione di inserzione rapp. la diminuzione della Tensione di carico a una certa frequenza dovuta all'inserimento del filtro.

$$\bar{V}_2 = \frac{Z_U}{Z_U + Z_G} \cdot \bar{E}_G$$

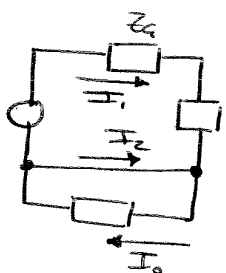
$$\begin{aligned} V_2' &= \frac{Z_U}{Z_G + Z_U + j\omega L} \bar{E}_G \\ &= \frac{Z_U}{Z_U + Z_G} \cdot \frac{1}{1 + j\omega L / Z_U + Z_G} \cdot \bar{E}_G \end{aligned}$$

otteniamo che

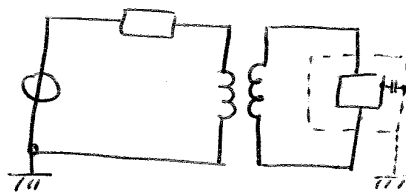
$$\begin{aligned} IL &= 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega L}{Z_U + Z_G} \right| = 20 \log_{10} \left[\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right] \\ &= 10 \log_{10} [1 + (\omega\tau)^2] \quad \text{dove } \tau = \frac{L}{Z_U + Z_G} \end{aligned}$$

l'attenuazione di inserzione di un particolare filtro dipende dall'impedenza di carico e dalla impedenza equivalente del generatore e perciò non può essere determinata indipendentemente dalle impedenze terminali.

Un'altra tecnica per eliminare la corrente di modo comune è quella dell'uso di un trasformatore di isolamento.



⇒



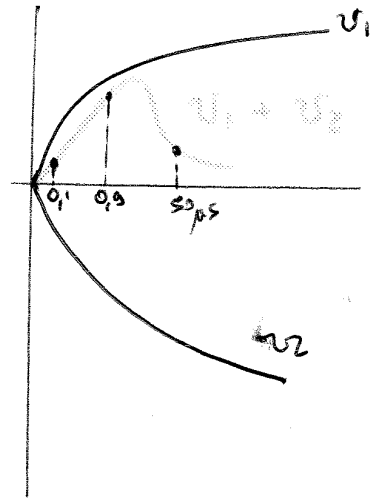
non ci sono correnti di modo comune perché il secondario è isolato ipotizzando non ci sia accop. capacitivo.

Per evitare ciò tra i due avvolgimenti, metterlo uno schermo metallico.

davata all'unione di due termini

$$v_1 + v_2 \rightarrow v_1 = A_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$

$$v_2 = A_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$



$$v_1 + v_2 = A_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

$$= A_0 \left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)$$

si hanno tempo di salita tra 10% e 90% mentre quello di discesa si misura a 50%

$$\alpha = \frac{1}{T_e}$$

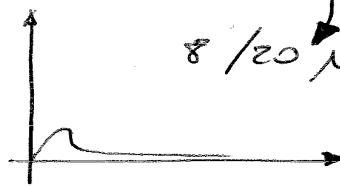
$$\beta = \frac{1}{T_f}$$

T_e = tempo all'emivolta

T_f = Tempo di salita del fronte.

le correnti 20 kA - 30 kA

le fulminazioni dirette e indirette sono



i problemi introdotti dalle fulminazioni sono

- sollecit. degli isolanti
- " Termiche e meccaniche
- compatibilità elettromagnetica.

Proteggono le apparecchiature con

SPINTEROMETRI e VARISTORI

La corrente di questo viene scaricata nel terreno.
Tali correnti possono avere valori elevati.

Usiamo i dispersori. Nel caso di un semisfera posta alla superficie del terreno che disperde le correnti I .



Le densità di corrente $J = \frac{I}{2\pi r^2}$

mentre la resistenza di terra sarà $R_T = \frac{1}{2\pi \sigma r}$
 ↓
 caduta di vol. dall'emezza

potenziale $E = \frac{I}{2\pi r^2 \sigma}$

se σ supera la ripidità dielettrica del terreno $J \leq J_c$ $\sigma \rightarrow \infty$ il terreno si comporta come il dispersore \Rightarrow TERRENO IONIZZATO

ANALISI EFFETTI DISTURBO

Studiamo una linea di trasmissione costituita da una coppia di fili paralleli di lunghezza $L=d$ posti a una distanza s illuminata da un'onda piana uniforme. La linea è terminata da due resistenze R_g e R_L . Tutto è inserito in un sistema di riferimento cartesiano

i fili sono posti nel piano xy , R_g in corrispondenza di $x=0$ e R_L posta a $x=d$

Per quanto riguarda il disturbo esterno si fa ipotesi di campo elettrico incidente (componente campo elettrico E_y e componente

su R_g e R_L .

Le soluzioni lo cerca con i calcoli di elettrotecnica con accopp. degli effetti.

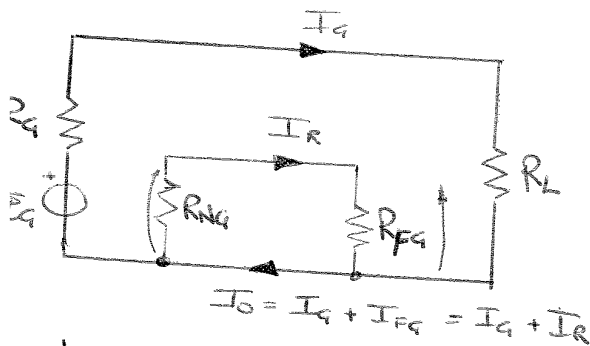
$$V_g = \frac{R_g}{R_g + R_L} E - \frac{R_g R_L}{R_g + R_L} A$$

$$V_L = -\frac{R_L}{R_g + R_L} E - \frac{R_g R_L}{R_g + R_L} A$$

CARATT. e' che la DIFONIA e' all'interno ossia accopp. tra piste dello stesso circ. stampato o conduttori delle stesse linee.

(DIFONIA CON ALMENO 3 CONDUTTORI.)

DIAFONIA



Due circuiti:

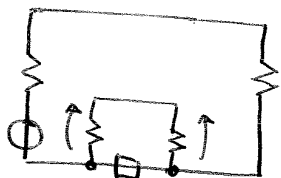
- ① PRINCIPALE dove c'è il generatore
- ② SECONDARIO ultimo del principale

Ho delle tensioni di DIAFONIA perché i due circuiti sono accoppiati tra loro.

Il modo più elementare.

In una linea di trasmissione a due conduttori non esiste il fenomeno della diafonia. Perché si verificano la diafonia occorre la presenza di almeno 3 conduttori. L'obiettivo dell'analisi della diafonia è di determinare le tensioni della terminazione vicine V_{NF} e di quella lontana V_{FG} .

modello semplice

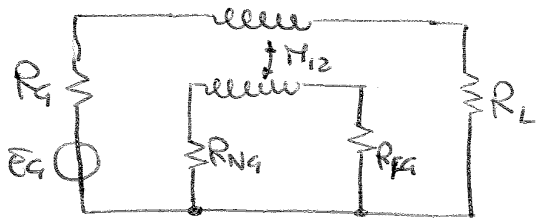


$$I_g = \frac{E_g}{R_g + R_L + \frac{(R_{NG} + R_{FG}) Z_0}{R_{NG} + R_{FG} + Z_0}}$$

$$= \frac{E_g (R_{NG} + R_{FG} + Z_0)}{(R_g + R_L) (R_{NG} + R_{FG} + Z_0) + (R_{NG} + R_{FG}) Z_0}$$

dove $Z_T = R_G + R_L \left(R_P - j \frac{1}{\omega C} \right) \left(R_L + R_P - j \frac{1}{\omega C} \right)^{-1}$

ACCOPPIAMENTO INDUTTIVO



Le due maglie sono descritte:

$$\begin{cases} E_G = (R_G + R_L) I_G + j\omega M_{12} I_R \\ 0 = (R_{NG} + R_{FG}) I_R - j\omega M_{12} I_G \end{cases}$$

sviluppo sistema

ricavo $I_R = \frac{j\omega M_{12}}{(R_G + R_L)(R_{NG} + R_{FG}) + \omega^2 M_{12}^2} E_G$

Le tensioni terminali sono:

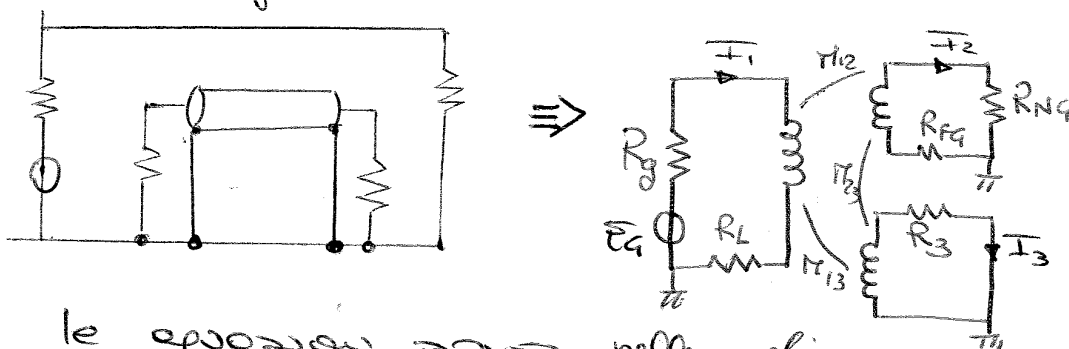
$$\begin{aligned} V_{NG} &= R_{NG} I_R \\ V_{FG} &= -R_{FG} I_R \end{aligned}$$

Evidentemente la diafonia si annulla se $M_{12} = 0$

Si nota che all'aumentare di f il disturbo tende a diminuire, per cui l'accoppiamento induttivo ha le caract. di filtro passa basso

Inoltre la diafonia per accopp. induttivo aumenta al diminuire delle resistenze terminali.

Anche in tal caso posso mettere lo schermo e lo colloco a terra dalle 2 estremità



le equazioni sono nelle maglie 2 e 3

$$0 = (R_{NG} + R_{FG}) I_2 - j\omega M_{12} I_1 + j\omega M_{23} I_3$$

$$0 = R_3 I_3 - j\omega M_{13} I_1 + j\omega M_{23} I_2$$

ricavo
$$\bar{I}_2 = \bar{I}_R = \frac{1}{R_{NG} + R_{FG} + \frac{\omega^2 M_{23}^2}{R_3}} \cdot \left(j\omega M_{12} + \frac{\omega^2 M_{13} M_{23}}{R_3} \right) \bar{I}_1 \quad (9)$$

parametri

$$\bar{V}_{NG} = R_{NG} \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_{FG} = -R_{FG} \bar{I}_2$$

ACCOPPIAMENTO CAPACITIVO - INDUTTIVO

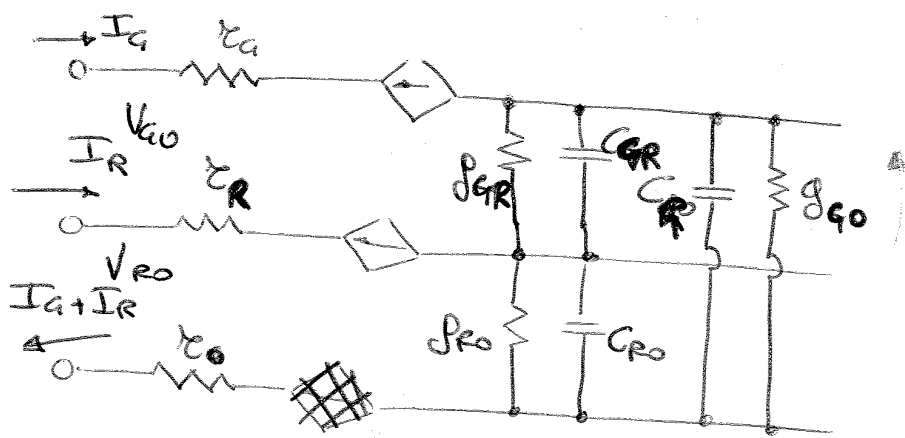
Avere le seguenti tensioni di :

$$V_{NG} = j\omega (D_C + D_M) E_G$$

$$V_{FG} = j\omega \left(D_C - \frac{R_{FG}}{R_{NG}} D_M \right) E_G$$

Le difese capacitativa prende su quelle induttiva per resistenze terminali elevate.

DIAPHONIA LINEA TRASMISSIONE



consideriamo regime sinusoidale

$$V_a + \frac{dV_a}{dx} dx$$

$$V_R + \frac{dV_R}{dx} dx$$

$$\frac{2V_a}{2x} = r_a I_a + r_o (I_a + I_R) + j\omega [L_{aG} I_a + L_{aR} I_R - L_{o0} (I_a + I_R)]$$

$$- j\omega [-L_{o0} (I_a + I_R) + L_{oG} I_a + L_{oR} I_R]$$

$$-\frac{2V_R}{2x} = r_R I_R + r_o (I_a + I_R) + j\omega [L_{RR} I_R + L_{aR} I_a - L_{o0} (I_a + I_R)]$$

$$- j\omega [-L_{o0} (I_a + I_R) + L_{oR} I_R + L_{oG} I_a]$$

e alla capacità C_m mutua tra i due circuiti.

(1)

$$\bar{V}_{NF} = \frac{R_{NF}}{R_{NF} + R_{FE}} \bar{E} + \frac{R_{NF} R_{FE}}{R_{NF} + R_{FE}} \bar{A} \quad l_u = \frac{\mu_0}{2\pi} l_u \frac{d_{ar}}{r_0}$$

$$\bar{V}_{FF} = -\frac{R_{FF}}{R_{NF} + R_{FE}} \bar{E} + \frac{R_{NF} R_{FE}}{R_{NF} + R_{FE}} \bar{A} \quad C_m = \frac{\epsilon}{2\pi l_u} \frac{d_{ar}}{2\pi}$$

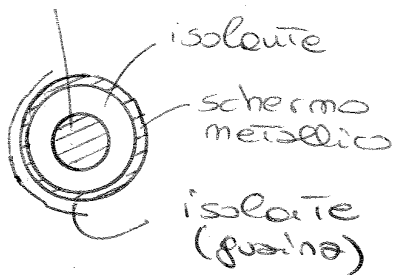
Intuitivamente si può osservare che la componente di accoppiamento induttivo è dominante sulle componenti di accop. capacitivo per correnti e basse impedenze e che la comp. capacitiva domina per correnti ed alte impedenze.

TENSIONI INDOTTE NELLE GUAINE NEI CAVI DI POTENZA

Le guaine metalliche le hanno i cavi di bassa tensione dei distributori, per questioni più meccaniche che di schermatura. Anche i cavi di media tensione hanno queste guaine.

conduttore

$V > 3kV$



Questi cavi non hanno un nucleo multifilare, di fatto mi ritras con un conduttore cilindrico.

Lo schermo in generale viene collegato a Terra. Quando i cavi sono schermati li devo collegare a Terra almeno da una parte.

Infatti si possono immaginare 2 possibilità:

- ① guaina a terra in un solo punto con l'altra estremità fluttuante
- ② guaina a terra alle due estremità

$$L_s = \text{ind. servizio} = L_{a'a} - L_{a'b}$$

Possiamo fare vedere adesso per cui siano le tensioni e le correnti indotte nelle fasce dei cavi.

$$E_{a'} = j\omega (L_{a'a'} I_{a'} + L_{a'b'} I_{b'} + L_{a'c'} I_{c'}) + j\omega (L_{a'a} I_a + L_{a'b} I_b + L_{a'c} I_c)$$

$$E_{b'} = j\omega (L_{b'a'} I_{a'} + L_{b'b'} I_{b'} + L_{b'c'} I_{c'}) + j\omega (L_{b'a} I_a + L_{b'b} I_b + L_{b'c} I_c)$$

$$E_{c'} = j\omega (L_{c'a'} I_{a'} + L_{c'b'} I_{b'} + L_{c'c'} I_{c'}) + j\omega (L_{c'a} I_a + L_{c'b} I_b + L_{c'c} I_c)$$

Consideriamo R la resistenza delle guide.

$$E_{a'} - E_{b'} = R I_{a'} - R I_{b'}$$

Sapendo che $\begin{cases} I_a + I_b + I_c = 0 \\ I_{a'} + I_{b'} + I_{c'} = 0 \end{cases}$

e che $L_{aa'} = L_{a'a} = L_{bb'} = L_{b'b} = L_{cc'} = L_{c'c} = 2 \cdot 10^{-7} l \left(\ln \frac{2l}{r_g} - 1 \right)$

mentre le note

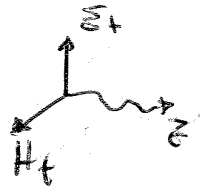
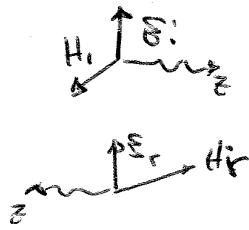
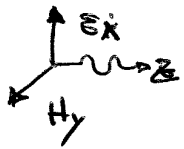
$$L_{ab} = L_{a'b} = L_{ac} = L_{a'c} = L_{bc} = L_{b'c} = L_{cb} = L_{c'b} = 2 \cdot 10^{-7} l \left(\ln \frac{2l}{d} - 1 \right)$$

otteniamo

$$E_{a'} = -j\omega \{ (L - M) I_{a'} + (L - M) I_a \}$$

e uguale per le altre due.

da cui



$$SSE = \frac{|E_{incl}|}{|E_{total}|}$$

l'efficienza di uno schermo è definita come il rapporto del $|E_t^+|$ e il modulo $|E_i^+|$

ed è funzione delle f.

→ considero il problema di un'onda da un mezzo all'altro

$$\bar{E}_i^+ e^{-\gamma_1 z} + \bar{E}_r^- e^{\gamma_1 z} = \bar{E}_t^+ e^{-\gamma_2 z}$$

$$\frac{\bar{E}_i^+}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} - \frac{\bar{E}_r^-}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} = \frac{\bar{E}_t^+}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z}$$

valendo a $z=0$

$$\begin{cases} \bar{E}_i^+ + \bar{E}_r^- = \bar{E}_t^+ \\ \frac{\bar{E}_i^+}{\eta_1} - \frac{\bar{E}_r^-}{\eta_1} = \frac{\bar{E}_t^+}{\eta_2} \end{cases}$$

molto più facile per $\frac{1}{\eta_1}$

$$\frac{\bar{E}_i^+}{\eta_1} + \frac{\bar{E}_r^-}{\eta_1} = \frac{\bar{E}_t^+}{\eta_1}$$

$$\text{ricavo } \frac{\bar{E}_r^-}{\eta_1} = \frac{\bar{E}_t^+}{\eta_1} - \frac{\bar{E}_i^+}{\eta_1}$$

sostituisco nelle seconde

$$\frac{\bar{E}_t^+}{\bar{E}_i^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = T \text{ fattore trasmissione}$$

$$\frac{\bar{E}_r^-}{\bar{E}_i^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = R \text{ fattore riflessione}$$

Analizziamo il caso in cui ho due mezzi posso fare un'analisi con lo schermo.

→ Consideriamo uno schermo di spessore t , conduttività σ , permittività e permeabilità η e colpito sulla superficie a sinistra da un'onda elettromagnetica piano uniforme incidente. Per semplicità possiamo dare entrambi i lati dello schermo il mezzo sia aria. Le espressioni dei campi sono

$$\vec{E}_i = \hat{E}_i e^{-j\beta_0 z} \quad \text{in generale} = \hat{E}_i e^{-\hat{\gamma} z} \Rightarrow$$

$$\hookrightarrow \text{in } \mu_0 \quad \alpha = 0$$

$$\vec{E}_r = \hat{E}_r e^{j\beta_0 z}$$

$$\vec{H}_i = \frac{\hat{E}_i}{\eta_0} e^{-j\beta_0 z}$$

$$\vec{H}_r = -\frac{\hat{E}_r}{\eta_0} e^{j\beta_0 z}$$

generalmente:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \hat{E}_1 e^{-\hat{\gamma} z} & \vec{H}_1 &= \frac{\hat{H}_1}{\eta} e^{-\hat{\gamma} z} \\ \vec{E}_2 &= \hat{E}_2 e^{-\hat{\gamma} z} & \vec{H}_2 &= \frac{\hat{H}_2}{\eta} e^{-\hat{\gamma} z} \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{E}_t = \hat{E}_t e^{-j\beta_0 z}$$

$$\vec{H}_t = \frac{\hat{H}_t}{\eta_0} e^{-j\beta_0 z}$$

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\hat{\gamma} = \alpha - j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma - j\omega\epsilon)}$$

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \eta \angle \vartheta_\eta$$

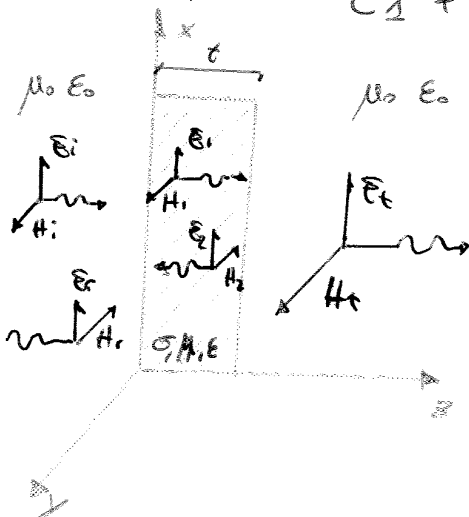
nell' passaggio da un mezzo all'altro bisogna imporre la continuità

$$z=0 \Rightarrow \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

vale per il

$$z=t \Rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_t$$

campo magnetico



dove $\delta = \sqrt{\frac{z}{\omega \mu \sigma}}$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0$$

(1)

materiale \emptyset :

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{j\omega\mu_0 j\omega\epsilon_0} = j\frac{\omega}{a}$$

materiale schermo:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma(1 + \frac{j\omega\epsilon}{\sigma})}} \quad \text{se } \sigma \rightarrow \infty$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

Possiamo semplificare $\frac{E_i}{E_t}$

sta in un buon conduttore

supponendo che lo schermo

debba avere

$$\hat{\eta} = \eta_0 \quad \text{in modo che} \quad \frac{\eta_0 - \hat{\eta}}{\eta_0 + \hat{\eta}} \approx 1$$

poi $e^{-\gamma t} = e^{-\alpha t} e^{-j\beta t}$

$\ll 1$ per $t \gg \delta$

così

obblammo de $\left| \frac{E_i}{E_t} \right| = \left| \frac{\eta_0}{4\hat{\eta}} \right| e^{t/\delta}$