



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 780**

**DATA: 04/12/2013**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Rossi A.**

**MATERIA: Elettrotecnica II**

**Prof. Tartaglia**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# ELETTROTECNICA II

Campi elettrostatici

Campo e regione dello spazio  $\Rightarrow$

Una regione dello spazio e sede di un campo elettrico quando una carica  $Q$  e' soggetta ad una forza  $\vec{F}$

Scalare  $\sigma$  (Termico)  $\Downarrow$  vettoriale (velocità dell'aria)

Elettromagnetismo governato da Equazioni di Maxwell  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = \rho_v \end{cases}$$

$\vec{H}$  e' il vettore campo magnetico

$\vec{B}$  e' il vettore induzione magnetica

$\vec{E}$  e' il vettore campo elettrico

$\vec{D}$  e' il vettore induzione elettrica

Tali grandezze possono essere legate tra loro da equazioni costitutive  $\Downarrow$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases} \Rightarrow$$

$\mu$  permeabilità magnetica  
 $\epsilon$  costante dielettrica (permeabilità)  
 $\sigma$  conducibilità del mezzo

Esistono una serie di definizioni riguardo gli operatori differenziali

NABLA  $\Rightarrow \nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$

gradiente

$\text{grad } f = \nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}$  scalare

al gradiente e' associato un'operazione di integrale di linea

$\text{grad } \varphi \cdot d\vec{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi$

$d\vec{e} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$

$\text{grad } \varphi \cdot \vec{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \cdot \left( \frac{dx}{de} \vec{i} + \frac{dy}{de} \vec{j} + \frac{dz}{de} \vec{k} \right) =$

$\frac{d\varphi}{dn} \cdot \frac{dn}{de} = \frac{d\varphi}{de}$

operatori del 2° ordine

1)  $\nabla \cdot \nabla \cdot \vec{A} = \text{grad div } \vec{A}$

2)  $\nabla \cdot \nabla \varphi = \text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi$  LAPLACIANO

3)  $\nabla \times \nabla \varphi = \text{rot grad } \varphi = 0$

4)  $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \text{div rot } \vec{A} = 0$

5)  $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \text{rot rot } \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$

Analizzo il 3)

$$\nabla \times \nabla \varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} \vec{i} + \dots = 0$$

esempio del campo elettrostatico

$\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\nabla V$   $\vec{E}$  è irrotazionale

$V =$  funzione potenziale

Analizzo 4)

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) +$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0$$

La divergenza del rotore di  $A$  è nulla

Il rotore di un campo vettoriale è sempre solenoideale

esempio

$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Analizzo 2)

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \text{div grad } \varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

in f.lli,  $\nabla \cdot \nabla$  costituisce il Laplaciano

$$\nabla \times (\vec{A}_i + \vec{A}_s) = \underbrace{\nabla \times \vec{A}_i}_0 + \underbrace{\nabla \times \vec{A}_s}_{\nabla \vec{A}_s = 0} = \vec{C}_i$$

$$\nabla^2 \vec{W} = -\vec{C}_i$$

$$\vec{A}_s = \nabla \times \vec{W}$$

quindi posso scrivere la relazione

$$\vec{A} = \vec{A}_i + \vec{A}_s = \nabla \times \vec{W} + \vec{V}_p$$

L'unione tra  
Teoremi costituiscono  
il TEOREMA di HELMHOLTZ

da queste 3 posso ricavare nuove equazioni

Considero 3 eq. di Maxwell che contengono tutte le info FARADAY

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \text{circolazione} \\ \text{magnetica} \end{array}$$

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \text{conservazione} \\ \text{della carica} \end{array}$$

$$\text{div rot } \vec{E} = \text{div } -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

in punto  $\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0$  poiché  $\text{div } \vec{B} = 0$   
B è solenoideale.

$$\text{div rot } \vec{H} = \text{div } \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{div } \vec{j} = -\text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{ma} \quad \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{quindi} \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

quindi oltre alle 3 fondamentali ho altre 3 equazioni

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{div } \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{cases}$$

Campi elettrostatici  
Un campo elettrostatico è definito da 2 equazioni

Campi corrente statici

$$\begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{j} = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

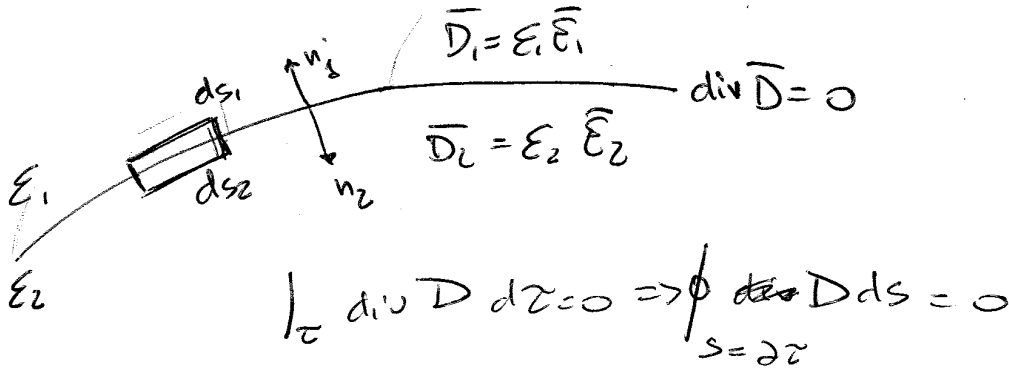
$$\begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array}$$

ci dà il concetto di CAPACITÀ

in alcuni casi se i vari sistemi sono collegati tra loro posso usare le variabili di 1 per risolvere l'altro...

ci dà il concetto di conduttanza 3

consideriamo una superficie di separazione tra 2 mezzi 1 e 2 con  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$

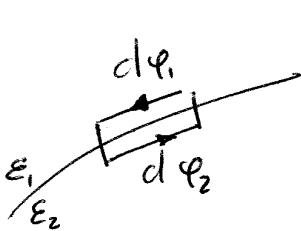


$$D ds = \bar{D} \bar{n} ds = D n ds$$

$$D n_2 ds_2 + D n_1 ds_1 + \text{inf. di ordine sup} = 0$$

$$ds_1 = ds_2 \quad \bar{n}_1 = -\bar{n}_2 \quad \text{quindi } D n_1 = D n_2$$

rimane costante l'inclusione elettrica se non sono presenti cariche in superficie o che al passaggio da un mezzo all'altro

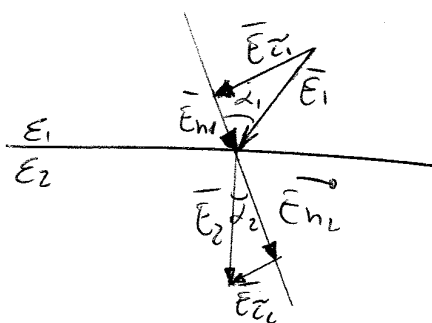


i lati minori sono infinitesimi di ordine superiore

$$d\phi_1 = -d\phi_2 \quad \text{rot } \bar{E} = 0$$

$$\oint \bar{E} d\bar{e} = 0 \quad E_{t_2} dl - E_{t_1} dl = 0 \quad E_{t_2} = E_{t_1}$$

Si mantiene la componente tangenziale del campo



$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{E_{t_1}}{E_{n_1}}$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{E_{t_2}}{E_{n_2}}$$

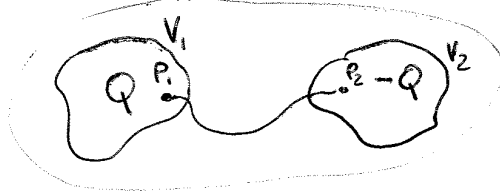
$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{E_{t_1}}{E_{t_2}} \cdot \frac{E_{n_2}}{E_{n_1}} = 1 \cdot \frac{D_{n_2}}{E_2} \cdot \frac{E_1}{D_{n_1}}$$

$$\text{quindi } \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Tali regole sono basilari per le rifrazioni delle linee di campo.

⇓  
x TUTTI i campi irrotazionali

Se considero una coppia di oggetti metallici

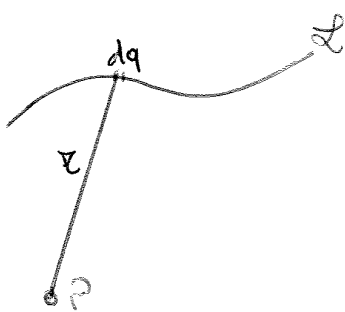


$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon r_2}} = 4\pi \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$$

Se le cariche fossero più di una si applica il principio di sovrapposizione degli effetti

Se le cariche fossero su una linea

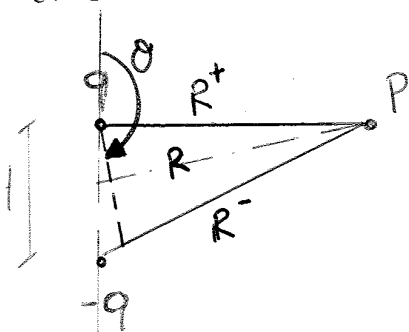


$$dq = \rho_e dl$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_e dl}{r}$$

Campo elettrico di un dipolo

Il dipolo è una coppia di cariche di segno opposto distanti tra loro una certa distanza d.



$$R_+ \approx R - \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$R_- \approx R + \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon R_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon R_-}$$

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \quad \text{posto che } R \gg d$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R - \frac{d}{2} \cos \theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2} \cos \theta} \right) = \frac{R + \frac{d}{2} \cos \theta}{R^2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon R^2} \left( R + \frac{d}{2} \cos \theta - R + \frac{d}{2} \cos \theta \right) \approx \frac{q d \cos \theta}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$\vec{E} = \text{grad } V = - \frac{\partial V}{\partial R} \vec{u}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

Si considerino i punti A e B sulla congiungente e 3 cariche ho de:

$$\frac{r_1}{r_2} \Big|_A = \frac{a+b-r_0}{r_0-b} = K$$

$$\frac{r_1}{r_2} \Big|_B = \frac{a+b+r_0}{r_0+b} = K$$

La carica  $Q_2$  che con la carica  $Q_1$  determina una superficie equipotenziale sferica con centro in  $\Pi$  viene detta immagine elettrica

essendo "a" una quantità nota ossia la distanza tra le 2 cariche risolve il seguente sistema

$$\begin{cases} r_0 = a \frac{K}{K^2-1} \\ b = a \frac{1}{K^2-1} \\ d = a+b = a \frac{K^2}{K^2-1} \end{cases}$$

Se nel punto  $\Pi$  ponga una altra carica  $Q_3$  la superficie equipotenziale sferica resta inalterata

la sola differenza consiste nel fatto che detta superficie risulta avere un potenziale variato

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_3}{r_0}$$

E' possibile trovare il campo elettrico in un sistema costituito da una carica elettrica puntiforme  $Q_1$  e da una sfera conduttrice di raggio  $r_0$  caricata globalmente con una carica  $Q_2$  il cui centro si trova a distanza  $d$  da  $Q_1$

essendo noti  $Q_1, d, r_0$

dove dalle equazioni del sistema si ricava:

$$d = a \frac{K}{K^2-1} \quad K = r_0 K$$

$$\text{da cui } K = \frac{d}{r_0}$$

poi ricavo

$$\begin{aligned} a &= d \frac{K^2-1}{K^2} = d \frac{\frac{d^2}{r_0^2}-1}{\frac{d^2}{r_0^2}} = \\ &= \frac{d^2-r_0^2}{d} \end{aligned}$$

ricavo ancora  $b = d - a = \frac{r_0^2}{d}$

Si osserva che il valore assoluto del rapporto tra la carica  $Q_1$  e la sua immagine elettrica  $Q_2$

si ottiene  $Q_2 = -\frac{Q_1}{K} = -Q_1 \frac{r_0}{d} \Rightarrow$  concentrata a distanza  $\frac{r_0^2}{d}$  dalla "carica"  $Q_1$  6





Consideriamo la sfera scaria  
 Voglio calcolare il campo elettrico sulla superficie della sfera.

Il  $Q_3$  coincide con  $Q_2$   
 o meglio  $Q_3 = Q_1 \frac{r_0}{d}$  e  $Q_2 = -Q_1 \frac{r_0}{d}$   
 dove  $r_0 \ll d$

Introducendo la sfera come perturbo il campo?  
 Il campo raddoppia in un livello pari a 3 volte il campo preesistente  
 $E_{max} = 3E_0$   
 dove  $E_0$  coincide con il campo in origine...

Prendiamo un punto nei dintorni della sfera.  
 Calcolo il potenziale nel punto P e poi determino il campo elettrico.

$$V(P) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{Q_1 \frac{r_0}{d}}{4\pi\epsilon r_2} + \frac{Q_1 \frac{r_0}{d}}{4\pi\epsilon r} =$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{r_0}{d r_2} + \frac{r_0}{r d} \right]$$

Trovo le distanze dal punto

$$r_1 = \left[ (d + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \right]^{1/2}$$

$$r_2 = \left[ (d - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \right]^{1/2}$$

\* campo radiale ha maggiore importanza

$$\text{Sviluppo } r_1 = \left[ d^2 + r^2 \cos^2 \theta + 2dr \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2}$$

$$= \left( d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta \right)^{1/2} = d \left[ 1 + \frac{2r}{d} \cos \theta + \left( \frac{r}{d} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Sostituendo si ottiene:

$$V(P) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon d^2} \left[ (d - r \cos \theta) + \frac{r_0^3 \cos \theta}{r^2} \right]$$

↳ serie Taylor  
 $[1+x = 1 + \frac{x}{2}]$  TRASCURABILE  
 poichè "r" è molto piccolo rispetto a d

Calcolo il campo  $E_{max} = 3E_0 = 3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon d^2}$

• Considero ora il potenziale di  $A=0$  e faccio il medesimo procedimento

$$-\frac{1}{2}V = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

ri faccio i calcoli con differenti valori di  $Q$  ma medesime distanze

La definitiva il potenziale in un punto casuale vale:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{Q_A}{r_0} + \frac{Q_A'}{r_0'} + \frac{Q_A''}{r_0''} + \dots + \frac{Q_B}{r_b} + \frac{Q_B'}{r_b'} + \frac{Q_B''}{r_b''} \right)$$

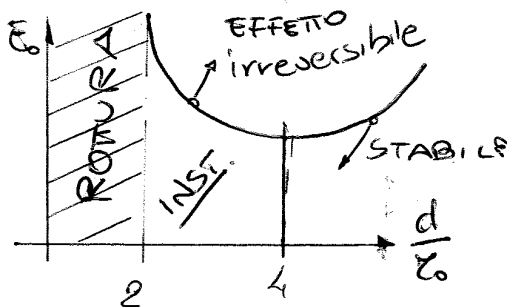
Assumo che  $Q_A = -Q_B$   $Q_A' = -Q_B'$  e così via e assumo  $r_0 = r_b$   $r_0' = r_b'$  e essendo noto che il potenziale sul piano di mezzaria è nullo ho:  
 UNA SCARICA SE L'ISOLANTE SI ROTTE  
 NON VI SONO SCARICHE SE L'ISOLANTE È L'ARIA

Da un lato zero tutte cariche positive dall'altro tutte cariche negative

Samminando il campo zero:

$$E_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} + \frac{Q_A r_0}{d 4\pi\epsilon (r_0 - b)^2} + \frac{Q_A r_0^2}{d(d-b) 4\pi\epsilon (r_0 - b')^2} \dots \frac{Q_A}{4\pi\epsilon (d - r_0)^2}$$

Possiamo analizzare come varia  $E_0$  in funzione  $\frac{d}{r_0}$



Siamo nel caso di cavi conduttori dove l'effetto corona (strato di ioni) fa aumentare  $r_0$  effettivo.

Condizione di duto isolante

Nella zona stabile se  $r_0$  aumenta  $E_0$  diminuisce  
 nella zona instabile se  $r_0$  aumenta  $E_0$  aumenta irreversibilmente fino a rottura dielettrica

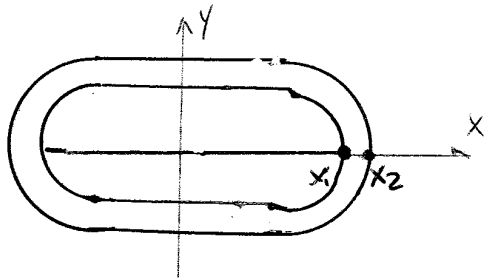
QUANDO LA SCARICA AVVIENE X RESTA' SULLO SPINTERO METRO E PER RESTA' SULL'ISOLANTE HO LA TENSIONE DI ROTURA.

considero che il segmento abbia uno spessore  $u$   
 ma  $l \gg d$

↓  
 consideriamo come un cilindretto sufficientemente piccolo  
 di coordinate  $(x=0, y=\frac{d}{2})$  e lungo  $2l$

Per il calcolo del campo elettrico  $\vec{E}$  si deve procedere  
 con una somma vettoriale integrata che complice  
 molto le cose a livello di calcolo.

Trovo che il campo elettrico all'interno del volume di  
 due ellissoidi del quale abbiamo definito i potenziali  
 è lo stesso che trovo all'interno del volume definito  
 dai punti che posseggono gli stessi potenziali delle  
 due superfici ellissoidali.



$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad \text{condensatore ellissoidale}$$

ipotizziamo di confondere la superficie ellissoidale  
 più vicina al segmento con il cilindretto.

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{Q}{\frac{Q}{8\pi\epsilon l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}{-l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}}$$

$$d \ll l$$

$$\sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}} = l \sqrt{1 + \frac{d^2}{4l^2}} \quad \text{faccio i primi 2 sviluppi di Taylor}$$

$$l + \frac{1}{2} \frac{d^2}{4l} \Rightarrow \ln \frac{l + l + \frac{d^2}{8l}}{-l + l + \frac{d^2}{8l}} = \ln \frac{2l}{\frac{d^2}{8l}} = \ln \frac{16l^2}{d^2} =$$

$$= 2 \ln \frac{4l}{d}$$

questo se  $d \ll l$  e appetti molti  
 allungati

$$\text{sostituisco} \Rightarrow C = \frac{Q}{\frac{Q}{8\pi\epsilon l} \ln \frac{16l^2}{d^2}} = \boxed{\frac{4\pi\epsilon l}{\ln \frac{4l}{d}}}$$

g

Se ne può dare una semplificazione

posto da  $\left(e^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = l \left(1 + \frac{d^2}{4e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  Sviluppo di Taylor

si ha da  $\approx l \left(1 + \frac{d^2}{8e^2}\right)$

$$V_{carica} = \frac{Q}{8\pi\epsilon l} \ln \frac{l + l + \frac{d^2}{8e^2}}{\cancel{l} + \cancel{l} + \frac{d^2}{8e^2}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon l} \cdot \ln \frac{16l^2}{d^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{4l}{d}$$

Però ora ho  $V_C$  calcolato  $V_I$  posso ricavare  $V'$

$$V' = V_C + V_I = \frac{Q}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{4l}{d} \frac{\sqrt{-l + \sqrt{l^2 + 4h^2}}}{\sqrt{+l + \sqrt{l^2 + 4h^2}}}$$

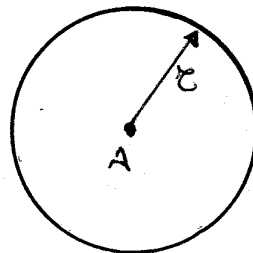
Quindi  $C = \frac{Q}{V'} = \frac{4\pi\epsilon l}{\ln 4 \frac{h}{d}}$  (con le dovute semplificazioni)

Campo elettrico prodotto da una distribuzione uniforme su una retta

Se le cariche sono distribuite su una retta che consideriamo normale al piano di rappresentazione la determinazione del campo è ottenibile con il teorema di Gauss

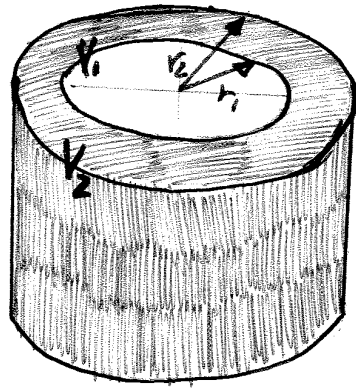


Infatti è una superficie chiusa costituita da un cilindro il cui asse coincide con la retta stessa di raggio  $r$  e lunghezza  $l$



Si può costruire un condensatore cilindrico con capacità

$$C_{12} = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



Al campo massimo si ha sulla corona di raggio  $r_1$

Poiché:

$$V_1 = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r_1 + \text{cost} \quad \text{e} \quad V_2 = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r_2 + \text{cost}$$

(e il logaritmi per valori maggiori di 1) attenua

Posso considerare anche il campo prodotto da 2 rette parallele con distribuzioni uniformi

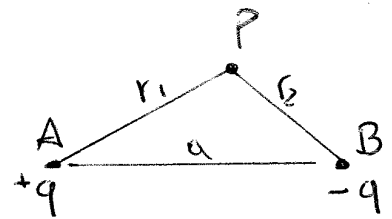
Quando si ha tale situazione le tracce delle superfici equipot.

su un piano normale alle 2 rette e le linee di flusso risultano delle circonferenze.

A e B sono le tracce delle 2 rette e siano  $q$  e  $-q$

le densità lineari di carica

di A e B. Su un punto generico P è possibile calcolare il potenziale



$$\begin{aligned} V &= -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r_2 + \text{cost} = \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + \text{cost} \end{aligned}$$

Le curve delle tracce delle superficie equipotenziali si ottengono dalla relazione

$$\frac{r_2}{r_1} = K \text{cost} = K$$

Tali curve sono circonferenze di raggio  $r_0$

||

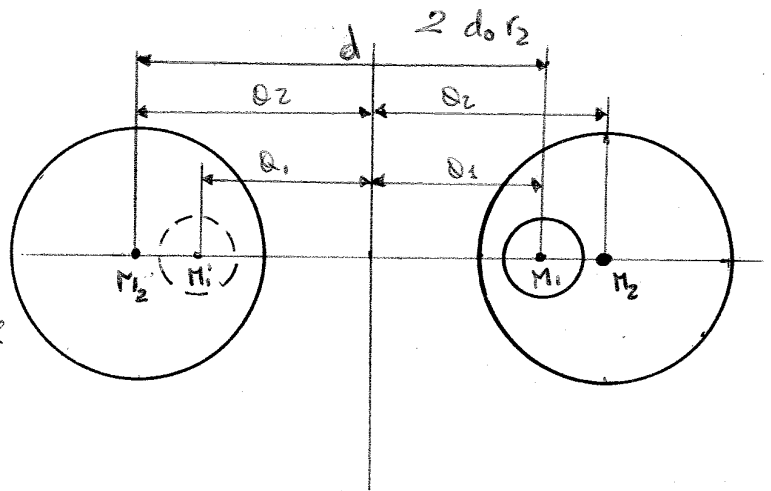
Indicando con  $d_0$  la distanza tra i centri  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  delle due circonferenze si ottiene

$$d_0 = d_2 - d_1 = K_2 r_2 - K_1 r_1 = \frac{r_2}{K_2} - \frac{r_1}{K_1} = b_2 - b_1$$

facendo il sistema

$$\begin{cases} K_2 r_2 - K_1 r_1 = d_0 \\ \frac{r_2}{K_2} - \frac{r_1}{K_1} = d_0 \end{cases} \quad \text{risolto e ottenuto} \quad \begin{cases} K_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - d_0^2 \pm \sqrt{(r_2^2 - r_1^2 - d_0^2)^2 - 4r_1^2 d_0}}{2d_0 r_1} \\ K_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d_0^2 \pm \sqrt{(r_2^2 - r_1^2 + d_0^2)^2 - 4r_1^2 d_0}}{2d_0 r_2} \end{cases}$$

La presenza di due valori di  $K$  è giustificato dal fatto che si ha una situazione immagine



Il potenziale di ogni circonferenza è dato da:

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln K$$

Ove  $K$  può valere  $K_1$  e  $K_2$

risultano che le due soluzioni di  $K$  risultano essere l'una eguale all'inverso dell'altra. Consideriamo i due valori di  $K$  si ha:

$$\frac{r_2^2 - r_1^2 - d_0^2 + \sqrt{(r_2^2 - r_1^2 - d_0^2)^2 - 4r_1^2 d_0^2}}{2d_0 r_2} = \frac{2d_0 r_1}{(r_2^2 - r_1^2 - d_0^2) - \sqrt{(r_2^2 - r_1^2 - d_0^2)^2 - 4r_1^2 d_0^2}}$$

effettuando la moltiplicazione incrociata si ha:

$$(r_2^2 - r_1^2 - d_0^2)^2 - (r_2^2 - r_1^2 - d_0^2)^2 + 4r_1^2 d_0^2 = 4r_1^2 d_0^2$$

si determinano ora le distanze  $Q_1$  e  $Q_2$  tra la retta  $S$  a potenziale zero e rispettivamente i centri  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  delle due circonferenze. Si ha per  $Q_1$

$$Q_1 = \frac{d_1 - b_1}{2} + b_1 = \frac{d_1 + b_1}{2}$$

con opportune sostituzioni

$$Q_1 = \frac{K_1 r_1 + \frac{r_1}{K_1}}{2} = \frac{K_1 r_1 + K_1' r_1}{2} = \frac{r_2^2 - r_1^2 - d_0^2 + R + r_2^2 - r_1^2 - d_0^2 - R}{4d_0} = \frac{r_2^2 - r_1^2 - d_0^2}{2d_0}$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln K^2 = \frac{q}{\pi\epsilon} \ln \frac{d + \sqrt{d^2 - 4r^2}}{2r}$$

La capacità e per unità di lunghezza risulta allora:

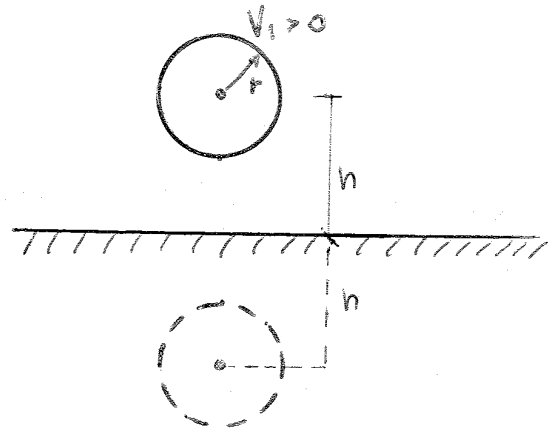
$$C = \frac{q}{V} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d + \sqrt{d^2 - 4r^2}}{2r}}$$

nel caso che consideriamo in cui  $r \ll d$

"e" e' approssimabile:  $C = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{r}}$

Conduttore parallelo alla superficie Terrestre

Avevo un conduttore cilindrico metallico posto ad una certa distanza  $h$  da una superficie eq. ossia la superficie Terrestre



Utilizzo il principio delle immagini

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln K_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h + \sqrt{4h^2 - 4r^2}}{2r} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - r^2}}{r}$$

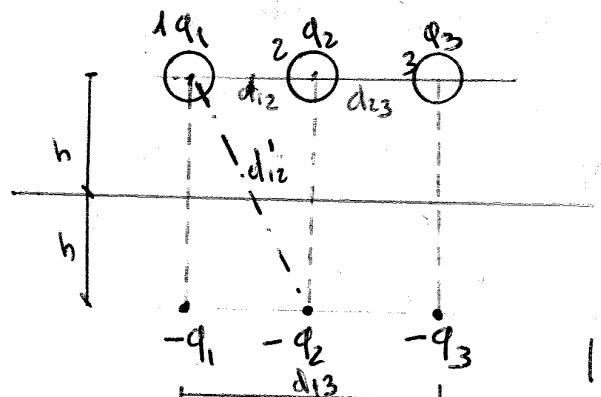
Si ha quindi un valore di capacità:

$$C = \frac{q}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - r^2}}{r}}$$

se  $r \ll h$   
 ottengo  
 $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{2h}{r}}$

Poniamo il caso di una linea elettrica dove ci siano più conduttori.

I conduttori hanno stesso raggio. Determinare il potenziale sui conduttori quando cariche le coriche.



Risolve con metodo delle immagini

Usando il principio di sovrapposizione o meglio conservazione delle cariche posso esplicitare delle relazioni

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n q_k = 0$$

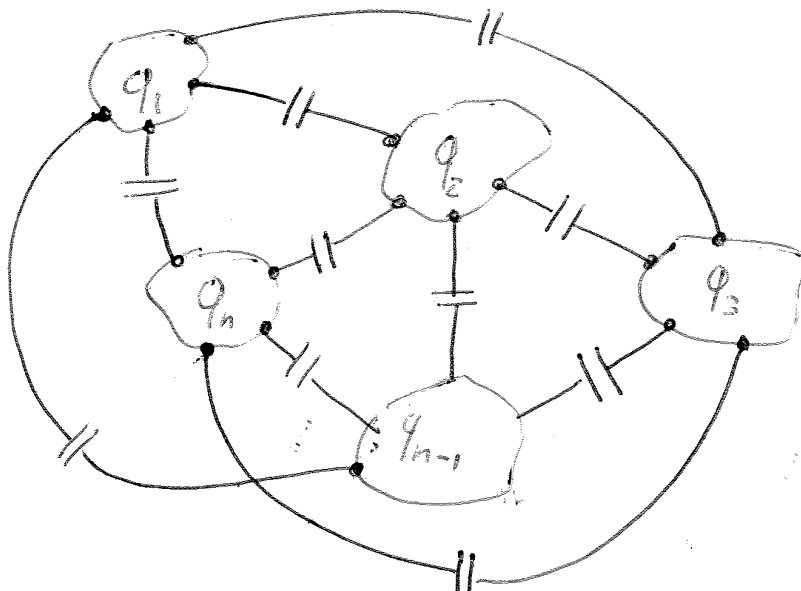
$$q_{1n} = -q_1 - q_2 + \dots - q_{n-1}$$

$$\begin{cases} V_{1n} = (b_{11} - b_{1n}) q_1 + (b_{12} - b_{1n}) q_2 + \dots + (b_{1n-1} - b_{1n}) q_{n-1} \\ V_{n-1} = (b_{n-1,1} - b_{n-1,n}) q_1 + \dots + (b_{n-1,n-1} - b_{n-1,n}) q_{n-1} \end{cases}$$

Ora invertiamo il sistema

ossia  $q = f(V_1, \dots, V_{n-1})$

$$\begin{cases} q_1 = \tau_{11} V_1 + \dots + \tau_{1,n-1} V_{n-1} \\ q_{n-1} = \tau_{n-1,1} V_1 + \dots + \tau_{n-1,n-1} V_{n-1} \end{cases}$$



Immagino tante capacità tra qui opposto metallico che sono considerate armature

$$\begin{cases} q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} (V_1 - V_2) + \dots + C_{1,n-1} (V_1 - V_{n-1}) \\ q_{n-1} = C_{n-1,1} (V_{n-1} - V_1) + \dots + C_{n-1,n-1} (V_{n-1}) \end{cases}$$

Nota i conduttori sono soggetti ad un campo elettrostatico immerso in un materiale isolante.

Definendo l'operatore tra i due sistemi dove  $q = f(\tau)$  e  $q = f(c)$  ricavo  $c$ .



partendo dalla situazione  $\vec{E} = \vec{D} = 0$   
 voglio vedere quanto energia è immagazzinata nel condensatore

$$\Sigma = \frac{1}{2} \epsilon E^2 A b = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} A b$$

$$V_2 - V_1 = - \int E dx = - E x \Big|_0^b$$

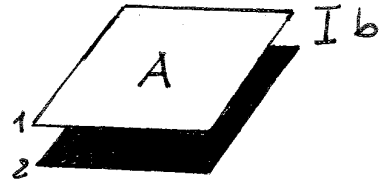
$$V_2 - V_1 = - E b$$

$$V_1 - V_2 = E b$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} \epsilon E A \cdot E b =$$

$$= \frac{1}{2} D A (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2)$$

$$= \frac{1}{2} e (V_1 - V_2) (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



Se muovo le armature modifico la capacità ma non la tensione ma la carica non cambia.

$$C = \epsilon \frac{A}{b} \text{ condensatore armature piane}$$

$$Q = C (V_1 - V_2) = \epsilon \frac{A}{b} (V_1 - V_2)$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon A} b$$

cambiando b cambia  $\Sigma$

Il lavoro fatto dalla forza per spostare l'armatura è

$$F_x = - \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \Big|_{Q \text{ cost}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \Big|_{V = \text{cost}}$$

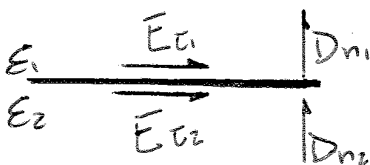
Tale lavoro fatto dalla forza  $\Rightarrow$  si è trasformato in energia immagazzinata nel condensatore.

$$f_x = - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{D = \text{cost}} = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{E = \text{cost}}$$

Il verso va' del mezzo con permeabilità più alta e quello con permeabilità più bassa.

$$P = \frac{1}{2} \left[ (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_t^2 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} D_n^2 \right]$$

forza per unità di superficie



## Campi di correnti statici

Si definisce campo di correnti statico una regione di spazio in cui ha sede una distribuzione continua di correnti elettriche in regime stazionario.

Le equazioni del campo di correnti sono:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

dove  $\sigma$  rappresenta la conducibilità del mezzo.

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

RESISTIVITÀ

È un campo armonico poiché è irrotazionale

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

e solenoideale.

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \vec{J} d\tau = \oint_{S=\partial\tau} \vec{J} d\vec{S} = 0$$

ossia  $\sum_{i=1}^n \int_{S_i} \vec{J} d\vec{S}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{S_i} J_n dS = 0$

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{L=\partial S} \vec{E} d\vec{L} = 0$$

ricaso legg. Teorema

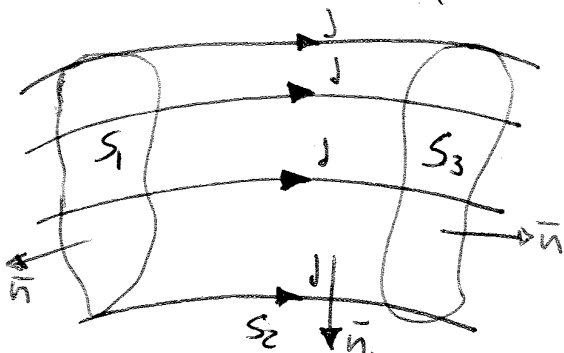
La componente normale del vettore densità di corrente si mantiene costante

$$j_{n1} = j_{n2}$$

Poiché  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  la componente tangenziale del vettore campo elettrico si mantiene costante

$$E_{t1} = E_{t2}$$

Considero due superfici



Tubo di flusso

$$\oint \vec{J} d\vec{S} = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J} d\vec{S} = 0$$

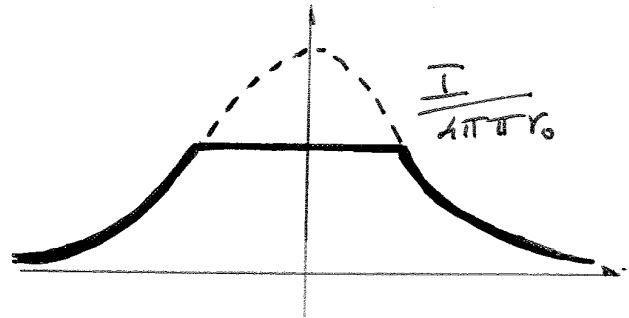
$$\vec{E} = -\text{grad } V = \frac{J}{\sigma} \Rightarrow -\text{grad } V = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{4\pi r^2 \sigma} \vec{r}$$

$$V = -\frac{I}{4\pi\sigma} \int \frac{1}{r^2} dr \quad \text{campo radiale}$$

Sviluppo e ottengo  $V = \frac{I}{4\pi\sigma r} + K \text{cost}$

$$V(\infty) = 0 \Rightarrow K = 0$$

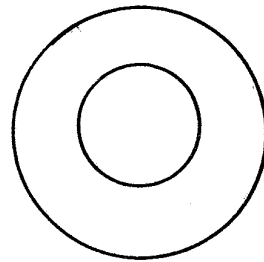
Il potenziale è uniforme  
non solo sul conduttore  
ma su tutto il volume  
della sfera



$V_0$  è il potenziale  
sul materiale metallico  $\Rightarrow$

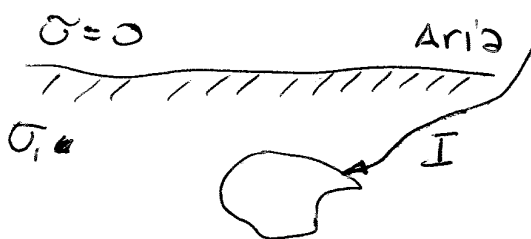
$$V_0 = \frac{I}{4\pi\sigma r_0} = I R_T$$

$V = \frac{I}{4\pi\sigma r}$  è potenziale  
dovuto ad  
una sfera  
internata

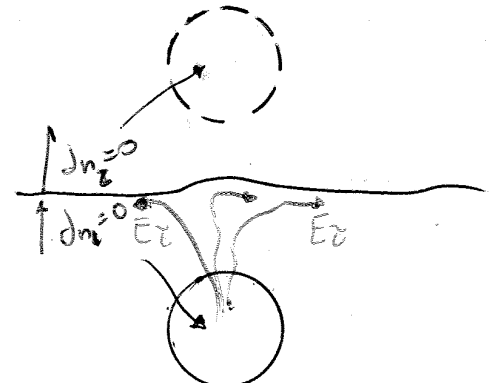


$$-V_{\text{out}} V_0 = \underbrace{\frac{I}{4\pi r_0}}_{R_T} I$$

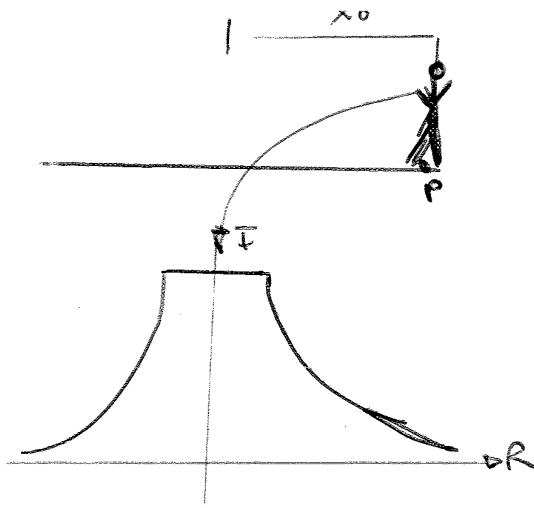
Posso analizzare il caso di una sfera in cui è  
ipercritica corrente come un caso da analizzare



applico  
il principio  
delle  
immagini  $\Rightarrow$



visto che  $J_{n1} = J_{n2} = 0$   
il campo sarà  
comparte potenziale



$$V(x_0) = \frac{2I}{4\pi\sigma\sqrt{h^2+x_0^2}}$$

$$\Delta V = V_0 - V(x_0) = \frac{I}{4\pi\sigma r_0} \left(1 + \frac{r_0}{2h}\right) - \frac{2I}{4\pi\sigma\sqrt{h^2+x_0^2}}$$

La Tensione totale della terra vale:

$$V_T = R_T I$$

La Tensione di ~~passo~~ è

$$V_p = V(x_0) - V(x_0+1)$$

Per decidere dove è massima la Tensione di passo devo vedere dove è massima la pendenza delle curve che descrive l'andamento del potenziale.

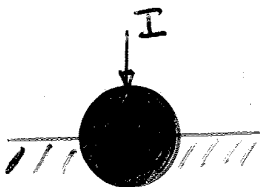
Quindi:

$$\frac{d^2 V(p)}{dx^2} = 0 \quad x_1 \approx \frac{h}{\sqrt{2}} = 0,707 h$$

↓  
 distanza dal punto di interramento alla quale è massima la Tensione di passo.

la formula che definisce  $x_1$  è valida per qualsiasi geometria passapasso e dissipatori.

Può essere che la sfera non è completamente interrata e il cui centro corrisponde con la superficie terrestre...



$$V_0 = \frac{2I}{4\pi\sigma r_0}$$

↓  
 è dato alla carica immagine

$$V_T = \frac{2I}{4\pi\sigma x} \quad \text{tensione del terreno}$$

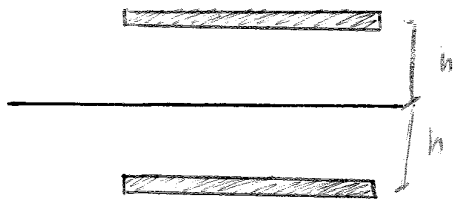
(Passo immaginare sfera che ha una densità con  $\frac{I}{\epsilon}$ )

$$\approx \ln \frac{L + L(1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{4L^2})}{-L + L(1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{4L^2})} = \ln \frac{2L}{\frac{d^2}{8L}} = \ln \frac{16L^2}{d^2} = 2 \ln \frac{4L}{d}$$

$$V_0 = \frac{I}{4\pi\sigma L} \ln \frac{4L}{d}$$

Comunque sia disposto il dissipatore si parla con il metallo delle immagini

Dispensore orizzontale



$$V_0 = V_0' + V_0''$$

$$V_0' = \frac{I}{8\pi\sigma L} 2 \ln \frac{4L}{d}$$

$$V_0'' = V(x=0; y=2h) = \frac{I}{8\pi\sigma L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + 4h^2}}{-L + \sqrt{L^2 + 4h^2}}$$

$$V_0 = \frac{I}{4\pi\sigma L} \left[ \ln \frac{4L}{d} \sqrt{\frac{L + \sqrt{L^2 + 4h^2}}{-L + \sqrt{L^2 + 4h^2}}} \right]$$

potenziale sul dispensore

Se voglio calcolare il potenziale in un punto P sul terreno posso moltiplicare per due il contributo di una sorgente essendo queste simmetriche rispetto al terreno

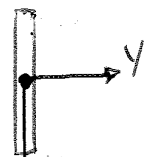
$$V_p = 2 \cdot \frac{I}{8\pi\sigma L} \ln \frac{(x+L) + \sqrt{(x+L)^2 + h^2}}{(x-L) + \sqrt{(x-L)^2 + h^2}}$$

potenziale sul terreno

Dispensore verticale

Calcolo il potenziale del dispensore nel terreno.

$$V_0 = V_0' + V_0'' = V(x=0; y=\frac{d}{2}) + V(x=2h+2\ell; y=0)$$



Energia immagazzinata in un corpo elettrostatico

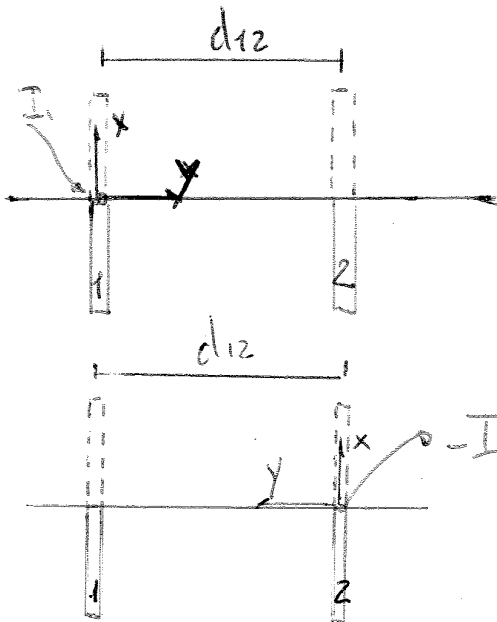
$$W_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{con } C = \frac{Q}{V}$$

e l'energia è ottenibile dalle forze  $\vec{F}_x = -\frac{dW_c}{dx} \Big|_{D=\text{cost.}}$

Dispensori:

Riprendendo il concetto dei dispensori vediamo che se i dispensori sono vicini non si comportano come resistenze in serie  $\Rightarrow$  Non esiste più la zona costante  $\Rightarrow$  interazione

Analizziamo il caso dell'interazione



ed ecco le tensioni:

$$V_1' = R_{11} I_1$$

$$V_2' = R_{21} I_1$$

$$\Downarrow \\ (\text{for } x=0, y=d_{12})$$

$$V_1'' = f(x=0; y=d_{12}) = R_{12} I_2$$

$$V_2'' = R_{22} I_2$$

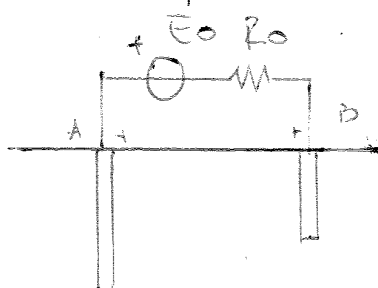
$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &= V_1' + V_1'' = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ V_2 &= V_2' + V_2'' = R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 - R_{12} I \\ V_2 &= R_{21} I - R_{22} I \end{aligned} \right.$$

partendo dai vincoli, posso analizzare meglio il caso:

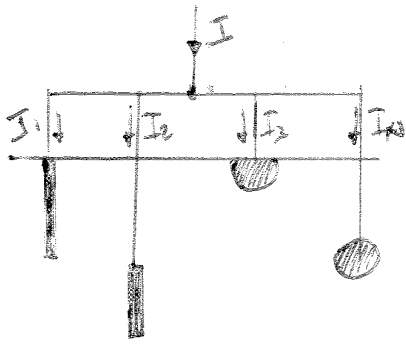
1) caso che  $I_1 = -I_2 = I$

sottovaluto la distanza tra i dispensori.



(20)

Ipotizzo di avere  $n$  dispersori in parallelo e tutti interconnessi ovvero:



$$\begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \dots + R_{1N}I_N \\ \vdots \\ V_N = R_{N1}I_1 + R_{N2}I_2 + \dots + R_{NN}I_N \\ V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_N \\ I = I_1 + I_2 + \dots + I_N \end{cases}$$

Invertendo la matrice Trovo:

$$\begin{cases} I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \dots + G_{1N}V_N \\ \vdots \\ I_N = G_{N1}V_1 + \dots + G_{NN}V_N \end{cases}$$

Le formule generali:  $I = \sum_k I_k = \left( \sum_i \sum_k G_{ik} \right) V$

### Campi Magnetici

Le relazioni costitutive del campo magnetico sono:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

↳ permeabilità magnetica

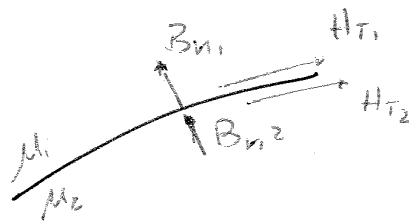
$\left[ \frac{A}{m} \right] \quad \left[ \frac{A}{m^2} \right]$

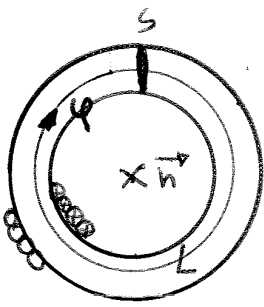
↳ accoppiamento con le eq. del campo corrente statico  $\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{j} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$  ricerca  $\vec{j}$  e lo sostituisco nel campo magnetostatico.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \rightarrow \text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \vec{j}$$

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$\propto \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = 0 \Rightarrow H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$$





Il flusso  $\phi$  è una grandezza scalare  $\Rightarrow$  con segno che dipende dalla normale ds

$$\oint_L H dL = R \phi \quad \text{dove } R = \frac{L}{S_0}$$

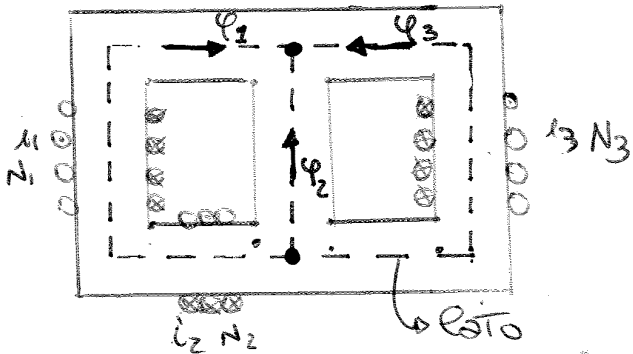
L è la linea di campo medio del solenoide.

$$\oint_L H dL = R \phi = \oint_{S_0} J ds \quad S_0 = \text{superficie che ha contorno } L$$

$$R \phi = \oint_{S_0} J ds = NI \quad N = \text{numero conduttori}$$

flusso x riluttanza = n° spire x corrente che passa nelle spire

potrebbe di avere una struttura di questo tipo



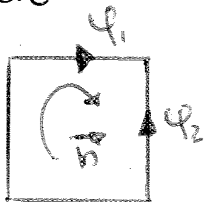
La linea tratteggiata è la linea medio del circuito magnetico

Ad ogni nodo associo un flusso (che è costante lungo un lato) e decido per il flusso un verso arbitrario.

Ad ogni nodo • scrivo un'equazione dei flussi

quindi avrò n-1 equazioni ai nodi

Allora dovrò scrivere l-n+1 equazioni per le maglie magnetiche



maglia 1

$$R_1 \phi_1 - R_2 \phi_2 = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$$



possiamo affermare che il flusso magnetico  $\varphi$  passa per una linea media...

Abbiamo 3 tipi di flusso:

$$\varphi = \oint B ds \cong B_p S_p \cong B_{fe} S_{fe} = B_e S_e$$

non essendoci correnti  $\oint J ds = 0 \Rightarrow \oint H dl = 0$

$$H_p L_p + H_{fe} L_{fe} + H_e L_e = 0$$

$$H_{fe} = \frac{B_{fe}}{\mu_{fe}} = \frac{\varphi}{S_{fe} \mu_{fe}} = \frac{B_p S_p}{S_{fe} \mu_{fe}} \quad \text{eppure} \quad H_e = \frac{B_e}{\mu_e} = \frac{\varphi}{S_e \mu_e} = \frac{B_p S_p}{S_e \mu_e}$$

riscrivendo ottego:

$$H_p L_p + \frac{B_p S_p}{S_{fe} \mu_{fe}} L_{fe} + \frac{B_p S_p}{S_e \mu_e} L_e = 0 \quad \mu_e = \mu_0$$

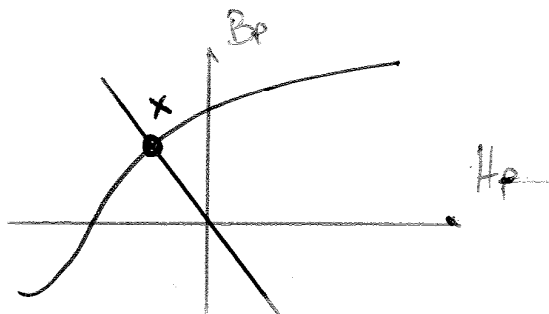
piccoli  $\Rightarrow \mu_{fe} \text{ molto alto} \quad \mu_{fe} = \mu_r \mu_0 \quad \mu_r \gg 1$

quindi:

$$H_p L_p = - B_p \left( \frac{S_p}{S_e \mu_0} L_e + \frac{S_p}{S_{fe} \mu_r \mu_0} L_{fe} \right)$$

ricavo  $B_p = - \frac{L_p}{\left( \frac{S_p}{S_e \mu_0} L_e + \frac{S_p}{S_{fe} \mu_r \mu_0} L_{fe} \right)} \cdot H_p$

Si ha una retta e perdute negativa e l'incrocio  $x$  è il punto di lavoro



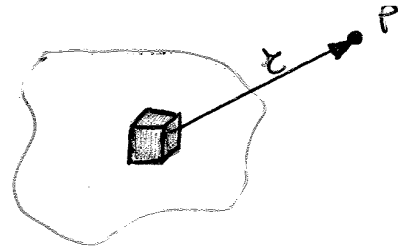
$H_p$  è negativo

$$H_{fe} L_{fe} + H_e L_e > 0$$

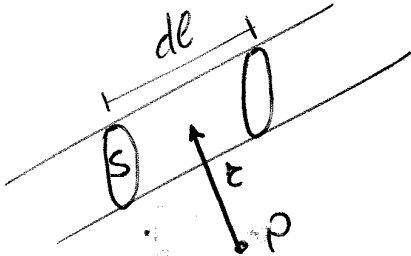
Quindi il campo magnetico nel magnete permanente è orientato in verso opposto rispetto al campo nell'aria e nel ferro dolce.

$$\vec{V}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{r} d\tau \quad r = \text{volume}$$

posso quindi calcolare  $\nabla$



Tale calcolo è molto semplice nel caso di conduttori filiformi



$$d\tau = S dl$$

$$\vec{J} = \frac{I}{S} d\vec{l}$$

il potenziale vettore in P è:

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu \vec{J} d\tau}{r} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I}{S} \frac{d\vec{l} dl S}{r} = \\ &= \frac{I \mu}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r} \end{aligned}$$

La corrente  $I$  è costante poiché  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{V} = \frac{I}{4\pi} \text{rot } \oint \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{I}{4\pi} \oint \text{rot} \left( \frac{d\vec{l}}{r} \right)$$

$$\text{ma } d\vec{l} = dx_0 \vec{i} + dy_0 \vec{j} + dz_0 \vec{k}$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \Rightarrow r = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

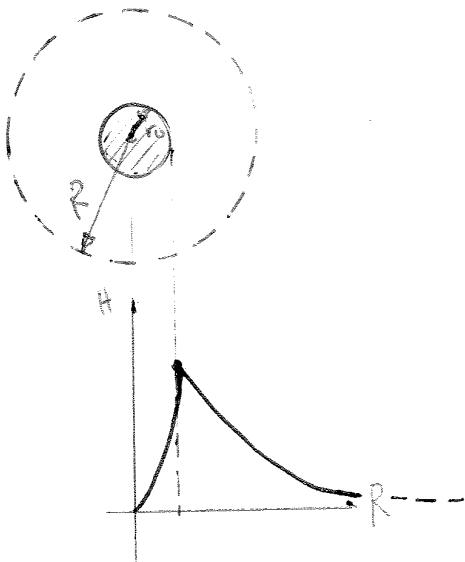
$$\text{rot} \left( \frac{d\vec{l}}{r} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{dx_0}{r} & \frac{dy_0}{r} & \frac{dz_0}{r} \end{vmatrix}$$

$$\text{rot} \left( \frac{d\vec{l}}{r} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \frac{dz_0}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{dy_0}{r}$$

in generale risiedo la matrice e ricavo in condizione che:

$$\text{rot} \left( \frac{d\vec{l}}{r} \right) = \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

LEGE BIOT-SAVART  $\Sigma$

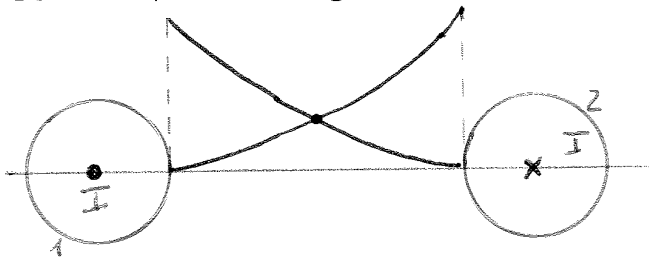


$$J = \frac{I}{\pi r_0^2}$$

$$H = \pi R = \frac{I}{\pi r_0^2} (R^2 \pi)$$

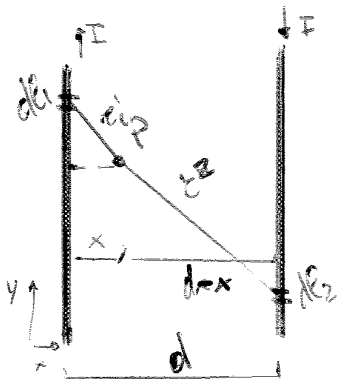
$$H = \frac{IR}{2\pi r_0^2} \quad 0 \leq r \leq r_0$$

Se considero due conduttori paralleli percorsi da correnti inverse tra di loro.



Il campo  $H = H_1 + H_2$

$k \frac{1}{4\pi}$



$$\vec{A} = \sum \frac{\mu}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}}{r}$$

$$V_1 = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{r_1}$$

$$V_2 = -\frac{\mu I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{r_2}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\mu I}{4\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} \right]$$

visto che la funzione è pari  $\rightarrow$  integro tra 0 e  $+\infty$  e moltiplica per 2.

$$V = \frac{\mu I}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} \right]$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi} \left\{ \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \Big|_0^{\infty} - \ln((d-x) + \sqrt{(d-x)^2 + y^2}) \Big|_0^{\infty} \right\}$$

$$V = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{d-x}{x}$$

Quindi trascuriamo le correnti di spostamento nel campo magnetico

$$\text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

visto che si ha variazione di tempo il campo elettrico è influenzato da un campo magnetico

bilaterale  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Partiamo dalle equazioni:  $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{V}$   
 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{V} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$

$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = 0$  Campo elettrico irrotazionale + derivato nel tempo del potenziale vettore.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\text{grad } V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \text{grad } V \quad \text{risolto} \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \oint_L \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot d\vec{e} - \oint_L \text{grad } V \cdot d\vec{e}$$

Meglio identificato come:

LEGE DI FARADAY

sapendo che  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  dove ( $\text{div } \vec{B} = 0$ )

da cui  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V$   $B = \text{rot } \vec{A}$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \oint_L \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{e} - \oint_L \text{grad } V \cdot d\vec{e}$$

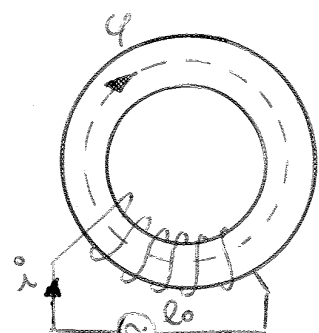
$\underbrace{\hspace{10em}}_{Ri}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{-\frac{d\psi}{dt} = \mathcal{E}_{em}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{come detto } \sum E_n}$

$$B = \text{rot } \vec{A} \quad \int_S B \cdot ds = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot ds = \oint_{L=\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{e}$$

Se "J" è variabile nel tempo lo è anche "i" e quindi anche "ψ"

$$R\psi = Ni$$

$$\text{rot } H = J \quad \text{div } B = 0 \rightarrow \sum \psi$$



definizioe linee  $L_2$

$$\lambda_2 = N_2 \varphi = \frac{N_2 N_1}{R} i_1 + \frac{N_2^2}{R} i_2$$

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} \quad e_2 = \frac{d\lambda_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{AB} = e_1 + R_1 i_1 \\ V_{CD} = e_2 + R_2 i_2 \end{cases}$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{N_1^2}{R} \frac{di_1}{dt} + \frac{N_1 N_2}{R} \frac{di_2}{dt} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{N_1 N_2}{R} \frac{di_1}{dt} + \frac{N_2^2}{R} \frac{di_2}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \\ \lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \end{cases}$$

si ha che  $L_{11}, L_{22}$  autoinduttanze  
 $L_{21}, L_{12}$  mutue induttanze

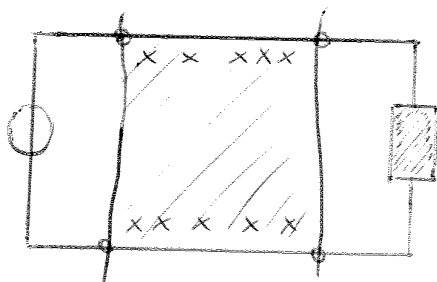
$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1 \frac{d\varphi}{dt}}{N_2 \frac{d\varphi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{d(N_1 \varphi)}{d(N_2 \varphi)} = \frac{N_1 d\varphi}{N_2 d\varphi}$$

Il rapporto tra le tensioni è uguale a quello tra le spire trascurando l'effetto resistivo.

Se il circuito della spira 1 è alimentato mentre il circuito 2 non lo è, ho comunque una f.e.m. indotta dovuta all'effetto dell'1.

Abbiamo così in cui si ricassa subito il circuito magnetico e subito rappresentabile circuitamente



ci chiediamo come si comporta in regime variabile

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V$$

integrato su una linea chiusa

$$\lambda = \frac{N^2}{R} i \quad \varphi = \frac{\lambda}{N}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = \oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{e} - \oint \text{grad } V \cdot d\vec{e}$$

$\underbrace{\quad}_{-d\lambda}$

se  $\lambda = \varphi = L i$

peraltro  $\lambda_{e\text{-tot}} = 2 \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D-r_0}{r_0}$

peraltro  $L_e = 2 l \left[ \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D-r_0}{r_0} \right]$

Calcolo il campo interno

$$\lambda_{\text{int}} = \int B ds = \mu_0 \int H dr$$

E' complesso determinare i calcoli.

Opero su un solo conduttore

$$\varphi_i = \mu_0 \int_0^{r_0} H dr = \mu_0 \int_0^{r_0} \frac{I}{2\pi r^2} r dr = \mu_0 \frac{I}{2\pi r_0^2} \frac{1}{2} (r^2)_0^{r_0} =$$

$$= \mu_0 \frac{I}{4\pi r_0^2} r_0^2 \quad \text{Tale flusso non coincide con } \lambda_i$$

oppo considerando le correnti che passano in una porzione interna del conduttore

$$\lambda_i = \mu_0 \int l H dr \cdot \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r_0^4} \frac{r_0^4}{4} = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

$$\frac{\lambda_i}{I} = \frac{l \mu_0}{8\pi} \quad \text{induttanza interna}$$

Posso stabilire l'induttanza per unità di lunghezza

$$\frac{\lambda_i}{l I} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

Quindi nelle linee bifilare con conduttori paralleli ho una induttanza per unità di lunghezza

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{D-r_0}{r_0} + \frac{1}{4} \right)$$

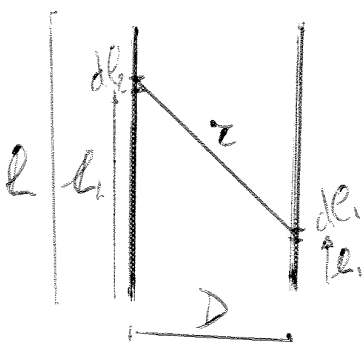
$$\oint_{L_2} \bar{\Delta} d\bar{e}_2 = \oint_{L_2} \left[ \mu_0 \frac{I}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{de_1}{r} \right] de_2 = \lambda_{21}$$

da cui ricavo le mutue induttanze

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{de_1 d\bar{e}_2}{r}$$

facendo il calcolo inverso questo  $L_{12}$  coincide con  $L_{21}$   $L_{21} = L_{12}$

Calcolo di mutua induttanza



$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{dl_1 dl_2}{\sqrt{(l_2 - l_1)^2 + D^2}}$$

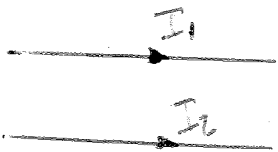
$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ l \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + D^2}}{-l + \sqrt{l^2 + D^2}} - 2\sqrt{l^2 - D^2} + 2D \right]$$

$$L_{21} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \ln \frac{2l}{D} - 1 \right]$$

$$L = L_{mutua} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left[ \ln \frac{2l}{r_0} - \frac{3}{4} \right]$$

(CASO COND. CIRCOLARE)

ovviamente si riferisce a tutte le mutue induttanze dello stesso conduttore



$$I_1 + I_2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \\ \lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \end{cases}$$

$\lambda_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$  flusso concatenato

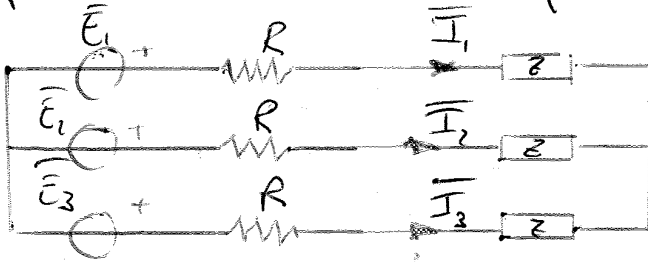
$$I_1 = -I_2 \quad \lambda_{12} = L_{11} I_1 - L_{12} I_1 - L_{21} I_1 + L_{22} I_1$$

$$\lambda_{12} = (L_{11} - L_{12}) I_1 + (L_{22} - L_{21}) I_1$$

29

$$\frac{L_{s1}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln \frac{D}{r} + \frac{1}{2} \right] \text{ induttanza di servizio o ind. equivalente delle linee}$$

rappresento il circuito equivalente:

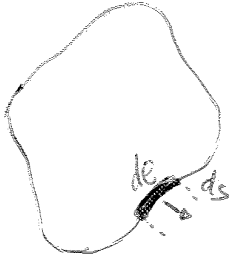


$$\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = (\bar{I}_1 - \bar{I}_2)(R + \bar{Z}) + j\omega(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)$$

$$\bar{E}_2 - \bar{E}_3 = (\bar{I}_2 - \bar{I}_3)(R + \bar{Z}) + j\omega(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3)$$

$$j\omega(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) = j\omega [(\mathcal{L}\bar{I}_1 + M\bar{I}_2 + M'\bar{I}_3) - (\mathcal{L}\bar{I}_2 + M\bar{I}_1 + M'\bar{I}_3)]$$

Variazioni di flusso ...



Supponiamo che de si sposti in ds

$$d\phi = \bar{B} d\bar{s} = \bar{B} (d\bar{s} \times d\bar{e})$$

Voglio considerare la variazione di flusso

$$de = \frac{d\phi}{dt} = B \cdot \left( \frac{d\bar{s}}{dt} \times d\bar{e} \right)$$

$$de = B \cdot \vec{v} \times d\bar{e}$$

$$e = - \oint \vec{v} \times \bar{B} \cdot d\bar{e} \quad \text{in quanto} \quad \bar{B} \cdot \vec{v} \times d\bar{e} = - \bar{B} \times \vec{v} \cdot d\bar{e}$$

↳ forse elettromotrice indotta...

Se in generale un conduttore che si muove rispetto ad un campo magnetico posso associare una forza elettromotrice

Ciò si può verificare se si ha una velocità relativa in quanto l'elemento si muove ma il corpo no!!

$$\text{rot } \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \bar{B}$$

$$\oint_{L=\partial S} \bar{E} d\bar{e} = - \int_S \bar{B} d\bar{s} + \oint_S \vec{v} \times \bar{B} d\bar{e}$$

parliamo il caso di una spira percorsa da una corrente e attraversata da un campo B che le induce la rotazione



Il contributo delle fem. nei tratti AD e CD sarà nullo poiché le 3 componenti sono complanari.

$$\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{e}$$

$$(\vec{v} \times \vec{B})_{\perp} d\vec{e} \Rightarrow$$

$$(\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{e} = 0$$

si ha solo contributo nei tratti di lunghezza  $l$  (hanno medesimo valore)

Richiamo sul vettore di Poynting (in sinusoidale)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

in generale  
così come da:

$$\vec{H} \text{ rot } \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \vec{E} \vec{J} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \text{ rot } \vec{H} - \vec{H} \text{ rot } \vec{E} = \vec{E} \vec{J} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \text{div } \vec{P} \quad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

noi lo consideriamo in condizioni sinusoidali quindi:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} = \sigma\vec{E} + j\omega\epsilon\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \sigma E^2 + j\omega\epsilon E^2 \\ \vec{H} \text{ rot } \vec{E} = -j\omega\mu H^2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\vec{E} \text{ rot } \vec{H} - \vec{H} \text{ rot } \vec{E}}_{\substack{\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) \\ \text{div } \vec{P}}} = \underbrace{\sigma E^2 + j\omega\epsilon E^2}_{\vec{J}^2} + j\omega\mu H^2$$

$$\int \text{div } \vec{P} d\tau = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int \vec{J}^2 d\tau + j\omega \int \mu H^2 + \epsilon E^2 d\tau$$

$$H = B e^{-\gamma y}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{e} &= 0 \\ \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{e} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{perché } \vec{H} \perp d\vec{e} \text{ in ogni punto}$$

$$\vec{H} \cdot d\vec{e} = 0 \Rightarrow \text{se } \vec{H} \perp d\vec{e}$$

$$\oint_{L=\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{e} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{e} \Rightarrow \vec{H} \parallel d\vec{e} \rightarrow \vec{H} \cdot d\vec{e} = H de$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{e} = \int_0^b H de = Hb = H(y=0) \cdot b$$

↳ il segmento  $\overline{AB}$  è orizzontale ed ha una porta costante  $y=0$

quindi si ha:

$$\oint_{\partial S=L} \vec{H} \cdot d\vec{e} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$H_0 b = I_b$$

$$H_0 = \frac{I_b}{b}$$

$$H(y=0) = H_0 = B$$

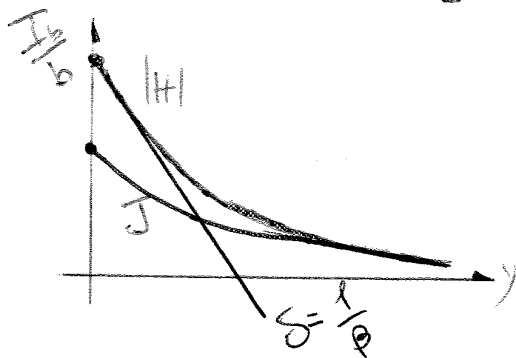
$$B = \frac{I_b}{b}$$

$$H = \frac{I_b}{b} e^{-\gamma y} = \frac{I_b}{b} e^{-\beta y} e^{-j\beta y}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = \sigma E$$

$$E = \frac{1}{\sigma} \gamma \frac{I_b}{b} e^{-\gamma y} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \frac{1}{\sigma} (1+j) \frac{I_b}{b} e^{-\gamma y}$$

$$\sigma E = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1+j) \frac{I_b}{b} e^{-\gamma y}$$



dopo  $4 \div 5 \delta$  tende a  $\emptyset$

$\delta$  spessore di penetrazione

$$\delta = [\text{m}]$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

questo prende il nome di effetto ~~per~~ pelle.

Facciamo alcune considerazioni espresse utilizzando il vettore di Poynting

La resistenza induttiva che traversiamo è relativo al flusso interno del conduttore

Il flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie chiusa  $S$  mi dà la potenza complessa Totale



$$-\oint \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} = P$$

complesso potere

$$E_0 H_0^* b l = \frac{\gamma}{\sigma} \frac{I_b}{b} \frac{I_b^*}{b} l = |I_b|^2 \frac{l}{\sigma b} \gamma = Z_{ep}$$

Il circuito equivalente sarà del tipo:



$$Z_{ep} = \frac{l}{\sigma b} \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1+j) \quad \text{parte immaginaria positiva}$$

La resistenza è quella di un parallelepipedo di dimensioni  $\delta, b, l$  calcolata con le formule dei conduttori filiformi.

$$R = \rho \cdot \frac{l}{\delta b}$$

asp. verticale  
 \* 2 dispersioni verticali  
 n dispersioni



Campi Magnetici

- Equazioni
- 2 identi  $H$
- "  $B$
- Rilascio
- curvatura magnetica
- magari paranti

Campi Magnetici statici

- equazioni
- condotti filiformi
- BIOT - SAVART
- filo di jena campo magnetico  $\rightarrow$
- 2 conduttori, dato  $\vec{A}$  e  $\vec{H}$

Campi magnetici variabili

- equazioni
- legge Faraday
- calcolo del flusso
- \* calcolo auto ind.
- \* " auto ind. mutua

Linee

- conduttore str. da corrente
- calcolo  $L_e$
- "  $L_i$
- caso casuale
- 2 linee chiuse dato  $L_e$  intera
- indutt. di servizio

16-04-09

Campi di corrente statici

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J} \\ \vec{E} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{J} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad \rho \vec{J} = \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\text{grad } V$$

in realtà  $\text{div } \vec{J} = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{J} + \vec{J}_s) = 0$

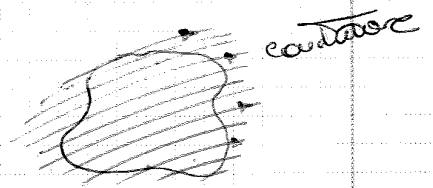
$J_s$  è dovuta alle sorgenti

$V = \text{cost}$  ortogonali a  $\vec{E}$

Vediamo una situazione semplice dove analizziamo il tubo di flusso di  $\vec{J}$

definisco una linea chiusa e considero tutte le linee di campo che passano per tutti i punti delle linee chiuse

isolante  $\sigma = 0 \quad \vec{J} = 0$



$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

S: <sup>l'istante</sup> tubo di flusso

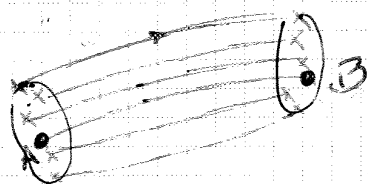
è utile studiare il tubo di flusso ed esempio se cadessero una parte materiale

isolante e una parte materiale conduttore.

⇓  
si hanno delle condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{n1} = J_{n2} \\ E_{t1} = E_{t2} \end{array} \right.$$

la componente normale deve essere nulla sulla superficie di separazione.



$$\text{div } \vec{J} = 0$$

$$\int_V \text{div } \vec{J} \, dz = \oint_{S = \partial V} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 =$$

$$= \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{laterale}} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{per costruzione}$$

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 = -I + \int \vec{J} \cdot d\vec{s} =$$

Sfera raggio r

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot 4\pi r^2$$

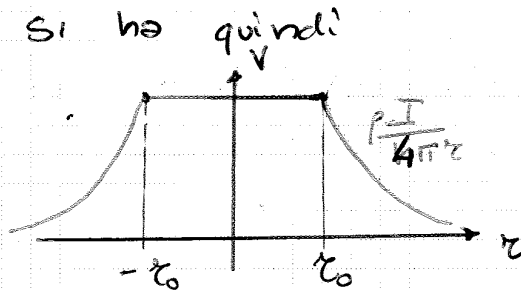
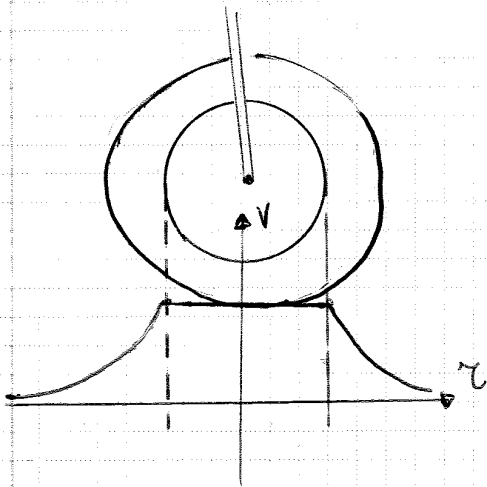
$$J = \frac{I}{4\pi r^2}$$

ma visto che  $\vec{E} = -\text{grad } V$

allora  $\vec{E} \cdot dr = -dV$

quindi Trovo

$$V = \frac{I}{4\pi \epsilon_0} = \sqrt{\frac{I}{4\pi \epsilon_0}} + \text{cost}$$

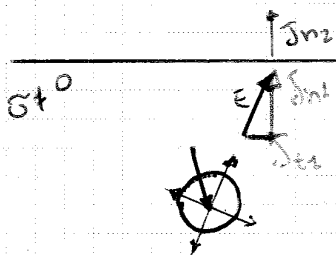


Tale grafico è considerato se lo cost è uguale a 0

quindi  $\frac{I}{4\pi \epsilon_0} = \text{cost}$  da cui  $\epsilon = \text{cost}$

$$V_0 - V_{\infty} = \frac{\rho}{4\pi \epsilon_0} \frac{I}{R_T}$$

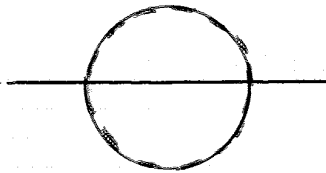
Si può considerare il caso in cui  $\epsilon = 0$  isolante. Trasformo tale problema in un problema che so trattare.



So che  $J_{n2} = J_{n1} = 0$  quindi il campo avrà

componente tangenziale.

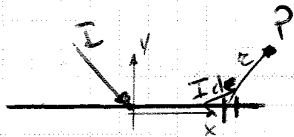
ho un alto caso singolare



Studio come prima con l'immagine che coincide con la sfera stessa

$$V_0 = 2 \frac{\rho I}{4\pi \epsilon_0} = \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} I$$

$$V_{\text{TERRENO}} = \frac{\rho I}{2\pi x}$$



ipotesi di unire I che si distribuisce.

$$dV = \frac{I d\xi}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}$$

integro

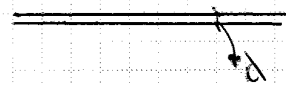
(l e' la semilunghezza)

$$V = \int_{-l}^l \frac{I d\xi}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{\dots}} = \frac{I}{8\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{(x+l) + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{(x-l) + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}}$$

$$V = \text{cost}$$

le superficie equipotenziali sono delle ellissi con i fuochi nel ~~estremità~~ del conduttore

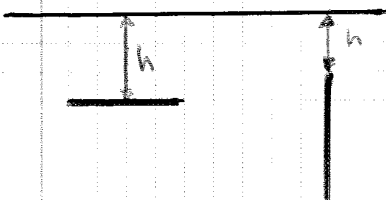
$$V(x=0, y = \frac{d}{2}) = \frac{I}{8\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}{-l + \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}}}$$



Supponiamo di avere un terreno e affondo un dispersore.

Lo posso inserire orizzontale o verticale o in qualsiasi posizione.

sarebbe più facile quello verticale. E tali dispersori possono essere superficiali

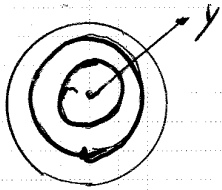


Esempio di dispersore orizzontale può essere il binario del tram.

prodotto verticale

$$V_{\text{terreno}} = 2 \frac{I}{8\pi r e} \ln \frac{(ze+h) + \sqrt{(ze+h)^2 + y^2}}{h + \sqrt{h^2 + y^2}}$$

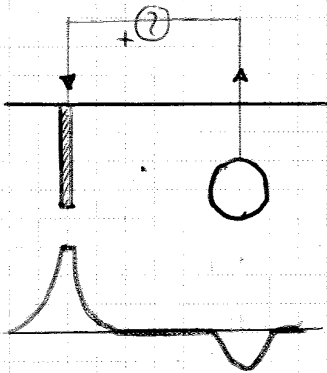
viste dall'alto si nota che:



$$V_{\text{TERRENO}} = 2 \frac{I}{8\pi r e} \ln \frac{(x+e) + \sqrt{(x+e)^2 + (h^2+y^2)}}{(x-e) + \sqrt{(x-e)^2 + (h^2+y^2)}}$$

PORTIAMO UN ESEMPIO

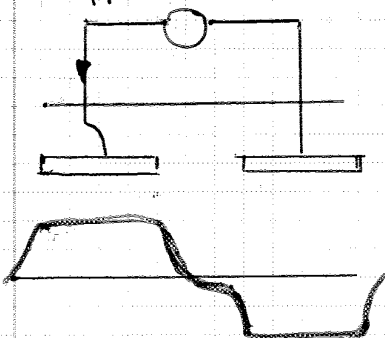
Abbiamo un picchetto affiorante e una sfera affondata e un generatore de gli alimenta



i due conduttori (sfera e picchetto) sono in serie da studiare come un semplice circuito...

la verifica e' vedere se per un tratto il pot rimane costante.

Supponiamo tale caso:



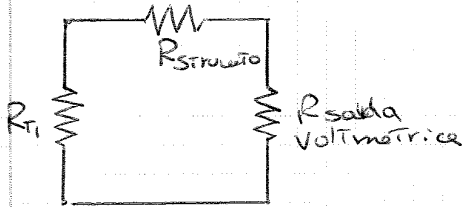
in base alla distanza varia la resistenza

Troppo vicini interagiscono i 2 campi e combinano il risultato.

devono essere sufficientemente lontani altrimenti non riesce del tutto risolvere con la sovrapposizione dei problemi.



quindi si ha



La salda voltmetrica  
mi garantisce il contatto

quindi analizziamo il circuito in modo  
realistico.

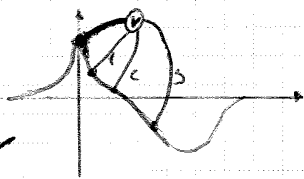
In alcuni casi  $R_{T2}$  si comporta da salda  
amperometrica

$$I = \frac{E_0}{R_{T1} + R_{T2}} \quad ; \quad R_{T1} I = V_{T1}$$

usiamo il voltmetro x tentativi!

Ci si pone ad una distanza più o meno  
grande

se faccio



dei 3 collegamenti delle 3 misure  
nessuna è corretta.

L'operatore ideale possa inserirlo ovunque  
" reale comincia inserirlo subito dopo generatore.

bisogna allontanare i dispersori?

Oltre a fare le misure delle resistenze di terra  
si può misurare tensione e corrente } di contatto  
di passo

poniamo di calcolare la  $R_T$  e questa è  
elevata. Come faccio a ridurre tale  $R_T$

\* Posso variare la dimensione del picchetto,

\* si può cambiare il  
terreno esp. dopo un  
po' tutto torna uguale

\* potrei collegare  
un  $R$  in parallelo

poniamo che  $R_{T1} = 100$  e  $R_{T2} = 100$  mi  
spetta che  $R_T$  sia 500 cosa è successo?

$$I_1 = G_{11} V_0 + G_{12} V_0 + \dots + G_{1n} V_0$$

$$I_2 = G_{21} V_0 + \dots + G_{2n} V_0$$

$$I_n = G_{n1} V_0 + \dots + G_{nn} V_0$$

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} \right) V_0 = G_{eq} V_0$$

ovvero in un caso elementare

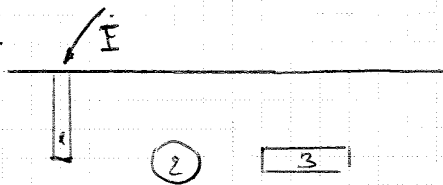
$$R_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & R_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{11}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{R_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$G_{eq} = G_{11} + G_{22} + \dots + G_{nn}$$

se ho

$$R_{11} = \frac{V}{I=1}$$



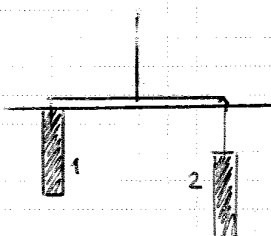
ma non è un mezzo omogeneo x ke' c'è 2 e 3.

$$R_{21} = \frac{V_2}{I_1=1}$$

$$R_{31} = \frac{V_{31}}{I_1=1}$$

non potendo fare calcoli precisi x il motivo detto sopra faccio calcoli approssimati.

Nel caso doppio



$$R^F = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{bmatrix}$$

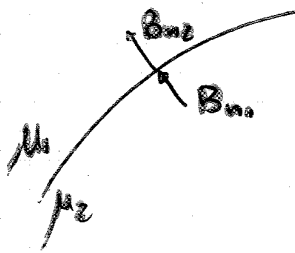
$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} R_{22} & -R_{21} \\ -R_{12} & R_{11} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}}$$

$$R_{eq} = \frac{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}}{R_{11} + R_{22} - R_{12} - R_{21}}$$

$$\text{con } I_1 = \frac{R_{22} - R_{12}}{R_{11} + R_{22} - R_{12} - R_{21}} I$$

I circuiti nei punti a) sono conduttore percorsi da campo magnetico e da Tubi di flusso anch'essi percorsi da campo.



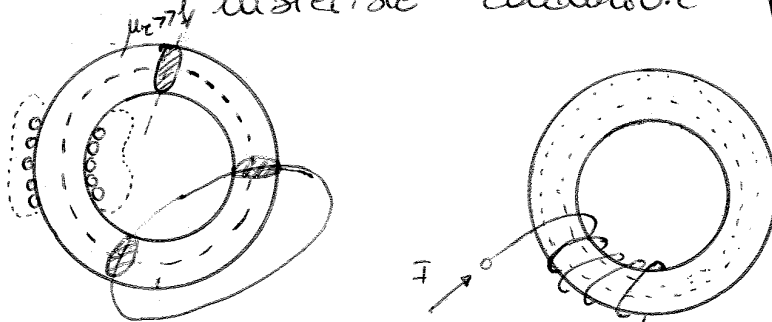
$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{se al confine } \mathbf{J} \neq 0)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad \leftarrow \mathbf{J} = 0$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

ESEMPIO Prendo un toroide di materiale ferromagnetico e pongo su di esso materiale conduttore percorso da corrente.



Prendo una superficie chiusa intorno a una porzione del toroide e calcolo il campo. Secondo la regola i flussi usanti = flussi entranti

$$\Phi_{n1} + \Phi_{n2} = 0$$

$$-\Phi_{n1} = \Phi_{n2}$$

$\Phi_e$  flusso entrante  
 $\Phi_u$  " usante

$$\Phi_{e1} = \Phi_{u2}$$

quindi nel toroide c'è una parte che esce e una che entra.



$$\oint_{\alpha = \partial S} \vec{H} \cdot d\vec{e}$$

devo scegliere una linea chiusa  $\mathcal{L}$  posso quindi scegliere una linea di campo e per def. del campo e  $\mathcal{T}_g$  a  $\mathcal{L}$  posso

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{e} = \oint_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{e}$$

$$\text{poi } \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B ds = B_m S$$



Ande nei circuiti magnetici ci sono maglie, nodi, lati.

Per risolvere svolgendo equazioni di maglie e tali equazioni saranno  $n-1$

$$\sum \varphi_i = 0$$

$$\sum_n \varphi_n R_n = \sum_m N_m I_m$$

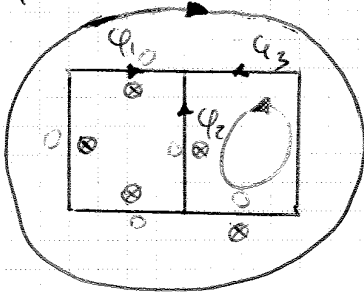
I flussi sono quanti sono i lati.

Numero di maglie

$$l - n + 1$$

maglie

prendiamo l'esempio



nodo:  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$

maglia  $\alpha_1 \Rightarrow \varphi_1 R_1 - \varphi_3 R_3 =$   
 $= N_1 I_1 + N_3 I_3 + N_2 I_2 +$   
 $- N_4 I_4 + N_5 I_5 - N_5 I_5$

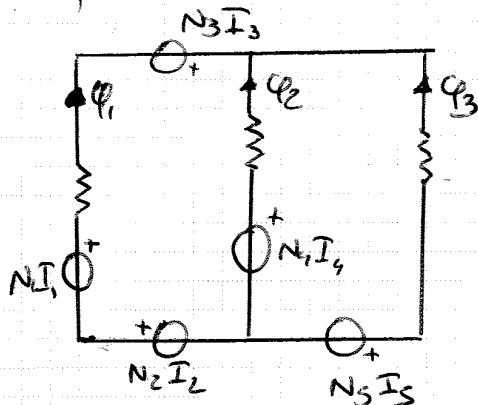
maglia  $\alpha_2 \Rightarrow -\varphi_2 R_2 + \varphi_3 R_3 = -N_4 I_4 + N_5 I_5$

svolgo il sistema

Si può associare  $R \rightarrow R$   
 $\varphi \rightarrow i$

forza magnetomotrice  $\leftarrow NI \rightarrow \phi^+$

disegnare il circuito elettrico equivalente



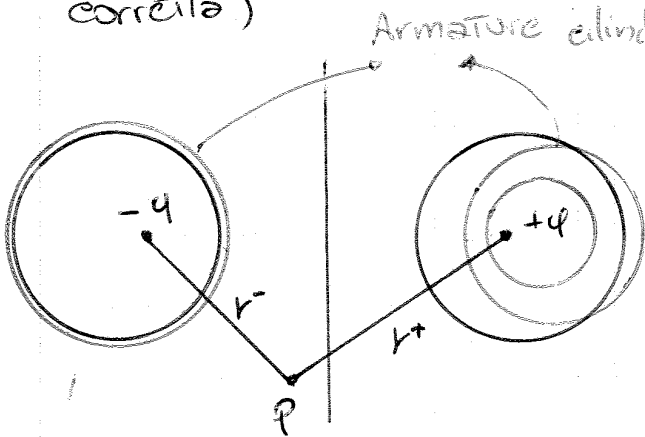
Potrei quindi ridurre come circuito elettrico

Si può chiamare tale trasformazione come

Hopkinson

30-04-09

le cariche  $+q$  e  $-q$  sono fittizie  
(non ci sono ma creano la situazione matematica corretta)



$$V = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r + \text{cost}$$

se impongo  $V=0$  sulla superficie equipotenziale la costante è uguale a  $\phi$

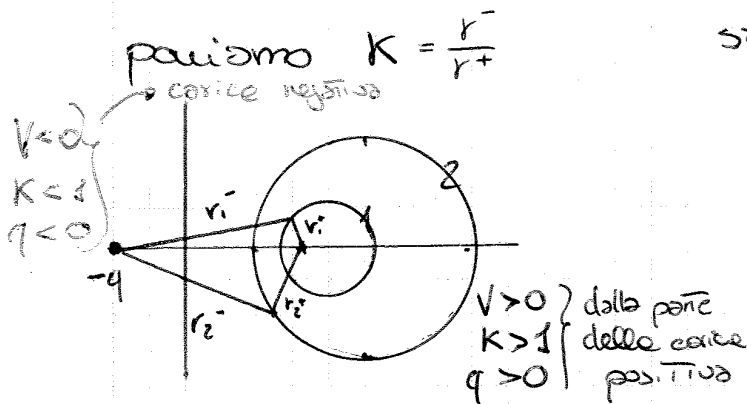
$$V(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r^-}{r^+}$$

- ESTERNO (da 2 parti diverse)

- una interna all'altra ma non coassiali

potenziale in un punto qualsiasi

- $V(P) > 0$  se  $r^- > r^+$  P è dalla parte di  $+q$
- $V(P) < 0$  se  $r^- < r^+$  P è dalla parte di  $-q$



studiamo questo caso

$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln K_1 & K_1 &= \frac{r_1^-}{r_1^+} > 1 \\ V_2 &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln K_2 > 0 & K_2 &= \frac{r_2^-}{r_2^+} > 1 \end{aligned} \right.$$

$$Q_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - d^2}{2d}$$

$$Q_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}$$

$$K_1 = \frac{Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 - r_1^2}}{r_1}$$

$$K_2 = \frac{Q_2 \pm \sqrt{Q_2^2 - r_2^2}}{r_2}$$

Teniamo conto che  $K < 1$  se  $V < 0$  e  $q < 0$   
e  $K > 1$  se  $V > 0$  e  $q > 0$

$$C^+ = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{K_1^+}{K_2^+}} \quad \text{e} \quad C^- = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{K_2^-}{K_1^-}}$$

la differenza è il segno:  $\ln \frac{K_1^+}{K_2^+} = \ln \frac{K_2^-}{K_1^-} = - \ln \frac{K_1^-}{K_2^-}$

quindi  $C^- = -C^+$  ottengo la stessa capacità a meno del segno

$|C| = 863,451 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$  capacità per unità di lunghezza

2) Come faccio a far diventare cilindri coassiali?

Calcolo il lavoro meccanico capacità del conduttore cilindrico (cilindri coassiali)

$$C^+ = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 802,2277 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

$\mathcal{L} = \Delta E_e \rightarrow$  energia elettrostatica

x calcolare l'energia a carica costante

$$E_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$V_{\text{INIZIALE}} = 10 \text{KV}$

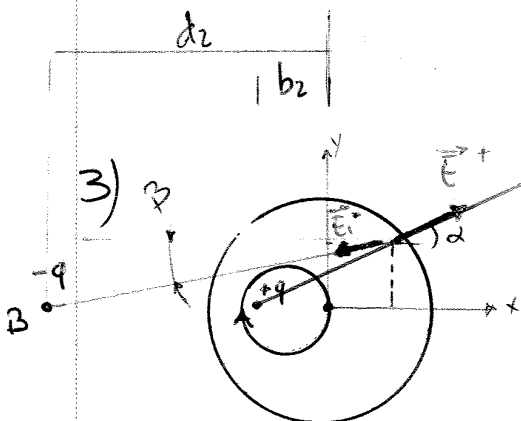
x calcolare l'energia a tensione costante

$$\mathcal{L}_V = E_e^f - E_e^i = \frac{1}{2} C^* V^2 - \frac{1}{2} C V^2$$

calcolato in precedenza con i cilindri disassati.

$$= \frac{V^2}{2} (C^* - C) = -3,0417 \frac{\mu\text{J}}{\text{m}}$$

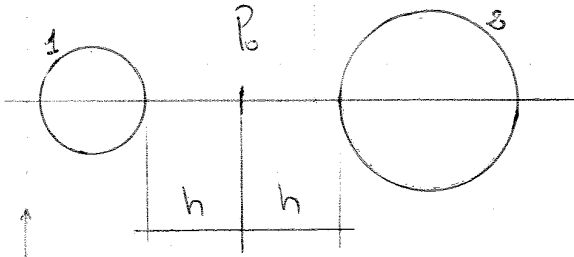
↓ in realtà non devo fornire energia al sistema ma ne acquisisco, i cilindri tendono spontaneamente a diventare coassiali



$$b_1 = \frac{r_1}{K_1^+} ; b_2 = \frac{r_2}{K_2^+} ;$$

$$d_1 = r_1 K_1^+ ; d_2 = r_2 K_2^+$$

ESERCIZIO B



$V < 0$        $r_1 = 0,1 \text{ m}$   
 $K < 1$        $r_2 = 0,2 \text{ m}$   
 $q < 0$        $d = 0,4 \text{ m}$   
 $V_1 - V_2 = 200 \text{ KV}$        $\epsilon_r = 2$

$V_1$  e  $V_2$  hanno segno opposto e  $V_1 > V_2 \Rightarrow V_1 > 0 ; V_2 < 0$

$K_1^+ \rightarrow 2,9059$        $K_2^- \rightarrow 0,5471$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \frac{K_1^+}{K_2^-}} = 66,628 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

$q = C \Delta V = 13,326 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$

$\vec{E}_P = \text{da calcolo} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = 1,8881 \vec{u}_x \frac{\text{KV}}{\text{m}}$

CAMPI DI CORRENTE

$\vec{E} = -\nabla\varphi$        $\vec{E} = -\nabla\varphi$   
 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$        $\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$   
 $\nabla\vec{D} = \rho$        $\nabla\vec{J} = 0$

$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$   
 eq. Kirchoff



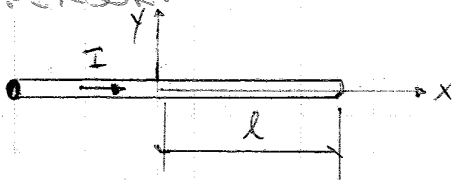
$$V(r) = \frac{\int I}{4\pi r} = \frac{I}{4\pi \sigma r}$$

nel campo elettrostatico



$$V(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon r}$$

DISPERSIONE:



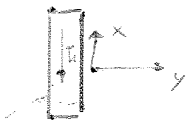
$$V = \frac{\rho I}{8\pi l} \ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}}$$

$$V_{\pi N} = V_{\pi} - V_N$$

$V_{AB}$  è zero xke il sistema è simmetrico

Contribuisce al potenziale ~~da~~  $V_N$  solo il dissipatore 4

$$I_s = \frac{V_r}{R_d} = 9,6 \text{ A}$$



potenziale nel punto N lo calcolo con la sovrapposizione degli effetti.

$$V_N = V^{(s)} + V^{(i)} = 2V^{(s)}$$

rispetto immagine

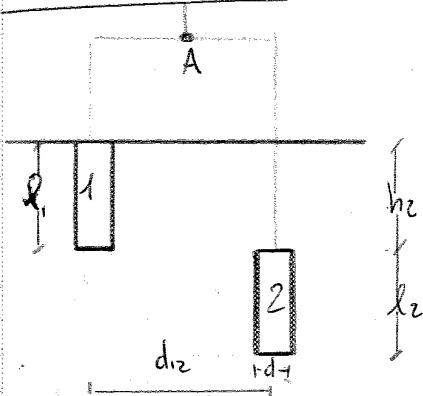
$$V^{(s)} = \frac{\int I_s}{8\pi \frac{l_2}{2}}$$

semilunghezza del dissipatore

$$\text{per } \frac{\frac{l_2}{2} + h + \frac{l_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{l_2}{2} + h + \frac{l_2}{2}\right)^2 + y_n^2}}{\frac{l_2}{2} + h - \frac{l_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{l_2}{2} + h - \frac{l_2}{2}\right)^2 + y_n^2}}$$

$$V_N = 2V^{(s)} = 71,59 \text{ V}$$

### ESERCIZIO D



$$l_1 = 5 \text{ m}$$

$$\rho = 150 \Omega \text{ m}$$

$$l_2 = 5 \text{ m}$$

$$d_{12} = 5 \text{ m}$$

$$h = 2 \text{ m}$$

$$d = 5 \text{ cm}$$

$$R_1 = \frac{\rho}{2\pi l_1} \ln \frac{4l_1}{d} = 28,607 \Omega$$

$$R_2 = \frac{\rho}{2\pi l_2} \ln \frac{2l_2}{d} \sqrt{\frac{4h_2 + 3l_2}{4h_2 + l_2}} = 26,260 \Omega$$

$$R_T = R_1 \parallel R_2 = 13,900 \Omega$$

$$V_{100} = R_{11} I_1 + R_{12} I_2$$

$$R_{11} = R_1$$

$$V_{100} = R_{21} I_1 + R_{22} I_2$$

campo di corrente

$$R_{22} = R_2$$



$$\begin{cases} I_2 = \frac{R_{11} - R_{21}}{R_{11} + R_{22} - R_{12} - R_{21}} I \\ I_1 = \frac{R_{22} - R_{12}}{R_{11} + R_{22} - R_{12} - R_{21}} I \end{cases}$$

ripartizione delle  
corrente tra 2  
resistori de  
interagiscono

$$V_{A00} = R_{11} I_1 + R_{12} I_2$$

$$V_{A00} = \frac{R_{11}(R_{22} - R_{12}) + R_{12}(R_{11} - R_{21})}{R_{11} + R_{22} - R_{12} - R_{21}} I$$

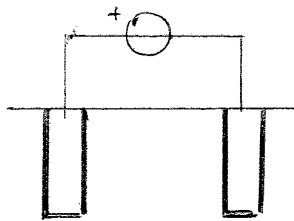
$$V_{A00} = \frac{R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}}{R_{11} R_{22} - R_{12} - R_{21}} I$$

resistenza totale  
di terra

$$R_T = 15,475 \Omega$$

l'effetto dell'interazione genera una resistenza  
più alta di quelle che ci aspettavamo (~13) perché  
la formula era cui le idealismo non è risolte  
in parallelo.

Piantare due piedetti, uno di fisso all'altro non cui  
fa diminuire la R ma lo fa aumentare

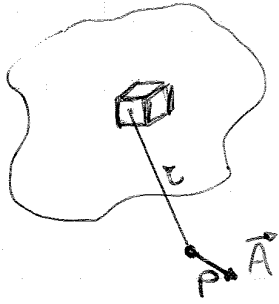


Valore  
totale  
così

$$V_{100} \neq V_{200}$$

$$I_1 = I_2$$

$$R_T = \frac{V_{100} + V_{200}}{I_{totale}}$$



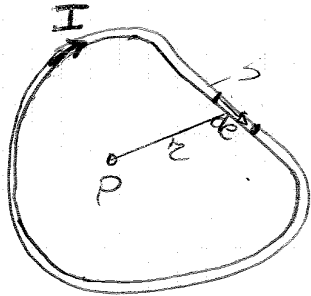
visto da:

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \quad \text{allora:}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{\vec{J}}{r} dz$$

volume

Tale calcolo è semplice nel caso dei conduttori filiformi



dove considero un elemento infinitesimo

$$dz = S dl$$

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \quad \vec{J} = \frac{I}{S} \frac{d\vec{e}}{dl}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I}{S} \frac{d\vec{e}}{dl} S dl = \frac{\mu}{4\pi} \int I d\vec{e}$$

e la linea L è una linea chiusa visto da e interseccata da corrente

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{e}}{r}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \left[ \frac{\mu}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{e}}{r} \right]$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \text{rot} \left( \frac{d\vec{e}}{r} \right)$$

dove:

$$d\vec{e} = dx_0 \vec{i} + dy_0 \vec{j} + dz_0 \vec{k}$$

$$r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$

e per questo

$$\text{rot} \left( \frac{d\vec{e}}{r} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{dx_0}{r} & \frac{dy_0}{r} & \frac{dz_0}{r} \end{vmatrix}$$

giungo ad ottenere la seguente formula:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{e} \times \vec{r}}{r^3}$$