NUMERO: 777 DATA: 21/11/2013

A P P U N T I

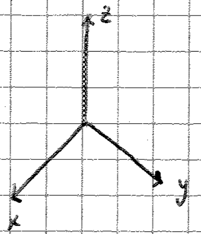
STUDENTE: Maiorano

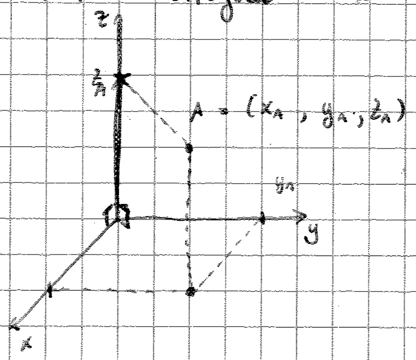
MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Penna

1) SISTEMA DI RIFERIMENTO

Terna di assi x, y, z orientati e ortogonali con l'origine posta in un punto prefissato

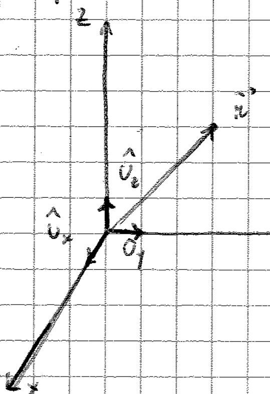




x, y, z : coordinate cartesiane

$\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, $\hat{u}_z$ versori della base cartesiana

Con questi possiamo descrivere poi dei punti cartesiani



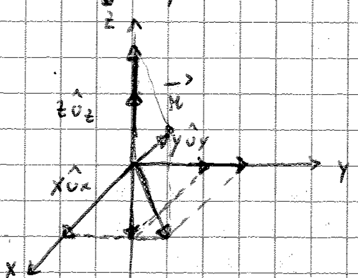
$\vec{r}$ = vettore posizione = indica la posizione di un certo punto

Posso dire che

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$$ = ovvia combinazione lineare dei tre vettori

$$= (x, y, z)$$

- $x\hat{u}_x$ sarà un vettore allineato con l'asse x allungato x volte
- $y\hat{u}_y$ sarà y volte $\hat{u}_y$ allineato all'asse y
- $z\hat{u}_z$



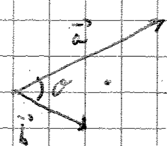
$x\hat{u}_x$ e $y\hat{u}_y$ sono ortogonali

I versori ci permettono di avere informazioni sui sistemi di riferimento e con cui gestiamo i sistemi di riferimento.

$$\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a}_x + \vec{b}_x)\hat{u}_x + (\vec{a}_y + \vec{b}_y)\hat{u}_y + (\vec{a}_z + \vec{b}_z)\hat{u}_z$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \hat{u}_x + \lambda a_y \hat{u}_y + \lambda a_z \hat{u}_z$$

Prodotto scalare



$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$$

NOTAZIONE $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Supponiamo di conoscere la velocità e quindi:

$v(t) = \frac{dx}{dt}$ dove $v(t)$ è nota $\Rightarrow$ Posso calcolare $x(t)$?

Integrando a destra e sinistra:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{ds} \cdot ds = \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds$$

si utilizza "s" perché t_0 e t sono estremi di integrazione

$$(*) \quad x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds$$

In questo problema abbiamo una sola condizione iniziale

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds + x(t_0)$$

OSS se $t = t_0 \Rightarrow x(t_0) = x(t_0)$ IDENTITÀ

MOTO UNIFORME

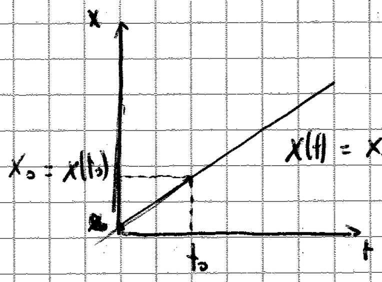
Caratterizzato da $v =$ costante

Applicando (*) essendo v costante esce dall'integrale

$$x(t) = x(t_0) + v\underbrace{(t - t_0)}_{\int_{t_0}^{t} ds \,=\, t - t_0}$$

Ora è chiaro il concetto di velocità media:

MOTO UNIFORME

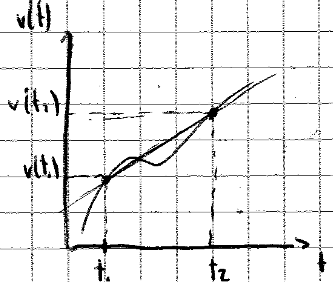


Potremmo dire che il MOTO UNIFORME è quel moto per cui la velocità istantanea in ogni istante è uguale alla velocità media!

ACCELERAZIONE MEDIA

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

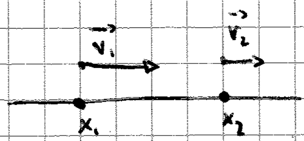
Così come per la velocità media anche l'a_m dà un'informazione GLOBALE!



es. 1.

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)} \Leftarrow \text{Per un moto uniformemente accelerato}$$

Dim.



$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at & (t_0 = 0) \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \end{cases}$$

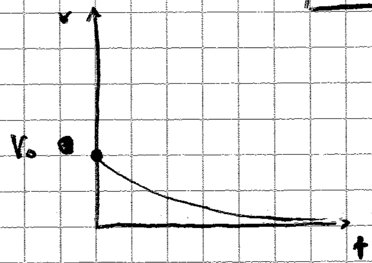
$$\begin{cases} v_2 = v(t_2) = v_1 + a(t_2 - t_1) \\ x_2 = x(t_2) = x_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2 - t_1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a} \\ x_2 - x_1 = v_1 \frac{(v_2 - v_1)}{a} + \frac{\cancel{a}}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{a^{\cancel{2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a} \\ x_2 - x_1 = \frac{1}{a}\left(\cancel{v_2 v_1} - v_1^2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} - \cancel{\frac{2 v_1 v_2}{2}}\right) \end{cases}$$

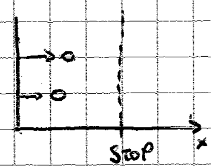
$$\begin{cases} t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a} \\ x_2 - x_1 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)}$$

MOTO SMORZATO

Legge oraria delle velocità : $\boxed{v(t) = v_0 e^{-kt} \qquad (t_0 = 0)}$



Dopo circa $t \sim \frac{3}{k}$ il moto è circa zero



Matematicamente ci vuole un Δt infinito prima che si fermi, ma fisicamente (praticamente) si ferma dopo un $\Delta t = \varepsilon$ finito!

$k \to$ coefficiente di smorzamento $\Rightarrow$ Indica la velocità con cui va a 0 la velocità

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \underbrace{v_0 e^{-k\tau}}_{v(\tau)} d\tau$$

$$x(t) = x_0 - \left[\frac{v_0}{k} e^{-k\tau}\right]_0^t = x_0 - \frac{v_0}{k} e^{-kt} + \frac{v_0}{k} = x_0 - \frac{v_0}{k}\left(e^{-kt} - 1\right) =$$

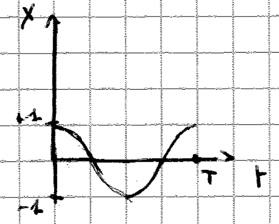
$$= x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 191

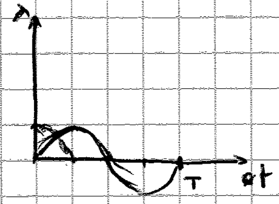
es.

1) $A = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$x(t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$$



2) $A = 1, \quad \varphi = 0 \qquad x(t) = \sin(\omega t)$



=

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{A \sin(\omega t + \varphi)}_{x(t)} = -\omega^2 x(t)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$ ← Equazione differenziale di un moto armonico!!
(è un po' come la carta d'identità di un moto)

Bisogna capire che Equazione differenziale <=> Moto

$x(0)$, $v(0)$

$x(0) = A \sin(\varphi)$

NOTE!

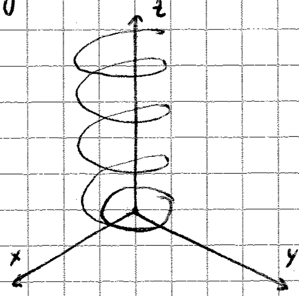
$v(0) = \omega A \cos(\varphi) \Rightarrow \frac{v(0)}{\omega} = A \cos(\varphi)$

Divido membro e membro $\Rightarrow \frac{x(0)}{v(0)} = \frac{\tan(\varphi)}{\omega} \rightarrow \tan(\varphi) = \omega \frac{x(0)}{v(0)}$

$$x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2} = A^2 \sin^2(\varphi) + A^2 \cos^2(\varphi) = A^2(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))$$

$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}}$ Colleghiamo quindi A e φ con $\underbrace{x(0) \text{ e } v(0)}$
cioè alle condizioni iniziali.

Moto lungo un' ELICA



$$\vec{r}(t) = \underbrace{\hat{u}_x R\cos(\omega t) + \hat{u}_y R\sin(\omega t)}_{\text{Se lo vedo dall'alto il moto vedo proprio una circonferenza}} + \hat{u}_z \underbrace{v_0 t}_{z(t)}$$

Mi dà la possibilità di spiralizzare

$\vec{r}(t) = \hat{u}_x\, x(t) + \hat{u}_y\, y(t) + \hat{u}_z\, z(t) \Rightarrow$ Descrive tutti i moti tridimensionali!

VELOCITÀ MEDIA (3D)

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

VELOCITÀ ISTANTANEA (3D)

Vettore

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \lim_{t' \to t} \frac{x(t')\hat{u}_x + y(t')\hat{u}_y + z(t')\hat{u}_z - (x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + \ldots}{t' - t}$$

$$= \lim_{t' \to t} \frac{(x(t') - x(t))\hat{u}_x + (y(t') - y(t))\hat{u}_y + (z(t') - z(t))\hat{u}_z}{t' - t} =$$

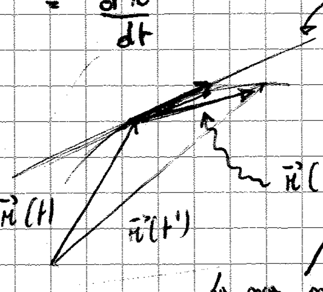
$$= \lim_{t' \to t} \left(\underbrace{\frac{x(t') - x(t)}{t' - t}}_{\frac{dx}{dt}} \hat{u}_x + \underbrace{\frac{(y(t') - y(t))}{t' - t}}_{\frac{dy}{dt}} \hat{u}_y + \underbrace{\frac{z(t') - z(t)}{t' - t}}_{\frac{dz}{dt}} \hat{u}_z \right) =$$

$\vec{r}$ è un operatore lineare:

$$= \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} \vec{v}_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

tangente alla curva su cui giace il vettore velocità



La sua posizione finale è sempre più allineata alla tangente alla curva

$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y + z(t)\,\hat{u}_z$ $\quad r(t)$: posizione di un punto nello spazio all'istante t.

Ogni legge oraria è indipendente l'una con l'altra

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

$$\vec{a}_i(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{a} = \bar{a}_x \hat{u}_x + \bar{a}_y \hat{u}_y + \bar{a}_z \hat{u}_z = \frac{d\bar{v}_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{d\bar{v}_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{d\bar{v}_z}{dt}\hat{u}_z$$

Ricordare:

$$\bar{a} = \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = (\dot{x})' = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dot{v}_y = (\dot{y})' = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = (\dot{z})' = \ddot{z} \end{cases}$$

Poniamo il problema

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}(t) \leftarrow \text{NOTA}$$

?

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\bar{v}}{ds} ds = \int_{t_0}^{t} \bar{a}(t)\, dt \Rightarrow \bar{v}(t) - \bar{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \bar{a}(s)\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{a}(s)\, ds} \quad (2)$$

MOTO UNIF. ACCELERATO

$\bar{a}$ = vettore costante $\underline{\underline{\forall t}}$

La formula $(2)^* \Rightarrow \bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \bar{a}(t - t_0)$

Il $\bar{v}(t)$ viene incrementato di un vettore $\bar{a}(t-t_0)$ che è un prodotto di un vettore per uno scalare.

uso (1)

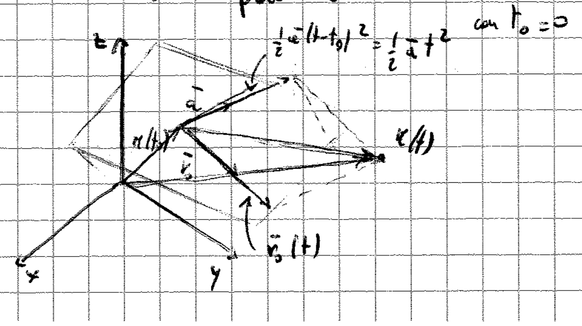
$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{v}(s)\, ds$$ nel moto unif. accelerato

uso ora la $(2)^*$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} [v(t_0) + \bar{a}(s - t_0)]\, ds \Rightarrow$$

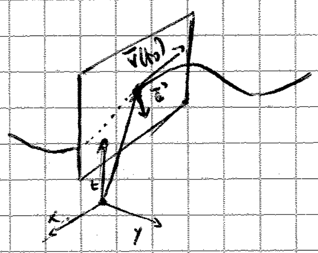
$$\boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \bar{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{\bar{a}}{2}(t - t_0)^2}$$ Legge oraria del vettore posizione per il moto unif. accelerato.

1 PROPRIETÀ: se $\bar{a}$ non è parallelo a $\bar{v}_0$ allora $\vec{r}(t)$, nel moto unif. accelerato, descrive una parabola



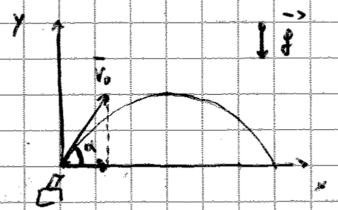
2ª OSS

Qualunque curva tridimensionale può in un punto può essere approssimata da un piano all'istante t



PROPRIETÀ 2 →

Gittata di un cannone



$\downarrow \vec{g}$

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\hat{u}_y$$

$$g = 9{,}8\ m/s^2$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2 \qquad (t_0 = 0)$$

Poniamo in componenti:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x(t) = \underset{0}{x_0} + v_{0x} t \\ y(t) = \underset{0}{y_0} + v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_{0x}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

formula per la gittata:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

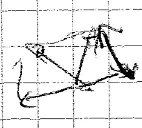
Volendo conoscere la gittata massima bisogna derivare la x su α

$$\frac{dx}{d\alpha} \geq 0 \Rightarrow \frac{dx}{d\alpha} = 0$$

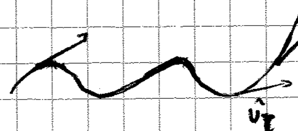
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 191

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} \underbrace{v(\tau)}_{\text{modulo delle velocità}} \, d\tau$$

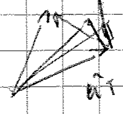
2) Derivate di un versore (FORMULA DI POISSANT)



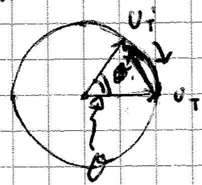
Consideriamo un versore in un certo punto



$$\hat{u}_T{}' = \hat{u}_T(t')$$



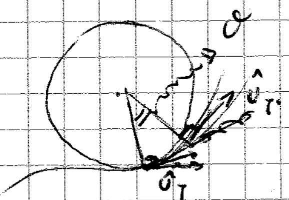
$\hat{u}_T{}'$ è leggermente spostato rispetto a $\hat{u}_T$



$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}_T{}' - \hat{u}_T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\hat{u}_T{}' - \hat{u}_T}{|\Delta \hat{u}_T|}} \; \underbrace{\frac{|\Delta \hat{u}_T|}{\Delta t}} =$$

$$= \hat{u}_N \frac{ds}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\theta}{dt} \qquad R = 1, \quad s = R\theta$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_z \wedge \hat{u}_T}$$



OSS: $\hat{u}_N = \hat{u}_z \wedge \hat{u}_T$

$\hat{u}_T = \hat{u}_N \wedge \hat{u}_z$

$\hat{u}_z = \hat{u}_T \wedge \hat{u}_N$

Combinazione ciclica

3) $$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_T) =$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} \qquad \text{Regola di Leibniz per la derivata del prodotto}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$ posso pensare $\theta(s(t))$

Moltiplicare e dividere per ds non è correttissimo matematicamente

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}} v = \frac{1}{R} \cdot v \qquad \theta = \frac{s}{R}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{1}{R}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$$

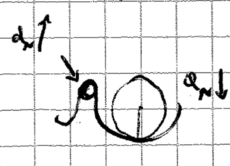
$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N}$$

$\hat{u}_T$, $\hat{u}_N$, R sono tutte ~~cose~~ quantità intrinseche

1° CASO di applicazione) $\to$ Moto uniforme $v = |\bar{v}| =$ costante

$$a_T = 0 \Rightarrow \bar{a} = \bar{a}_N = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$$

OSS

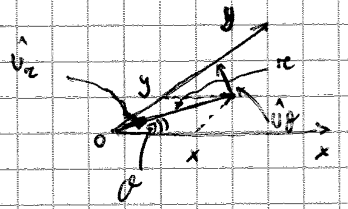


COORDINATE POLARI (coordinate cilindriche: coordinate polari + coordinata z)

· Moto planare in coordinate polari

Per individuare la posizione di un punto:

$\vec{r}(t) = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y = r\hat{u}_r$



Dico su quale retta mi trovo e con quale inclinazione

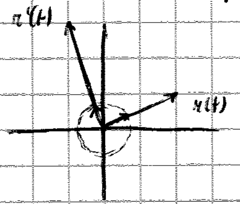
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$

$\vec{r} = r\hat{u}_r = r\cos\theta\,\hat{u}_x + r\sin\theta\,\hat{u}_y = r(\cos\theta\,\hat{u}_x + \sin\theta\,\hat{u}_y)$

Ottengo per confronto che $\hat{u}_r = \cos\theta\,\hat{u}_x + \sin\theta\,\hat{u}_y$

Abbiamo identificato $\hat{u}_r$ che diventa funzione dell'angolo:

$\hat{u}_r(\theta)$



Se ho un moto vario ho che varia sia θ che la distanza rispetto al tempo

$\begin{cases} \theta = \theta(t) \\ r = r(t) \end{cases}$ Sono due leggi orarie

$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = {}^{*}\frac{d(r\hat{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\cdot\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{u}_\theta$

* Derivo entrambe perché entrambi ~~derivano~~ dipendono da t.

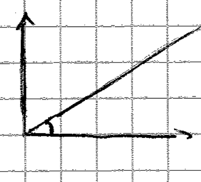
$\frac{dr}{dt}\hat{u}_r$ = Velocità RADIALE perché dipende dalla posizione

Il moto evolve come una lancetta di orologio:

$\hat{u}_\theta = \hat{u}_z \wedge \hat{u}_r$

$r\,\hat{u}_\theta\,\dot{\theta}$ = Velocità Angolare in queste coordinate

Moto costante



θ = costante ⇒ MOTO RADIALE PURO

$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{u}_r$ perché $\dot{\theta} = 0$

Nel caso particolare:

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$\bar{v} = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$, $\dot{\theta} = cost$ $\quad \bar{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{u}_r$

Il fatto che $\dot{\theta}$ sia costante ma $\bar{v}$ cambia direzione ci dice che c'è un'accelerazione, ~~..~~ quella centripeta.

Analogie ~~..~~

MONDO FISICO CIRCOSTANTE, l'universo:

- Sistema complesso di MOLTI corpi in continua evoluzione per effetto delle interazioni presenti (o passate) fra i suoi costituenti tra tutte le scale spaziali "disponibili".

raggio	elettrone	$2,8 \cdot 10^{-15}$ m
~~..~~ nucleo	$\sim$	$A^{1/3}$ $1,4 \cdot 10^{-15}$ m
atomo	$\sim$	$1\text{Å} = 10^{-10}$ m
uomo	$\sim$	1 m

LEGGI DI NEWTON

1° Principio della dinamica (legge ~~della~~ di INERZIA)

- Una particella LIBERA ~~soggetta ad interaz~~ si muove con velocità costante (cioè con accelerazione NULLA)

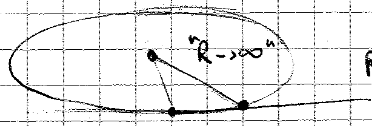
LIBERA = NON soggetta ad interazioni con l'ambiente circostante di alcun tipo

Velocità costante = Rispetto a quale sistema di Riferimento? Dobbiamo pensare concetti limite ~~per~~ dobbiamo quindi introdurre un sistema INERZIALE

SISTEMA INERZIALE

- Un sistema che ~~.~~ si muove a velocità costante ~~..~~

es. TERRA NON è un sistema inerziale
TRENO che accelera NON è un sistema inerziale
SIST. SOLARE NON è un sistema inerziale



Pensiamo che il sistema solare si ~~.~~ muova su archi rettilinei e quindi possiamo definirlo SISTEMA INERZIALE

STELLE FISSE: Stelle fisse nella misura dei nostri strumenti.

Se sono fisse possono essere dei punti di riferimento.

- Per effetto delle non linearità, alcuni sistemi complessi sono spesso "non risolvibili" esibiscono spesso una forte dipendenza dalle condizioni iniziali.
(e.g. battito di ali di farfalla → temporale a parigi)

1) Forza $\vec{F}$

2) equazione

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \text{una / più eq.ni differenziali}$$

3) Risolvo le eq.ni differenziali

4) Trovo, date le condizioni iniziali, le leggi orarie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

III Principio di Newton (AZIONE - REAZIONE)

Se un corpo 1 esercita una forza $\vec{F}_{12}$ su un corpo 2 allora il corpo 2 reagisce esercitando una forza $\vec{F}_{21}$ sul corpo 1 tale che $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Una forza viene considerata in base al suo raggio di azione.

QUANTITÀ DI MOTO

$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \Rightarrow$ il II principio diventa $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$$* \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Volendo (*) è una generalizzazione di $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ perché in questo caso m = costante, ma ciò non vale nei sistemi a massa variabile

Teorema Impulso:

L'impulso di una forza applicata provoca la variazione di velocità di un corpo secondo la formula

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(\tau)\, d\tau = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = m\left(\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)\right)$$

In Questo teorema la forza viene pensata come funzione del tempo, perché a seconda delle situazioni possiamo considerarla in funzione delle coordinate o in altre del tempo, note $\vec{r}(t)$ so scrivere $\vec{F}$ istante per istante.

L'impulso è legato ai fenomeni IMPULSIVI: cioè quando c'è un'interazione tra due o più corpi in un istante piccolissimo

APPLICAZIONE TEO IMPULSO

Calcolare la Forza media esercitata su una massa m nei fenomeni impulsivi (pallone calciato)

$\Rightarrow$

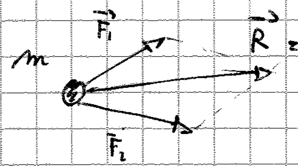
RISULTANTE DELLE FORZE

Un corpo può subire l'azione contemporanea di molte forze.

Principio di sovrapposizione delle FORZE:

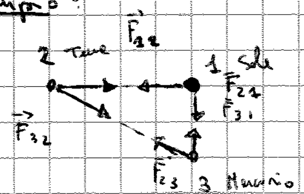
Il vettore risultante delle forze applicate è $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i$

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



In questo caso $\vec{R} = m \cdot \vec{a}$

esempio:



EQUILIBRIO STATICO: un corpo è in equilibrio statico se $\boxed{\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}}$

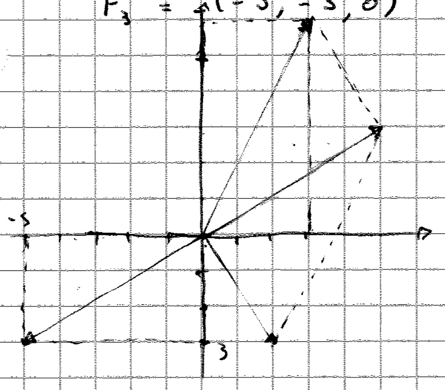
$$\begin{cases} \vec{R}_x = \sum_i \vec{F}_{x_i} = 0 \\ \vec{R}_y = \sum_i \vec{F}_{y_i} = 0 \\ \vec{R}_z = \sum_i F_{z_i} = 0 \end{cases}$$

es.

$\vec{F}_1 = 3\hat{u}_x + 6\hat{u}_y + 0 = (3, 6, 0)$

$\vec{F}_2 = 2\hat{u}_x - 3\hat{u}_y + 0 = (2, -3, 0)$

$\vec{F}_3 = (-5, -3, 0)$



$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} R_x = \sum_i F_{x_i} = 0 \\ R_y = \sum_i F_{y_i} = 0 \\ R_z = \sum_i F_z = 0 \end{cases}$$

N.B.

Che ~~l'accelerazione sia costante~~ che la Risultante sia zero vuol dire che $\vec{a} = \vec{0}$ ma non è detto che il moto possa essere a $\vec{v} = \text{kost}$.

Reazioni VINCOLARI

Se un corpo soggetto a una o più forze tali che $\vec{R} \neq 0$ rimane immobile allora esiste una reazione vincolare $\vec{N}$ tale che $R + \vec{N} = \vec{0}$

↳ Nel bilancio totale ne abbiamo dimenticata una

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F_a} + \cancel{\vec{N}} + \cancel{m\vec{g}} = m\,\vec{a}$$

x) $m\,a_x = -F + F_a \quad F_a \sim \mu_s N$

y) $0 = -mg + N \Rightarrow a_y = 0$

Lungo l'asse y infatti $\vec{R} = \vec{0}$ perché è fermo (IMMOBILE)

ATTRITO MICROSCOPICAMENTE PARLANDO

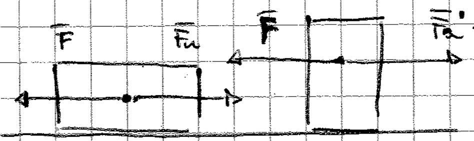
STATICO: Forze di ADESIONE e COESIONE

Microscopicamente la materia, in alcuni casi il contatto e quindi il legame è favorito

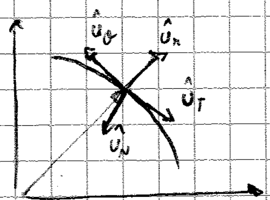
F_a rappresenta microscopicamente tutti questi legami

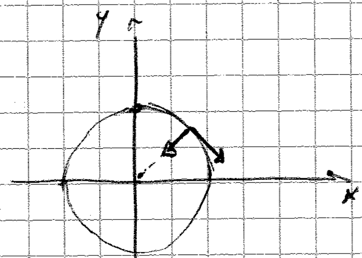
DINAMICO: Nel disegno di sopra molti legami sono stati rotti, e F_a (dinamico) è minore perché il movimento sfavorisce le forze di ADESIONE e COESIONE. Non ci sono cioè abbastanza legami per mantenere IMMOBILE

OSS



Riprendiamo COORDINATE POLARI





$\hat{u}_\theta$ e $\hat{u}_T$, $\hat{u}_N$ e $\hat{u}_R$ non hanno nulla a che vedere in un moto vario

!! SOLO NEL MOTO CIRCOLARE $\hat{u}_R \equiv \hat{u}_N$ e $\hat{u}_\theta = \hat{u}_T$

FORZA VISCOSA (ATTRITO VISCOSO 2.11)

$\vec{F_v} = -m\,k\,\vec{v}$!! ATTENZIONE AL SEGNO MENO

È una forza che viene applicata a corpi in movimento, ha direzione opposta alla velocità

K = COEFFICIENTE DI ATTRITO VISCOSO (o SMORZAMENTO)

k dipende dalle proprietà del corpo

es. corpo sferico $k = 6\pi R$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = -m \cdot k\vec{v} \Rightarrow \cancel{m} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cancel{m}\,k\vec{v} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -k\vec{v}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 191

FORMULA FINALE:

$$v(t) = \frac{F}{km} - \left(\frac{F}{km} - v_0 \right) e^{-kt}$$

Siamo passati dalla soluzione alla ~~vel~~ legge oraria !

Questa legge descrive ~~la~~ la legge oraria di un corpo soggetto ad una forza costante e ha una velocità iniziale.

esempi di costanti k:

$k = 10^{-2}\ s^{-1}$ H_2O

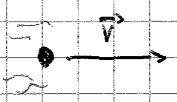
$k = 1,81 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$ Aria

OSS

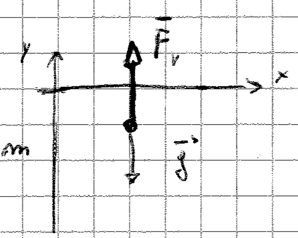
La formula trovata vale per i corpi lenti

$$F_v = -\frac{1}{2} c \delta s v^2 = -\alpha v^2$$ la legge diventa una dipendenza quadratica.

$\delta = \rho =$ densità $S =$ superficie $c =$ coefficiente di resistenza



esercizio



$\bar{g} = -g \hat{u}_y$

$k =$ coef. viscosità del liquido

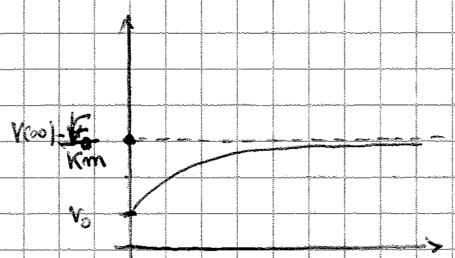
$\bar{v} = v_y \hat{u}_y$ $$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - mk v_y$$

$v_y < 0$

OSSERVAZIONI SU v_y

OSS

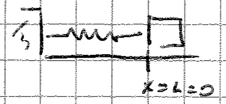
Se il t diventa molto grande cosa accade?



$$v(t) = \frac{F}{km} - \left(\frac{F}{km} - v_0 \right) e^{-kt}$$

$$V(\infty) = \frac{F}{km}$$

Talvolta si pone $\underline{L = 0}$.



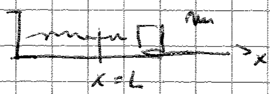
$F_e = -k\,x$ dove x è la deformazione.

Applichiamo il II principio della dinamica:

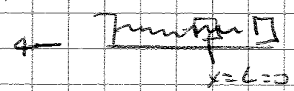
$$F = m \cdot a = -k(x - L)$$

è come se ci fosse un termine di Forza costante

$$m\ddot{x} = -k(x - L) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{Lk}{m}$$



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$



Se colleghiamo osserviamo:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Combinando le due cose le due equazioni possono essere uguali:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Attraverso il II principio di Newton abbiamo dato un significato ad ω, inoltre abbiamo un secondo esempio che dalle legge di Newton arriviamo ad una legge oraria.

Ora abbiamo ottenuto il caso $\underline{L = 0}$

Secondo caso:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{Lk}{m}$$

Così immaginiamo come situazione il corpo fermo in una posizione costante quindi $\underline{\underline{a = 0}}$

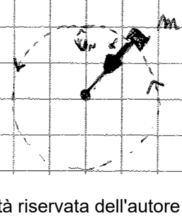
$$x_{gen}(t) = \underset{omo}{X(t)} + x_{sp}$$

Cerchiamo la soluzione costante (Hp) $x_{sp} = \underline{\text{costante}} = C \Rightarrow C = L$

Se $L \neq 0 \Rightarrow x_f(t) = L + A\sin(\omega t + \varphi)$

FORZE CENTRIPETE

Applicazione: auto che percorre una curva a velocità costante ($v = |\vec{v}|$) in presenza di attrito statico μ_s NOTO

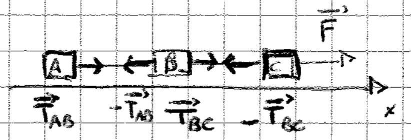


$$m \cdot \vec{a} = \vec{F_a} \Rightarrow \vec{F_a} = F_a\,\hat{u}_N \rightarrow \begin{cases} \hat{u}_N) \ F_a = m\,a_N \\ \hat{u}_T) \ 0 = m \cdot a_T \end{cases}$$

$$m \cdot a_N\,\hat{u}_N + m \cdot a_T\,\hat{u}_T = F_a\,\hat{u}_N$$

esempio 2.19 Mencoldi

Trovare le tensioni dei fili che connettono m_1, m_2, m_3 poste in movimento da una forza costante F (nota)



R ~~~

Per ogni massa c'è un'equazione di Newton!

$$\begin{cases} m_A \cdot a = T_{AB} \\ m_B \cdot a = T_{BC} - T_{AB} \\ m_C \cdot a = F - T_{BC} \end{cases} \qquad a_A = a_B = a_C = a$$

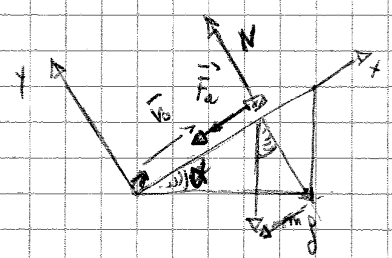
Sommiamo membro a membro

$$(m_A + m_B + m_C)\, a = F \rightarrow a = \frac{F}{m_A + m_B + m_C}$$

$$T_{AB} = m_A a = \frac{m_A}{(m_A + m_B + m_C)} \cdot F$$

$$T_{BC} = -m_C \cdot a + F = -\frac{m_C}{M} F + F = \frac{(M - m_C)}{M} F = \frac{m_A + m_B}{M} \cdot F$$

esercizio



$m,\ v_0,\ \mu_d,\ \alpha$

$x_f = ?$

Scrivo l'equazione del moto:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_a$$

$$m\bar{g} = -mg\cos\alpha\, \hat{u}_y - mg\sin\alpha\, \hat{u}_x$$

$$\bar{N} = N\hat{u}_y$$

$$\bar{F}_a = -F_a \hat{u}_x$$

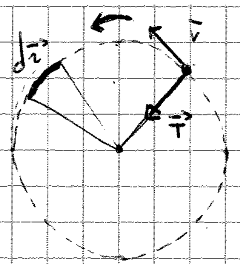
ANALISI VETTORIALE DELLE FORZE

$$\begin{cases} m a_x = -mg\sin\alpha - F_a \\ m a_y = -mg\cos\alpha + N = 0 \end{cases}$$ Equilibrio statico lungo y

$N = mg\cos\alpha$, $F_a = \mu_d \cdot N = \mu mg\cos\alpha$

$$\cancel{m} a_x = -\cancel{m} g\sin\alpha - \mu \cancel{m} g\cos\alpha \rightarrow a_x = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

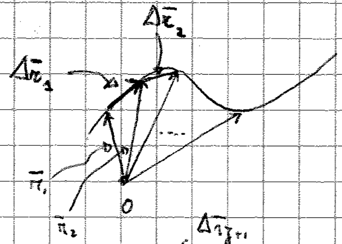
2)



- Anche in questo caso $\vec{T}$ non fa nulla dal punto di vista di W.
- $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$ questo per dire che
- $d\overline{W} = \vec{T} \cdot d\vec{r} = \vec{T} \cdot \vec{v}\, dt$ dove $\vec{T} \perp \vec{v}$

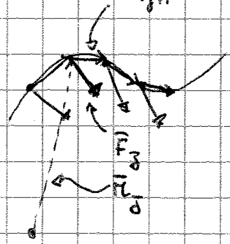
. Def. generale

Bisogna pensare a un corpo che si muove su un tratto non rettilineo, ma vario.



Infittiamo questi raggi vettori per poter avere uno spostamento più simile alla curva

$$\Delta\vec{r}_j = \vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j \qquad j = 0, 1, 2, \dots N$$



$\vec{F}_j = \overline{F}(\vec{r}_j)$ CAMPO DI FORZA in quelle posizione.

$\Delta\vec{r}_j$ tende a confondersi con l'arco della curva corrispondente per $N \to \infty$ (quanto più fitta è la partizione)

Su un tratto $\Delta\vec{r}_{j+1}$ il lavoro è $\Delta\overline{W}_j = \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_{j+1} \simeq \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j)$

$$W_{AB} \simeq \sum_j \Delta W_j = \sum_j \overline{F}(\vec{r}_j) \cdot \Delta\vec{r}_{j+1}$$

~~Lavo~~ Definiamo il lavoro come integrale di linea (γ)

$$W_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} \overline{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$d\vec{r}$ è la posizione della particella tempo per tempo

$$d\vec{r} = d\left(x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y + z(t)\,\hat{u}_z\right) = \hat{u}_x\, dx + \hat{u}_y\, dy + \hat{u}_z\, dz =$$

$$= \hat{u}_x\, v_x(t)\, dt + \hat{u}_y\, v_y(t)\, dt + \hat{u}_z\, v_z(t)\, dt = \overline{v}(t)\, dt$$

$\hat{u}_x = \text{kost.}$
$\hat{u}_y = \text{kost.}$
$\hat{u}_z = \text{kost.}$

Per capire bene cosa ci sia nel differenziale

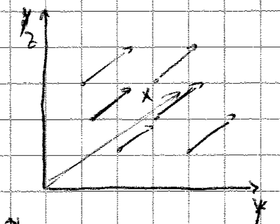
$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\left[\vec{r}(t)\right] \cdot \overline{v}(t)\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \left[F_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot v_x(t) + F_y(x(t), y(t), z(t))\, v_y(t) + F_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot v_z(t)\right] dt = \int_{t_A}^{t_B} g(t)\, dt$$

mi descrive la γ

$g(t)$ è una somma di funzioni del tempo e quindi è una funzione del tempo complicata quanto vuoi.

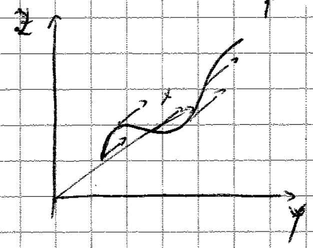
2) Lavoro per un campo $\bar{F}$ = costante

Siamo in 3d



C'è un campo di Forze costanti

W_{AB}



$$W_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot \int_{A\gamma}^{B} d\bar{r} = \bar{F} \cdot \int_{A}^{B} (\hat{u}_x\, dx + \hat{u}_y\, dy + \hat{u}_z\, dz)$$

cost cost cost

$$= \bar{F} \cdot [\hat{u}_x (x_B - x_A) + \hat{u}_y (y_B - y_A) + \hat{u}_z (z_B - z_A)] =$$

$$= \vec{F} \cdot (\bar{r}_B - \bar{r}_A)$$

Riassumendo

$$W_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \bar{F} \cdot d\bar{r} = (\bar{F} \cdot \bar{r}_B - \bar{F} \cdot \bar{r}_A) = -\left(U(\bar{r}_B) - U(\bar{r}_A)\right)$$

Perché io definisco $U(\bar{r})$ come campo scalare $U(\bar{r}) = -\bar{F} \cdot \bar{r}$

Abbiamo generalizzato in tre dimensioni

Funzione a valori reali e variabili vettoriali.

Campo perché definito in tutti i punti dello spazio.

$$W_{AB} = \begin{cases} E_{k_B} - E_{k_A} \\ -(U(\bar{r}_B) - U(\bar{r}_A)) \end{cases} \Rightarrow E_{k_B} + U(\bar{r}_B) = E_{kA} + U(\bar{r}_A)$$

- $\vec{F}$ campo di forze qualsiasi

Def. Un campo di forze $\bar{F}(\bar{r})$ è conservativo se esiste un campo scalare e $E_p(\bar{r})$, energia POTENZIALE, tale che il lavoro tra un punto A e un punto B è espresso da

$$W_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = -\left(E_p(\bar{r}_B) - E_p(\bar{r}_A)\right) = -(E_{pB} - E_{pA})$$

Se esiste l'analogo di quella funzione primitiva

Analogia con il calcolo integrale 1D:

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x)\, dx = G(x_B) - G(x_A) \qquad \text{dove } \frac{dG}{dx} = F$$

- Si potrà dimostrare che dato un campo di forze in un dominio convesso e differenziabile per continuità ... Non serve!

• Se $\bar{F}$ è conservativo allora
$$W_{AB} = \begin{cases} E_{KB} - E_{KA} & \text{Teo. Energia Cinetica} \\ -(E_{pB} - E_{pA}) & \end{cases}$$

vale che $E_{kB} - E_{KA} = -E_{pB} + E_{pA} \Rightarrow \underline{\underline{E_{kB} + E_{pB} = E_{KA} + E_{pA}}}$

La somma di $E_k + E_p$ = ENERGIA MECCANICA

Teo dell'energia meccanica (Teo di conservazione dell'energia meccanica):

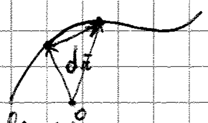
Se $\bar{F}$ è conservativa allora $\boxed{E_{KB} + E_{pB} = E_{KA} + E_{pA}}$

GRADIENTE

Se $\bar{F}$ è conservativo allora $\boxed{\bar{F} = -\nabla E_p}$

$\nabla = \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$ è un operatore che bisogna applicare a una funzione

Applicando ∇E_p ottengo dei campi scalari moltiplicati per versori e quindi ottengo dei campi vettoriali.



Calcolo il lavoro su uno spostamento infinitesimo

$$dW = \vec{F}(\bar{r}) \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

$$dW = -(E_p(\underbrace{\bar{r}_0 + d\bar{r}}_{B}) - E_p(\underbrace{\bar{r}_0}_{A}))$$

$$E_p(x_0 + dx) = E_p(x_0) + \frac{dE_p}{dx} dx$$

$$E_p(x_0 + dx, y_0 + dy) = E_p(x_0, y_0) + \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot dy$$

$$dW = -\left(\cancel{E_p(\bar{r})} + \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz - \cancel{E_p(\bar{r}_0)}\right) =$$

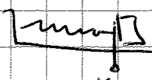
$$= -\left(\hat{u}_x \frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial E_p}{\partial z}\right) \cdot d\bar{r} = -(\nabla E_p) \cdot d\bar{r}$$

Se confrontiamo
$$dW = \begin{cases} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} \\ -\nabla E_p \cdot d\bar{r} \end{cases}$$
dato che $d\bar{r}$ è arbitrario allora per entrambi $d\bar{r}$ è lo stesso

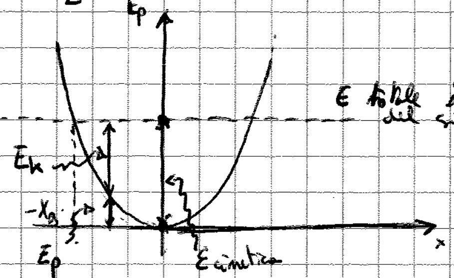
$$\bar{F}(\bar{r}) \cdot \cancel{d\bar{r}} = -\nabla E_p \cdot \cancel{d\bar{r}}$$ Per un $\underline{d\bar{r} \text{ arbitrario}}$.

- Grafico dell'energia potenziale per l'oscillatore armonico

$E_p(x) = \frac{K}{2} x^2$ stiamo considerando il caso



$F = -kx$

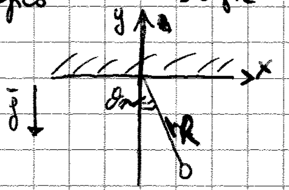


Supponiamo di avere un valore costante di Energia meccanica

$$\underset{\substack{\uparrow \\ cost}}{E} = E_k + E_p \Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Esiste un punto $-x_B$ dove $E_{tot} = E_p$ e $E_k = 0$; $-x_B$ è detto PUNTO DI INVERSIONE

- Grafico dell'energia potenziale per il pendolo



$E_p(y) = mgy + C$ è totalmente arbitraria $(C=0)$

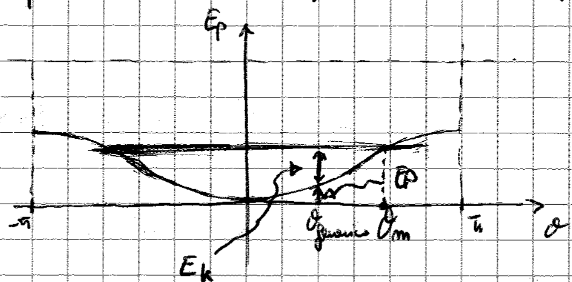
$E_p = 0$ ponendo $y = 0$

$E_p = -mgR\cos\theta$

Faccio un'altra scelta possibile

$E_p(y) = E_p(\theta) = mgR(1-\cos\theta)$ ossia $C = mgR$

In questo modo ottengo che nella posizione più bassa $E_p = 0$



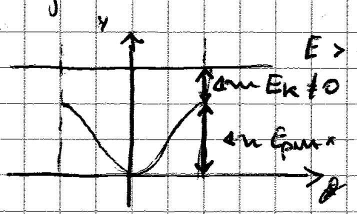
$E = E_k + E_p(\theta) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos$

In θ_m $E = E_p(\theta_m)$

θ_m PUNTO DI INVERSIONE

In questo caso l'Energia ha un massimo e un minimo oltre i quali la funzione non assume valori.

Supponiamo



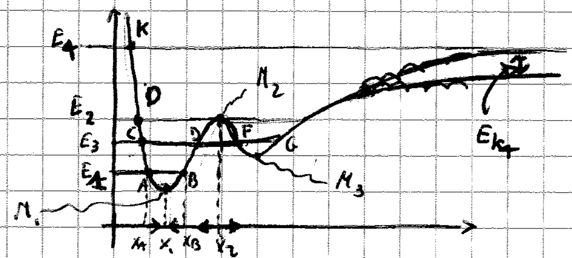
$E > E_{pmax} = E_p(\theta = \pi) = 2mgR$

$E_{pmax} = 2mgR$

Cosa accade?

Accade che ha ancora una quantità di E_k

- Generalizzazioni del profilo qualitativo per l'E_p pag. 183, 184



$$F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

- Osserviamo il CASO E_1:

- avremo 2 punti di inversione, 1 punto di minimo;
- x_1 è un punto di richiamo.

$$E_p(x) = E_p(x_1) + \cancel{\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_1}(x-x_1)} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_1}(x-x_1)^2$$

perché $\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_1} = 0$

$$E_p(x) = E_p(x_1) + \frac{k}{2}(x-x_1)^2$$

Lo sviluppo in serie di Taylor ci dice che in un punto di minimo, l'E_p la posso pensare come E_p di un oscillatore armonico.

- Osserviamo il CASO E_3:

- 2 minimi e 2 punti di inversione, per ogni intervallo possibile

Il corpo può muoversi nell'intervallo CD e FG

minimo in x_3 stesso discorso per x_1.

- Osserviamo il CASO E_2:

In x_2 (come x_1 e x_3) la $F = 0$

Oltre M_1 e M_3 che sono minimi, c'è M_2 che è un massimo!

Minimi = PUNTI DI ATTRAZIONE $\vec{F} \to \bullet \leftarrow$

Massimi = PUNTI DI FUGA (REPULSIONE) $\leftarrow \bullet \to \vec{F}$

} Osservazioni dedotte dall'analisi delle FORZE.

OSSERVAZIONE

Inoltre:

minimi = punti di equi EQUILIBRIO STABILE: allontanando la massa m di poco dal minimo inizia un moto oscillatorio intorno al punto stesso.

massimi = punti di EQUILIBRIO INSTABILE: appena sposto m dal punto di max, mi allontano dal punto di max che agisce come repulsore

$$\nabla E_p = \nabla\left(-\frac{k}{r}\right) = -k\,\nabla\frac{1}{r} = -k\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{k}{r^2}\,\hat{u}_r$$

$$\vec{F} = -\nabla E_p = -\frac{k}{r^2}\,\hat{u}_r$$

$$F(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2}\,\hat{u}_r = -\frac{k}{r^3}\,\vec{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$E_p = -\frac{k}{r} + c$$ Queste formule si ricava dal ~~...~~ $\vec{F} = -\nabla E_p$

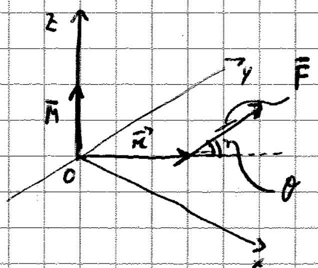
N.B.
Il ∇ è un operatore che lavora sugli scalari e ~~...~~ ritorna un vettore.

MOMENTO ANGOLARE e MOMENTO DI UNA FORZA

- Momento di una forza

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$ ATTENZIONE ALLA CONVENZIONE

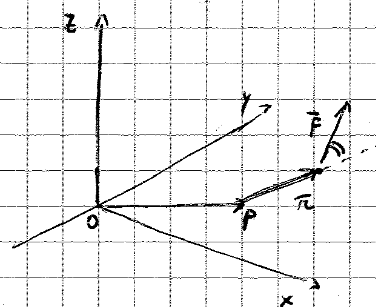
È una grandezza che si riferisce al moto rotazionale di corpi che seguono orbite chiuse



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = r F \sin\vartheta \; \hat{u}_z$$

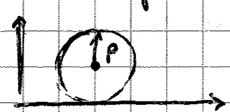
Il momento di una forza si può definire in modo più generale:

Def:



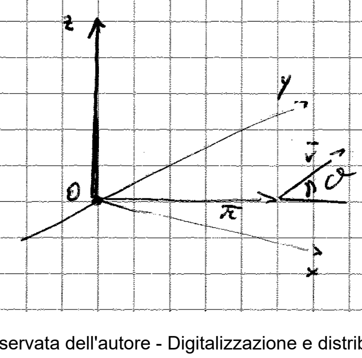
P è detto polo: non è detto che si prenda sempre O per calcolare $\vec{r}$
Polo $\neq$ O

Si può pensare al moto di un corpo che ruota ~~rispetto~~



- Momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m r v \sin\vartheta \; \hat{u}_z$$

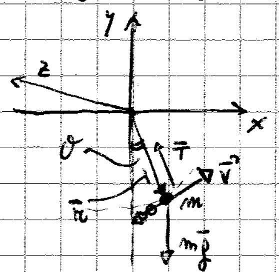


!!
Ricordiamo un'eventuale dipendenza dal tempo di $\vec{r}$ e $\vec{v}$, quindi sono quantità che cambiano istantaneamente

Ricorda le stesse cose del polo.

esempio 2 (PENDOLO):

z esce dal foglio



In coordinate polari $\bar{r} = r\hat{u}_r$

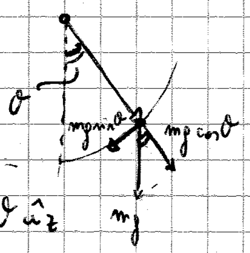
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} \qquad \bar{L} = m\,\bar{r}\wedge\bar{v} = m\,r\,\hat{u}_r \wedge (\dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\vartheta}\,\hat{u}_\vartheta) = m\,r^2\,\dot{\vartheta}\,\hat{u}_z$$

è nullo anche perché $\dot{r} = 0$ dato che $r = \text{cost}$

$$\bar{L} = m\,r^2\,\dot{\vartheta}\,\hat{u}_z$$

$$\bar{M} = \bar{r}\wedge(m\bar{g} + \bar{T}) \qquad \bar{M} = \bar{r}\wedge m\bar{g} = m\,\bar{r}\wedge\bar{g} = -m\,r\,g\sin\vartheta\,\hat{u}_z$$

Possiamo toglierla perché allineata con $\bar{r}$



Riprendiamo la formula generale

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} \Rightarrow \frac{d(m\,r^2\,\dot{\vartheta}\,\hat{u}_z)}{dt} = -m\,r\,g\sin\vartheta\,\hat{u}_z$$

$$\cancel{m}\,r^{\cancel{2}}\,\ddot{\vartheta}\,\cancel{\hat{u}_z} = -\cancel{m}\,\cancel{r}\,g\sin\vartheta\,\cancel{\hat{u}_z}$$

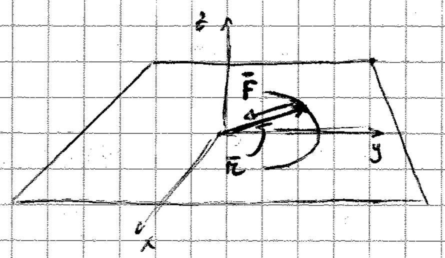
• $\bar{L}$ varia ma si mantiene sempre su z, ecco perché si elimina $\hat{u}_z$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{r}\sin\vartheta \Rightarrow \ddot{\vartheta} + \frac{g}{r}\sin\vartheta = 0$$

eq.ne differenziale del moto di un pendolo

(MOTO DEI PIANETI) <u>TEOREMA DEL MOM. ANG. E FORZE CENTRALI</u>

Supponiamo di poter rappresentare i moti dei pianeti su delle orbite in particolare su delle ellissi



$$\bar{F} = -\frac{k}{r^2}\,\hat{u}_r = -\frac{k}{r^3}\,\bar{r}$$

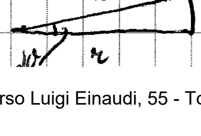
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} = \bar{r}\wedge\bar{F} = \bar{r}\wedge\left(-\frac{k}{r^2}\,\hat{u}_r\right) = 0$$

Come polo stiamo pensando all'origine del sistema

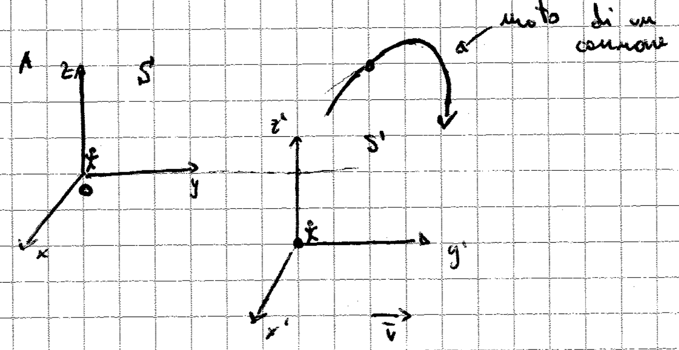
$\bar{L} = \underline{\text{cost}}$ Una conseguenza importante è la <u>II LEGGE DI KEPLERO</u>

$$\bar{L} = m\,\bar{r}\wedge\bar{v} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coordinate polari}}}{\ldots} = m\,r^2\,\dot{\vartheta}\,\hat{u}_z$$

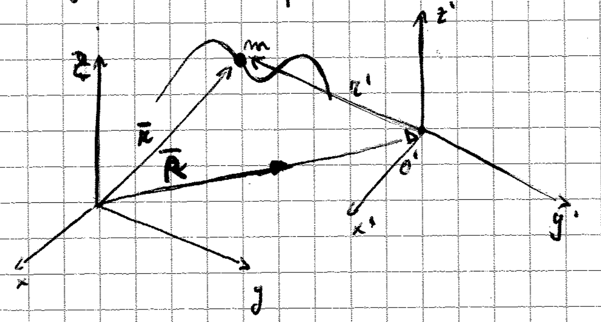
Osserviamo il nostro tratto di orbita e pensiamo un angolo infinitesimo $d\vartheta$ ~~opposto~~ se ora pensiamo a r e r' praticamente uguali



MOTI RELATIVI



Bisogna porre in relazione le descrizione dei fenomeni osservati da "punti di vista" (sistemi di riferimento) differenti.



$z /\!/ z'$, $x /\!/ x'$, $y /\!/ y'$

$\vec{r}$ descrive il moto di m

Bisogna collegare $\vec{r}$ e $\vec{r}'$

Se $\overline{OO'} = \vec{R} \Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)}$

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t) \rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} \rightarrow \boxed{\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}_{O'}(t)}$$

O' si muove rispetto ad O !!

$$\boxed{\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_{O'}(t)}$$

VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO

ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO

In breve

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t), \quad \vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}_{O'}(t), \quad \vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_{O'}(t)$$

esempio:

$\vec{v}'(t) = v'_x \hat{u}_{x'} + v'_y \hat{u}_{y'} + v'_z \hat{u}_{z'}$ ma sappiamo che $\hat{u}_x /\!/ \hat{u}_{x'}$, $\hat{u}_y /\!/ \hat{u}_{y'}$, $\hat{u}_z /\!/ \hat{u}_{z'}$

quindi $\vec{v}'(t) = v'_x \hat{u}_x + v'_y \hat{u}_y + v'_z \hat{u}_z$

PUNTO FONDAMENTALE: Posso usare $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$. Questo punto SALTA se S' ha un moto che non è solo traslatorio, ma anche rotatorio

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

Si definiscono trasformazioni galileiane quelle per cui i sistemi S e S' sono soggetti a moto relativo uniforme $\Rightarrow \vec{V}_{O'} =$ costante

Sono le trasformazioni cioè le leggi che collegano i due sistemi di riferimento

$\bar r = x\hat u_x + y\hat u_y + z\hat u_z$ $\qquad \hat u_x, \hat u_y, \hat u_z$ NON DIPENDONO DAL TEMPO!

$\bar R = X\hat u_x + Y\hat u_y + Z\hat u_z$

$\bar r' = x'\hat u'_x + y'\hat u'_y + z'\hat u'_z$

Ora $\hat u'_x, \hat u'_y, \hat u'_z$ non sono fissi ma sono funzioni del tempo!

<u>Teorema delle velocità relative</u>

① $\bar v(t) = \bar v'(t) + \bar v_{O'}(t) + \bar\omega \wedge \bar r'$

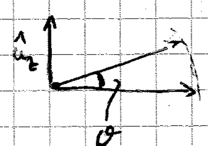
$\bar\omega$ velocità angolare, la velocità con cui gira intorno all'asse di rotazione

<u>Teorema dell'accelerazione relativa</u>

② $\bar a(t) = \bar a'(t) + \bar a_{O'}(t) + \underbrace{\bar\omega \wedge (\bar\omega \wedge \bar r')}_{\text{Termine centrifugo}} + 2\bar\omega \wedge \bar v' + \frac{d\bar\omega}{dt} \wedge \bar r'$

<u>RICORDARE</u>

$$\frac{d\hat u}{dt} = \dot\theta\,\hat u_\perp = \bar\omega \wedge \hat u, \qquad \bar\omega = \underbrace{\dot\theta}_{\omega}\,\hat u_z$$



<u>Teorema delle velocità relative</u>

$\bar r = \bar R + \bar r'$

$\frac{d\bar r}{dt} = \frac{d\bar R}{dt} + \frac{d\bar r'}{dt} \qquad \bar r(t), \bar R(t), \bar r'(t)$

$\bar v = \bar V_{O'} + \frac{d}{dt}(x'\hat u'_x + y'\hat u'_y + z'\hat u'_z)$

$\bar v = \bar V_{O'} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\hat u'_x + \frac{dy'}{dt}\hat u'_y + \frac{dz'}{dt}\hat u'_z}_{\text{Rappresenta la descrizione delle velocità rispetto a } S'} + x'\frac{d\hat u'_x}{dt} + y'\frac{d\hat u'_y}{dt} + z'\frac{d\hat u'_z}{dt}$

Immaginiamo che $\hat u'_x$ stia ruotando intorno all'asse.

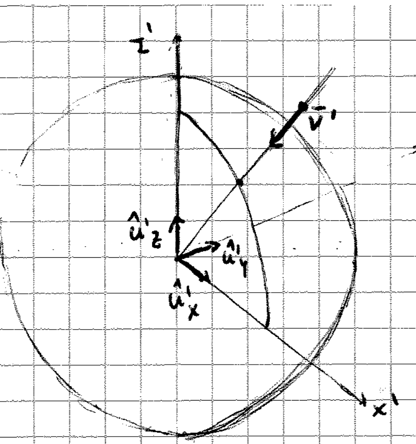
<u>Chiamiamo $\hat u_a$ il versore dell'asse di rotazione con velocità ω</u>

$\bar v = \bar V_{O'} + \bar v' + x'\bar\omega \wedge \hat u'_x + y'\bar\omega \wedge \hat u'_y + z'\bar\omega \wedge \hat u'_z$

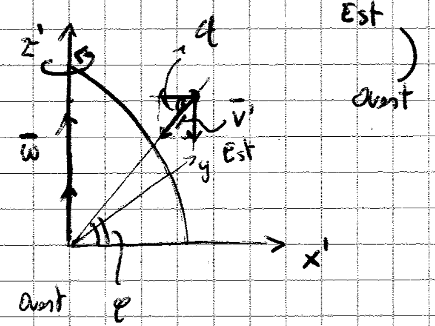
$\bar v = \bar V_{O'} + \bar v' + \bar\omega \wedge (x'\hat u'_x + y'\hat u'_y + z'\hat u'_z)$

$\boxed{\bar v = \bar V_{O'} + \bar v' + \bar\omega \wedge \bar r'}$ $\qquad$ Esplicitando v' conosco la velocità con cui un osservatore in S' vede muoversi il corpo.

Velocità di trascinamento $\bar V_{O'} + \bar\omega \wedge \bar r'$



$\bar{\omega} = \omega \hat{u}'_z \parallel z'$



$\bar{a}' = \bar{a} - \underbrace{\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}')}_{\text{Piccolo}} - 2\bar{\omega} \wedge \bar{v}'$

$\bar{a} = g$ acc. di g per supporre il corpo → è una sorta di termine centrifugo

$-2\omega \hat{u}'_z \wedge (v'\cos\varphi(-\hat{u}'_x)) = +2\omega v'\cos\varphi\, \hat{u}'_z \wedge \hat{u}'_x = 2m v'\cos\varphi\, \hat{u}_y$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad/s

$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m (Raggio Terra)

$R_{TS} = 1{,}49 \cdot 10^4$ m

$T_0 = 3{,}15 \cdot 10^7$ s Rivoluzione

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}$ rad/s

$\omega^2 r' \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ m/s² ($r' = R$)

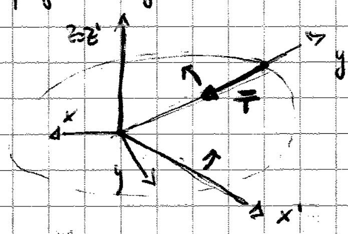
$\omega v' = 7 \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 7 \cdot 10^{-4}$ m/s² ($v' = 10$ m/s) molto più piccolo del termine centrifugo una conta di più perché non bilanciato

esercizio

Trovare la Forza centrifuga agente su un corpo in rotazione con $\omega = 3\pi/s$.

$R = 2$ m

$m = 40$ kg



in S: $m\bar{a} = \bar{T}$

in S': $\bar{a}' = \bar{a} - 2\bar{\omega} \wedge \bar{v}' - \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}')$ $\qquad \bar{a}_{o'} = \bar{0}$

$m\bar{a}' = T - 2m\bar{\omega} \wedge \bar{v}' + m\omega^2 \bar{r}'$

$\bar{a} \wedge (\bar{b} \wedge \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})$

$\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}') \stackrel{?}{=} \bar{\omega}(\bar{\omega} \cdot \bar{r}') - \bar{r}'(\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) = -\omega^2 \bar{r}'$

Oscillatore con II schema di soluzione (quando vado da x_1 e x_2)

$E_k^f - E_k^i - E_p^f$

$$E_k^f - E_k^i = -(E_p^f - E_p^i) + \int_{x_i}^{x_f} F_a \, dx$$

Q6) È un termine che può cambiare segno

$x_f = x_2$, $x_i = x_1$

$E_k^2 = 0 \Leftarrow v_2 = 0$, $E_k^1 = 0 \Leftarrow v_1 = 0$

$$E_k^{(2)} - E_k^{(1)} = -(E_p^{(2)} - E_p^{(1)}) + \int_{x_1}^{x_2} F_a \, dx$$

$$0 = -\left(\frac{k}{2} x_2^2 - \frac{k}{2} x_1^2\right) + F_a (x_2 - x_1)$$

$x_1 = A$, $x_2 = -A'$

$$\frac{k}{2}(A'^2 - A^2) = F_a(-A' - A)$$

(*) $\frac{k}{2}(A' - A) = -F_a \Rightarrow (A' - A) = -2\frac{F_a}{k} \Rightarrow A' = \quad A' = A - \frac{2}{k} F_a$

$x_2 \to x_3$

$$E_k^{(3)} - E_k^{(2)} = -(E_p^{(3)} - E_p^{(2)}) + \int_{x_2}^{x_3} (-F_a) \, dx$$

$$0 = -\left(\frac{k}{2} x_3^2 - \frac{k}{2} x_2^2\right) - F_a (x_3 - x_2)$$

$x_3 = A''$, $x_2 = -A'$

$$\frac{k}{2}(A''^2 - A'^2) = -F_a (A'' + A')$$

$$\frac{k}{2}\cancel{(A'' + A')}(A'' - A') = -F_a \cancel{(A'' + A')}$$

Oss.

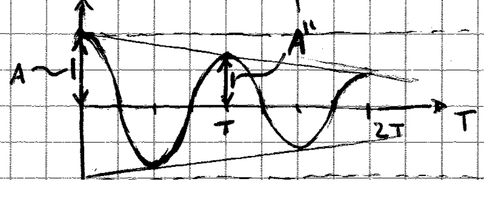
(**) $A'' = A' - \frac{2}{k} F_a$

Da (*) e (**)

$$A'' = A - \frac{2}{k} F_a - \frac{2}{k} F_a \Rightarrow \Delta A = -\frac{4}{k} F_a$$

L'oscillazione avviene sempre con la stessa PULSAZIONE, ossia il periodo è sempre lo stesso, ma cambia l'AMPIEZZA.

Si definisce PSEUDOPERIODICA perché il periodo è sempre lo stesso, ossia per andare da un punto all'altro il periodo è lo stesso nonostante l'ampiezza cambi



2) Smorzamento critico: $\gamma^2 = \omega_0^2$ $(\gamma \to \omega_0)$

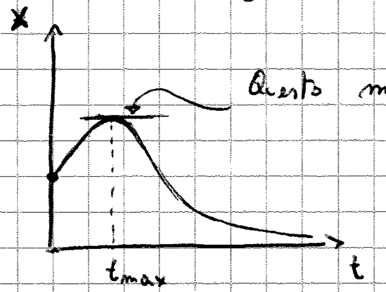
Th: $x(t) = e^{-\gamma t}(at + b)$

prova: $A e^{tR} + B e^{-tR}$ se $\gamma \to \omega_0 \Rightarrow R \to 0$

Sviluppo di Mac Laurin $A(1 + tR + \dots) + B(1 - tR + \dots) =$

$$= \underbrace{(A+B)}_{b} + \underbrace{R(A-B)}_{a}\, t + \dots = b + t\,a$$

se A, B sono arbitrari $A - B = \frac{a}{R}$



Questo massimo è molto importante

3) Smorzamento debole: se $\gamma < \omega_0$

$\alpha_1 = -\gamma + i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega}$ $\alpha_2 = -\gamma - i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega}$

$\alpha_1 = -\gamma + i\omega$ $\alpha_2 = -\gamma - i\omega$

$$x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} = A e^{(-\gamma + i\omega)t} + B e^{(-\gamma - i\omega)t} = e^{-\gamma t}(A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}) =$$

Quantità reale costruita da una quantità complessa?

In generale le soluzioni differenziali vogliono $A, B \in \mathbb{C} \Rightarrow$ dobbiamo scegliere opportunamente A, B perché $x(t) \in \mathbb{R}$

$B = A^*$ dove B è complesso coniugato di A

$$= e^{-\gamma t}(A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}) =$$ $A = \frac{1}{2} A_0 e^{i\phi}$ (A_0 modulo, $|A| = \frac{A_0}{2}$)

$$= e^{-\gamma t}\left(\frac{A_0}{2} e^{i\phi} e^{i\omega t} + \frac{A_0}{2} e^{-i\phi} e^{-i\omega t}\right) =$$

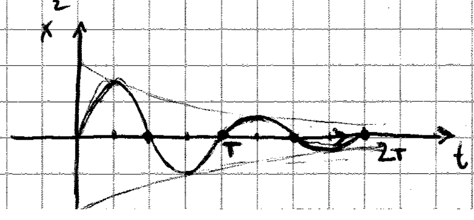
$$= \frac{A_0}{2} e^{-\gamma t}\left(e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}\right) =$$ $e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$

$$= \boxed{A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)}$$ $\omega = \omega_0^2 - \gamma^2$

CONSIDERAZIONI

esempio: • $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$

• $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\sin\omega t$



Il moto è nuovamente PSEUDO PERIODICO

$T \overset{?}{\longleftrightarrow} T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T > T_0$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}}$$

$$\boxed{\tan\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

ORA POSSIAMO DETERMINARE LA FASE!

$$R^2 = R^2\cos^2\phi + R^2\sin^2\phi = (\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2$$

$$R = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

Noti R e ϕ trovo A:

dalla 3

$$A\left((\omega_0^2-\omega^2)\cos\phi - 2\gamma\omega\sin\phi\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$A\left((\omega_0^2-\omega^2)\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{R} - 2\gamma\omega\frac{(-2\gamma\omega)}{R}\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$A\frac{1}{R}\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$AR = \frac{F_0}{m} \longrightarrow A = \frac{F_0}{Rm} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

Discussione:

$$X(t) = \cancel{x(t)} + x_{sp} \simeq A\sin(\omega t + \phi)$$

$\uparrow$ smorzato immediatamente

Legge oraria
Descrive le oscillazioni armoniche smorzate

1) $\omega \ll \omega_0$ 2) $\omega \gg \omega_0$ 3) $\omega = \omega_0$

1) $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$T \gg T_0$

Il periodo T impartito dal motore è molto più grande di T_0, ciò vuol dire che la $F(t)$ si manifesta sinusoidalmente

2) $T \ll T_0$

L'oscillatore ha periodi molto lunghi rispetto alla $F(t)$ che ha un periodo molto più veloce

3) $T = T_0$

---

1) $\omega \ll \omega_0$
$$\begin{cases} \tan\phi = -\dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2} \simeq 0 \Rightarrow \phi = 0 \\ A \simeq \dfrac{F_0}{m\omega_0^2} = \dfrac{F_0}{k} \end{cases}$$

questo perché $\begin{cases} 2\gamma\omega = -R\sin\phi \\ \omega_0^2-\omega^2 = R\cos\phi \end{cases}$ Positivo

RISONANZA IN ENERGIA

Calcoliamo la Pot. ist.

$$P(t) = \frac{dE_k}{dt} = v(t)\,F(t) = \frac{dX}{dt}\,F(t) = A\omega\cos(\omega t+\phi)\,\frac{F_0}{\cancel{m}}\sin\omega t$$

$$P(t) = \frac{A\omega F_0}{\cancel{m}}\left(\cos(\omega t)\cos\phi\sin(\omega t) - \sin^2(\omega t)\sin\phi\right)$$

$$P(t) = \frac{A\omega F_0}{\cancel{m}}\left(\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\cos\phi - \sin^2(\omega t)\sin\phi\right)$$

Cosa capita nella trasmissione di Energia Cinetica?

Potenza media $$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{A\omega F_0}{T\cancel{m}}\int_0^T\left(\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\cos\phi - \sin^2\omega t\sin\phi\right)dt =$$

$$\boxed{\langle P(t)\rangle = -\frac{A\omega F_0}{2\cancel{m}}\sin\phi}$$

$$\int_0^T \sin(\omega t)\,dt = -\frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\Big|_0^T = -\frac{1}{2\omega}\cos 2\omega T - 1 = 0$$

$\frac{2\pi}{\omega}$

$$\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\omega t)\right)dt = \int_0^T\frac{1}{2}\,dt = \frac{T}{2}$$

Quindi

$$\langle P(t)\rangle = -\frac{A\omega F_0}{2\cancel{m}}\sin\phi = -\frac{A\omega F_0}{2\cancel{m}}\,\frac{(-2\omega\gamma)}{R} = \frac{A\omega^2\gamma F_0}{2m}\,\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

FORMULA FINALE

$$\langle P(t)\rangle = \frac{\gamma F_0^2\,\omega^2}{m^2(\omega_0^2-\omega^2+4\gamma^2 m^2)}$$

per $\frac{dP}{d\omega}$ = termine cost $\frac{(\omega_0^2-\omega^2)(\omega_0^2+\omega^2)}{[\dots]}\,\omega$

P ha un max per $\omega=\omega_0$

Il picco della POTENZA è tale quando $\omega=\omega_0$ come se $\omega=\omega_0$ si ha il massimo trasferimento di energia.

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\omega} = \frac{2\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} - \frac{\omega^2\left[2(\omega_0^2-\omega^2)(-\omega)+8\gamma^2\omega\right]}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^2} =$$

$$= \frac{2\omega\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]-\omega^2\left[-2\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\gamma^2\omega\right]}{\text{denominatore}} =$$

numeratore $= 2\omega(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \cancel{8\gamma^2\omega^3} + 2\omega^3(\omega_0^2-\omega^2) - \cancel{8\gamma^2\omega^3} =$

$$= 2\omega(\omega_0^2-\omega^2)(\omega_0^2+\omega^2)$$

A promuovere il moto delle particelle o intervengono Forze esterne o Forze interne: individuiamo con $\vec{F_i}$, $\vec{F_j}$ due forze applicate a m_i e m_j generali, inoltre i due corpi interagiscono su m_j agisce $\vec{F}_{ij}$ mentre su m_i $\vec{F}_{ji}$ per il III principio di Newton, chiamate forze interne.

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad \forall_{i,j}$$

$$\vec{F}^{I}_{j} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \Rightarrow \text{Questo vale per tutte le masse.}$$

la somma di tutte le forze interne sul corpo j perché ci sono molti altri corpi

Il teorema del CdM è un po' come il II principio di Newton per il CdM

$$\vec{A}_{CdM} = \frac{d\vec{V}_{c.m.}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{M}\sum m_j \vec{v}_j = \frac{1}{M}\sum_j m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{a}_j$$

N.B. $\vec{a}_j$ è istantanea e in generale <u>NON</u> è costante

$$\boxed{\vec{A}_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum m_j \vec{a}_j}$$

~~A~~- Ora possiamo dire che:

$$m_j \vec{a}_j = \vec{F}^{I}_{j} + \vec{F}^{E}_{j}$$ ← Eventuali Forze Esterne sul corpo j

$$\vec{A}_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum_j \left(\vec{F}^{E}_{j} + \vec{F}^{I}_{j}\right)$$

Si può dimostrare che $\sum_j \vec{F}^{I}_{j} = \vec{0}$ quindi:

$$\boxed{\vec{A}_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum_j \vec{F}^{E}_{j}}$$

Dim. perché $\sum_j \vec{F}^{I}_{j} = \vec{0}$:

$$\sum_j \vec{F}^{I}_{j} = \sum_j \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$$

Sto sommando su termini di Forze aventi due indici e per il terzo principio ~~le~~ le coppie vanno sempre in coppie

$\forall (i,j)$ insieme e $\vec{F}_{i,j}$ compare

$$\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$$

$\Downarrow$

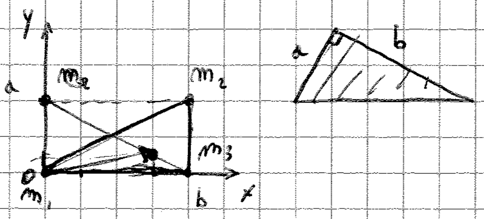
$$\sum_j \vec{F}^{I}_{j} = \vec{0}$$

La cosa importante è che le FORZE INTERNE <u>NON</u> agiscono ~~a~~ sul moto

$$\boxed{\vec{R}^{E} = M\vec{A}_{c.m.}}$$

$\Rightarrow$ STIAMO DICENDO che il sistema si muove come se ~~[illegible]~~ avesse un'unica massa in un unico punto e sente la forza applicata solo in quel punto.

esempio: Trovare il C.d.M. per 3 masse m_1, m_2, m_3 poste ai vertici di un triangolo rettangolo di cateti a, b.



$\vec{r}_1 = 0$
$\vec{r}_3 = b\hat{u}_x$
$\vec{r}_2 = (b, a) = b\hat{u}_x + a\hat{u}_y$

$$\bar{R}_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum m_j \bar{r}_j$$

$$X_{c.m}\hat{u}_x + Y_{c.m}\hat{u}_y = \frac{1}{M}\sum m_j(x_j\hat{u}_x + y_j\hat{u}_y) = \hat{u}_x\frac{1}{M}\sum m_j x_j + \hat{u}_y\frac{1}{M}\sum m_j y_j$$

$$\begin{cases} X_{c.m} = \frac{1}{M}\sum m_j x_j \\ Y_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum m_j y_j \end{cases}$$

$$\vec{R}_{c.m.} = \hat{u}_x\frac{1}{M}(m_2 b + m_3 b) + \hat{u}_y\frac{1}{M}(m_2 a) = \frac{1}{M}((m_2+m_3)b\hat{u}_x + m_2 a\hat{u}_y)$$

caso 1

$$\begin{cases} m_3 = 2m_1 \\ m_2 = m_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{R}_{c.m.} = \frac{1}{4m_1}(3m_1 b\hat{u}_x + m_1 a\hat{u}_y) = \frac{1}{4}(3b\hat{u}_x + a\hat{u}_y)$$

$$\bar{R}_{c.m} = \frac{3b\hat{u}_x + a\hat{u}_y}{4}$$ Il c.d.M. si trova all'interno del triangolo

caso 2

$$\begin{cases} m_3 = 10^{-6}\, m_1 & \rightarrow \text{TERRA} \\ m_2 = 10^{-3}\, m_1 & \rightarrow \text{GIOVE} \end{cases}$$

$$\vec{R}_{C.M.} = \frac{(10^{-3}+10^{-6})m_1 b\hat{u}_x + (10^{-3})m_1 a\hat{u}_y}{m_1(1+10^{-3}+10^{-6})} = \frac{(10^{-3}+10^{-6})b\hat{u}_x + 10^{-3}a\hat{u}_y}{1+10^{-3}+10^{-6}}$$

$$\simeq 10^{-3}b\hat{u}_x + 10^{-3}a\hat{u}_y \Rightarrow$$ POSSO PENSARLO NELL'ORIGINE!!

In generale

$$\vec{R}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

m_1 = SOLE

$$m_1 >> m_j \Rightarrow \frac{m_j}{m_1} << 1$$

$$\vec{R}_{c.m} = \frac{\cancel{m_1}(\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2 + \dots + \frac{m_N}{m_1}\vec{r}_N)}{\cancel{m_1}(1 + \frac{m_2}{m_1} + \dots + \frac{m_N}{m_1})} = \vec{r}_1$$

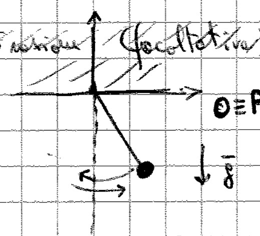
RIASSUMENDO

TEO $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = -M\,\bar{V}_p \wedge \bar{V}_{c.m.} + \vec{M}^E$

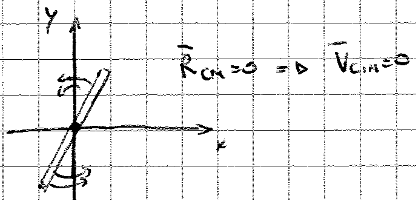
$\Downarrow$

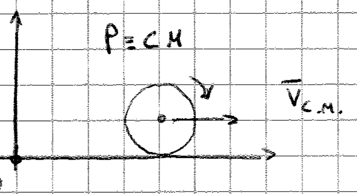
$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E = \begin{cases} 1) & \text{POLO FISSO} \Rightarrow \bar{V}_p = 0 \\ 2) & \bar{V}_{c.m.} = 0 \\ 3) & P = C.M. \\ 4) & \bar{V}_p \parallel V_{c.m.} \end{cases}$

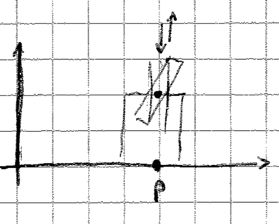
Dimostrazione (facoltativa):

1) 

2) Un corpo vincolato al suo centro di masse



3) 

4) 

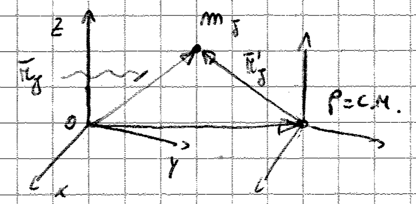
Dim. (Facoltativa): (Mettiamoci nel caso 3)

Supponiamo di vedere tutto dal centro di massa

$\dfrac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^E \quad \begin{cases} \bar{L} = \sum_j m_j \bar{r}'_j \wedge \bar{v}_j \\ \vec{M} = \sum_j \bar{r}'_j \wedge \bar{F}^E \end{cases}$

Th: $\dfrac{d\bar{L}'}{dt} = \bar{M}^{E'}$

dove $\bar{L}'$ = Momento angolare visto compl del Polo



Convenzione generale $\begin{cases} \bar{L}' = \sum_j m_j \bar{r}'_j \wedge \bar{v}'_j \\ \bar{M}^{E'} = \sum_j \bar{r}'_j \wedge \bar{F}'_j \end{cases}$

$\bar{v} = \bar{v}'_j + \bar{v}_{CM}$

Dim:

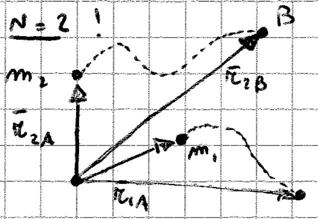
$\underline{\underline{\vec{L}}} = \sum_j m_j \bar{r}'_j \wedge \bar{v}_j = \sum_j m_j \bar{r}'_j \wedge (\bar{v}'_j + \bar{v}_{C.M.}) = \sum_j m_j \bar{r}'_j \wedge \bar{v}'_j + \sum_j m_j \bar{r}'_j \wedge \bar{V}_{CM}$

$= \sum_j m_j \bar{r}'_j \wedge \bar{v}'_j + \underbrace{(\sum_j m_j \bar{r}'_j)}_{0} \wedge \bar{V}_{C.M} = \sum_j m_j \bar{r}'_j \wedge \bar{v}'_j = \underline{\underline{\vec{L}'}}$

$\underline{\underline{\bar{M}^{E'}}} = \sum \bar{r}'_j \wedge \bar{F}_j = \sum \bar{r}'_j \wedge (\bar{F}^E_j + \bar{F}^I_j - m_j \bar{a}_{C.M}) = \sum \bar{r}'_j \wedge \bar{F}^E_j + \cancel{\sum \bar{r}'_j \wedge \bar{F}^I_j} - \cancel{\sum m_j \bar{r}'_j \wedge \bar{a}_{C.M.}} = \underline{\underline{\vec{M}^E}}$

- **CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CON N corpi**

CASO CON $N = 2$!



Fanno questo movimento perché hanno sempre una coppia di Forze : ESTERNE e INTERNE.

$$m_J \bar{a}_J = \vec{R}_J = \bar{F}^E_J + \vec{F}^I_J$$

$$\vec{F}^I_J = \sum_{i \neq J} F^I_{iJ}$$

Stiamo considerando il caso di **FORZE CONSERVATIVE**

Punti chiave

- Lavoro = Variazione Energia Cinetica
- Lavoro = − (Variazione Energia Potenziale)

$$W_{AB} = \sum_{J=1}^{2} \int_A^B \underbrace{\vec{R}_J}_{\text{risultante}} \cdot d\bar{r}_J = \sum_{J=1}^{2} \left(\frac{m}{2}_J \bar{V}_{JB}^2 - \frac{m_J}{2} \bar{V}_{JA}^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{J=1}^{2} m_J \bar{V}_J^2 - \frac{1}{2} \sum_{J=1}^{2} m_J \bar{V}_{JA}^2 =$$

$$W_{JAB} \qquad = \underbrace{E_k^B - E_k^A}$$

NON E' PIU' L'ENERGIA DI UNA SINGOLA PARTICELLA MA LA SOMMA DELL'ENERGIA DI OGNI PARTICELLA NEL SINGOLO STATO

Abbiamo ~~una~~ forze conservative quindi otteniamo nuovamente due funzioni integrali

$$W_{AB} = \sum_{J=1}^{2} \int_A^B \bar{R}_J \cdot d\bar{r}_J = \sum_{J=1}^{2} \int_A^B \bar{F}^E_J \cdot d\bar{r}_J + \sum_{J=1}^{2} \int_A^B \bar{F}^I_J \cdot d\bar{r}_J$$

Forze tutte **conservative !**

$$\vec{F}^E_J = \vec{F}^E_J(\bar{r}_J) = -\nabla_{\bar{r}_J} U^E_J$$

$$W_{AB} = \sum_{J=1}^{2} (-1) \left[U^E_J(\bar{r}_{JB}) - U^E_J(\bar{r}_{JA}) \right] + \sum_{J=1}^{2} \int_A^B \sum_{i \neq J} F_{iJ} \cdot d\bar{r}_J =$$

$$= \sum_{J=1}^{2} = -(U^E_B - U^E_A) + \int_A^B \bar{F}_{12} \cdot dr_2 + \int_A^B \bar{F}_{21} \cdot d\bar{r}_1$$

$$U^E_B = \sum_{J=1}^{2} U^E_J(\bar{r}_{JB}) \qquad U^E_A = \sum_{J=1}^{2} U^E_J(\bar{r}_{JA})$$

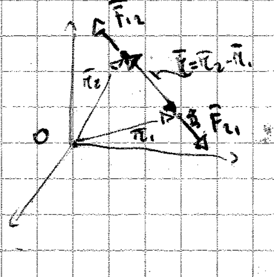
Rimaneggiamo il tutto

$$\int_A^B \bar{F}_{12} \cdot d\bar{r}_2 + \int_A^B \bar{F}_{21} \cdot d\bar{r}_1 = \int_A^B \left(\bar{F}_{12} \cdot d\bar{r}_2 + \bar{F}_{21} \cdot d\bar{r}_1 \right)$$

esempio concreto per capire :

$$\vec{F}(\bar{r}) = \frac{K}{r^3} \bar{r}$$

Nel nostro caso abbiamo tutte forze dirette non nell'origine ma nella mano $i \neq J$ che stiamo considerando



$$\bar{F}_{12}(\bar{r}_2) = K \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3}$$

$$\bar{F}_{21}(\bar{r}_1) = K \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3} = -K \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} = -\vec{F}_{12}$$

Riprendendo

$$\int_A^B (\bar{F}_{12} \cdot d\bar{r}_2 - \bar{F}_{12} \cdot d\bar{r}_1) = \int_A^B \bar{F}_{12} \cdot (d\bar{r}_2 - d\bar{r}_1) = \int_A^B \bar{F}_{12} \cdot d(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = \int_A^B \frac{K(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \cdot d(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$$

$$= \int_A^B \frac{K\bar{r}}{r^3} \cdot d\bar{r} = -\left[U_{12}(\bar{r}) \right]_A^B$$

IMPULSO E URTI

$$\bar{p}_j(t) = m_j\,\bar{v}_j(t)$$

$$\bar{p}_1(t) + \bar{p}_2(t) = \bar{p}_1(t') + \bar{p}_2(t') \Rightarrow \text{COROLLARIO DEL TERZO PRINCIPIO} \quad \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$$

$$\underbrace{\bar{p}_1(t') - \bar{p}_1(t)} = -(p_2(t') - p_1(t))$$

Variazione di Quantità di moto = Impulso

$$\bar{J}_{21} = \int_t^{t'} \bar{F}_{21}(\tau)\,d\tau = -\int_t^{t'} \vec{F}_{12}(\tau)\,d\tau = -\vec{J}_{12}$$

Δ ~ Esercitato Impulso generato dalle forze 1 sulle forze 2.

Gli impulsi messi in gioco dalle due Forze sono uguali ed opposti:

$$\bar{J}_{21} = -\bar{J}_{12}$$

Un URTO è caratterizzato dal fatto che $\Delta t = (t' - t) \to 0$, un urto è limitato nel tempo, avviene istantaneamente

URTO ELASTICO

Caratteristica: $\left\{ \begin{array}{l} (\Delta t \to 0) \text{ CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO} \\ \text{CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA} \end{array} \right.$

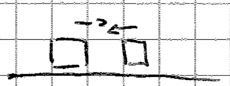
↓

$$\begin{cases} 1) \ \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2' \\ 2) \ E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B \end{cases}$$

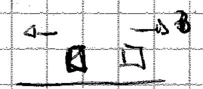
A → associato a t

B → associato a t'

A) t



B) t'



Osserviamo la 2) se $\Delta t \to 0$ allora le variazioni di posizione ~~scale~~ ~~spazi~~ delle masse coinvolte nell'urto da "prima" e "dopo" l'urto sono irrilevanti:

$$E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B \Rightarrow$$

In queste formule le energie potenziali dei campi esterni non hanno effetto

$$E_k^B - E_k^A = -(E_p^B - E_p^A) = -\left(\sum_{j=1}^{2} U_j^e(\bar{r}_{jB}) - \sum_{j=1}^{2} U_j^e(\bar{r}_{jA})\right) - \left(U_{12}(\bar{r}_{12B}) - U_{12}(\bar{r}_{12A})\right)$$

Osserviamo che $\bar{r}_{jB} \cong \bar{r}_{jA}$ e le forze F^J sono uguali quando $t' - t \to 0$

$$E_k^B - E_k^A = 0$$

Questo per arrivare a dire che in un urto si ha che la variazione di energia cinetica è 0 ossia ~~le variazioni di~~ la E_k si conserva:

$$\begin{cases} \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2' \\ E_k^B - E_k^A = 0 \end{cases}$$

esempio:

PAGINA SEGUENTE

Nella situazione descritta il corpo 1 rallenta il corpo 2 attraverso la Forza di attrito $\overline{F_a}$ e per il principio di azione e reazione il corpo 2 applica $-\overline{F_a}$ sul corpo 1

Nella situazione generale le due masse arrivano ad un moto solidale.

$m_1 a_1 = -F_a$

$m_2 a_2 = +F_a$ ← FORZE INTERNE DISSIPATIVE

Questo fenomeno avviene in un $\Delta t \to 0$ quindi può essere considerato un urto.

corpo 1

$$① \int_t^{t'} (-F_a)\,d\tau = J_{21} = -F_a \Delta t$$

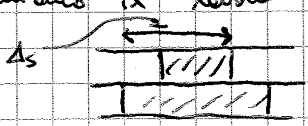
costante

Per la conservazione della quantità di moto
$J_{12} = +J_{21} \Rightarrow J_{12} - J_{21} = 0$

corpo 2

$$② \int_t^{t'} (F_a)\,d\tau = J_{12} = +F_a \Delta t$$

Consideriamo il lavoro delle due forze:



$$W_1' = (-F_a)\Delta s = -F_a \Delta s$$
$$W_2' = F_a(-\Delta s) = -F_a \Delta s$$
$$\Rightarrow W'_{tot} = -2 F_a \Delta s \neq 0$$

È qui che è finita l'energia cinetica, per cui non è conservata l'energia cinetica.

= URTO ELASTICO

In generale:
$$\begin{cases} m_1 \overline{v}_1 + m_2 \overline{v}_2 = m_1 \overline{v}_1' + m_2 \overline{v}_2' \\ \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2 \end{cases}$$

Contiamo le incognite:

1D: v_{1x}', v_{2x}' (le velocità dopo l'urto), dati: v_{1x}, v_{2x}

2D: $v_{1x}', v_{1y}', v_{2x}', v_{2y}'$ dati: $v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}$

2D:
$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' \\ \cancel{\frac{m_1}{2} v_{1x}^2 + \frac{m_2}{2} v_{2y}^2 = \frac{m_1}{2}} \\ \frac{m_1}{2}(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{m_2}{2}(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = \frac{m_1}{2}(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2) + \frac{m_2}{2}(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2) \end{cases}$$

perché l'equazione della quantità di moto è VETTORIALE

• URTO COMPLETAMENTE ELASTICO in 1D

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ m_1(v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2(v_2' + v_2)(v_2' - v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \end{cases}$$

$$= \frac{Mm}{2(M+m)}\left[v^2 + V^2 - 2vV\right] = \frac{Mm}{2(M+m)}(V-v)^2$$

Osserviamo che $\Delta E_k > 0$ cioè l'energia iniziale è stata ridotta

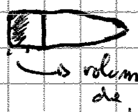
RAZZI

Sono sistemi che rientrano in quelli che sono a MASSA VARIABILE.

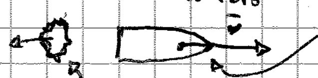
$$\bar F = \frac{d\bar p}{dt} = \frac{d[m(t)\bar v]}{dt} = \dot m \bar v + m\frac{d\bar v}{dt}$$

mv

Alla base del movimento dei razzi c'è la quantità di moto



$dm = -|dm|$



$m + dm$
$v + dv$

dm può algebricamente avere un segno positivo in quanto è una massa persa

$-dm$ pensiamo a un'emissione infinitesima continua nel tempo della massa

$v - v^*$ dove v^* = velocità di emissione con cui il sistema emette il gas (è un dato)

$$\underbrace{mv}_{\text{prima}} = \underbrace{-(v - v_*)\,dm + (m+dm)(v+dv)}_{\text{dopo}}$$

Sono quantità infinitesime: prodotto di due infinitesimi è un infinitesimo di ordine superiore

$$\cancel{mv} = -\cancel{v\,dm} + v_*\,dm + \cancel{mv} + m\,dv + \cancel{v\,dm} + \cancel{dm\,dv}$$

$$v_*\,dm + m\,dv = 0 \qquad dm = \frac{dm}{dt}dt, \quad dv = \frac{dv}{dt}dt$$

$$\cancel{\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{v_*}}$$

$$v_*\frac{dm}{dt}\cancel{dt} + m\frac{dv}{dt}\cancel{dt} = 0 \qquad dt \neq 0$$

$$\boxed{v_*\frac{dm}{dt} = -m\frac{dv}{dt}}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL RAZZO!!

$m(t) = m_0 - kt$

$$\frac{dv}{dt} = -v_*\frac{(-k)}{m(t)} \;\rightarrow\; \frac{dv}{dt} = \frac{v_* k}{m_0 - kt} \;\rightarrow\; v = v_0 + v_*\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - kt}\right)$$

$$\bar{L}_z \ldots = I_z \bar{\omega} + \Sigma_j m_j z_j \left(\bar{\omega}\,(\overset{0}{\hat{u}_z \cdot \bar{R}_j}) - \bar{R}_j\,(\hat{u}_z \cdot \hat{u}_z \omega)\right) =$$

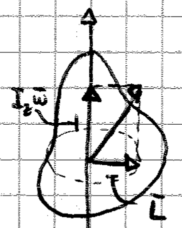
$$= I_z \bar{\omega} - \Sigma_j m_j z_j \bar{R}_j \omega$$

È come se vedo il corpo a fettine (c'è $\bar{R}_j$)

L_{xy} dipende dal polo

È un contributo che immaginiamo nel piano (xy)

$$\vec{L} = I_z \bar{\omega} + \vec{L}_{xy}$$



Il corpo ruotando descrive un cono: PRECESSIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Osserviamo che: $I_z\bar{\omega}$ non dipende dal POLO

$\bar{L}_{xy}$ dipende dalla scelta del polo

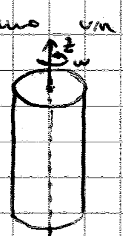
ASSI PRINCIPALI DI INERZIA

Si può dimostrare che per ogni punto di un corpo generico esistono 3 assi ortogonali (assi principali di inerzia) tali che se l'asse di rotazione coincide con uno di essi allora $\bar{L} = I\bar{\omega}$ e $\bar{L}_{xy} = \bar{0}$. Nel CENTRO DI MASSA questi assi vengono definiti ASSI CENTRALI DI INERZIA.

CASO SEMPLICE: Corpi omogenei con assi di simmetria (coincidono con gli assi principali di inerzia e addirittura i centrali)

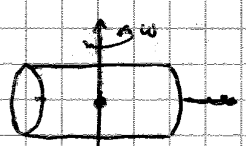
Consideriamo un cilindro

Cilindro:



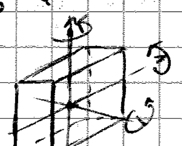
è omogeneo: tutti gli atomi sono uguali e la densità è uguale

simmetrico: la condizione iniziale è identica a quella finale

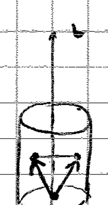


$\varphi = \bar{\pi}$ ottengo ancora una simmetria perché il corpo va in se stesso

Parallelepipedo



Corpi di rotazione



$$\vec{L}_{xy} = -\Sigma_j m_j \omega z_j \vec{R}_j$$

Per ogni punto esiste un punto speculare rispetto all'asse z

$\forall m_j = m$, $z_j, \bar{R}_j$ $\exists\, m_i = m$ t.c. $z_i = z_j$, $\bar{R}_i = -\bar{R}_j$

Allora $\vec{L}_{xy} = \bar{0}$ inevitabilmente perché è la Σ_j ad andare a 0.

Per un corpo OMOGENEO $\bar{L} = I\bar{\omega}$ e NON abbiamo PRECESSIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

- Se l'asse di rotazione è uno degli assi di simmetria (o in generale è un asse principale di inerzia) allora

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^E \Rightarrow \frac{d(I_z\bar{\omega})}{dt} = \bar{M}^E \Rightarrow I_z \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{M}^E \Rightarrow I_z \vec{\alpha} = \bar{M}^E$$

Per essere più chiari:

$$\hat{u}_z \wedge z_1 \bar{F}_1^e + (d_1\, \hat{u}_z \wedge \bar{F}_{2RV} + d_1\, \hat{u}_z \wedge \bar{F}_{1RV})$$

II caso:

$$\bar{L} = I_z \bar{\omega} + \bar{L}_{xy}$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^E \longrightarrow I_z \bar{\alpha} + \frac{d\bar{L}_{xy}}{dt} = \bar{M}^E$$

Non abbiamo considerato un corpo simmetrico, né un asse di simmetria centrale

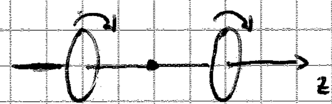
$$\frac{d\bar{L}_{xy}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega\, \Sigma_j m_j z_j \bar{R}_j) = -\frac{d\omega}{dt} \Sigma_j m_j z_j \bar{R}_j - \omega\, \Sigma_j m_j z_j \frac{d\bar{R}_j}{dt} =$$

$$= -\frac{d\omega}{dt} \Sigma_j m_j z_j \bar{R}_j - \omega\, \Sigma_j m_j z_j\, \bar{\omega} \wedge \bar{R}_j =$$

$$I_z \bar{\alpha} + \underbrace{\frac{d\omega}{dt}\frac{1}{\omega} L_{xy} + \bar{\omega} \wedge \bar{L}_{xy}} = \bar{M}^E = \bar{M}^E_{epp} + \underbrace{\bar{M}_{RV}}$$

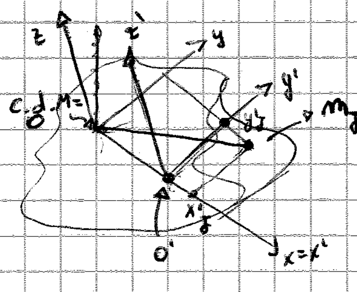
$$I_z \bar{\alpha} = \bar{M}^E_{epp}$$

Pensiamo alle ruote



TEOREMA HUYGEN - STEINER

Se un asse di rotazione è parallelo ad uno passante per il c.d.M. allora:
~~il momento~~ $I = I_{c.m.} + M a^2$ dove a = distanza tra i due assi.



$$\overline{OO'} = a$$

$$I_{cm} = I_z = \Sigma_j m_j (x_j^2 + y_j^2)$$

$$\begin{cases} x'_j = x_j - a \\ y'_j = y_j \end{cases}$$

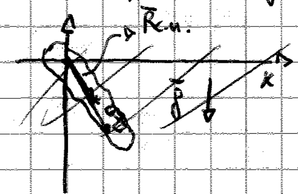
Calcolo $I = I_{z'}$

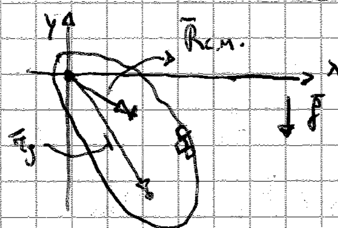
$$I_{z'} = \Sigma_j m_j (x'^2_j + y'^2_j) = \Sigma_j m_j ((x_j - a)^2 + y_j^2) = \Sigma_j m_j (x_j^2 + y_j^2 + a^2 - 2a x_j) =$$

$$= \Sigma_j m_j (x_j^2 + y_j^2) + M a^2 - 2a \underbrace{\Sigma_j m_j x_j \frac{M}{M}}_{0}$$

QED

Momento delle forze di gravità





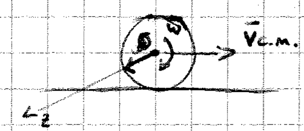
(PENDOLO FISICO)

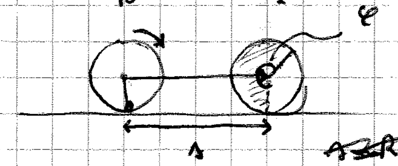
$$\bar{M}^E = \Sigma_j \bar{r}_j \wedge \bar{F}_j^E = \Sigma_j \bar{r}_j \wedge m_j \vec{g} = (\Sigma_j m_j \bar{r}_j) \wedge \vec{g} = M \bar{R}_{cm} \wedge \vec{g} = \bar{R}_{cm} \wedge M\vec{g}$$

Sto dicendo che il momento di un corpo generico può essere pensato come uno corpo in cui la massa è concentrata in $\bar{R}_{cm}$ moltiplicato per $M\vec{g}$

$$\Omega = \frac{m\, d\, g}{I_z\, \omega}$$; questo è un po' il principio della trottola.

MOTO PURO ROTOLAMENTO



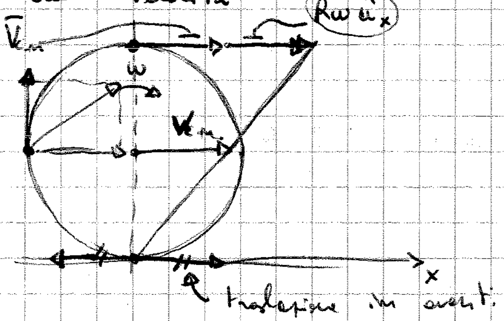


PURO ⇓ ASSENZA DI SCIVOLAMENTO

~~ATTRITO~~ $s = -R\varphi$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \qquad \frac{ds}{dt} = V_{c.m.} = -R\omega$$

Triangolo delle velocità ← velocità istantanea

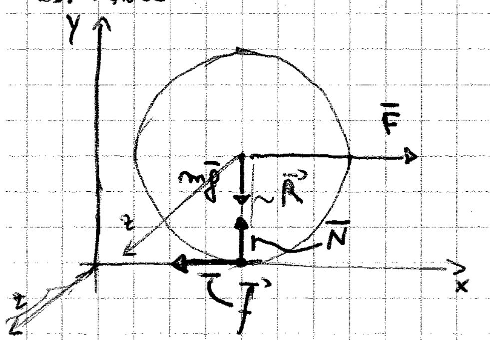


Tutti i punti TRASLANO

- Il moto di rotolamento è quel moto in cui il punto di contatto ha velocità istantanea NULLA!

Il moto di puro rotolamento è legato all'ATTRITO, senza attrito non ci sarebbe rotolamento, perché l'attrito cerca di rallentare il punto nel contatto

Descrizione



Se fosse un cubetto $\bar{f}$ potrebbe evitare il moto uguagliando $\bar{F}$, ma questo è un corpo sferico.

Abbiamo due moti: TRASLAZIONE, ROTAZIONE

- Le Forze interne non contano! Il corpo rimane un corpo rigido

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^E \\ m\,\vec{a}_{cm} = \bar{F} + m\bar{g} + \bar{N} + \bar{f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{L} = I_z\bar{\omega} \Rightarrow I_z\bar{\alpha} = \vec{R} \wedge \vec{f} \\ \begin{cases} N + mg = 0 \quad (\text{asse } y) \\ F - f = m\,a_{cm} \quad (\text{asse } x) \end{cases} \end{cases}$$

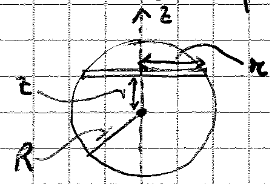
(ab)

Se $v_{cm} = - R\omega \longrightarrow a_{c.m.} = -R\alpha$

$$\begin{cases} \bar{N} + m\bar{g} = \bar{0} \\ F - f = m \cdot a_{c.m.} \\ I_z\,\alpha\,\cancel{\hat{u}_z} = -\cancel{\hat{u}_z}\,R f \end{cases} \qquad \begin{cases} F - f = m\, a_{c.m.} \\ -I_z \left(\dfrac{a_{c.m.}}{R}\right) = -R f \end{cases}$$

α

Momento di inerzia per una sfera piena



Il disco più piccolo è in un punto di raggio zero.

$$dI = \frac{r^2}{2}\,dm \quad , \quad dm = \rho \cdot \pi r^2\, dz$$

$$I_z = \int_{-R}^{R} dI = \int_{-R}^{R} \frac{r^4}{2}\rho\pi\, dz = \int_{-R}^{R} \underbrace{\frac{\pi\rho}{2}(R^2-z^2)^2 dz}_{f(z)}$$

Oss.

$$r^2(z) = R^2 - z^2$$

Osserviamo che $f(z)$ è una funzione PARI:

$$I_z = 2\int_0^R \frac{\pi\rho}{2}(R^2-z^2)^2 dz = \pi\rho\int_0^R (R^2-z^2)^2 dz = \pi\rho\int_0^R (R^4+z^4-2R^2z^2)\, dz =$$

$$= \pi\rho\left[R^4 z + \frac{1}{5}z^5 - 2R^2\frac{1}{3}z^3\right]_0^R = \pi\rho\left(R^5 + \frac{1}{5}R^5 - \frac{2}{3}R^5\right) =$$

$$= \frac{\pi\rho}{15}8R^5 = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

$$I = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 \qquad \text{dove} \qquad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}$$

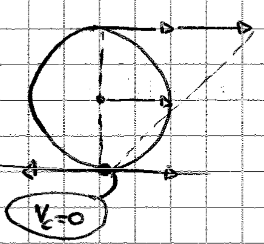
$$I = \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{15}_{5}}\cancel{\pi} M \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\frac{\cancel{R^5}^{2}}{\cancel{\pi}\cancel{R^3}} \rightarrow I = \frac{2}{5}MR^2$$

Momento d'Inerzia per un cilindro

Sono tanti dischi l'uno sull'altro

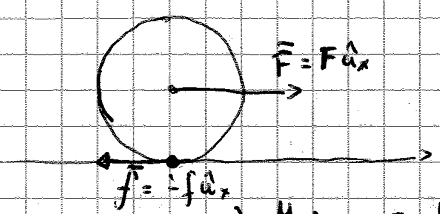
$$I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

• Corpo che "rotola"



$$v_{cm} = R_{cm}\,|\omega|$$

Moto misto: Traslazione + rotazione (con strisciamento)



$V_{cm} \neq R\,|\omega|$

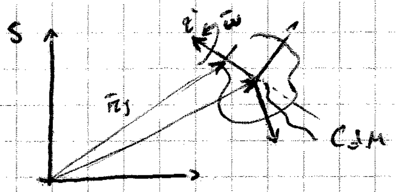
Ora $\alpha \neq -a_{cm}/R$, sono quantità indipendenti

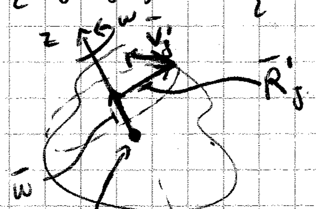
$$\begin{cases} M a_{cm} = F - f \rightarrow \beta \\ I\alpha = -Rf \end{cases}$$

, f è in effetti più complicato, il punto striscia quindi entra in gioco ATTRITO DINAMICO!

• Energia cinetica totale di un corpo rigido

Dal II teorema di König: $E_k = \frac{1}{2} \Sigma_j m_j v_j^2 = \frac{1}{2} M \bar{V}_{cm}^2 + E_k'$





Osserviamo come scriviamo E_k':

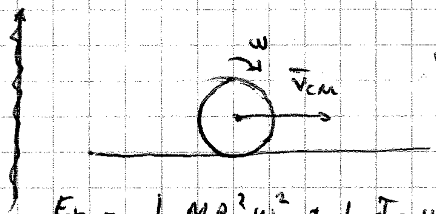
$E_k' = \frac{1}{2} \Sigma_j m_j \bar{v}_j'^2$ tutti i punti viaggiano su una circonferenza

$\bar{v}_j' = \bar{\omega} \wedge \bar{R}_j'$

$$E_k' = \frac{1}{2} \Sigma_j m_j \bar{v}_j'^2 = \frac{1}{2} \Sigma_j m_j (\bar{\omega} \wedge \bar{R}_j')^2 = \frac{1}{2} \underbrace{(\Sigma_j m_j R_j'^2)}_{I_{z'}} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2$$

$E_k = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2$ $I_{z'}$: momento di inerzia risp. al C.d.M.

Per un disco che rotola $E_k = \frac{1}{2} I_{polo} \omega^2$



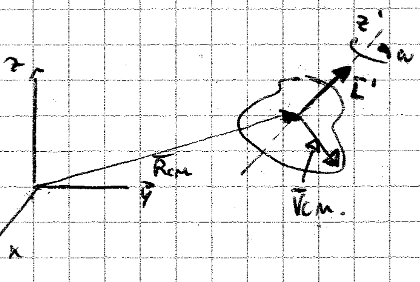
$v_{cm} = R|\omega|$

$$E_k = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 = \left(\frac{1}{2} M R^2 + \frac{I_{z'}}{2}\right) \omega^2$$

Osservazione generale

I teo di König

$$\bar{L} = M \bar{R}_{cm} \wedge \bar{V}_{cm} + \underbrace{\bar{L}'}_{I_{z'} \bar{\omega}}$$



• CONDIZIONI DI EQUILIBRIO STATICO DEL CORPO RIGIDO

$$\begin{cases} M \bar{a}_{cm} = \bar{R}^E = \bar{0} & \text{(Trasl.)} \\ \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^E = \bar{0} & \text{(Rot.)} \end{cases}$$

~~Dalle due equazioni~~

Dalle due equazioni cardinali otteniamo le condizioni di equilibrio statico

ci sarebbe il termine di $M v_p \wedge V_{cm}$, ma $v_p = v_{cm}$

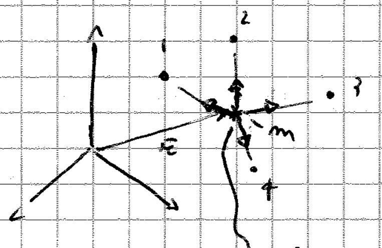
Abbiamo definito il CAMPO GRAVITAZIONALE; se metto m_0 in $\bar{r} = \bar{r}_0$ allora

$$\bar{F}_{j0} = m_0 \bar{G}_j(\bar{r}_0)$$

Immaginiamo di avere tante sorgenti gravitazionali $m_1, m_2, \dots, m_N$ generano il campo gravitazionale:

$$\bar{G}(\bar{r}) = \sum_{j=1}^{N} \bar{G}_j(\bar{r}) = \sum_j (-\gamma)\, m_j \frac{(\bar{r}-\bar{r}_j)}{|\bar{r}-\bar{r}_j|^3}$$

Principio di sovrapposizione dei campi gravitazionali.



$$m_4 \bar{G} = \bar{F}_4 \text{ su } m$$

$$\bar{F}(\bar{r}) = m\bar{G}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{F}(\bar{r}) = m\, \bar{G}(\bar{r})$$

CONCETTO DI POTENZIALE!

Ricordo

$$\bar{F}(\bar{r}) = -\frac{K}{r^2}\hat{u}_r = -\nabla_{\bar{r}} E_p(\bar{r}) \qquad E_p = -\gamma \frac{K}{r} + c$$

Siamo passati

$$\bar{F}_j(\bar{r}) = -\gamma \frac{m_j m}{|\bar{r}-\bar{r}_j|^3}(\bar{r}-\bar{r}_j) = -\nabla_{\bar{r}} E_p$$

dove $\overset{*}{E_p} = -\gamma \dfrac{m m_j}{|\bar{r}-\bar{r}_j|}$ $\quad$ $\bar{r}$ posizione della massa di prova, $\bar{r}_j$ posizione della sorgente

PROPRIETÀ: l'Energia potenziale di un corpo m in un campo di forze $\bar{F}(\bar{r})$ originato da molte sorgenti è la somma delle energie potenziali associate al campo di ogni sorgente (Princ. di sovrapposizione).

$E_p(\bar{r}) = ?$

$$\bar{F}(\bar{r}) = -\nabla_{\bar{r}} E_p(\bar{r}) = -\nabla_{\bar{r}}\left(\sum_{j=1}^{N} E_p^{(j)}(\bar{r})\right) = -\sum_j \nabla_{\bar{r}} \overset{\text{vedi } *}{E_p^{(j)}}(\bar{r}) = \sum_j \bar{F}_j(\bar{r})$$

Osserviamo che

$$\bar{F}(\bar{r}) = m\,\bar{G}(\bar{r}) = m \sum_{j=1}^{N} \bar{G}_j(\bar{r})$$

$$\bar{F}(\bar{r}) = -\nabla_{\bar{r}} E_p(\bar{r})$$

POTENZIALE

Dividendo ambo i membri $\rightarrow$ $\bar{G}(\bar{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{m} E_p(\bar{r})\right)$

$V(\bar{r})$ = potenziale associato al campo $\bar{G}(\bar{r})$ $\left(= E_p(\bar{r})/m\right) = -\sum_j \dfrac{m_j \gamma}{|\bar{r}-\bar{r}_j|}$

$$\bar{G}(\bar{r}) = -\nabla V(\bar{r})$$

Conviene prendere il CdM come origine di un nuovo sist. di rif. INERZIALE (V=cost)

NOTARE

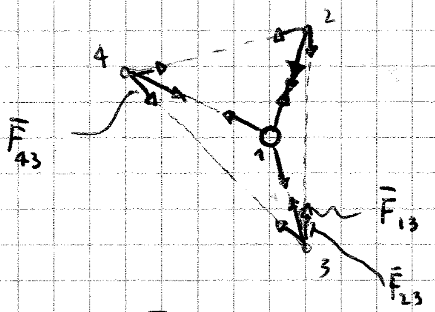
$m_1 >> m_j$
(sole) $(j \neq 1) \rightarrow$ pianeti

$$\vec{R}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j \vec{r}_j}{M} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{j=2}^{N} m_j \vec{r}_j}_{\text{Trascurabili}} \simeq \vec{r}_1$$

Se $m_1 \rightarrow \infty$ (approssimazione) avrei $\vec{R}_{CM} = \vec{r}_1$

Stiamo quindi considerando un sistema di riferimento con origine "praticamente" nella posizione del sole $\vec{R}_{CM} \simeq \vec{r}_1$

Immaginiamo un sistema formato da tre pianeti e il sole



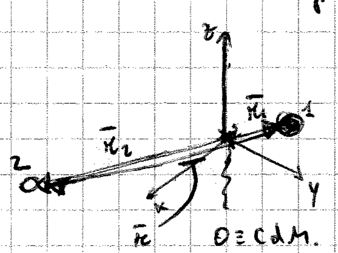
~~Terra~~
Terra $5,97 \cdot 10^{24}$ Kg
Giove $1,90 \cdot 10^{27}$ Kg
Sole $1,99 \cdot 10^{30}$ Kg
Luna $7,33 \cdot 10^{22}$ Kg

- Osserviamo che $\bar{F}_{43}, \bar{F}_{23}$ sono più piccole di $\bar{F}_{1j}$ a questo punto il moto dei pianeti: lo posso vedere come moti dipendenti solo dalla forza del sole e indipendenti dagli altri

$$|\bar{F}_{1j}| >> \bar{F}_{ij} \quad (i, j \neq 1)$$

Modello semplificato di un sistema planetario: ogni pianeta interagisce principalmente con il SOLE.

Problema a due corpi (1 pianeta + sole) visto dal C.d.M.
Consideriamo un S passante per il C.d.M.



$\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{r}_1 = -\dfrac{m_2}{M}\bar{r} \\ \bar{r}_2 = +\dfrac{m_1}{M}\bar{r} \end{cases}$

Vettore relativo

Se ricerchiamo il CdM: $\bar{R}_{CM} = -\frac{m_2 \bar{r}}{M} + \frac{m_1 \bar{r}}{M}$

$$\bar{R}_{CM} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{M} = \dots = \bar{0}$$

Inserendo il vettore relativo e lavorando con esso non perdo informazioni.

Velocità relativa: $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dfrac{d\bar{r}_2}{dt} - \dfrac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$

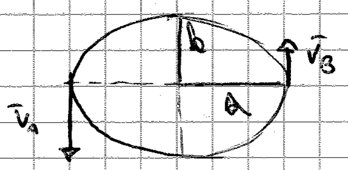
$$\begin{cases} \bar{v}_1 = -\dfrac{m_2}{M}\bar{v} \\ \bar{v}_2 = \dfrac{m_1}{M}\bar{v} \end{cases} \Rightarrow \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \frac{m_1}{M}\bar{v} - \left(-\frac{m_2}{M}\right)\bar{v} = \bar{v}$$

$$\frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{M} = \dots = \bar{0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 191

1) $\dot{A} = \frac{\pi a b}{T}$, $\pi a b$ = Area dell'ellisse
T = periodo

$$\dot{A} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{L_z}{2\mu}$$



2) $L_z = \text{cost} = \mu\, r_A v_A \quad (\bar{r}_A \perp \bar{v}_A)$

$L_z = \text{cost} = \mu\, r_B v_B \quad (\bar{r}_B \perp \bar{v}_B)$ } conservazione $\bar{L}$

Campo di Forze CENTRALE e CONSERVATIVO

$\bar{L} = \text{cost}$ $\qquad$ $E = \text{cost}$

Ricordo:
$$\begin{cases} r_a + r_b = 2a \\ r_a\, r_b = b^2 \end{cases}$$

3) Energia in coordinate

$$E = \frac{\mu}{2}\bar{v}^2 - \gamma\frac{m_1 m_2}{r}$$

Per il teo di conservazione

$$\frac{\mu}{2}v_A^2 - \gamma\frac{m_1 m_2}{r_A} = \frac{\mu}{2}v_B^2 - \gamma\frac{m_1 m_2}{r_B}$$

Dalle formule (2):

$$\frac{\pi a b}{T} = \frac{L_z}{2\mu} \Rightarrow \text{a)}\ \frac{\pi a b}{T} = \frac{r_A v_A}{2} \Rightarrow v_A = \frac{2\pi a b}{T r_A}$$

$$\text{b)}\ \frac{\pi a b}{T} = \frac{r_B v_B}{2} \Rightarrow v_B = \frac{2\pi a b}{T r_B}$$

Andiamo in (3):

$$\frac{\mu}{\cancel{2}}\frac{\cancel{4}^{2}\pi^2 a^2 b^2}{T^2 r_A^2} - \gamma\frac{m_1 m_2}{r_A} = \frac{\mu}{\cancel{2}}\frac{\cancel{4}^{2}\pi^2 a^2 b^2}{T^2 r_B^2} - \gamma\frac{m_1 m_2}{r_B}$$

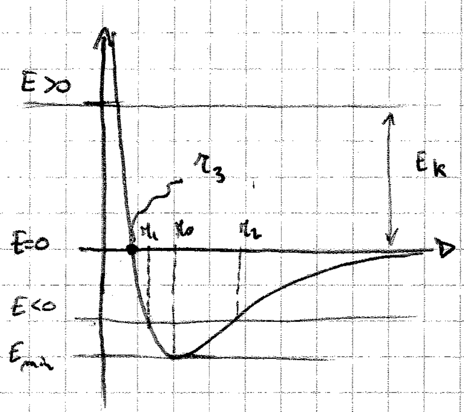
$$\frac{1}{T^2}\,2\mu\,\pi^2 a^2 b^2\left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_B^2}\right) = \gamma\, m_1 m_2\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$\frac{1}{T^2}\frac{1}{m_1+m_2}\pi^2 a^2\, r_A \cdot r_B\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right)\cancel{\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)} = \gamma\,\cancel{\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

$$\frac{1}{T^2}\cdot\frac{1}{m_1+m_2}\pi^2 a^2\,\cancel{r_A r_B}\left(\frac{r_B + r_A}{\cancel{r_A r_B}}\right) = \gamma$$

$$\frac{1}{T^2} = \frac{\gamma(m_1+m_2)}{\pi^2 a^3} \rightarrow T^2 = \frac{\pi^2}{2\gamma(m_1+m_2)}a^3 \rightarrow T^2 = K a^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\gamma m_1 m_2}\left(\frac{r_A + r_B}{2}\right)^3$$ raggio medio al cubo



Se $E=E_m \Rightarrow$ abbiamo un solo raggio

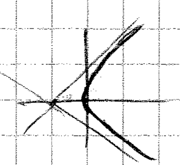
1) $E=E_m \rightarrow r=r_0 \rightarrow$ orbite circolare

2) $E<0 \rightarrow r_1 \le r \le r_2 \rightarrow$ orbita ellittica

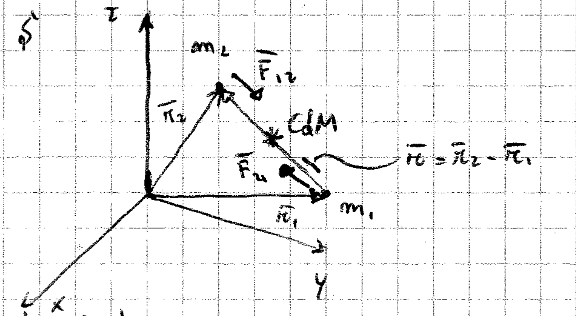
r_1, r_2 sono punti di inversione
$\dot r = 0$

3) $E=0 \rightarrow$ Parabola

4) $E>0 \rightarrow$ Iperbole



Come si scrive l'equazione del moto per il problema ad un solo corpo (descritto $\bar r = \bar r_2 - \bar r_1$)



2 eq. di Newton

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\bar r}_1 = \bar F_{21} \\ m_2 \ddot{\bar r}_2 = \bar F_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar R_{cm} = \dfrac{m_1 \bar r_1 + m_2 \bar r_2}{M} \\ \bar r = \bar r_2 - \bar r_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \bar r_1 = \bar R_{cm} - \dfrac{m_2}{M}\bar r \\ \Leftrightarrow \bar r_2 = \bar R_{cm} + \dfrac{m_1}{M}\bar r \end{matrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \ddot{\bar r}_1 = \dfrac{\bar F_{21}}{m_1} \\ \ddot{\bar r}_2 = \dfrac{\bar F_{12}}{m_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\bar r}_1 = -\gamma \dfrac{\cancel{m_1} m_2}{\cancel{m_1} |\bar r_1 - \bar r_2|^3} (\bar r_1 - \bar r_2) \\ \ddot{\bar r}_2 = -\gamma \dfrac{m_1 m_2}{m_2 |\bar r_1 - \bar r_2|^3} (\bar r_2 - \bar r_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\bar r}_1 = -\gamma \dfrac{m_2}{r^3} \bar r \\ \ddot{\bar r}_2 = -\gamma \dfrac{m_1}{r^3} \bar r \end{cases}$$

Ovvero $\ddot{\bar r} = \ddot{\bar r}_2 - \ddot{\bar r}_1$

$$\ddot{\bar r}_2 - \ddot{\bar r}_1 = -\gamma \frac{m_1}{r^3} \bar r - \gamma \frac{m_2}{r^3} \bar r$$

$$\ddot{\bar r} = -\gamma (m_1 + m_2) \frac{\bar r}{r^3} \rightarrow \boxed{\mu \ddot{\bar r} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\bar r}{r^3}}$$

Abbiamo ridotto il problema da due corpi ad un solo corpo

$$\mu(\ddot r - \dot\theta^2 r)\hat u_r + \mu(2\dot\theta \dot r + r\ddot\theta)\hat u_\theta = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \bar r$$

$\hat u_r)$ $\quad \mu(\ddot r - \dot\theta^2 r) = -\gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

$\hat u_\theta)$ $\quad \mu(2\dot\theta \dot r + r\ddot\theta) = 0 \qquad \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(\mu \underbrace{r^2\dot\theta}_{L_z}) = 0$

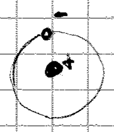
Nell' equazione di equilibrio:

$$\underbrace{9{,}8\ N}_{mg} = 8{,}98 \cdot 10^{9}\ \frac{N\,m^2}{C^2}\ \frac{q^2}{1\,m^2}$$

$$q = \sqrt{\frac{9{,}8}{8{,}98} \cdot 10^{-9}\ C^2} = 0{,}33 \cdot 10^{-4}\ C$$

Circa 10^{15} elettroni !

<u>Atomo di idrogeno</u> (H_2)



forza gravitazionale
$$\begin{cases} r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ m \\ m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ kg \\ m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\ kg \simeq m_n \end{cases}$$

$$F_G = + \gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = + 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9{,}11 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-58}}{(0{,}53)^2 \cdot 10^{-20}} = 3{,}61 \cdot 10^{-47}\ N$$

Forza gravitazionale

$$F_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 8{,}98 \cdot 10^{9}\ \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(0{,}53)^2 \cdot 10^{-20}} = 8{,}20 \cdot 10^{-8}\ N$$

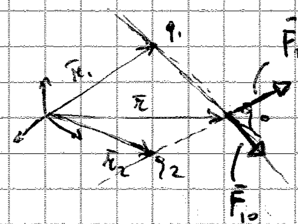
Forza elettrica

<u>CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$</u>

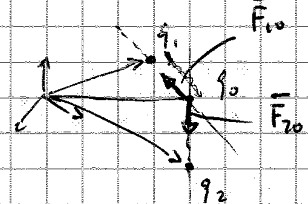
Forza risultante da una distribuzione di cariche $q_1, q_2, \dots, q_n$ su una carica (carica di prova) q_0 posta in $\bar{r}$ (punto generico).
Per il <u>principio di sovrapposizione</u> delle forze:

$$\vec{F}(\bar{r}) = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{N0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_0 q_i\ (\bar{r} - \bar{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}_i|^3}$$

q_0, q_i concordi



q_0, q_i opposte



Data una distribuzione di carica il "CAMPO ELETTROSTATICO" da $\bar{E}$ che questa origina è funzione della posizione:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{\bar{F}(\bar{r})}{q_0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i\ (\bar{r} - \bar{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}_i|^3}$$

$$\left(\hat{a}_i = \frac{(\bar{r} - \bar{r}_i)}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} : \text{versore del contributo i-esimo} \right)$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}_i|^2}\ \hat{a}_i$$

<u>L'importanza dell' $\bar{E}(\bar{r})$ sta ad esempio a descrivere l'andamento delle carica di prova ~~nel~~ posta in $\bar{E}$.</u>

POTENZIALE ELETTRICO

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\bar{r}-\bar{r}_i)}{|\bar{r}-\bar{r}_i|^3}$$

$$V(\bar{r}) = \frac{E_p(\bar{r})}{q_0} = \frac{1}{q_0}\sum_{i=1}^{N} E_p^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}_i|}$$

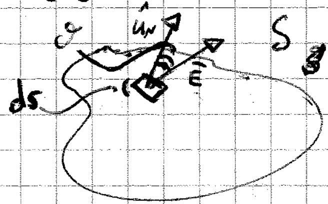
OSS

$$\nabla E_p^{(J)}(\bar{r}) = \frac{q_J}{4\pi\varepsilon_0} \nabla_r \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}_J|}$$

TEOREMA DI GAUSS

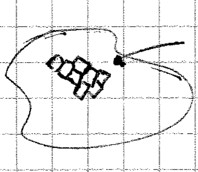
1) Def: Il flusso di un campo $\bar{E}$ attraverso una superficie infinitesima ds

$$d\phi(\bar{E}) = \vec{E} \cdot \underbrace{\hat{u}_N}_{\text{versore normale}} ds = |\bar{E}| \cos\vartheta \, ds$$



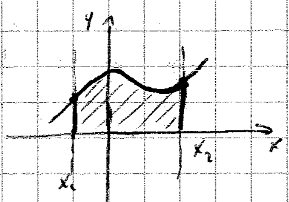
2) Def: Il flusso di un campo $\bar{E}$ attraverso una superficie S finita
↓
è un integrale di superficie

$$\phi_E = \iint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N \, ds$$



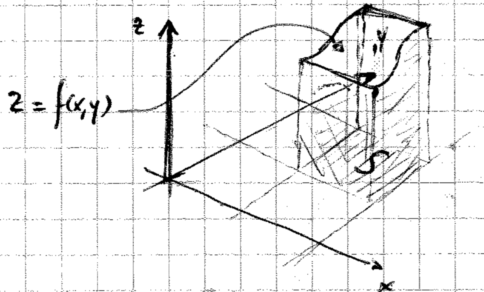
Cosa è un integrale di superficie?
Analogia con il caso 1D:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \text{integrale definito} \longrightarrow \text{ha il significato di area}$$

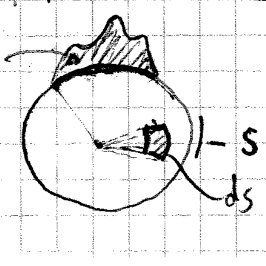


~~Analogia con il~~ caso 2D:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} dx \, f(x,y) = \text{volume sottostante la superficie descritta da } f(x,y)$$



Integrale di superficie su sfera:



$$\iint_S f(\varphi,\vartheta)\,ds = \int_0^{\overset{\text{meridiani}}{\pi}} \int_0^{\overset{\text{paralleli}}{2\pi}} f(\varphi,\vartheta) \underbrace{R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{ds}$$