NUMERO: 778

DATA: 21/11/2013

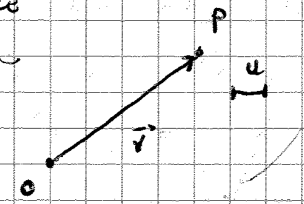
A P P U N T I

STUDENTE: Maiorano

MATERIA: Geometria

Prof. Cumino

VETTORI DELLO SPAZIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONALE



Per definire un vettore:

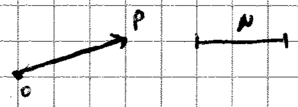
- Fisso un punto "O"
- Fisso un'unità di misura $\vdash\!\!\dashv$ u

Def Un vettore è un segmento orientato di origine il punto "O" fissato (punto di applicazione) e estremo P; si indica $\vec{OP}$ o $\vec{v}$ o $\underline{v}$

$\vec{v}$ è caratterizzato da:

- DIREZIONE, ossia $\vec{v}$ giace su una retta del piano (retta d'azione)
- VERSO
- LUNGHEZZA, modulo del vettore $|\vec{v}|$, $\|\vec{v}\|$ (Norma del vettore)

es.



$\vec{v} = \vec{OP}$

$|\vec{v}| = 1 \Rightarrow$ Particolari vettori chiamati <u>VERSORI</u>

Def: VERSORE è un vettore che ha modulo 1

OSS. $\forall$ punto dello spazio è individuato un vettore (perché fissato O)

Se $P \equiv O$, $\vec{v} = \vec{OO}$ è molto particolare perché Direzione è <u>INDETERMINATA</u>, Verso <u>INDETERMINATO</u> e Modulo <u>NULLO</u>!

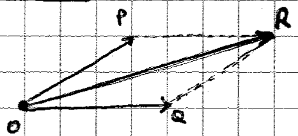
Tale vettore è chiamato <u>VETTORE NULLO</u>

<u>Uguaglianza</u>

$\vec{v} = \vec{OP}$, $\vec{w} = \vec{OQ}$ sono uguali ossia $\vec{v} = \vec{w}$ quando sono uguali in direzione, verso e modulo.

V = insieme dei vettori applicati in O

<u>SOMMA VETTORIALE</u>



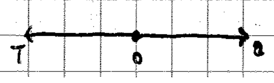
$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$ per <u>definizione</u>

Dalla definizione grafica emergono delle proprietà:

1) $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OQ} + \vec{OP}$ Commutativa

2) $\vec{OP} + \vec{OO} = \vec{OP}$ $\quad \forall \vec{OP} \in V$

3)



$\vec{OT}$ stessa direzione, verso opposto, stesso modulo $\qquad \vec{OT} + \vec{OQ} = \vec{OO}$

es.
Ab $\vec{u} = 2\vec{v} + 3\vec{w}$

Si dice che $\vec{u}$ è COMBINAZIONE LINEARE di $\vec{v}$ e $\vec{w}$

COMBINAZIONE LINEARE:

Def. Dati $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e altrettanti vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ è detta combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ a coefficienti $a_1, \dots, a_n$ il vettore

$$\vec{u} = a_1 \cdot \vec{v_1} + a_2 \cdot \vec{v_2} + \dots + a_{n-1} \cdot \vec{v_{n-1}} + a_n \cdot \vec{v_n}$$

$\vec{u}$ Sappiamo che è un vettore perché deriva da ciò che abbiamo già definito

es.
$\vec{t} = 3\vec{w}$ è comb. lineare di $\vec{w}$ a coefficiente 3

è un CASO LIMITE ma pur sempre una COMBINAZIONE LINEARE

Concetto importante (LINEARE DIPENDENZA)

① Def Dati $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \in V$ sono linearmente dipendenti se $\vec{0}$ si può scrivere come loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli.

es. $\vec{t} = 3\vec{w}$

$\vec{t}, \vec{w}$ sono linearmente dipendenti?

$\vec{t} - 3\vec{w} = \vec{0} \iff \vec{t} - 3\vec{w} = 3\vec{w} - 3\vec{w} \iff \vec{t} - 3\vec{w} = \vec{0}$

Il vettore NULLO è combinazione lineare di $\vec{t}$ e $\vec{w}$ a coefficienti non tutti nulli in particolare rispettivamente 1 e -3.

② Def equi $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \in V$ sono linearmente dipendenti se posso esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri.

Queste definizioni hanno applicazioni nel campo geometrico tridimensionale

casi in V

1) $\vec{v_1} \in V$ quando $\vec{v_1}$ è linearmente dipendente!

Se $\vec{0} = a_1 \vec{v_1}$ con $a_1 \neq 0$

in particolare $|a_1 \vec{v_1}| = \underline{0 = |a_1| \cdot |\vec{v_1}|}$ $\Rightarrow$ Bisogna ammettere che $|\vec{v_1}| = 0 \Rightarrow \vec{v_1} = \vec{0}$

$a_1 \neq 0$ per ipotesi

Quindi dire che $\vec{v_1}$ è linearmente dipendente vuol dire che $\vec{v_1}$ è NULLO

1 bis) Dato $\vec{v_1} \in V$ quando non è linearmente dipendente? $(\vec{v_1} \neq \vec{0})$

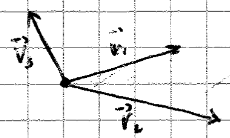
Quando NON posso scrivere $\vec{0} = a\vec{v_1}$ con $a_1 \neq 0$ $\Rightarrow$ riesco cioè a scrivere $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v_1}$ ovvia $a_1 = 0$

3 bis)

Dati $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ non nulli

~~non~~ sono linearmente INDIPENDENTI $\iff$ quando NON sono complanari

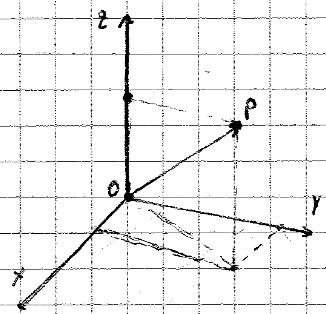
es. geometrico



SISTEMA DI RIFERIMENTO

Rette orientate ortogonali monometriche

$R(O, x, y, z)$ → sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico

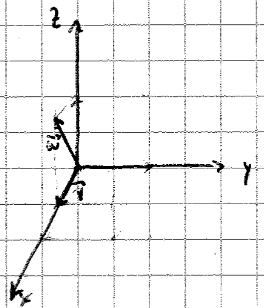


C'è una corrispondenza biunivoca tra i punti P dello spazio e x, y, z.

$P \longleftrightarrow (x_P, y_P, z_P)$

$\vec{v} = \vec{OP} = (x_P, y_P, z_P)$

es.
$\vec{v} = (1, 0, 0)$
$\vec{w} = (1, 0, 2)$
$\vec{f} = (2, 2, 1)$



OSS. ci sono vettori particolari = versori degli assi ⇒ sono vettori di modulo 1 e hanno la stessa direzione e verso degli assi

$\vec{i} = (1,0,0) \qquad \vec{j} = (0,1,0) \qquad \vec{k} = (0,0,1)$

N.B.

$$\vec{v} = (x_P, y_P, z_P) = x_P(1,0,0) + y_P(0,1,0) + z_P(0,0,1) =$$
$$= x_P \cdot \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}$$

Ovvero scrivo $\vec{v}$ come combinazione lineare dei versori degli assi

OSS. Unicità delle coordinate cartesiane ⇒ $\forall \vec{v} \in V \quad \exists! \, (x, y, z) \mid \vec{v} = (x, y, z)$ o anche $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Somma Vettoriale

$\vec{v} = (x, y, z) \qquad \vec{w} = (x', y', z')$

$$\vec{v} + \vec{w} = (x, y, z) + (x', y', z') = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) =$$
$$= (x\vec{i} + x'\vec{i}) + (y\vec{j} + y'\vec{j}) + (z\vec{k} + z'\vec{k}) = (x+x')\vec{i} + (y+y')\vec{j} + (z+z')\vec{k} =$$
$$= (x+x', y+y', z+z')$$

Proprietà del prodotto scalare

1) $\vec u \cdot \vec v = \vec v \cdot \vec u$ Proprietà commutativa

2) $(k\vec u)\cdot \vec v = k(\vec u \cdot \vec v) = \vec u \cdot (k\vec v)$ dalla definizione

$k \in \mathbb{R}$

3) $(\vec u + \vec v)\cdot \vec w = \vec u \cdot \vec w + \vec v \cdot \vec w$

Riprendiamo

$$|\vec v - \vec w|^2 = (\vec v - \vec w)\cdot(\vec v - \vec w) = \vec v\cdot\vec v - \vec w\cdot\vec v - \vec w\cdot\vec v + \vec w\cdot\vec w = |\vec v|^2 - 2\vec v\cdot\vec w + |\vec w|^2 =$$

$$= |\vec v|^2 - 2|\vec v||\vec w|\cos\widehat{\vec v\vec w} + |\vec w|^2$$ **Teorema di Carnot**

Prodotto scalare in componenti

$\vec u = (x, y, z)$

$\vec v = (x', y', z')$ Calcolare $\vec u \cdot \vec v$

$$\vec u \cdot \vec v = (x\vec i + y\vec j + z\vec k)\cdot(x'\vec i + y'\vec j + z'\vec k) =$$

$$= x\vec i \cdot x'\vec i + x\vec i\, y'\vec j + x\vec i \cdot z'\vec k + \dots =$$

$$= x\vec i\cdot(x'\vec i + y'\vec j + z'\vec k) + y\vec j\cdot(x'\vec i + y'\vec j + z'\vec k) + z\vec k\cdot(x'\vec i + y'\vec j + z'\vec k) =$$

$$= xx'\,\vec i\cdot\vec i + \cancel{xy'\,\vec i\cdot\vec j} + \cancel{xz'\,\vec i\cdot\vec k} + \cancel{yx'\,\vec j\cdot\vec i} + yy'\,\vec j\cdot\vec j + \cancel{yz'\,\vec j\cdot\vec k} +$$

$$+ \cancel{zx'\,\vec k\cdot\vec j} + \cancel{zy'\,\vec k\cdot\vec j} + zz'\,\vec k\cdot\vec k = xx' + yy' + zz'$$

è 0 perché $\vec i \perp \vec j \perp \vec z$

$\vec i \cdot \vec i = |\vec i|^2 = 1$ perché $|\vec i| = 1$ (è un versore!!)

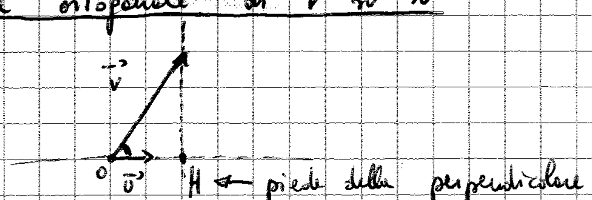
es.

$\vec v = (1, 2, 0)$ $\vec w = (2, -1, 3)$

$\vec v \cdot \vec w = 1\cdot 2 + 2(-1) + 0\cdot(3) = 0$

OSS: Sono due vettori NON nulli ma il cui prodotto scalare è 0 e quindi sono ORTOGONALI!

Proiezione ortogonale di $\vec v$ su $\vec u$



Cerco il segmento orientato $\vec{OH}$ il quale è la proiezione ortogonale di $\vec v$ su $\vec u$.

$\vec{OH} = \vec v_{\vec u}$

$|\vec{OH}| = |\vec v| \cdot \cos\widehat{\vec u\vec v}$ → Modulo della proiezione ortogonale

$\vec v_{\vec u} = |\vec v_{\vec u}|\ \text{vers}\,\vec u = (|\vec v|\cos\widehat{\vec u\vec v})\ \text{vers}\,\vec u$

Prodotto vettoriale in componenti

$\vec{u} = (x, y, z) \qquad \vec{v} = (x', y', z')$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) =$$

$$= \cancel{xx'\vec{i}\wedge\vec{i}} + xy'\vec{i}\wedge\vec{j} + xz'\vec{i}\wedge\vec{k} + yx'\vec{j}\wedge\vec{i} + \cancel{yy'\vec{j}\wedge\vec{j}} + yz'\vec{j}\wedge\vec{k} +$$

$$+ zx'\vec{k}\wedge\vec{i} + zy'\vec{k}\wedge\vec{j} + \cancel{zz'\vec{k}\wedge\vec{k}} = xy'\vec{k} - yx'\vec{k} - xz'\vec{j} + zx'\vec{j} +$$

$$+ yz'\vec{i} - zy'\vec{i} =$$

REGOLA MNEMONICA

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = +\vec{i}\,(yz' - y'z) - \vec{j}\,(xz' - x'z) + \vec{k}\,(xy' - x'y)$$

$$= (yz' - y'z,\ xz' - x'z,\ xy' - x'y)$$

es.

- Calcolare $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u} = (0, 1, 1) \qquad \vec{v} = (1, 0, 1)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(1-0) - \vec{j}\,(0-1) + \vec{k}\,(0-1) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, 1, -1)$$

- $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}$

  $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

OSS IL PRODOTTO VETTORIALE NON È ASSOCIATIVO

PRODOTTO MISTO di 3 vettori

Dati: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

Def: $\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}$ si dice prodotto misto

Proprietà:

1) $\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$

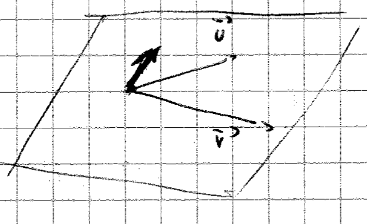
2) $\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ quando ?

Oss Il prodotto misto è una successione di operazioni! Bisogna eseguire prima un prodotto vettoriale! Il risultato è sempre un numero!

$\vec{w} = \vec{0}$ oppure $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ oppure $\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{w}$ sta nel piano di $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$\iff \vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$ sono lin. dip.



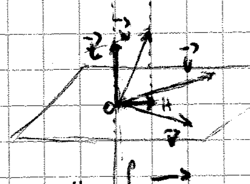
Significato del prodotto misto:

$|\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|$ = Volume del parallelepipedo individuato dei tre vettori.

OSS

Proiezione di un vettore nel piano di altri due

$\vec{OH}$ è il vettore individuato



Cerco il vettore $\vec{OH}$, dati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$\vec{t}$ = proiezione ortogonale di $\vec{w}$ nella direzione di $\vec{u} \wedge \vec{v}$

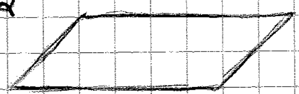
Vale la relazione $t + \vec{OH} = \vec{w} \Rightarrow \vec{OH} = \vec{w} - \vec{t}$

Geometria analitica piano / spazio

Rappresentare rette e piani con equazioni con calcolo vettoriale

Piano: superficie infinita (si indicano con lettere dell'alfabeto greco)

α



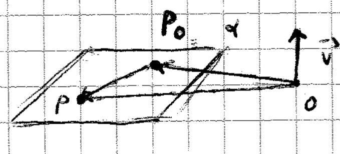
Geometricamente per individuare α servono:

1) due vettori $\vec{u}, \vec{v}$

2) 3 punti non allineati

3) un punto $P \in \alpha$ e un vettore $\vec{v}$ ortogonale ad α

3)



P_0 è un punto fisso e voglio caratterizzare $\forall P \in \alpha$ con il calcolo vettoriale

$\vec{P_0P}$ comunque si muova P deve essere ortogonale alla retta direzione di $\vec{v}$

$\vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0}$ $\quad \vec{P_0P} = (\vec{OP} - \vec{OP_0}) \perp \vec{v} \iff (\vec{OP} - \vec{OP_0}) \cdot \vec{v} = 0$

EQUAZIONE VETTORIALE DI α

Cerco un'equazione cartesiana quindi introduciamo un sistema di riferimento cartesiano

$\vec{v} = (a, b, c) \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad P = (x, y, z)$

$\vec{OP} - \vec{OP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

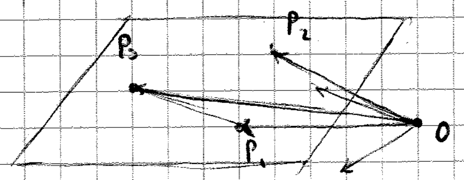
Equazione di α: $(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

eq. cartesiana del piano α

$\Rightarrow ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$

$\Rightarrow ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0 \Rightarrow ax + by + cz + d = 0$

3) Piano per 3 punti non allineati



Anche in questo caso mi riferisco ai casi precedenti, ho bisogno:

- $P_0 \in \alpha$
- $\vec{u}, \vec{v}$ paralleli ad α ?

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0}$

$\vec{v} = \vec{OP_2} - \vec{OP_0}$

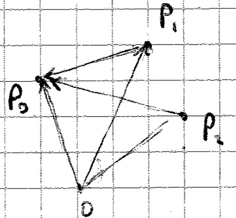
$$(\vec{OP} - \vec{OP_0}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Una possibile equazione cartesiana del piano

es.

Trovare α passante per $P_0 = (1,1,1)$ $\quad P_1 = (0,1,1)$ $\quad P_2 = (1,0,0)$

Controllo

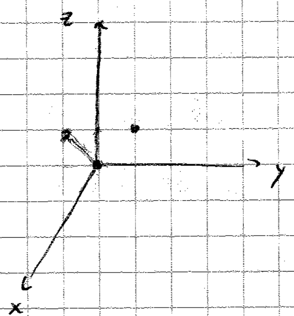


$\vec{OP_1} - \vec{OP_0} = (-1, 0, 0)$

$\vec{OP_2} - \vec{OP_0} = (0, -1, -1)$

vettori linearmente indipendenti quindi i tre punti sono non allineati!

$\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $(0,-1,-1) = k(-1,0,0) \Rightarrow (0,-1,-1) = (-k, 0, 0)$



$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0-1 & 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 0-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)\cdot 0 - (y-1)(1) + (z-1)(1) = 0$

$-y + \cancel{1} + z \cancel{-1} = 0 \rightarrow y = z \rightarrow y - z = 0$

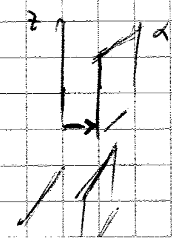
Dato $\alpha: -y + z = 0$

Trovare un $v \perp \alpha$ e $P_0 \in \alpha$

$\vec{v} = (a, b, c)$ $\quad a = 0$, $b = -1$, $c = 1 \Rightarrow \vec{v} = (0, -1, 1)$

$P_0 = (0,0,0)$, $P_0 = (0,1,1)$, ... $P_0 = (11, 0, 0)$

Verificare che α // asse delle z



$\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{k}$ $\quad \vec{v} \cdot \vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow (0,-1,1)\cdot(0,0,1) = 0$

$\Rightarrow 0 + 0 + 1 = 0$ $\quad$ α non è parallelo a z

$\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{i} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{i} = 0$ $\quad (0,-1,1)\cdot(1,0,0) = 0 \Rightarrow 0 = 0$ vero

Se $m = 0$

$$\begin{cases} x - x_0 = t\,l \\ y - y_0 = t\,m \\ z - z_0 = t\,n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = t\,l \\ y - y_0 = 0 \\ z - z_0 = t\,n \end{cases}$$

Elimino il parametro t:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n} = \frac{y - y_0}{0}$$

CON CONVENZIONE $y - y_0 = 0$ se denominatore è 0

Rappresentazione cartesiana della retta r:

Posso eguagliare a due a due i tre rapporti

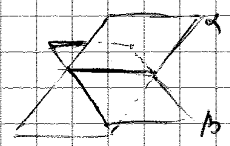
$1° = 3°$, $2° = 3°$ (per esempio)

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n} \\[2ex] \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

Due equazioni che sono le EQUAZIONI CARTESIANE DELLA RETTA

Morale:

1) Abbiamo bisogno di due equazioni per individuare una retta. In particolare queste due equazioni rilevano due piani che si intersecano nella retta r

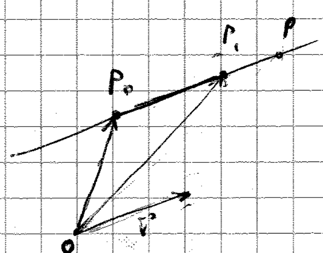


Siamo arrivati nella 2ª rappresentazione

Caso 1) (Retta per 2 punti)

Voglio rifarmi ai casi precedenti:

ho bisogno di un vettore $\vec{v} \parallel r$



$\vec{v} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0}$

$r: \ \vec{OP} - \vec{OP_0} = t\,(\vec{OP_1} - \vec{OP_0})$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$r: \ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t\,(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ eq. vettoriale

$$\begin{cases} x - x_0 = t\,(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t\,(y_1 - y_0) \\ z - z_0 = t\,(z_1 - z_0) \end{cases}$$

eq. parametriche.

Pongo ai rapporti uguali eliminando il parametro

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Esempio ②

Data:

$r: \; (x, y, z) = (0, 0, -1) + t(2, -1, 1)$ trovare eq. ni cartesiane di r

Cerco due piani α_1, α_2 tali che $\alpha_1 \cap \alpha_2 = r$

Elimino t e spreglio

$$r: \begin{cases} \frac{x}{2} = z+1 \\ -y = z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z+2 \\ y = -z-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Def

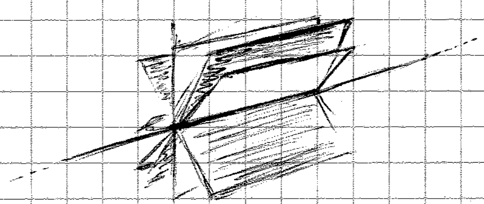
Fascio di piani PROPRIO: sono tutti i piani che passano per una retta r (= asse del fascio)

Fascio di piani IMPROPRIO: tutti i piani paralleli a un piano dato

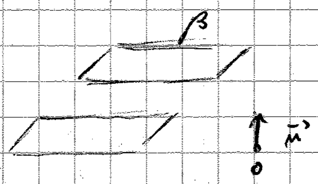
es. Fascio di asse r

$F: \; \lambda(x - 2z - 2) + \mu(y + z + 1) = 0$

al variare dei coefficienti $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ottengono tutti i piani del fascio



es. Fascio improprio:



$\alpha_1: \; x - 2z - 2 = 0$

$\beta \parallel \alpha$

$\beta: \; x - 2z + d = 0$ al variare di d in $\mathbb{R}$

VARIA in $\mathbb{R}$

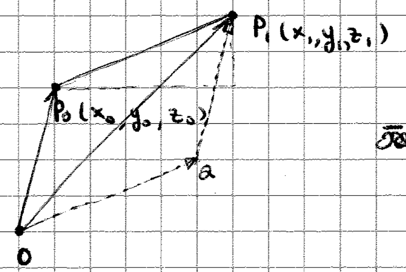
APPLICAZIONE DEI CONCETTI DI FASCIO

es. Data $r: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$ e dato $Q(0, 1, 0)$ trovare il piano che contiene r e Q

$F: \; \lambda(x + 2y) + \mu(y + z + 1) = 0$

impongo il passaggio per Q: $2\lambda + 2\mu = 0 \rightarrow \lambda + \mu = 0 \rightarrow \lambda = -\mu$

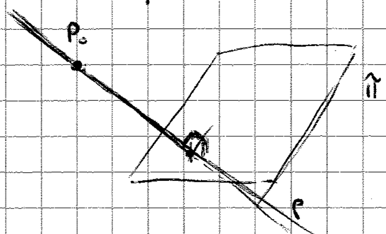
DISTANZE



$\vec{OQ} + \vec{OP_0} = \vec{OP_1} \Rightarrow \vec{OQ} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0}$

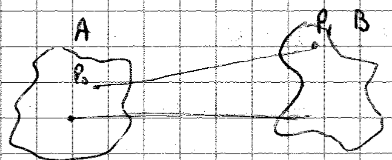
$d(P_0, P_1) = |\vec{OQ}| = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2}$

Distanza punto - piano



Def $d(P_0, \pi) = d(P_0, H)$

In generale se abbiamo due insiemi



La distanza tra due insiemi è legato al concetto di minimo

$d(A, B) =$ minimo delle distanze $d(P_0, P_1)$ $\forall P_0 \in A$, $\forall P_1 \in B$

Nel caso del piano la minima distanza è proprio retta ortogonale.

Supponiamo:

$\pi: \; ax + by + cz + d = 0$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$

Ricerchiamo il punto $H = \pi \cap p$ $\quad$ p = retta passante per P_0 ortogonale a π

$$p: \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \qquad p: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

Ora bisogna eseguire $\pi \cap p$:

$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$

È un'equazione nell'incognita t, dove t è il coefficiente parametrico che corrisponde al punto H.

$(a^2 + b^2 + c^2)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

$t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ $\quad$ (x_0, y_0, z_0) Non appartiene al piano esempio numerico:

$P_0(1,2,3) \notin r$

$r: (x,y,z) = (1+t, t, -1+2t)$

Calcolare la distanza $d(P_0, r)$

$\tilde{\pi} \perp r \quad \underline{\vec{v}_r \perp \tilde{\pi}}, \quad \vec{v}_{\tilde{\pi}}(1,1,2)$ perché la retta è ORTOGONALE al piano

$\tilde{\pi}: x + y + 2z + d = 0$

Impongo il passaggio del piano per P_0: $d = -1 - 2 - 6 = \underline{-9}$

$\tilde{\pi}: x + y + 2z - 9 = 0$

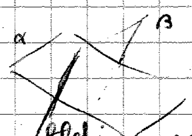
$\tilde{\pi} \cap r: 1 + t + t - 2 + 4t - 9 = 0 \Rightarrow 6t = +10 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$

$H = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

$\overline{P_0H} = d(P_0, H) = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$

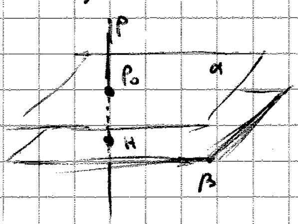
Distanza PIANO - PIANO

Presi due piani incidenti α, β



la distanza $d(\alpha,\beta) = 0$

Ricerchiamo la distanza tra due piani paralleli, ossia unisco i punti su α e i punti su β in ogni modo possibile



Abbiamo ricondotto questa distanza a una distanza tra due punti appartenenti alla stessa retta

$\alpha // \beta: \quad d(\alpha,\beta) = d(P_0, H) \quad \forall P_0 \in \alpha, \quad H = p \cap \beta$, dove p = retta per P_0 ortogonale ~~a β~~ a β

esempio numerico

$\alpha: x - 2y + z + 1 = 0$

Due piani paralleli e distinti

$\beta: 2x - 4y + 2z = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$

Prendo $P_0 \in \alpha$, $P_0(-1, 0, 0)$

$p: (x,y,z) = (-1+t, -2t, t)$

$p \cap \beta \quad -1 + t + 4t + t = 0 \Rightarrow t = 1/6$

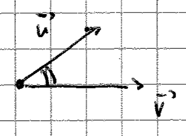
$H\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \quad d(P_0, H) = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$P_0 \in r$, scelgo $P_0(1,0,1)$ $_{t=0}$

$$d(r,s) = d(P_0,\alpha) = \frac{|1 \cancel{-1} + 0 + 1 \cancel{+1} - 2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

errore nella soluzione es-6 ~~pag~~ foglio 2.

ANGOLI



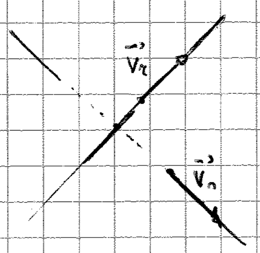
$0 \le \widehat{\vec{u}\,\vec{v}} \le \pi$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} \overset{def}{=} |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}}$

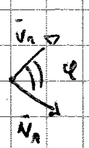
Applichiamo questo strumento alla geometria analitica

Angolo tra due RETTE

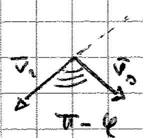
CONVENZIONE: due rette formano un certo angolo anche quando NON sono incidenti

Def $\widehat{rs} = \widehat{\vec{v}_r\,\vec{v}_s}$ dove $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ sono vettori direttori delle due rette.





Potevo capitare che prendessi $-\vec{v}_r$



$\cos\varphi = -\cos(\pi-\varphi)$

$\cos\widehat{rs}$ è determinato a meno del segno, è legato alla scelta di orientamento delle rette.

$$|\cos\widehat{rs}| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

es.

$r: (x,y,z) = (1, -t, 1+t)$

$s: (x,y,z) = (1+u, u, +2)$

Calcolare $\cos\widehat{rs}$

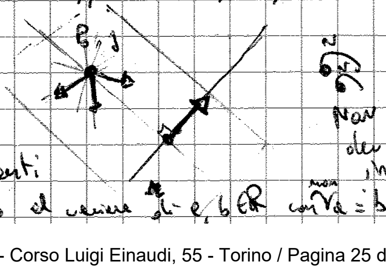
Calcoliamo i vettori direttori: $\vec{v}_r = (0,-1,1)$ $\quad \vec{v}_s = (1,1,0)$

$$|\cos\widehat{rs}| = \frac{|0-1+0|}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\cos\widehat{rs} = \pm\frac{1}{2} \longrightarrow \widehat{rs}_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \widehat{rs}_2 = \frac{2}{3}\pi$ a seconda di come o scelto i vettori direttori

es. Trovare retta per $P_0(0,1,1)$ ortogonale a $r: (x,y,z) = (1,-t,1+t)$

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \cos\widehat{\vec{v}_r\vec{v}_s}$$



Non per forza deve essere incidente!

$s: (x,y,z) = (0,1,1) + t(l,m,n)$ tutte le rette passanti per il punto P_0 al variare di $\ell, b \in \mathbb{R}$ non con $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$!

$\beta: \quad ax + b(y-1) + b(z-1) = 0$

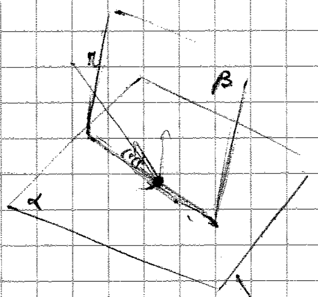
$\beta: \quad ax + b(y+z-2) = 0$ è un'equazione di un <u>FASCIO DI PIANI</u>

Scelgo uno dei piani:

$a = 2013 \quad b = 3$

$2013x + 3y + 3z - 6 = 0$

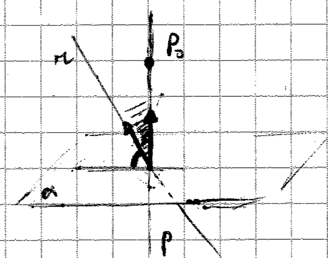
<u>ANGOLO TRA RETTA e PIANO</u>



Nello spazio 3d le rette può essere o <u>INCIDENTE</u> o <u>PARALLELA</u>

dove $\beta \perp \alpha$, però a livello ANALITICO è complesso

Facciamo una costruzione geometrica più conveniente, consideriamo $p \perp \alpha$ passante per $r \cap \alpha$



$p \perp \alpha$ e passa per P_0

$\hat{r\alpha} = \frac{\pi}{2} - \hat{rp} \rightarrow \hat{rp} = \frac{\pi}{2} - \hat{r\alpha}$

So calcolare $|\cos \hat{rp}|$:

$\sin \hat{r\alpha} = |\cos \hat{rp}|$ perché angoli tra vettori è sempre $0 \leq \theta \leq \pi$

<u>es.</u>

$r: \quad (x,y,z) = (1, -t, 1+t)$

$\alpha: \quad x + y = 0 \quad , \quad \vec{v}_p = \vec{v}_\alpha$

$\hat{r\alpha} = ?$

p: ... e $\quad |\cos \hat{rp}| = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\alpha|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_\alpha|} = \frac{|(0,-1,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\sin \hat{r\alpha} = \frac{1}{2} \qquad \hat{r\alpha} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 137

es.

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ x = y \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se chiamo:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ colonna delle incognite

$$\boxed{AX = B}$$ Prodotto riga per colonna ha come risultato B

N.B. AX è un prodotto matriciale che può avvenire quando $m \times n$, $n \times 1$

Una soluzione del sistema è una n-pla di valori

Riduzione delle matrici

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{4,6}$$

A è un esempio di matrice ridotta a scala

Ci sono le righe R_1, R_2, R_3 non NULLE, mentre R_4 è una riga NULLA

In ogni riga non nulla (~~da sinistra~~) esiste un primo elemento non nullo (da sinistra) che ha al di sotto solo zeri e a sinistra solo zeri

MARCATORI O INDICATORI di Riga!

esempio

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ $a_{12} = 2$ NON è un indicatore

B NON è ridotta a scala

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ C NON è ridotta a scala, ma è ridotta per righe

Def Una matrice si dice ridotta per righe, se in ogni riga non nulla esiste un coefficiente non nullo che ha al di sotto solo zeri

esempio

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considero il sistema lineare $(D \mid B)$. Sto considerando un sistema in 4 incognite in tre equazioni

Dim :

È sufficiente il sistema :

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$$

Le operazioni elementari coinvolgono soltanto due righe per questo prendiamo un sistema del genere

① $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{array}\right)$ $\quad (A'|B') = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_2 \end{array}\right)$

$R_1 \longleftrightarrow R_2$

Il sistema associato a $(A|B)$ è equivalente a quello $(A'|B')$

② $R_i \longrightarrow kR_i \,, \quad k \neq 0 \qquad R_1 \longrightarrow kR_1$

$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} ka_{11} & ka_{12} \dots & ka_{1n} & kb_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \end{array}\right)$ è come $\begin{cases} ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + \dots + ka_{1n}x_n = kb_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$ $k \neq 0$

③ $R_2 \longrightarrow R_2 + kR_1$

$$(**) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + k(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) = b_2 + kb_1 \end{cases}$$

Devo dimostrare che l'insieme di soluzioni dell'uno e dell'altro sono uguali

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ è una soluzione del sistema di partenza $(*)$ e anche del sistema $(**)$:

$$\begin{cases} a_{11}\bar{x}_1 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n = b_1 \quad \text{ok} \\ \underbrace{a_{21}\bar{x}_1 + \dots + a_{2n}\bar{x}_n} + k(a_{11}\bar{x}_1 + \dots + a_{1n}\bar{x}_n) = b_2 + kb_1 \end{cases}$$

Ho preso una soluzione del sistema

e viceversa $(**) \Longrightarrow (*)$

esempi

1) $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$(A|B) \longleftrightarrow$ sistema lineare in quattro equazioni e quattro incognite

oss

- $A|B$ è ridotta a scala
- A è ridotta a scala

se risolvo per sostituzione dal basso il sistema ottengo (in questo caso) una soluzione che è una quaterna.

$= (a, -a, a, 0, a, 0) + (0, 0, 2b, -b, 2b, b) =$

$= (a, -a, a+2b, -b, a+2b, b) = (0,0,0,2,1,1)$

$$\begin{cases} a = 0 \\ -a = 0 \\ a = 0 \\ a+2b = 2 \\ -b = 1 \\ a+2b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ b = -1 \end{cases} \longleftarrow \text{Sist. incompatibile}$$

Non esistono coef. tali da poter esprimere R_3 come comb. lin. di R_1 e R_2 perché R_3 è lin. indipendente da R_2 e R_1

- Possiamo pensare $(A|B)$ come matrice fatta da vettori colonne)

$(A|B) = (C_1\ C_2\ C_3\ \dots\ C_n | B)$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Se $(A|B)$ è a scala:

le colonne sono lin. indipendenti?

Nell'esempio 3 $C_2 = -C_1$

Se voglio mettere in relazione C_2 con le altre $C_2 = -C_1 + 0C_3 + 0C_4 + 0C_5 + 0B$

Oss generale

- Se la matrice $(A|B)$ è a scala non tutte le colonne non nulle sono lin. indip. fra di loro.

Cioè può esserci un caso in cui una colonna è lin. dip. delle altre. Non perf le altre devono esserlo.

- $C_3 = a_1 C_1 + a_2 C_2$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ 2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

SISTEMA INCOMPATIBILE

$\Downarrow$

C_3 è lin. indip. da C_1 e C_2

NB In generale si riesce a dimostrare che, in una matrice $(A|B)$ ridotta a scala le colonne con un indicatore sono lin. indip., quelle senza indicatori sono lin. dipendenti.

- In generale $(A|B)$ corrisponde $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = 1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n \end{cases}$

leggiamo il sistema per colonne $\iff \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Risolvere $AX = B$ vuol dire trovare il valore delle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ e scritta in questa forma vuol dire trovare dei coefficienti $x_1, x_2, \dots, x_n \iff B$ è comb. lineare di $C_1, C_2, \dots$

~~(A'|B')~~

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

sistema equivalente incompatibile

Osservo che il $rg(A') = 2$ mentre $rg(A'|B') = 3$:

- l'incompatibilità è data da $rg(A) < rg(A'|B')$ perché ed una riga fatta nulla

esempio : Risolvere il sistema di matrice

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_1 - R_2 \\ R_3 \to 2R_1 - R_3 \\ R_4 \to 3R_1 - R_4}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{2} R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_2 - R_3 \\ R_4 \to R_2 - R_4}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$S\,(-x_3,\ 1,\ x_3)$ $\forall x_3 \in \mathbb{R}$ $\qquad \infty^{3-2} = \infty^{1}$

incognita libera

x_3 = incognita libera

$rg(A|B) = rg(A'|B')$

Riflettiamo sulla matrice ridotta a scala

R_1 e R_2 sono lin. indipendenti

Se osserviamo, C_1 e C_2 sono dotate di indicatori e quindi lin. indipendente.

OSS

- Il rango ha quindi un altro significato, indica il numero di Righe lin. ind. e Colonne lin. ind.
- La C_3 non è marcata da indicatore e se scelgo x_3 come incognita libera va bene.
  In generale so che se C_j non è marcata allora posso scegliere x_j come incognita libera senza sbagliare.
- Le soluzioni sono $\infty^{n - rg(A|B)}$ $\Leftrightarrow$ ci sono $n - rg(A|B)$ incognite libere
- Una soluzione è una terna di valori (c_1, c_2, c_3) tale che (nell'esempio)

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lin. ind. $\qquad$ lin. dip. dai precedenti

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\forall c_3 \in \mathbb{R}$ (c_3 è inc. libera) ottengo al primo membro una comb. lineare.

Es Discutere il sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{al variare di } h \in \mathbb{R}$$

È un <u>sistema omogeneo</u> (solitamente quando è così si scrive solo A)

Se $1+h=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 1 & -h & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

COMPATIBILE perché $rg(A') = 2 = rg(A'|B')$ con ∞^{4-2} soluzioni cioè ci sono 2 incognite libere

Se $1+h \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad rg(A) = rg(A|B) = 3 \Rightarrow \infty^{4-3} \text{ soluzioni} \Rightarrow \infty^1 \text{ soluzioni}$$

$\Rightarrow$ 1 incognita libera.

Es Risolvere il sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{e il } \underline{\text{sistema omogeneo associato}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}, \ \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

$$(-x_3, 1-x_3, x_3)$$

soluzioni $\infty^{3-2} = \infty^1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \quad \text{soluzioni } (-x_3, -x_3, x_3) \ \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

Si vede che:

- $(-x_3, 1-x_3, x_3)$ la posso scrivere come $\underbrace{(-x_3, 1-x_3, x_3)}_{\text{soluzioni } (A|B)} = \underbrace{(-x_3, -x_3, x_3)}_{\text{soluzioni di } (A|0)} + \underbrace{(0, 1, 0)}_{\text{una sol. particolare di } (A|B)}$

$(0,1,0)$ è quella che si ottiene con $\underline{x_3 = 0}$

PROPOSIZIONE:

Se $(A|B)$ è compatibile e Z è l'espressione delle sue soluzioni allora $Z = T + C$ dove T è <u>la generica soluzione di $(A|0)$</u> e <u>C è una particolare soluzione di $(A|B)$</u>

<u>Dim.</u> Z = soluzione di $(A|B) \iff AZ = B$ per def.

anche $AC = B$, perché C è sol. particolare.

$AZ - AC = B - B = 0 \to$ colonna termini noti

es.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \quad , \text{ trovare } A^{-1}$$

Risolvo $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dove $X = A^{-1}$ e $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ $X = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

le incognite sono i vettori riga x_1, x_2. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Matrice completa del sistema

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Riduco a scala, devo imporre delle condizioni.

Supponiamo $a \neq 0$ (indicatore della prima riga), $c \neq 0$

$$R_2 \to aR_2 - cR_1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & 0 & a \end{array}\right)$$

la matrice così ottenuta è ridotta a scala

Per il teo. di R.C. il sistema è compatibile $\iff r(A) = r(A \mid I) \iff$

$ad - bc \neq 0 \iff \det A \neq 0$

Se $\det A \neq 0$, calcolo A^{-1} risolvendo il sistema ridotto a scala.

$$\begin{cases} a X_1 + b X_2 = (1,0) \\ (ad-bc) X_2 = (0,a) \end{cases}$$ Sto ragionando con incognite vettoriali

$$\begin{cases} \ldots \\ X_2 = \dfrac{(0,a)}{(ad-bc)} \end{cases} \to \begin{cases} a X_1 = (1,0) - b \dfrac{(0,a)}{(ad-bc)} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a X_1 = (1,0) - \dfrac{(0,ab)}{(ad-bc)} \\ \ldots \end{cases} \to \begin{cases} a X_1 = \dfrac{(ad-bc, -ab)}{(ad-bc)} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ad-bc, -ab)}{(ad-bc)} \\ \ldots \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{a} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$ CONTROLLARE I CALCOLI!

Spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$

Per visualizzarlo è possibile pensarlo come punti dello spazio a n coordinate

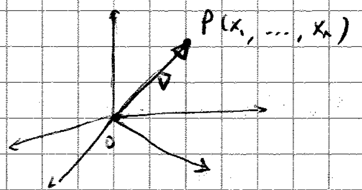
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Con notazione matriciale potremmo pensarlo come $\mathbb{R}^{n,1}$

O anche pensarlo come $\mathbb{R}^{1,n}$, cioè possiamo pensare ~~le vettori colonne~~ i vettori colonne come vettori righe

$$\mathbb{R}^{1,n} = \{ \bar{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \; x_i \in \mathbb{R} \}$$

Penso a un sistema di riferimento a n assi e ~~y~~ con origine in O, il punto generico $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$



$$\bar{v} = \overline{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Possiamo definire delle operazioni:

<u>Somma</u>

$$\bar{v} + \bar{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Somma componente a componente.

<u>Prodotto per $k \in \mathbb{R}$</u>

$$k\bar{v} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$$

<u>Proprietà</u>:

1) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ <u>Commutativa</u>

2) $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ <u>Associativa</u>

3) $\exists \, \bar{0}$ t.c. $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ <u>Elemento neutro</u>

4) $\forall \bar{v} \neq \bar{0}, \; \exists \, -\bar{v}$ t.c. $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0} \quad -\bar{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_3 \end{pmatrix}$

5) $\forall \bar{v}, \; 1\bar{v} = \bar{v}$

6) $k(m\bar{v}) = (km)\bar{v} \quad k, m \in \mathbb{R}$

7) $(k+m)\bar{v} = k\bar{v} + m\bar{v}$ <u>Prodotto risp. Somma</u>

8) $k(\bar{v} + \bar{w}) = k\bar{v} + k\bar{w}$

Ho definito un insieme con due operazioni e diverse proprietà - quindi:

$\mathbb{R}^n$ con somma e prodotto per un numero reale è uno <u>spazio vettoriale</u> in $\mathbb{R}$

es $\mathbb{R}^3$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.c. $x - y + z + 1 = 0\}$?

Nel linguaggio della geometria W è un piano, ma è anche un sottospazio di $\mathbb{R}^3$?

Possiamo ~~dimostrare~~ verificare che W è sottospazio in due modi:

I modo:

① $W \neq \emptyset$, $(0,1,0) \in W$ ok!

② • $\bar{v} \in W$ $k\bar{v} \in W$?

$(y-z-1, y, z)$ $\forall y,z \in \mathbb{R}$

$(ky-kz-k, ky, kz) = kv$

nell'eq.ne:

$(ky-kz-k) - ky + kz + 1 \overset{?}{=} 0$

$k \cdot 1 \overset{?}{=} 0$ non è verificata $\forall k$

Quindi W non è chiuso per rispetto al prodotto di un numero per $\bar{v}$

W non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$!

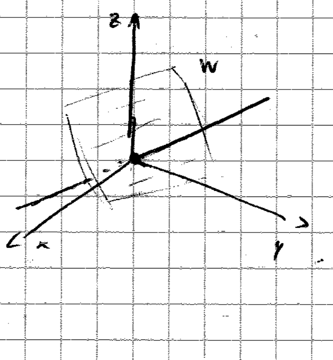
II modo:

Controllo se $\bar{o} \overset{?}{\in} W$, essendo W definito da un'equazione allora $\bar{o}$ deve soddisfare l'equazione

$0 - 0 + 0 + 1 \overset{?}{=} 0$ No! $\Rightarrow$ W non è sottospazio vettoriale!

• Chi sono tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^3$?

• $\{\bar{o}\}$, $\mathbb{R}^3$ sottospazi impropri



W è un piano passante per l'origine

$\Downarrow$

W è un sottospazio vettoriale

es. $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$

① $W \neq \emptyset$ almeno $\{\bar{o}\} \in W$

② $\bar{w}_1 = (y_1 - z_1, y_1, z_1)$, $\bar{w}_2 = (y_2 - z_2, y_2, z_2)$

$\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = (y_1 + y_2 - z_1 - z_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\to$ eq.ne $\cancel{y_1} + \cancel{y_2} - \cancel{z_1} - \cancel{z_2} - \cancel{y_1} \cancel{y_2} + \cancel{z_1} + \cancel{z_2} \overset{?}{=} 0$ ok W chiuso rispetto alla somma

③ $k\bar{w}_1 = (ky_1 - kz_1, ky_1, kz_1)$ $\to$ eq.ne $\cancel{ky_1} - \cancel{kz_1} - \cancel{ky_1} + \cancel{kz_1} \overset{?}{=} 0$ $\Rightarrow$ ok

W è un sottospazio vettoriale.

Altro modo di assegnare sottosp.

È legato ai sistemi lineari omogenei

Dato un sistema lin. omog. di matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$AX = 0$ in notazione di prodotto matriciale

Sia $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ una soluzione, tanto sappiamo che ne ha almeno una.

e $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ altra soluzione, vuol dire che $A \cdot C = 0$ e $AD = 0$

Sommo membro e membro $\cancel{A(C+D)}$ $AC + AD = 0 \rightarrow \boxed{A(C+D) = 0}$

Moltiplico per un coefficiente $k \in \mathbb{R}$

$kAC = k0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$\boxed{A(kC) = 0}$

Se ho particolari soluzioni del sist. omog. si possono sommare per ottenerne ancora una così come il prodotto per un reale k.

① l'insieme delle sol. di un sist. omog. lin. non è mai vuoto

② la somma di due soluzioni è soluzione

③ Il prodotto di una sol. per $k \in \mathbb{R}$ è soluzione

①, ②, ③ Vogliamo dire che l'insieme delle soluzioni di $AX = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{R}^n$

es. in $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$

$x - y + z = 0$ posso interpretarlo come sist. lineare omogeneo quindi è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{R}^3$

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0,\ x + z = 0\}$

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad AX = 0 \quad$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

U è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE

- Dato un sistema lin. non omogeneo di matrice $(A|B)$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ con $AX = B$ le soluzioni (se esistono) NON sono sottospazio.

① può capitare che $AX = B$ sia incompatibile $\Rightarrow$ $\cancel{X = \emptyset}$ $\nexists$ soluzioni

② supponiamo di avere C, D soluzioni $A(C+D) = 2B$ $C+D$ NON È SOLUZIONE

Def: Dato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio, si dice base di V, $\mathcal{B}_V$ un insieme ordinato di vettori $u_1, u_2, \dots, u_r$ che siano ~~generatori di V~~

① generatori di V

② lin. indip.

es. $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \mathcal{B}_{\mathcal{L}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)}$

$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ è solo un insieme di generatori

OSS
Ordinati: assegno un ordine ai vettori, se cambio l'ordine dei vettori ottengo ancora una base, ma DIVERSA

$(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \mathcal{B}_{\mathcal{L}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)} \neq (\bar{u}_2, \bar{u}_1) = \mathcal{B}_{\mathcal{L}(u_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)}$

Teo: ogni vettore $\bar{v} \in V$, si esprime in modo unico

$\bar{v} = a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_r \bar{u}_r$

$\mathcal{B}_V = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r)$

• $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ si dicono componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}_V$

Dim:
Per assurdo:

$\bar{v} = a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_r \bar{u}_r = b_1 \bar{u}_1 + b_2 \bar{u}_2 + \dots + b_r \bar{u}_r$

$\bar{v} - \bar{v} = \bar{0} = (a_1 - b_1)\bar{u}_1 + (a_2 - b_2)\bar{u}_2 + \dots + (a_r - b_r)\bar{u}_r$

per la lin. indipendenza $\Rightarrow a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \dots, a_r - b_r = 0 \Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$

quindi le componenti devono essere uguali

• $W \subseteq \mathbb{R}$ sottospazio vett. $\Leftrightarrow$ ① $W \neq \emptyset$
② W chiuso rispetto alla +
③ W chiuso rispetto al prodotto di un $k \in \mathbb{R}$

$B_W = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r)$, insieme ordinato di vettori di W lin. ind. e generatori

PROBLEMA: Come trovare una base di W B_W, dato W?

W si può assegnare essenzialmente in due modi:

- W = Soluzioni di un sistema lineare omogeneo, $AX = 0$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Perchè stiamo lavorando in $\mathbb{R}^n$
- $W = \mathcal{L}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_p)$ dove $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_p$ sono generatori di W

1° Modo) Trovare B_W

Esempio W: $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & +2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ sono generatori

sono anche lin. indipendenti?

$a_1 \bar{w}_1 + a_2 \bar{w}_2 + a_3 \bar{w}_3 = \bar{0}$ incognite sono $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$a_1 (1,0,2,0) + a_2 (2,1,0,0) + a_3 (1,1,-2,0) = (0,0,0,0)$

$(a_1 + 2a_2 + a_3,\ a_2 + a_3,\ 2a_1 - 2a_3,\ 0) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 - a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ a_2 = -a_3 \\ a_1 = a_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ a_2 = -a_3 \\ a_1 = a_3 \end{cases}$$

Soluzioni: $(a_3, -a_3, a_3)$ ∞^1 soluzioni

Da ciò $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ sono lin. dipendenti!

$\bar{w}_3 = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \Rightarrow \bar{w}_3$ dà informazioni RIDONDANTI quindi

$\bar{w}_2$ e $\bar{w}_1$ sono sufficienti come generatori di W

$\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$ sono lin. indip.? SI!

$\Rightarrow \mathcal{B}_W = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, $\mathcal{B}'_W = (\bar{w}_2, \bar{w}_1)$

!! $\mathcal{B}_W \neq \mathcal{B}'_W$ perchè è stato cambiato l'ORDINE!!

$\boxed{\text{METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI}}$

II MODO (sulla base dell'esempio precedente): Metodo di RIDUZIONE

costruisco una matrice

$$M = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le righe di M oltre ad essere generatori di W sono anche generatori dello spazio delle righe di $M \Rightarrow R(M) =$ spazio delle righe di $M = \mathcal{L}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3) = W$

Riflettiamo sulle operazioni elementari sulle righe

$\underset{①}{R_i \leftrightarrow R_j}$, $\underset{②}{R_i \to R_i + kR_j}$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\underset{③}{R_i \to kR_i}$, $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

① Non cambia $R(M)$

② $\mathcal{L}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_p) \subseteq \mathcal{L}(R_1, \dots, R_i + kR_j, \dots, R_p)$

Es.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3) \overset{?}{=} \mathcal{L}(\bar{w}_1, \bar{w}_2 - 2\bar{w}_1, \bar{w}_3)$$

Osservazione

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$W = R(M)$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dalle righe di M

Se riduco a scala con operazioni elem. sulle righe → base dello spazio delle righe

Se riduco a scala per colonne con operazioni elem. sulle colonne → base dello spazio delle colonne.

⇓ NON SERVE per ottenere $\mathcal{B}_W$

Sia lavorando sulle righe che sulle colonne ottengo ~~dei~~ un numero di vettori che è lo STESSO !!

NB RANGO DI **M** = massimo numero di colonne e righe lin. indipendenti.

DIMENSIONE

Def. Si dice DIMENSIONE di $W \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale, $[\dim(W)]$ è il numero di vettori di una qualsiasi base, $\mathcal{B}_W$.

es 1) $W = \{\bar{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

$\dim W = 0$ perché $\bar{0}$ è linearmente dip. e se stesso quindi NON esistono Basi !!

2) $\dim \mathbb{R}^n = n$

una $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ è la cosiddetta BASE CANONICA:

Consideriamo la Matrice I_n:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

base canonica di $\mathbb{R}^n$ = (Righe di I_n)

$\mathcal{B}_{canonica} = ((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1))$
$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

Considero $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ allora

$\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$

Rispetto ad un'altra base le componenti saranno diverse

esempio di base canonica in $\mathbb{R}^3$ $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ perché $\bar{i} = (1,0,0)$
$\bar{j} = (0,1,0)$
$\bar{k} = (0,0,1)$

TEOREMA: Tutte le basi di un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ hanno lo stesso numero di elementi

(Assurdo)

Dim. Date 2 basi di W $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ e $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_h)$ con $k \neq h$, $k >$

Lavoro nel co. Teorema: $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_h)$ è una base ⟺
$\bar{v}_1 = a_{11}\bar{w}_1 + a_{12}\bar{w}_2 + \dots + a_{1h}\bar{w}_h$
$\bar{v}_2 = a_{21}\bar{w}_1 + a_{22}\bar{w}_2 + \dots + a_{2h}\bar{w}_h$
$\bar{v}_k = a_{k1}\bar{w}_1 + a_{k2}\bar{w}_2 + \dots + a_{kh}\bar{w}_h$

es.

Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene $\mathcal{B}_W = ((1,-2,1))$

<u>PROBLEMA DI UN COMPLETAMENTO DI UNA BASE</u>

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ sto cercando 3 vettori

$\bar{\mathcal{B}} = ((1,-2,1), ?, ?)$

Costruisco una matrice M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \bar{e}_1 \\ \to \bar{e}_2 \\ \to \bar{e}_3 \end{matrix} \Bigg\} \ \underline{\text{generatori di } \mathbb{R}^3}$$

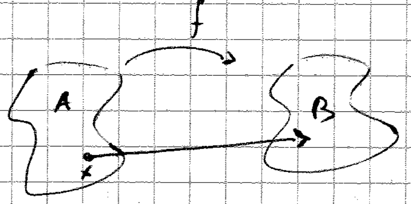
Le righe di M sono generatori di $\mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to 2R_3 - R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_3 - R_4]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((1,-2,1), (0,2,-1), (0,0,1))$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

<u>FUNZIONI</u>



$f(x) = y$

$x \in \mathrm{dom} f$, $y \in$ codominio di f

funzioni tra spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$

es.

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{3,4}$

Questa matrice definisce una particolare funzione da $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, così:

$\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^4$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$f_A(\bar{v}) = f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è un vettore colonna a tre componenti

Sto associando a qualunque vettore in $\mathbb{R}^4$ un vettore in $\mathbb{R}^3$

es.

$$f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è proprio la prima colonna della matrice

PROBLEMA : Esistono $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f_A(\vec{v}) = \vec{0}$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$?

es.

Cerco $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $f_A(\vec{v}) = \vec{0} \iff A\vec{v} = \vec{0}$ per def.

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ SISTEMA LINEARE OMOGENEO CON MATRICE dei coef. A

Risolvo il sistema riducendo a scala

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2}]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo discutere il sistema e poi risolverlo

Soluzioni : $\infty^{3-2} = \infty^1$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \quad S = \{(2x_2, x_2, -2x_2)\} \ \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

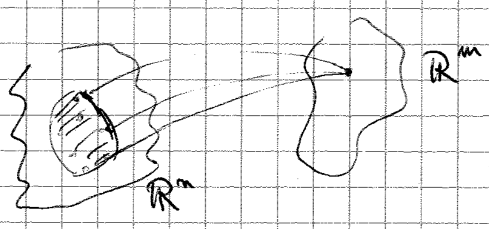
S forma un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e $S \subseteq \mathbb{R}^3$

Def

Si dice nucleo di $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ il sottospazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$ e si denota $\ker f_A$, $\ker(A)$

$\ker(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\vec{v}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m\}$

In altri termini $\ker(A)$ = l'insieme delle controimmagini del vettore nullo $\vec{0}_{\mathbb{R}^m}$



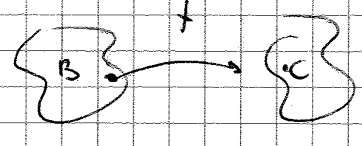
Nel caso dell'esempio $\dim(\ker(A)) = 1$

$\mathcal{B}_{\ker(A)} = ((2, 1, -2))$

In generale

$\dim(\ker(A))$ = numero delle incognite libere.

- Consideriamo una funzione $f : B \to C$



f:

f: INIETTIVA $\iff$ IMMAGINI DISTINTE cioè $f(x_1) \neq f(x_2)$ se $x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow f_A(\vec{v}) \in \mathcal{L}(c_1, c_2, c_3) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Def

$\mathcal{L}(c_1, c_2, c_3)$ si definisce sottospazio immagine di f_A e si indica con $\operatorname{Im} f_A$

Def. In generale si dice immagine di $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne A

Risultato

$$\dim \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rg}(A)$$

Abbiamo osservato che il numero delle colonne lin. indipendenti è il rango!

~~Ricordo:~~ ~~$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$~~ ~~Def:~~

Esempio

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2x + y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\infty^{2-1} = \infty^1$

$\dim(\ker f) = 1 \Rightarrow$ NON è iniettiva

~~$\ker$ $B_{\ker f} = \{(2,1)\}$~~

f in. $\Leftrightarrow \dim \ker f = 0$

$\ker f = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{riduco} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to 2R_2 - R_1$
$R_3 \to 2R_2 - R_1$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x \\ \text{\& \ldots} \end{cases}$$

$\ker f = \{(x, -2x)\}$

$B_{\ker f} = \{(1, -2)\}$

$\dim(\ker f) = 1$

Def

$\operatorname{Im} f = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } f(\vec{v}) = \vec{w}\}$

$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ spazio delle colonne della matrice M associata ad f.

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$B_{\operatorname{Im} f} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

- Il $\ker f$ NON è combinazione lineare delle righe!!!
- $\operatorname{Im} f$ È combinazione lineare delle colonne.

$f(\bar{u}_1) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(\bar{u}_1) = a_{11}\bar{w}_1 + a_{21}\bar{w}_2 + \dots + a_{m1}\bar{w}_m$

$f(\bar{u}_2) = \dots$

$\vdots$

$f(\bar{u}_n) = a_{1n}\bar{w}_1 + a_{2n}\bar{w}_2 + \dots + a_{mn}\bar{w}_m$

Costruisco una matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} = M \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Opero un prodotto matrice per colonna.

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \Big\} \; m \text{ righe}$$

Facendo i calcoli $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f(\bar{v})$ ossia abbiamo trovato che

$\Rightarrow \forall f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare si può associare una $M \in \mathbb{R}^{m,n}$

<u>Nomenclatura</u>

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare se è INIETTIVA + SURIETTIVA = BIETTIVA

  In questo caso cioè per app lineari che godono di iniettività e suriettività si parla di ISOMORFISMO! (? $\Rightarrow m = n$)

- Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se $n = m$ f si dice ENDOMORFISMO, vuol dire che l'applicazione lavora nello stesso spazio. ?

FUNZIONE INVERSA

<u>composizione</u> di applicazioni lineari

Date
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

<u>Def</u> $g \circ f$ è l'applicazione che va da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definita da $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$:

$g \circ f(\bar{v}) = g[f(\bar{v})]$

<u>Esempio</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associata ad $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, associata ad $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcolare $g \circ f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in due modi diversi $\begin{cases} 1° \text{ modo: dalla definizione di composizione} \\ 2° \text{ modo: dal prodotto di matrici} \end{cases}$

L'applicazione lineare inversa f^{-1} esiste se e solo se f è un ENDOMORFISMO ($n = m$) e f è un ISOMORFISMO (cioè rango è il massimo possibile, $rg(M) = n \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = n$)

Corollario

f è INVERTIBILE se e solo se M è una matrice quadrata e $rg(M) =$ massimo possibile

Es.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x,y) = (2y, -x)$

- verificare che f è lineare
- dire se è invertibile
- ~~calcolare~~ $\cancel{f^{-1}}$ • calcolare $f^{-1}(1,1)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il $rg(M) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2 \Rightarrow rg(M) = n$ quindi f è invertibile

Cerco $\{(x,y) \mid f(x,y) = (1,1)\}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$rg(A|B) = 2$

Il numero di soluzioni $S: \infty^{n - rg(A|B)} = \infty^0 = \underline{1}$

$$\begin{cases} -x = 1 \\ 2y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la controimmagine $f^{-1}(1,1) = (-1, \frac{1}{2})$ ossia $f(-1, \frac{1}{2}) = (1,1)$

- GENERALIZZAZIONE (Spazi Vettoriali)

Def. Dato un campo numerico $\mathbb{K} = (\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \dots)$ e assegnato un insieme non vuoto V di elementi (che chiamo vettori), si dice che V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale quando sono definite in V due operazioni ossia SOMMA di vettori e PRODOTTO di un vettore per $\forall k \in \mathbb{K}$ che godono delle seguenti proprietà:

1) $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$, $\quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ Commutativa

2) $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V \quad (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ Associativa

5) $\mathbb{R}^n$ è un $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale

$\mathbb{C}^n$ è un $\mathbb{C}$ - spazio vettoriale

V $\mathbb{R}$ - spazio vettoriale $\iff \mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ si possono estendere a V:
  - combinazioni lineari
  - dipendenza / indipendenza lineare
  - sottospazio vettoriale } basi dim.
  - applicazioni lineari } ker f, Im f, ...

<u>Ricordo</u>

<u>Def</u> $f: V \longrightarrow W$ con V, W spazi vettoriali <u>su $\mathbb{K}$</u>, è <u>lineare</u> se

① $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V \Rightarrow f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v})$

② $\forall k \in \mathbb{K} \Rightarrow f(k\bar{u}) = k f(\bar{u})$

[!!] <u>ESEMPIO</u>: IMPORTANTISSIMO

Dato V $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale data $\mathcal{B}_V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$, costruisco una applicazione lineare da $\mathbb{K}^n \longrightarrow V$ definita da

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

$$\downarrow f$$

$$\{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n\} \in V$$

a) • Verifico che f è una ~~fun~~ <u>app. lineare</u>

b) • Verifico che f è un <u>ISOMORFISMO</u>

a) ① $f[(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)] = f(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n) =$

$= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \dots + (a_n + b_n)\bar{v}_n \underset{\text{sono dentro uno spazio vettoriale}}{=} (a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n) + (b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n) =$

$= f(a_1, \dots, a_n) + f(b_1, \dots, b_n)$

② $k f(a_1, \dots, a_n) = k(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n) = (ka_1)\bar{v}_1 + \dots (ka_n)\bar{v}_n =$

$f(ka_1, \dots, ka_n) = f[k(a_1, \dots, a_n)]$

b) $\ker f = \{(a_1, \dots, a_n) \text{ t.c. } a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}\} = \{\bar{0}\}\ \{(0, \dots, 0)\}$ per def. di Base.

$\ker f = \{(0, \dots, 0)\} \Rightarrow \dim(\ker f) = 0 \Rightarrow f$ iniettiva

$\operatorname{Im} f = \{\bar{v} \in V \mid \exists (a_1, \dots, a_n) \text{ con } f(a_1, \dots, a_n) = \bar{v}\}$

$\forall \bar{v} \in V \quad \bar{v} = c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n \qquad f^{-1}(\bar{v}) = (c_1, c_2, \dots, c_n) \Rightarrow \operatorname{Im} f = V$

<u>RICORDO</u> (Su cui si basa il resto)

- Dato V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $B_V = (\bar v_1, \bar v_2, \dots, \bar v_n)$ allora $V \cong \mathbb{K}^n$, ossia posso lavorare su V attraverso questo <u>ISOMORFISMO</u>!
- V, $\mathbb{K}$-spazio vettore, $U, W \subseteq V$ sottospazio vettoriale
  - $U \cap W$ intersezione
  - $U + W$ somma

<u>TEOREMA</u> (Formula di Grassmann)

Con i dati precedenti, $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$

<u>esempio</u>: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \mathbb{R}$ - spazio vettoriale

$U = \{(x,y,z) \text{ t.c. } x-y=0\}$ $\qquad W = \{(x,y,z) \text{ t.c. } x+z=0\}$

Due piani vettoriali ossia che passano per l'origine.

. Trovare $U+W$, $U \cap W$ e basi e verificare la formula di Grassmann

B_U - generico vettore di U: (y, y, z) $\forall y, z \in \mathbb{R}$

$B_U = ((1,1,0),(0,0,1)) \rightarrow \dim U = 2$

- Generico vettore di W: $(-z, y, z)$ $\forall y, z \in \mathbb{R}$

$B_W = ((-1,0,1),(0,1,0)) \rightarrow \dim W = 2$

Occupiamoci della somma tra $U + W$

$U + W = \mathbb{R}^3$ da verificare (geometricamente è evidente)

Concentriamoci su $U \cap W$: $\{(x,y,z) \mid x-y=0,\ x+z=0\}$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \quad \begin{cases} x=-z \end{cases} \quad \begin{cases} y=-z \\ x=-z \end{cases}$$

B generico generatore: $(-z,-z,z) \rightarrow B_{U \cap W} = ((-1,1,1))$ $\quad \dim(U \cap W) = 1$

Formula di Grassmann

$2 + 2 = \dim(U+W) + 1 \Rightarrow \dim(U+W) = 3$

Costruiamo una base del sottospazio-somma $U+W$ che contenga B_U e B_W (completamento di una base?)

$$B_{U+W} = (\underbrace{(-1,-1,1)}_{U \cap W}, \overbrace{(0,0,1)}^{\text{Base di } U}, (0,1,0))$$

Base di W

Completo $B_{U \cap W}$ a una base di U, costruisco una matrice con il vettore che già abbiamo

$$\text{sono vettori di } U \text{ ossia una base} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 a_{11} + x'_2 a_{12} \\ x_2 = x'_1 a_{21} + x'_2 a_{22} \end{cases}$$

Matrice del PASSAGGIO o del CAMBIAMENTO DI BASE da $B \to B'$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \quad \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}}$$

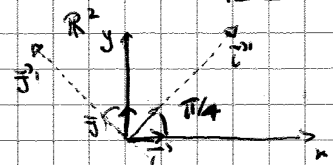
$$\bar{v}'_1 \quad \bar{v}'_2$$

esiste P^{-1} ? si, perché ha $\bar{v}'_1$, $\bar{v}'_2$ lin. indipendenti!

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

es. $\mathbb{R}^2$,

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$



$\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$

$$\vec{i}' = \cos\frac{\pi}{4}\,\vec{i} + \sin\frac{\pi}{4}\,\vec{j}$$

$$\vec{j}' = -\sin\frac{\pi}{4}\,\vec{i} + \cos\frac{\pi}{4}\,\vec{j}$$

ma P e P^{-1} ?

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Posso mettere in relazione le coordinate tra B e B'

= Una rotazione del sistema di riferimento in $\mathbb{R}^2$ di un angolo α è data da

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

= Data $f: V \to W$ applicazione lineare V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, è importante che V, W siano sullo stesso campo.

Se <u>$\dim V$, $\dim W$ sono finite</u>, sono date B_V e B_W allora possiamo identificare $f \leftrightarrow M$

es. $V = \mathbb{R}_2[x]$ = polinomio in x a coefficienti reali $\deg p(x) \leq 2$
$= W$

$f: V \to W$ definita da $\forall p(x) \in V$, $f(p(x)) = \dfrac{dp(x)}{dx}$

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x$$

Trovo Cerco una B_V e B_W, f è un endomorfismo

$B_V = (1, x, x^2)$ • $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ = comb. lineare di $(1, x, x^2)$ di coef. a_0, a_1, a_2

• $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0 \iff a_0 = a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow$ lin. indip.

caso utile

$f: V \to V$ endomorfismo,

cambio base $B_V \to B'_V$

Rispetto a B_V: f è associata ad $M = M^{B_V, B_V}$

$MX = Y$ $\quad B'_V \quad B'_V$

$MX = Y \to M(PX') = PY' \to (MP)X' = PY' \to (P^{-1}MP)X' = (P^{-1}P)Y'$

$\to \boxed{(P^{-1}MP)X' = Y'}$

$P^{-1}MP$ è la matrice di f rispetto a B'_V, B'_W

Def $M \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice **SIMILE** ad $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ se esiste $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile tale che $A = P^{-1}MP$

Si dimostra che tutte le matrici di un endomorfismo si trasformano in matrici simili quando si cambia base.

AUTOVETTORI, DIAGONALIZZAZIONE

es. $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, posso interpretarla come una matrice di un endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (rispetto alla base canonica)

Calcoliamo $f(1,1)$

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def: Dato un endomorfismo $f: V \to V$ del $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, un vettore $\bar{v} \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ e t.c. $f(\bar{v}) = k\bar{v}$ per qualche $k \in \mathbb{K}$ si dice autovettore di f e k si dice autovalore.

Corollario

Tutti i multipli $\neq \bar{0}$ di un autovettore sono autovettori relativi ad un autovalore

Teo

$f: V \to V$ endomorfismo di matrice M rispetto a B_V. Se esiste una B'_V formata da autovettori di f allora $M_f^{B'_V B'_V}$ è una matrice diagonale

Def. M quadrata è diagonale se $a_{ij} = 0$, per $i \neq j$

Dim

Supponiamo $B'_V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$, $\bar{v}_i$ autovettori di f: $\forall i$, $f(\bar{v}_i) = k_i \bar{v}_i$

Costruisco $M_f^{B'_V B'_V} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & k_n \end{pmatrix}$ $\quad f(\bar{v}_1) \dots f(\bar{v}_n)$

$f(\bar{v}_1) = k_1\bar{v}_1 = k_1\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + 0\bar{v}_3 + \dots + 0\bar{v}_n$

$f(\bar{v}_2) = k_2\bar{v}_2 = 0\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \dots + 0\bar{v}_n$

Dim (viceversa):

È data $M_f^{B_v B_v} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & k_n \end{pmatrix}$ diagonale, vogliamo dimostrare che

B_v è formata da autovettori di f

Leggiamo la matrice per colonne:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \underset{def}{=} f(\bar{u}_1) \quad \text{dove } \bar{u} \in B \quad B = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$$

$$f(\bar{u}_1) = \underline{\underline{k_1 \bar{u}_1}} + 0 \cdot \bar{u}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{u}_n$$

Per definizione $\bar{u}_1$ = è un autovettore relativo a k_1

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \underset{def.}{=} f(\bar{u}_2) = 0\bar{u}_1 + \underline{\underline{k_2 \bar{u}_2}} + \dots + 0 \cdot \bar{u}_n$$

$\Downarrow$

Per def. $\bar{u}_2$ è autovettore riferito all'autovalore a k_2

Si dimostra quindi che tutti ~~gli auto~~ i vettori di B sono autovettori, rispettivamente riferiti agli autovalori.

[IMPORTANZE!] $\Rightarrow$ M deve essere ~~sc~~ riferita alla stessa base sia in partenza che in arrivo.

PROBLEMA:

Dato endomorfismo $f: V \to V$, V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $\dim V = n$ tutte le possibili matrici $M_f^{B,B}$ al variare delle basi B_V sono legate da una relazione (RELAZIONE DI SIMILITUDINE)

$$M_f^{B',B'} = P^{-1} M^{B,B} P$$

PROBLEMA:

Diagonalizzare! Vedere se tra tutte le matrici associate a f esiste una matrice DIAGONALE!

Def: Se esiste una matrice diagonale allora f si dice DIAGONALIZZABILE o semplice (una matrice si dice diagonalizzabile se simile a una matrice diagonale)

Es. (Ricerca analitica di autovettori e autovalori)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (scritta rispetto alla base canonica)

$M_f = M_f^{B,B}$, B = base canonica di $\mathbb{R}^2$

Dire se f è semplice (o diagonalizzabile o M_f è diagonalizzabile)

($\Leftrightarrow \exists\ B_{\mathbb{R}^2}$ formata da autovettori di f?)

Cerco tutti gli autovettori di f $\Leftrightarrow$ cerco $\bar{v} = (x, y)$ $\bar{v} \neq 0$ tale che $f(\bar{v}) = k\bar{v}$ $\Leftrightarrow$

$$M_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tutte le matrici legate ad un endomorfismo sono legate tra di loro da una relazione di similitudine

Cerco P del cambiamento di base:

$$P = \begin{pmatrix} \pi & 30 \\ -\pi & 30 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad B_{\mathbb{R}^2} = (\bar v_1', \bar v_2')$$

$\bar v_1'$ $\bar v_2'$

Def: Dato $f: V \to V$, V K-spazio vettoriale endomorfismo, se $k \in K$ è un autovalore di f, si dice AUTOSPAZIO relativo a k:

$$V_k = \{\bar v \in V \mid f(\bar v) = k\bar v\}$$

Notiamo nell'insieme V_k ci sono sicuramente tutti gli autovettori relativi a k, ma anche $\vec 0$

Si dimostra che V_k è sottospazio vettoriale di V.

① contiene il ~~valore~~ vettore $\vec 0$

②

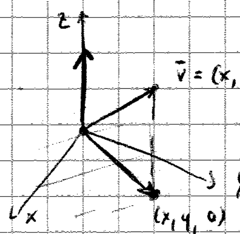
③

Esempio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $\forall (x,y,z)$

$f(x,y,z) = (x,y,0)$. Ricerco autovettori, autovalori, autospazi

Interpretazione geometrica



f = proiezione ortogonale sul piano (x,y)

Tutti i vettori sul piano (x,y) e sull'asse z sono autovettori

- $f(0,0,z) = (0,0,0) \Rightarrow \forall z \neq 0$ autovettore $(0,0,z)$ relativo all'autovalore $k=0$
  $f(0,0,z) = 0(0,0,z)$ $\quad \neq (0,0,0)$
- $f(x,y,0) = (x,y,0) = 1\cdot(x,y,0) \Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{R},\ (x,y,0) \neq (0,0,0)$ è autovettore relativo all'autovalore $k=1$

V_0 = vettori $\neq \bar 0$ dell'asse z $\cup \{\bar 0\}$

V_1 = vettori $\neq \bar 0$ del piano (x,y) $\cup \{\bar 0\}$

Autovalore 0, in generale $f: V \to V$

$$V_0 = \{\bar v \in V \mid f(\bar v) = 0\cdot \bar v = \bar 0\} = \ker f$$

$\exists$ soluzioni non nulli per $k \in \mathbb{K}$ tali che $rg(A - kI_n) < n \iff$
$\det(A - kI) = 0$ da dimostrare.

Devo definire $\det(M)$, $M \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\forall n$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Procedimento ricorsivo, regola di Laplace per calcolare $\det(M)$

- Fisso una riga (o colonna), per esempio 2^a colonna;
- $\det(M) = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} + \dots + a_{m2} A_{m2}$,

dove A_{i2} = complemento algebrico del coefficiente a_{i2}

$$A_{i2} = (-1)^{i+2} \det A'$$

A' è ottenuta da M cancellando la 2^a colonna e riga i-esima

es.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad \det(M) = ?$$

Fisso la II colonna

$$\det M = \cancel{0\, A_{12}} + 1\, A_{22} + 1\, A_{32} + \cancel{0\, A_{42}}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (2-3) - 2\,(2-3) + 1\,(2-2) = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -[-3\,(1-1)] = 0$$

$$\det M = 1$$

Dalla regola di Laplace seguono alcune proprietà di calcolo dei determinanti.

es.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det M = 4 - 6 = -2$$

① se scambio di righe:

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det M' = 6 - 4 = +2 \implies \det(M') = -\det(M)$$

Vale in generale: se scambio 2 righe (o colonne) in $M \in \mathbb{K}^{n,n}$, il determinante cambia segno.

Def. • Il polinomio che è lo sviluppo del $\det(M-kI)$ è detto POLINOMIO CARATTERISTICO, di grado n.

• Se uguagliamo a zero il polinomio caratteristico otteniamo un'equazione caratteristica.

Risolvo il sistema $M-2I$: (ricerco l'autospazio V_2)

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 2R_2+R_1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -5y = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ y = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

questa operazione altera il determinante

$V_2 = \{(0,0,z)\} \quad \forall z \in \mathbb{R}$, Autovettori $\Rightarrow (0,0,z) \quad z \neq 0$

OSS

1) Potremmo essere presi dal panico e dire che $z=0 \Rightarrow V_2 = \{(0,0,0)\}$

[!!] NON PUÒ ESISTERE UN V_k formato solo da $\{\underline{0}\}$ [!!]

2) V_2 = soluzioni sistema omogeneo $M-2I \Rightarrow V_2$ è un SOTTOSPAZIO vettoriale.

$\dim V_2 = n - rg(M-2I) = 3-2 = 1$.

È concorde con il risultato precedente ove che c'è una sola incognita libera

f NON è diagonalizzabile perché $\dim V_2 = 1 \Rightarrow f$ NON È SEMPLICE!

es. 2) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice di $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Trovare autovettori, ... ; f è diagonalizzabile? e se si voglio diagonalizzarla

$$M - kI = \begin{pmatrix} -k & 0 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\det(M-kI) = -k(1-k)(-k) - 1(1-k) = k^2(1-k) - (1-k) = (1-k)(k^2-1) =$$
$$= (1-k)(k+1)(k-1) = -(k-1)^2(k+1)$$

radici $k_{1,2} = 1$, $k_3 = -1$

$k = -1$ ha molteplicità 1
$k = 1$ ha molteplicità 2
} come radici del polinomio caratteristico

autovalori : $k = \pm 1 \in \mathbb{R}$

autospazi :

Teorema: Dato $f: V \to V$ se k è autovalore di f allora otteniamo che

$$1 \leq \dim V_k \leq \text{molteplicità di } k \text{ come radice del pol. carat.}$$

$$\dim V_k = \overbrace{n - rg(M - kI)}^{} \quad (\text{numero di incognite libere})$$

Criterio generale di DIAGONALIZZAZIONE o SEMPLICITÀ:

Data $f: V \to V$, V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dim n, allora f è diagonalizzabile se e solo se ① tutte le radici del pol. carat. sono in $\mathbb{R}$

② $\forall$ autovalore k, $\dim V_k = molt_k$

es. È diagonalizzabile $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? NO

- PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}^n$ (prodotto scalare euclideo)

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Def: Prodotto scalare di $\bar{u}$ e $\bar{v}$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = {}^t\bar{u}\,\bar{v} \quad (\text{come prodotto di matrici})$$

$${}^t\bar{u}\,\bar{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

Def: $\bar{u}, \bar{v}$ si dicono ortogonali quando $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{0}$

Def: si dice norma o modulo $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$

Proprietà:

1) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

2) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad (k\bar{u}) \cdot \bar{v} = k(\bar{u} \cdot \bar{v})$

3) $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot w$

4) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0, \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{v} = \{\bar{0}\}$

esempio $\mathbb{R}^n$: base canonica $\left(\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = {}^t\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = (1, 0 \ldots 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 \ldots = 0$$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = {}^t\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

I vettori della base canonica sono a 2 a 2 ortogonali tra di loro.

$\|\bar{e}_i\| = \sqrt{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i} = \sqrt{(0, \ldots, 1, \ldots 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$, il vettore $\bar{e}_i$ è un VERSORE

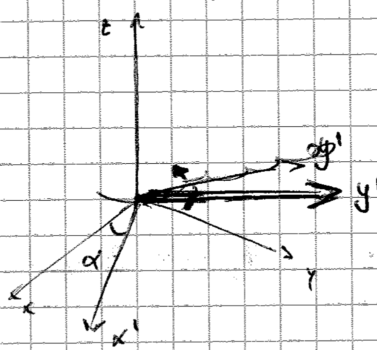
Cerco α tale che:

$$\begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Se $n = 2$ le matrici P ortogonali speciali sono le matrici di una rotazione antioraria di angolo α

- Se $n = 3$ P ortogonale speciale è la matrice di una rotazione di angolo α antioraria attorno a una retta (asse di rotazione)

es. Rotazione di un angolo α attorno all'asse z



$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il versore dell'asse z rimane uguale a se stesso.

MATRICI SIMMETRICHE

Consideriamo la matrice $S \in \mathbb{R}^{n,n}$, simmetrica $\Leftrightarrow$ ${}^tS = S$

TEO: Data $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica:

① le radici del polinomio caratteristico sono tutte reali

② Esiste P ortogonale che diagonalizza S: ${}^tP\,S\,P = D$

D diagonale avente nella diagonale principale gli autovalori di S scritti con le loro molteplicità

Prop: Data $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica reale, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ autovalori di S, $k_1 \neq k_2$, $\forall \vec{v}_1 \in V_{k_1}$, $\vec{v}_2 \in V_{k_2}$ autovettori, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Dim: Calcolo: $(S\vec{v}_2)\cdot\vec{v}_2$ ⟶ prodotto righe per colonne, cioè calcolare l'immagine di $\vec{v}_2$

$$(S\vec{v}_1)\cdot\vec{v}_2 \overset{def}{=} {}^t(S\vec{v}_1)\vec{v}_2 = ({}^t\vec{v}_1\,{}^tS)\vec{v}_2 = ({}^t\vec{v}_1\,S)\vec{v}_2 = {}^t\vec{v}_1(S\vec{v}_2) = \vec{v}_1\cdot(S\vec{v}_2)$$

prodotto righe per colonne — per ipotesi $[{}^tS = S]$ — associatività — def di prod. scalare

Confrontiamo

$$(S\vec{v}_1)\cdot\vec{v}_2 = \vec{v}_1\cdot(S\vec{v}_2) \rightarrow (k_1\vec{v}_1)\cdot\vec{v}_2 = \vec{v}_1\cdot(k_2\vec{v}_2) \rightarrow (k_1\vec{v}_1)\cdot\vec{v}_2 - \vec{v}_1\cdot(k_2\vec{v}_2) = 0$$

$$\rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2(k_1 - k_2) = 0 \Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$$

Verifico (a):

$$ {}^tP = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} $$

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 $$

- Equivalenza di (a) e (b)

$$ P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad {}^tP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & \vdots & & \vdots \\ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix} $$

(a) $$ {}^tPP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \end{pmatrix} $$ $\iff$ le colonne di P sono vettori ortogonali e di modulo 1

(b) $\iff$ le righe di P sono vettori ortogonali e di modulo 1

(a) $\Rightarrow$ $rg\,P = n$ $\Rightarrow$ P è invertibile ($\det P \neq 0$), $P^t = P^{-1}$

Teorema

le matrici ortogonali sono matrici di passaggio tra basi ortogonali di $\mathbb{R}^n$

esempio:

$$ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} $$

Trovare (se esiste) una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale formata da autovettori di A e la relativa matrice di passaggio

TEOREMA:

<u>Gli autovettori di una matrice reale simmetrica sono a due a due ortogonali</u>

$$ \det(A-kI) = \det\begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix} = (1-k)(k^2-1) = (1-k)(k+1)(k-1) $$

$k = 1$ molt 2

$k = -1$ molt 1

V_{-1}: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $V_{-1} = \{(-y, y, 0)\}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

$\dim V_{-1} = 1$

V_1: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $V_1 = \{(y, y, z)\}$ $\forall y,z \in \mathbb{R}$

FORME QUADRATICHE

Forme lineari: **Def**: è una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare, rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}$, f è associata a $M = (a_{11}, a_{12} \dots a_{1n})$, $a_{1j} \in \mathbb{R}$; oppure:

SOMMA DI MONOMI DI I GRADO $\rightarrow$ $\forall \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{v}) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \in \mathbb{R}$

È una particolare funzione di n variabili reali a valori reali.

So che il dominio di f coincide con $\mathbb{R}^n$; può invece essere interessante studiare il segno di f:

- per quali $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{v}) \gtreqless 0$?

Forme quadratiche

Def: una forma quadratica è una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (non lineare) tale che $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $f(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ $\leftarrow$ somma di monomi di II grado

- Dominio di f: $\mathbb{R}^n$
- Segno di f: (?) Cerco i $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(\vec{v}) \gtreqless 0$?

Es:

$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$

$q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Spesso si scrive q (forma quadratica) come in forma matriciale

$$q(x_1, x_2) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

termini di II grado

$$q(x_1 x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 +$$

$$+ a_{22}x_2x_2 = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$2a_{12}$ è un certo numero

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ simmetrica associata

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow r(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$

Verifica:

$$(x_1 \; x_2) \left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

$$= x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

- Per trovare il segno del pol. carat.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-T & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-T \end{pmatrix} = (a_{11}-T)(a_{22}-T) - a_{12}^2 = a_{11} - a_{12}T - a_{22}T + T^2 - a_{12} =$$

$$= T^2 - (\underbrace{a_{11}+a_{22}}_{\uparrow})T + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}_{\det(M)} = T^2 - (\operatorname{Tr} M)T + \det(M)$$

$a_{11} + a_{22} =$ traccia di M

Regola di Cartesio

Dato un polinomio in T a coefficienti reali e a radici reali di grado n, ordinato secondo le potenze crescenti di T $\Rightarrow$ le radici positive sono tante quante le variazioni di segno che si osservano leggendo nell'ordine i coefficienti

Es.

$$\underbrace{T^2 - 6}_{+}\underbrace{T + 8}_{+}$$

Caso particolare:

$T^2 - (a_{11}+a_{22})T + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, se $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $\Leftrightarrow a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0$

$\Rightarrow a_1 \Rightarrow$ se $a_{11} \geq 0$ allora $a_{22} > 0$ $\Rightarrow$ $a_{11} + a_{22} > 0$

Se $\det M > 0$ e $a_{11} > 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Tr} M > 0$ $\Rightarrow$ q è definita positiva

Prop.

$\det(M)$ non varia al cambio di base (è un invariante rispetto al cambio...)

Dim.

$\boxed{\det(D)} = \det({}^tPMP) = \det({}^tP)\cdot\det(M)\det(P) =$ per il teo. di Binet

$= \det({}^tP)\det(P)\det(M) = \boxed{\det(M)}$

perché sono in $\mathbb{R}$

Corollario:

gli autovalori di D sono gli stessi di M

Oss

D ha nella diagonale principale sempre gli stessi autovalori o al massimo scambiati di ordine.

Conseguenze.

Es. 1) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $q(x,y) = xy$

Trovare una forma canonica e trovare anche il relativo cambio di base con P speciale

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ dove q generale è $q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$

Diagonalizzo

pol. carat. $\Rightarrow \det(M - TI) = \begin{vmatrix} -T & 1/2 \\ 1/2 & -T \end{vmatrix} = T^2 - \frac{1}{4} = 0$

$T_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

3) Studiare $\underline{3x^2 + 2xy + 3y^2} = 1$ e dare eq.ne canonica.

$q(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$

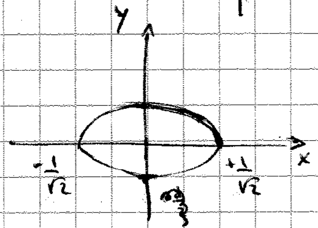
$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ p. car. $T^2 - 6T + 8 = 0$, $T = 2, 4$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ forma canonica di $q(X,Y) = 2X + 4Y^2$

$\Rightarrow$ $\exists$ un part. cambiamento nel piano per cui la eq.ne diventa

$2X^2 + 4Y^2 = 1$ (forma canonica)

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ (Ellisse)



Es. 4) Si studi il luogo dei punti

$\underline{x^2 + y^2 - 2xy} - x - y = 0$ trovando eq.ne canonica

$q(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

p. caract.

$(1-T)^2 - 1 = 0 \Rightarrow T^2 - 2T = 0$ $T_1 = 0$, $T_2 = 2$

Autospazi

- V_0: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \{ x - y = 0 \to x = y$

  $V_0 = \{(x, x)\}$

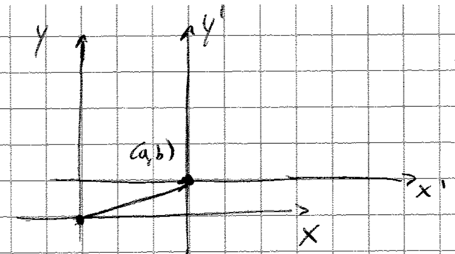
- V_2: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \{ +x + y = 0 \to \cancel{x = y}$ $y = -x$

  $V_2 = \{(x, -x)\}$

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

forma canonica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\, X - 1/\sqrt{2}\, Y \\ 1/\sqrt{2}\, X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y \end{pmatrix}$$



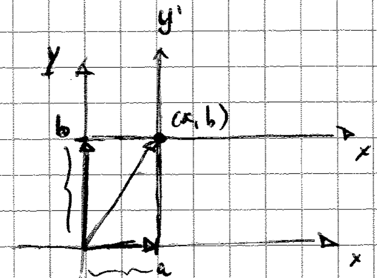
• Teorema sulle coniche

Riprendiamo l'esempio.

$q(x,y): \quad 2x^2+2xy+2y^2+\sqrt{2}x=0$

$$\underline{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow X^2+3Y^2+(X+Y)=0$$

Ora $\begin{cases} X = x'+a \\ Y = y'+b \end{cases}$



$$(x'+a)^2+3(y'+b)^2+x'+y'=0$$

$$x'^2+3y'^2+(2a+1)x'+(6b+1)y'+a+b+a^2+3b^2=0$$

Voglio che i termini di primo grado siano nulli:

$$\begin{cases} 2a+1=0 \\ 6b+1=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=-1/2 \\ b=-1/6 \end{cases}$$

$$x'^2+y'^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=0$$

$$x'^2+y'^2=\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{x'^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y'^2}{\frac{1}{3}}=1$$

Tipo: $\quad \alpha x'^2+\beta y'^2=\gamma \longrightarrow$ Ellisse non degenere

Eq-ne: $\quad a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

$\exists$ un sistema di riferimento (O,X,Y) tale che rispetto a tale sistema le nostre equazione ha una forma del tipo:

I) $\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$

II) $\alpha x^2 = 2\gamma y$ opp $\beta y^2=2\gamma x$

Def conica di tipo I o II è degenere se uno dei coefficienti almeno è nullo.

eq.ni canoniche

I) $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ (non degeneri)

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ è un ELLISSE IMMAGINARIA

  $\alpha, \beta, \gamma > 0 \Rightarrow$ ELLISSE

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

  $\alpha, \gamma > 0 \quad \beta < 0 \Rightarrow$ IPERBOLE

II) $x^2 = 2py$ opp. $y^2 = 2px$ PARABOLA ($p \neq 0$)

Per riconoscere il TIPO di conica basta studiare il segno della forma quadratica associata alla conica.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \text{studio il segno degli autovalori}$$

So che det A è invariante rispetto alle rotazioni

$\det A = \left|\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right|$ per I)

$\det A = \left|\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|$ opp $\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right|$ per II) $\Rightarrow = 0$

Oss. se $\det A \neq 0$ sono nel I tipo

se $\det A = 0$ sono nel II tipo PARABOLA

Se sono nel I tipo:

- $\det A = \alpha \cdot \beta > 0 \Rightarrow$ stesso segno $\Rightarrow$ ELLISSE
- $\det A = \alpha \cdot \beta < 0 \Rightarrow \alpha, \beta$ discordi $\Rightarrow$ IPERBOLE

SUPERFICI QUADRICHE (cosa succede nello spazio?)

S eq.ne di II grado in x, y, z (*)

S: $a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + a_{33} z^2 + \dots + a_{44} = 0$

Al massimo i vari monomi hanno grado 2.

Forma quadratica associata: termini ~~quadrati~~ di II grado

matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\exists$ rotazione nello spazio che diagonalizza la matrice A

Poi $\exists$ una traslazione che fa sparire i termini di I grado

Quadriche degeneri in forma canonica

I) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ Cilindro ellittico, tenendo presente che è parallelo all'asse z (si possono fare le varianti)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Cilindro iperbolico

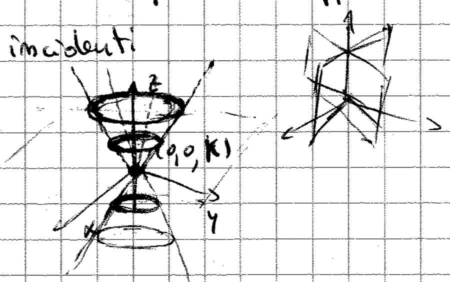
II)

$x^2 = a^2 \rightarrow$ Coppie di piani paralleli se $a \neq 0$

$x^2 = 0 \rightarrow$ Due piani coincidenti, piano doppio

$x^2 - y^2 = 0 \rightarrow$ Coppie di piani incidenti

$x^2 + y^2 = 0 \rightarrow$ Asse delle z



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

es. $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$

se $z = k$, $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \\ z = k \end{cases}$, $z=0 \rightarrow$, se $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

se $x = k$ $\begin{cases} 2y^2 - z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

QUADRICHE NON DEGENERI

1) $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$

1) $\rightarrow$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, (tutti i coefficienti positivi) **ELLISSOIDE**

2) $+\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (due coef. >0, uno <0) **IPERBOLOIDE A UNA FALDA**

3) $+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (1 coef >0, due <0) **IPERBOLOIDE A DUE FALDE (o ellittico)**

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \rightarrow$ nessun punto reale che soddisfa   **ELLISSOIDE IMMAGINARIO**

Iniziamo a studiarle una per una

2D)

QUADRICHE NON DEGENERI

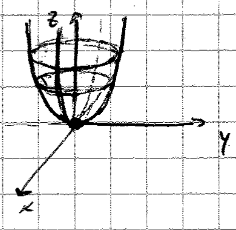
IV) $\alpha x^2 + \beta y^2 = 2\gamma z$

→ 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$ PARABOLOIDE ELLITTICO

→ 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ PARABOLOIDE IPERBOLICO (o A SELLA)

1) $x^2 + 2y^2 = z$ è di tipo IV non a centro

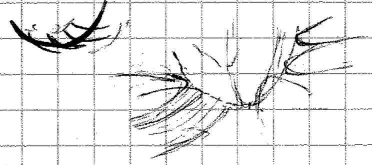
Sezioni



$\begin{cases} x^2+2y^2=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2y^2=-1 \\ z<0,\ z=-1 \end{cases}$ Nessun p.t. reale $\forall z<0$

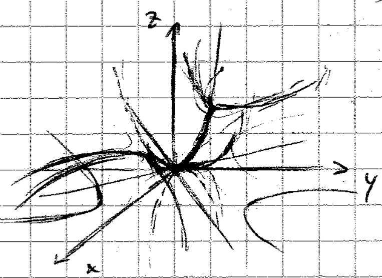
$\begin{cases} x^2+2y^2=z \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2y=z \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ $\forall z=k>0 \Rightarrow$ ellisse



2) $x^2 - 2y^2 = z$

Sezioni



$\begin{cases} x^2-2y^2=z \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-2y^2=-1 \\ z=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2y^2=z \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=z \\ y=0 \end{cases}$

SFERA

$x^2+y^2+z^2=a^2$ in forma CANONICA

1) Assegnare eq.ne di una sfera di centro C assegnato e raggio R

2) Riconoscimento di una sfera, data la sua eq.ne

es.

1) Assegnato il centro $C(1,2,3)$, $R=3$

eq.ne cartesiana della sup. sferica S di centro C e raggio R

$P(x,y,z) \in S \iff \text{dist}((x,y,z),C) = R = 3$

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2} = 3$

$\boxed{S: (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 9}$ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2$

Se sviluppo il calcolo $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$