NUMERO: 775

DATA: 18/11/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Sbarra

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Daghero

Dario Daghero
dario.daghero@polito.it

FISICA I

Libro: Mazzoldi "Fisica Volume I" EDISES
Focardi "Fisica Generale - Meccanica e Termodinamica"

Esercitazioni 11.30 - 13.00
Laboratorio da 8 aprile 2 volte Relazione x voto esame

- Scritto → due parti → parte a soglia (da superare obbligatoriamente)
  → problemi
- Orale
→ media dei voti

04/03/2013

Metodo scientifico - sperimentale
Previsione del comportamento della natura

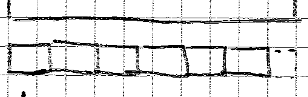
La fisica si occupa dell'interpretazione e descrizione della natura usando il metodo scientifico.

1600 Galileo Galilei stabilisce le basi di questo metodo
1 schematizzazione (creare un modello della realtà)
2 Misurazioni (Associo a grandezze fisiche un valore seguito a da unità di misura)
3 Legami e correlazioni (grafici → mettono in relazione grandezze diverse)
4 Leggi (Fit → ricerca della curva sperimentale che approssima meglio i dati)
5 Previsioni (posso usare questa legge anche in altre situazioni)
6 Prova sperimentale

grandezza fisica → tutto ciò che si può misurare

1-5 → INDUZIONE

- Misura diretta:



↓ utilizzo un'unità di misura

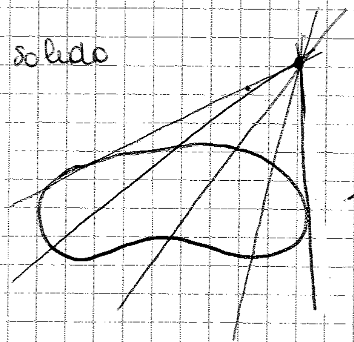
definisco: somma
confronto
sottomultipli

Definizione di Ampere slide 29

GRANDEZZA GEOMETRICHE FONDAMENTALI

• Radiante $\theta = \frac{s}{r} = \frac{[L]}{[L]}$ = adimensionale

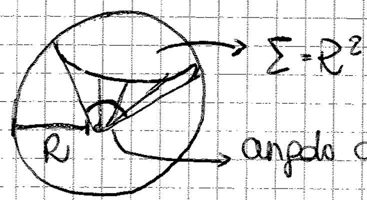
• Angolo solido



$\Omega = \frac{A}{R^2}$

Steradiante $= [\Omega] = \frac{L^2}{L^2}$ adim.

Un angolo solido è un'estensione allo spazio tridimensionale del concetto di angolo piano. Esso è definito come ciascuna delle parti in cui viene suddiviso lo spazio dalla superficie formata dalle semirette passanti per uno stesso punto (detto vertice) e per i punti di una curva chiusa semplice tracciata su una superficie non contenente il vertice. L'u.m. dell'angolo solido è lo steradiante



Lunghezze derivate:

• Velocità = $\frac{lungh}{temp}$ = $[v] = \frac{L}{T}$ $\frac{m}{s}$

• Accelerazione: $\frac{veloc}{temp}$ $[a] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2}$ $\frac{m}{s^2}$

• Forza = massa x accelerazione $[F] = M \cdot \frac{L}{T^2}$ $\frac{kg \cdot m}{s^2}$

• Momento angolare = forza per lunghezza $[\tau] = [F] \cdot L$

Analisi dimensionale

Confronto tra le unità di misura del primo e secondo membro di una formula

È utilizzata per definire una misura non fondamentale

Trovare le unità di misura di U (energia potenziale) sapendo che $\vec{F} = -\nabla U \xrightarrow{1D} f_x = -\frac{dU}{dx}$ ∇ gradiente → vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione

$[F(x)] = \frac{[dU]}{L} \longrightarrow [dU] = [F(x)] \cdot L$ $[dU] = [U] = M L^2 T^{-2}$

come $[\tau]$ ma è un'energia

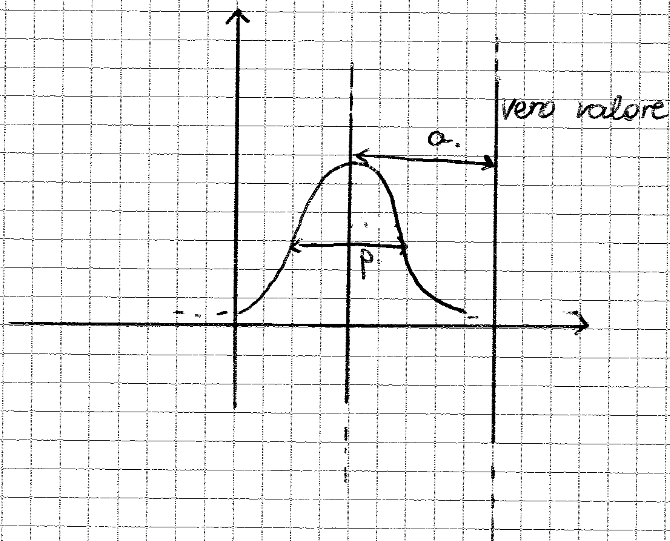
Ori dell'incertezza:

1) Errori sistematici → si può evitare con correzione a posteriori
→ causati dallo strumento

2) Errore casuale → oscillazione del risultato dovuto a vari fattori. Non sono eliminabili ma riducibili

Accuratezza → grado di conformità a un valore medio
→ differenza tra il valore misurato e quello reale

Precisione → quante volte è ripetibile un valore
Distanza tra i vari risultati ottenuti



Con pochi errori sistematici l'accuratezza è alta mentre non sarà mai possibile avere una precisione assoluta.

Sensibilità → minima misura che può essere percepita da uno strumento

□.□□□ → sensibilità = 0,001 V

Fondoscala → massima misura che può essere percepita da uno strumento

Incertezza di uno strumento = sensibilità dello strumento stesso

Se ho 20 misurazioni:
- ottengo 20 misure uguali → lo strumento è poco sensibile
- " 20 " diverse → faccio la media

In caso di tanti valori con errori ~~diversi~~ uguali, faccio la media tra le

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$ Il meno → è sempre attrattiva

$$[G] = \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$ costante gravitazionale universale

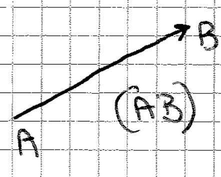
L'analisi dimensionale è una prova necessaria ma non sufficiente.

Vettori e Scalari

Scalare → una sola variabile $(T, m, \cancel{x})$

Vettori → più dimensioni. 3 parametri: direzione
orientazione / verso
intensità

Due punti A, B definiscono un vettore



$A \neq B$ → intensità $\neq 0$

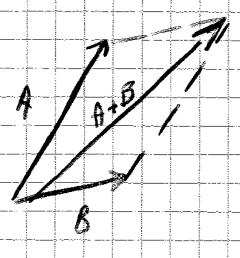
$\vec{u}$ = classe di equivalenza $B - A = \vec{u}$ (vettori di stesso direzione, intensità e stesso verso)

$\|u\| = u$ → intensità del vettore

grassetto $\mathbf{u} = \vec{u}$

<u>Somma di vettori</u>

Regola del parallelogramma



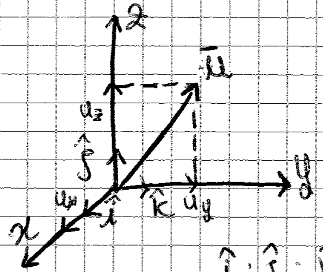
Proprietà: commutativa $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
associativa $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
elemento neutro $\vec{u} = 0 + \vec{u}$
elemento inverso $\vec{u} + \vec{v} = 0$ $(\vec{v} = -\vec{u})$

Il verso è definito dalla regola della mano destra.

Proprietà anticommutativa → se cambio il verso di un vettore, cambia quello del prodotto vettoriale

se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ $\quad \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ perché si annulla $\text{sen}\theta$

Definizione di un sistema di coordinate
Sistema Cartesiano



$\hat{i}; \hat{j}; \hat{k}$ → sistema ortonormale

$\hat{i} \cdot \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ perché sono ortogonali

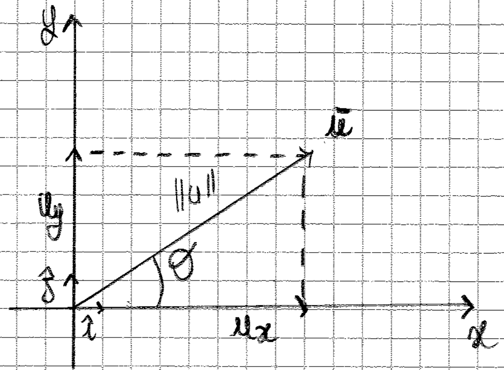
$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$ " " "

Base ortogonale di un sistema cartesiano

$\vec{u} = u_x \cdot \hat{i} + u_y \cdot \hat{j} + u_z \cdot \hat{k}$ notazione di $\vec{u}$

$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ in un sistema ortonormale definito

Trigonometria



$u_x = \|u\| \cos\theta$

$u_y = \|u\| \text{sen}\theta$

$\text{tg}\theta = \dfrac{u_y}{u_x}$

$\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

La stessa regola vale in 3 dimensioni, aggiungendo un parametro angolo polare, angolo azimutale (guarda su slide)

Decomposizione di vettori

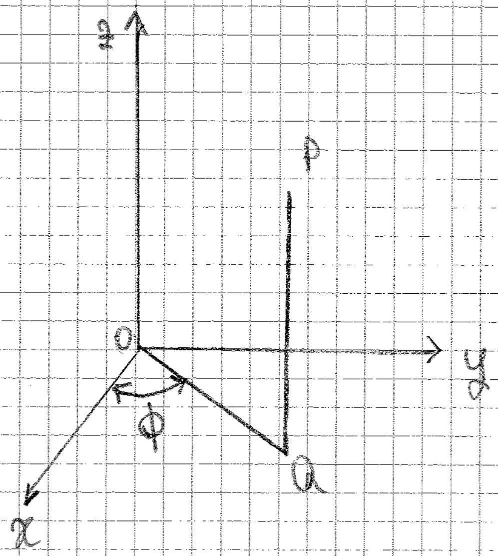
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z)$

$(u_x, u_y; u_z)$ $\quad (v_x; v_y; v_z)$

SISTEMA CILINDRICO

Il sistema cilindrico è un'espansione del sistema polare nelle tre dimensioni.

Le coordinate sono $\rho; \varphi; z$



$PQ = z$

$OQ = \rho$

$\varphi = \phi$

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$

$z = z$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

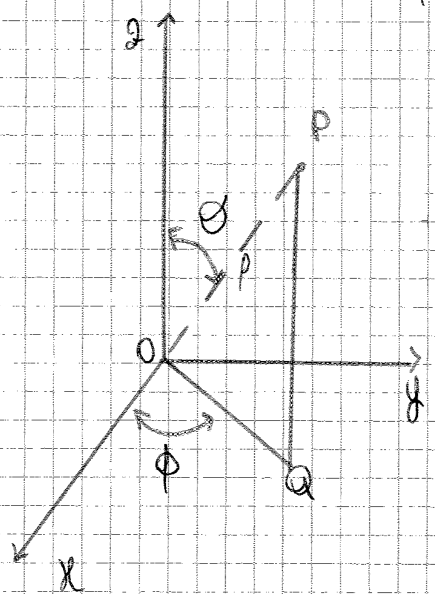
$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$

$= \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$z = z$

SISTEMA SFERICO

E' formato da 3 coordinate ρ, θ, φ



$x = \rho\,\text{sen}\,\theta\cos\phi$

$y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$

$z = \rho\cos\theta$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\phi = \text{arctg}\,\frac{y}{x} = \text{arcsen}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

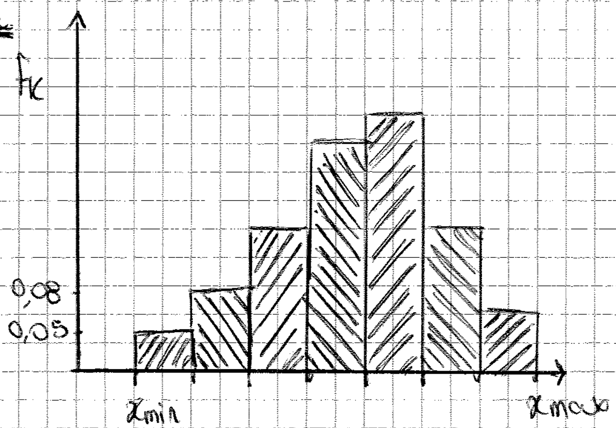
x_k = punto medio

ordino le misure in base alla classe di appartenenza

Δn_k = n° di valori della classe K

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta n_K = n \qquad \frac{\sum \Delta n_K}{n} = 1 \qquad \frac{\Delta n_K}{n} \rightarrow \text{frequenze relative associate a ciascuna classe}$$

Istogramma



$n = 100$

$\Delta n_1 = 5$

$\Delta n_2 = 8$

⋮

$$f_1 = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$$f_2 = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

⋮

Se Δx piccolo (n grande) posso approssimare x_K con $\bar{x}_K$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_K \Delta n_K \cdot x_K = \sum \frac{\Delta n_K \cdot x_K}{n} = \sum f_K \cdot x_K$$

$$(\bar{x}_K = x_K)$$

$$\bar{x} = \sum_K \frac{1}{n} \frac{\Delta n_K}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot x_K \rightarrow \text{moltiplico e divido per } \Delta x$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta n_K}{\Delta x} \Rightarrow \text{densità di frequenza}$$

$$\sum_K \frac{1}{n} \frac{\Delta n_K}{\Delta x} \cdot \Delta x = 1$$

Per ottenere la popolazione faccio tendere $n \rightarrow \infty$

$$\Delta x \rightarrow dx \rightarrow \text{intervallo unitario}$$

$$\Delta n_K \rightarrow dn$$

$$\frac{\Delta n_K}{\Delta x} \rightarrow \frac{dn}{dx}$$

σ deviazione standard

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n-1}}$$ → Buona approssimazione di σ

↓

deviazione standard sperimentale

$$\mu \simeq \bar{x}$$
$$\sigma \simeq s$$

Se effettuo più misurazioni la Gaussiana non si restringe

$$X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$$

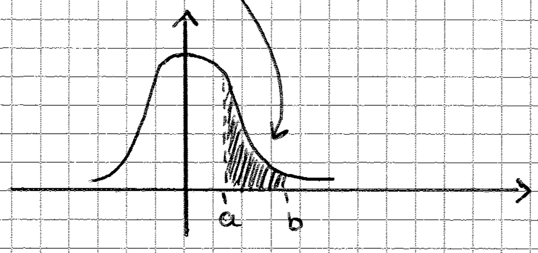
$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ → deviazione standard della media

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})}{n(n-1)}}$$

σ non cambia ma aumentando il numero n diminuisce $\Delta\bar{x}$

$f(x)dx$ → è la probabilità di ottenere un valore in un intervallo dx

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



MISURE INDIRETTE

Area rett $= b \times h$

$b = \bar{b} \pm \Delta b$

$h = \bar{h} \pm \Delta h$

$A_{max} = (\bar{b} + \Delta b)(\bar{h} + \Delta h)$

$A_{min} = (\bar{b} - \Delta b)(\bar{h} - \Delta h)$

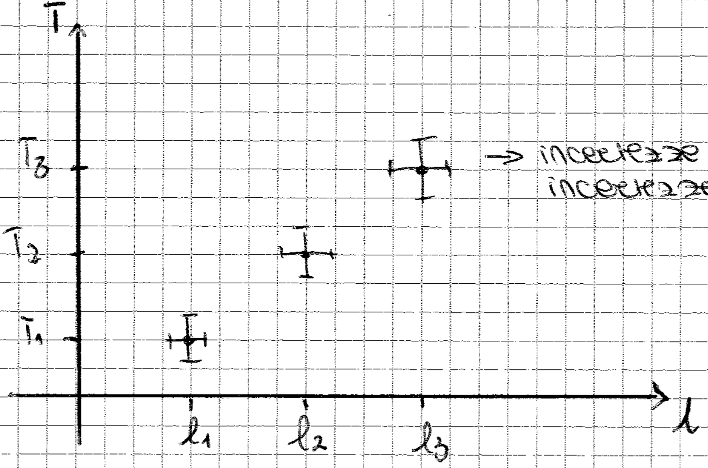
$\Delta A = \frac{A_{max} - A_{min}}{2} = \bar{b} \cdot \Delta h + \bar{h} \cdot \Delta b$ $\qquad \bar{A} = \bar{b} \cdot \bar{h}$

funzione generica $z = f(x_1, x_2; x_3 \dots x_n)$

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 \dots}$$

$f(x, y) = 3xy^3$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 3y^3$ DERIVATE PARZIALI

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE INCERTEZZE



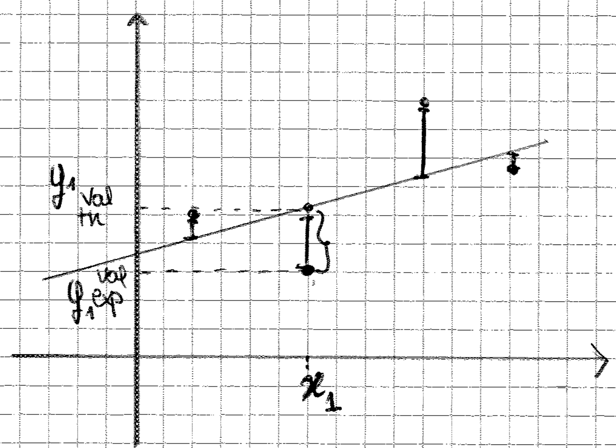
→ incertezze sul tempo I
incertezze sulla lungh ⊢⊣

METODO DEI MINIMI QUADRATI

Trovo la curva che meglio approssima i dati sperimentali

$$Y = A + BX$$

immagino che la curva abbia una dipendenza lineare tra x e Y. Ora ricavo A e B con il metodo dei minimi quadrati.



$y_1 th = A + Bx_1$

Costruisco una variabile che contenga tutti i I tra i valori th e exp

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\left[y_i^{exp} - (A + Bx_i)\right]^2}{\sigma^2}$$

χ^2 va minimizzato per trovare A e B

INCERTEZZE

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i \qquad \Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

Per valori discreti

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} x_k$$

Per valori continui

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_k \Delta n_k \cdot x_k = f(x) \cdot x_k$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_k \frac{\Delta n_k}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot x_k$$

$$n \to \infty \qquad x = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \cdot x\, dx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) \cdot x\, dx$$

Gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left\{ - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n-1}}$$

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})}{n(n-1)}}$$

Cinematica

Descrizione del moto indipendentemente dalle cause
Si tratta il corpo come un punto materiale (centro di massa di qualsiasi corpo che si muove).
Posizione del corpo → definito dalle sue coordinate nello spazio.
Definisco un'origine.
Traccio il vettore $\vec{OP}$ detto raggio vettore o vettore posizione.
Se si muove:

$$T_0 \rightarrow \bar{r}_0$$
$$T_1 \rightarrow \bar{r}_1$$
$$T_2 \rightarrow \bar{r}_2$$

$\bar{r} = \bar{r}(t)$ EQUAZIONE ELEMENTARE DEL MOTO indipendentemente dalla scelta degli assi. Nel caso di quelli cartesiani

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \bar{r} = x(t) \cdot \hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Traiettoria → luogo dei punti che indicano le posizioni assunte dal corpo durante il moto

$$\bar{r}(t) = \underbrace{R\cos(\omega t)}_{x}\hat{i} + \underbrace{R\,\mathrm{sen}(\omega t)}_{y}\hat{j}$$ eq. vettoriale del moto nel piano

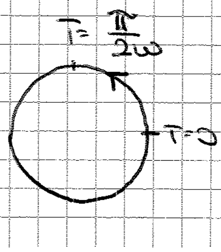
$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\cos(\omega t) \end{cases}$$

$f(x;y) = 0$ → funzione che indica la traiettoria nel piano.

$$x^2 = R^2\cos^2(\omega t)$$
$$y^2 = R^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t)$$

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2(\omega t) + R^2\,\mathrm{sen}(\omega t)$$
$$x^2 + y^2 = R^2$$ → circonferenza di raggio R indipendente dal tempo

a $T = 0$ → $x = R$ $\quad y = 0$
a $T = \frac{\pi}{2\omega}$ → $x = 0$ $\quad y = R$



T = periodo: $\frac{2\pi}{\omega}$
moto circolare uniforme

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 217

VELOCITÀ ISTANTANEA

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt}$$

↳ limite di un rapporto integrale

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} \qquad v_y = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x \cdot \hat{i} + \vec{v}_y \cdot \hat{j} + \vec{v}_z \cdot \hat{k}$$

11/03/2013

Il vettore spostamento è tangente alla curva della traiettoria per $\Delta t \to 0$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad d\vec{r} = \vec{v}\,dt \xrightarrow{\text{Integro}}$$

$t \to \vec{r}(t)$ $\qquad t+\Delta t \to \vec{r}(t+\Delta t)$

$$\int_{r(t)}^{r(t+\Delta t)} d\vec{r} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{v}\,dt \qquad \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \vec{v}(t)\,dt$$

↓ v non la porto fuori perchè non so se è costante

per leg. di v_m

$$v_m \cdot \Delta t = \int_t^{t+\Delta t} \vec{v}(t)\,dt$$

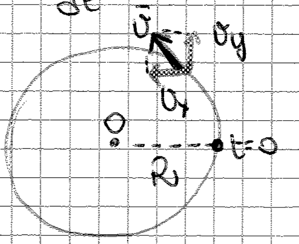
$$v_m = \frac{\int_t^{t+\Delta t} \vec{v}(t)\,dt}{\Delta t}$$

la velocità media è → media integrale della velocità istantanea sull'intervallo Δt

↓

LEGAME TRA VELOCITÀ MEDIA E ISTANTANEA

$v_y(t) = \frac{dy}{dt}(t) = R\omega\cos(\omega t)$



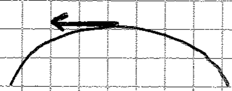
$t=0 \quad v_x = -R\omega \,\mathrm{sen}(\omega t) = 0$

$v_y = R\omega\cos(\omega t) = R\omega$

componente x nulla

$t = \frac{\pi}{2\omega} \quad v_x = -\omega R$

$v_y = 0$

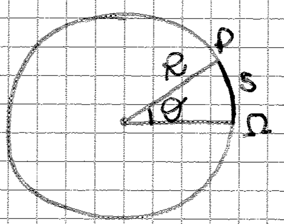


Il modulo della velocità non cambia mai.

$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2R^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t) + \omega^2R^2\cos^2(\omega t)} = 1 \cdot \omega R$

MOTO ORARIO IN COORDINATE INTRINSECHE

$s \rightarrow$ arco di circonferenza



$\bar{r}(s) = R\cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\imath} + R\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\jmath}$

$s = R\omega t = R\theta$

$\frac{dr}{dt} = \left\{\left[-R\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right)\frac{1}{R}\right]\hat{\imath} + \left[R\cos\left(\frac{s}{R}\right)\frac{1}{R}\right]\hat{\jmath}\right\} \cdot$

$\cdot\ \omega R$

$\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{ds} = \hat{u}_T$

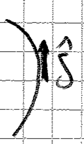
$\hat{u}_T = -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\imath} + \cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\jmath}$

$v = \omega r$

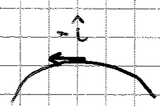
Ho ottenuto gli stessi valori che nelle coordinate cartesiane

$\|\hat{u}t\| = 1$

$s = 0 \rightarrow \hat{u}t = +\hat{\jmath}$



$s = \frac{\pi}{2} R \rightarrow \hat{u}t = -\hat{\imath}$

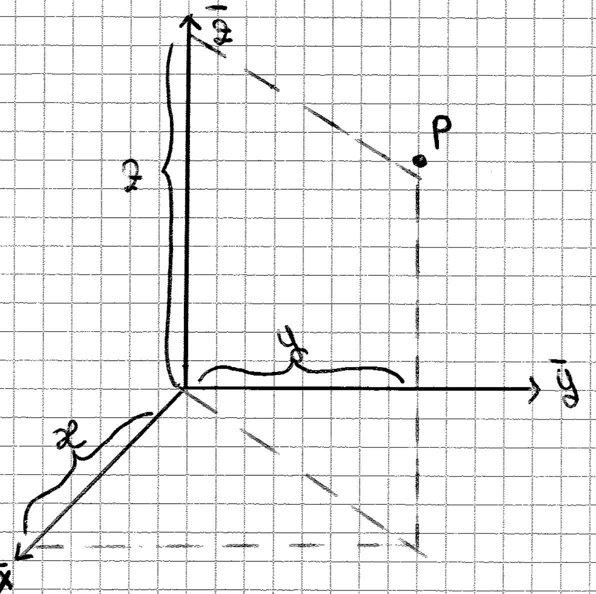


COORDINATE CARTESIANE DELLA VELOCITÀ

$$r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x\cdot\hat{i})}{dt} + \frac{d(y\cdot\hat{j})}{dt} + \frac{d(z\cdot\hat{k})}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\hat{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\hat{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\hat{k}$$

Le 3 componenti spaziali sono indipendenti le une dalle altre e non dipendono dal tempo.



COORDINATE INTRINSECHE DELLA VELOCITÀ

$$\vec{r}\,(s(t))$$

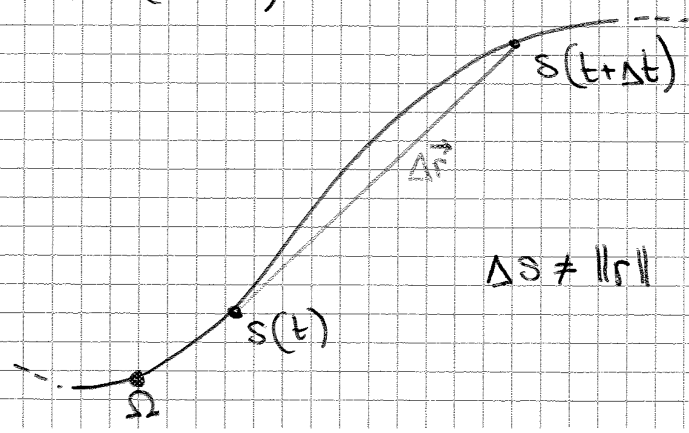
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1 \quad \text{al limite coincidono}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$ → vettore di modulo 1 tangente alla traiettoria. Si indica con $\hat{u}_t$ (versore)

$$\hat{u}_r = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \hat{u}_r \cdot v_s$$



$\Delta s \neq \|r\|$

MOTO ORARIO IN COORDINATE POLARI

$\vec{r}(t) = \rho(t) \cdot \hat{u}_r$ Introduco $\hat{u}_r$ perché $\vec{r}$ cambia orientazione nel tempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho(t)\ \hat{u}_r(t)\right) + \cancel{\frac{d}{dt}\left(\rho(t)\,\hat{u}_r(t)\right)} \quad \frac{d\rho}{dt}\hat{u}_r + \rho\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

$\frac{d\rho}{dt}\hat{u}_r \rightarrow$ VELOCITA' RADIALE (il corpo si avvicina o si allontana dall'origine durante il moto)

$\rho\frac{d\hat{u}_r}{dt} \rightarrow$ VELOCITA' TRASVERSA (versore parallelo alla retta che unisce l'origine al corpo che si muove $\rightarrow \hat{u}_\theta$)

$\Delta\hat{u}_r = \hat{u}_r(t+\Delta t) - \hat{u}_r(t)$

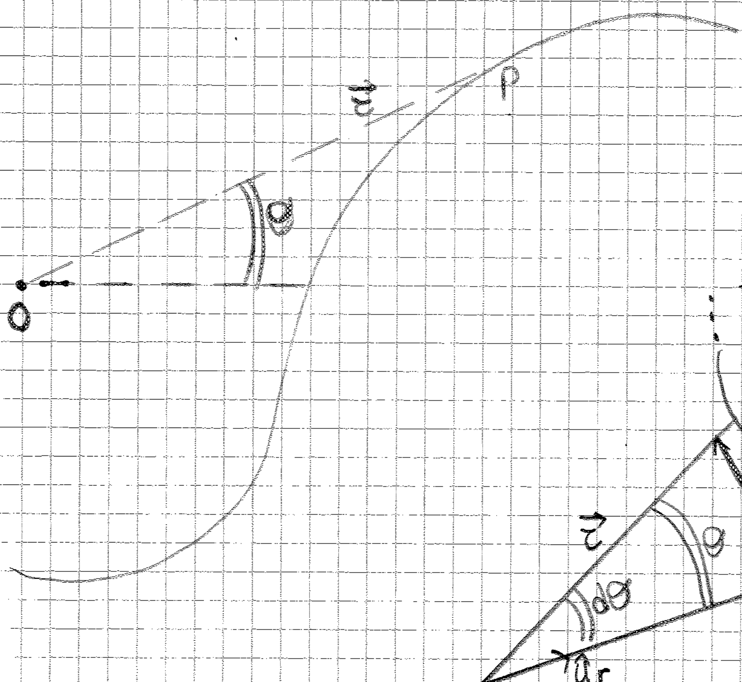
$d\vec{u}_r \parallel u_\theta$

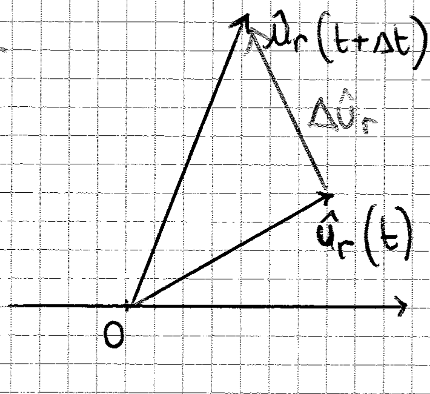
$\|d\hat{u}_r\| = 1 \cdot d\theta = d\theta$

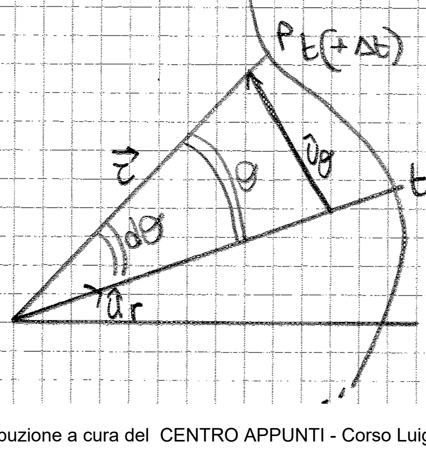
$\frac{d\hat{u}_r}{dt} \rightarrow$ non è un versore. È parallelo a $\hat{u}_\theta$ e ha modulo

$$\frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\hat{u}_r + \rho\frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta}$$





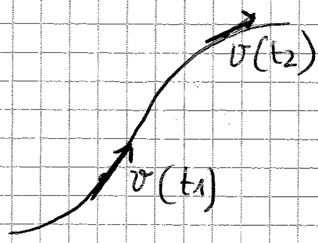


ACCELERAZIONE

t_1 $\qquad$ t_2

$\vec{v}(t_1)$ $\qquad$ $\vec{v}(t_2)$

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$



$$\bar{a}_m = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$ rapporto integrale

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \frac{dv}{dt}$$ accelerazione istantanea

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

In coordinate cartesiane

$$\vec{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\bar{v}(t) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$
$$\bar{a}(t) = a_x\cdot\hat{i} + a_y\cdot\hat{j} + a_z\cdot\hat{k}$$

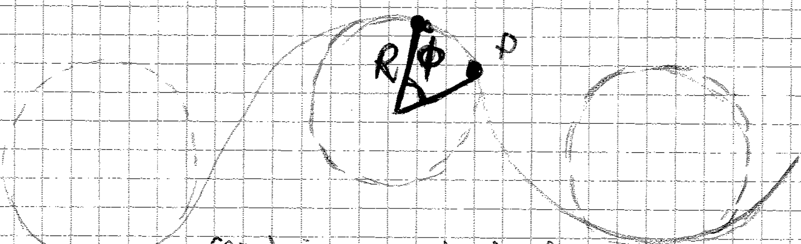
deriv $\qquad$ deriv x2

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

In coordinate intrinseche

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\cdot\hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

accelerazione Tangenziale $\qquad$ accelerazione centripeta

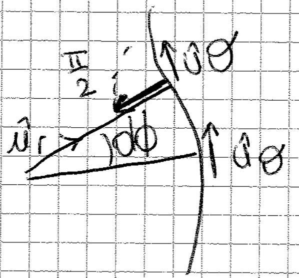


Cerchi osculatori che approssimano la traiettoria della curva

Per curve che cambiano spesso uso raggi più piccoli

$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dr}\hat{u}_\theta$ → la metto nell' equazione

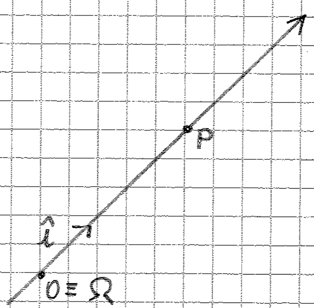
$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\hat{u}_r\right)$$



$$\frac{d^2\rho}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}(-\hat{u}_r)$$

$$\hat{u}_r\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \left[2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{u}_\theta$$

Moto rettilineo



$s = x$

$\hat{u}_T = \hat{i}$

$\vec{r} = x(t)\,\hat{i}$

$x = x(t)$

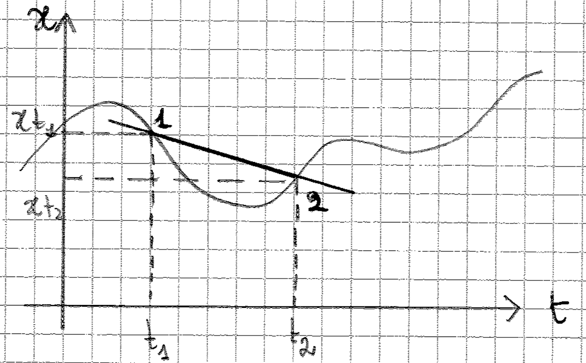


DIAGRAMMA ORARIO

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \underbrace{[x(t_2) - x(t_1)]}_{\Delta x}\cdot\hat{i}$$

$\|v_m\| = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\hat{i} = -\frac{|\Delta x|}{\Delta t}\cdot\hat{i}$ → pendenza della secante tra i pt 1, 2

$\vec{v} = \frac{dx}{dt}$ ⇒ pendensa della ~~curva~~ tangente

Se la curva ↗ il corpo si allontana dall'origine

Se la curva ↘ " " avvicina "

$a_x(x) \qquad v_x(x)$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx} \rightarrow a_x dx = v_x dv_x$$

$$\int_{x_i}^{x_f} a_x dx = \int_{x_i}^{x_f} v_x dv_x \qquad \frac{1}{2}v_{x_f}^2 - \frac{1}{2}v_{x_i}^2 = \int_{x_i}^{x_f} a_x dx \quad (3)$$

(1) MOTO UNIFORME

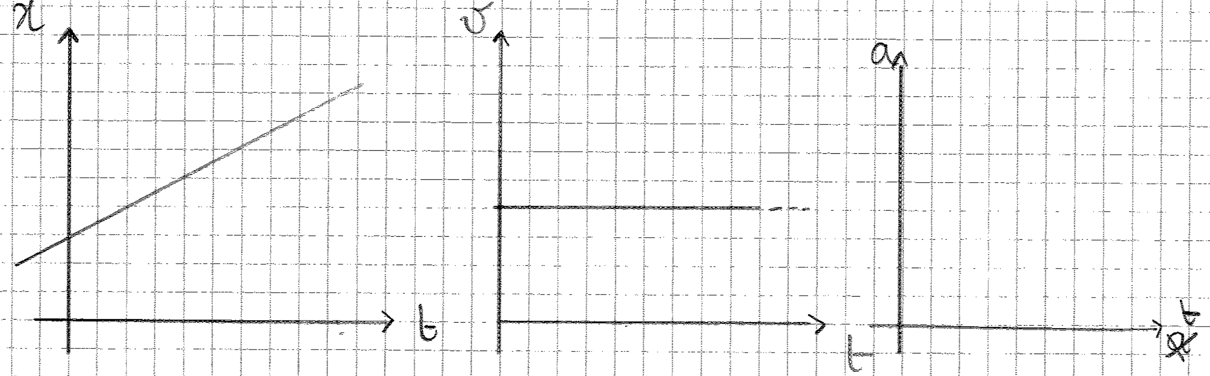
$v_x = cost \rightarrow a_x = 0$

eq 1) $v_x(t) - v_x(t_0) = 0$

eq 2) $x(t) - x(t_0) = v_x(t - t_0)$

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t - t_0)$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



(2) MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$a_x = cost$

eq 1) $v_x(t) - v_x(t_0) = a_x(t - t_0)$

$$v_x(t) = v_x(t_0) + a_x(t - t_0)$$

$$a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

eq 2) $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \{v_x(t_0) + a_x(t - t_0)\} dt$

$$= v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 = \underbrace{x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a t^2}_{\text{se } t_0 = 0} = x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} a = A & a = 2A \\ v_0 = B \\ C = x_0 \end{cases}$$

l'accelerazione non dipende dal t

$[A] \quad [L][T]^{-2} = ms^{-2}$

$[B] = [M][T]^{-1} = ms^{-1}$

$[C] = [L] = m$

$A = 2 m/s^2$

$B = -10 m/s$

$C = 12 m$

$t = 5 s$

$x?$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 25 + (-10) \cdot 5 + 12 = 50 + (-50) + 12 = 12 \, m$$

ESERCIZI SU EQ DEL MOTO

Esercizio 5

$X(t) = At^3$ l'accelerazione in questo caso dipende dal tempo per t^3

$A = 2 cm\, s^{-3}$

$\left.\begin{matrix} v_m \\ a_m \end{matrix}\right\}$ tra t_1 e t_2 $\quad t_1 = 1 s \quad t_2 = 2 s \quad \left.\begin{matrix} \vec{v} \\ \vec{a} \end{matrix}\right\}$ tra t_1, t_2

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{A\left[(t_2)^3 - (t_1)^3\right]}{t_2 - t_1} = \frac{[8-1]\, 2 \, cm/s^{-3} \cdot s^3}{1 s}$$

$= 14 \, cm/s$

$$v(t) = \frac{d(x(t))}{dt} = d(At^3) = 3At^2 = 3 \cdot 2 \cdot t^2$$

$v(t_1) = 6 \, cm/s \quad v(t_2) = 24 \, cm/s$

(2) $\frac{1}{2}\frac{\cancel{v_0^2}\,sen^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{g}} = \frac{2\cancel{v_0^2}\cdot\cos\theta\cdot\cancel{sen\theta}}{\cancel{g}}$ $\quad \frac{sen\theta}{\cos\theta} = 4 \quad tg\theta = 4$

$\theta \simeq 76°$ GITTATA = h_{max}

EQUAZIONI IN SINTESI 15/03/2013

$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow$ integro $\qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \int_{t_0}^{t} v'(t)dt'$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \longrightarrow v(t) = v_0(t_0) + \int_{t_0}^{t}\vec{a}(t')dt$

$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} = v\frac{d\vec{v}}{dr}$ indipendente dal tempo

$\vec{v}\,d\vec{v} = a(\vec{r})\,d\vec{r} \qquad \frac{1}{2}v^2(t) - \frac{1}{2}v^2(t_0) = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}}\vec{a}(\vec{r})\,d\vec{r}$

Cartesiane

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$

$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\cdot\hat{\jmath} + v_z(t)\cdot\hat{k} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$

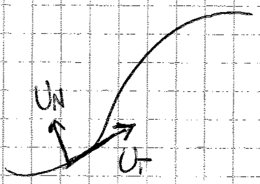
$\vec{a}(t) = a_x\hat{\imath} + a_y(\hat{\jmath}) + a_z(\hat{k}) = \frac{dv_x}{dt} + \frac{dv_y}{dt} + \frac{dv_z}{dt}$

Intrinseche

$r(t) = r(s(t)) =$

$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = v\cdot u_T$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$

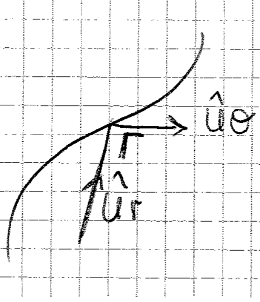


Polari

$r(t) = \rho(t)\,\hat{u}_r$

$v(t) = \frac{d\rho}{dt}\hat{u}_r + \rho\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$

$\vec{a}(t) = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]u_r + \left[2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{u}_\theta$



MOTO ARMONICO SEMPLICE

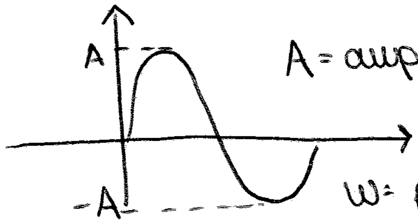
$a_x = -Kx = -\omega^2 x$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \lambda = \pm i\omega$

Formule di Eulero

$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

$x(t=0) = 0 \rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-B \rightarrow x(t) = A\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) =$



A = ampiezza del moto oscillator

$2iA \, sen(\omega t) = A' sen(\omega t)$

ω = pulsazione

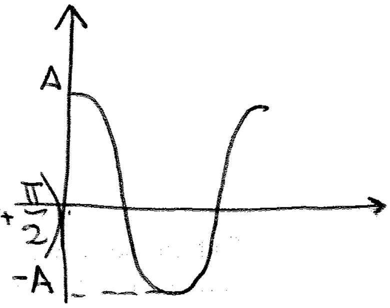
$\omega(t) \rightarrow \omega + 2\pi$

$t \rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T$ periodo $\qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \omega = 2\pi f$

derivo $x(t)$ $\qquad v_x(t) = Ai\omega e^{i\omega t} + B(-i\omega)e^{-i\omega t}$

$v(t=0) = 0 \Rightarrow A-B=0 \quad A=B \Rightarrow \dot{x}(t) = A\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$

$= 2Ai \cos(\omega t) = A' \cos(\omega t)$



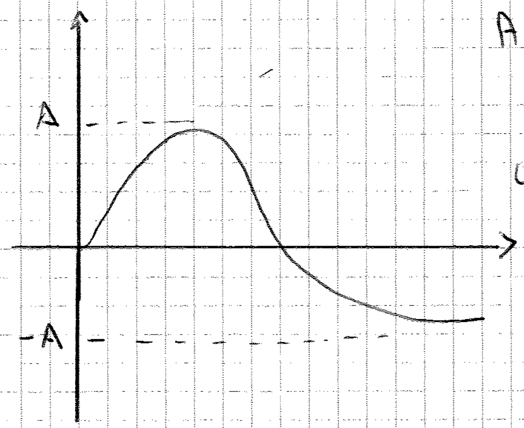
traslato di $\frac{\pi}{2} \Rightarrow A'\cos(\omega t) = A' sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

XD

$x(t=0) = 0 = A+B \rightarrow B = -A$

$x(t) = A\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$ FORMULE DI EULERO

$= \underbrace{2iA}_{\text{lo chiamo } A'} \operatorname{sen}(\omega t) = A' \operatorname{sen}(\omega t)$



$A \rightarrow$ ampiezza del moto oscillatorio

$\omega \rightarrow$ pulsazione

$\omega t \rightarrow \omega t + 2\pi$

$t \rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega}$

Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$f = \frac{1}{T}$ numero di volte in cui si ripete il moto in un secondo

$\omega = 2\pi f$

$v(t=0) = 0 \qquad x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

$v(t) = A\, i\omega e^{i\omega t} + B(-i\omega)e^{-i\omega t}$

↳ sto derivando

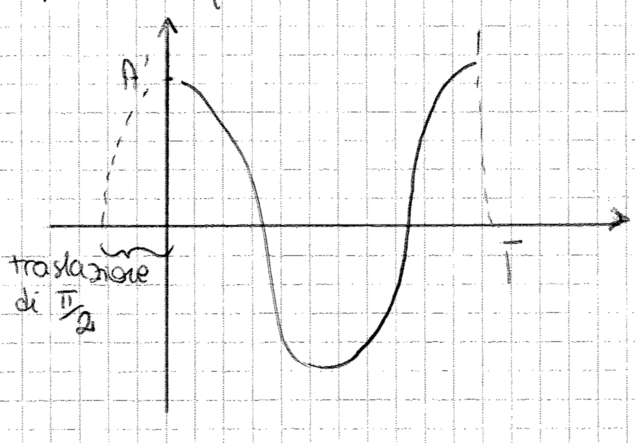
impongo $v(t=0) = iA\omega - iB\omega = 0 \Rightarrow A = B$

$x(t) = Ae^{i\omega t} + Ae^{-i\omega t} = A\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) =$

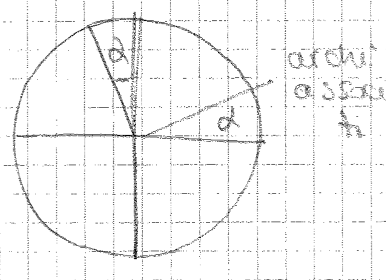
$= 2Ai \cos(\omega t) = A' \cos(\omega t)$

$\downarrow$
A'

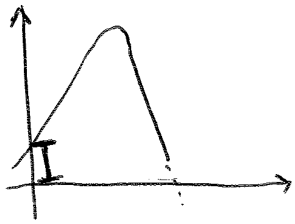
$x(t=0) = A' \rightarrow$ posizione iniziale



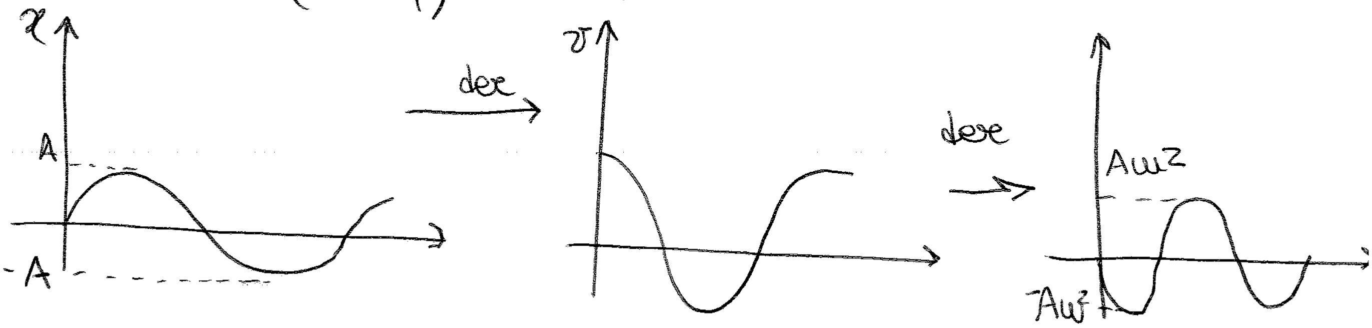
$x(t) = A' \cos(\omega t)$
$= A' \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$



$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad x(t=0) = A \operatorname{sen}(\phi)$



$v(t) = A \cdot \omega \cos(\omega t + \phi) \qquad \text{se } \phi = 0$



$$\begin{cases} x\omega = A\omega \operatorname{sen}\phi \\ v(t) = A \cdot \omega \cos(\omega t + \phi_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2\omega^2 = A^2\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi_0) \\ v^2 = A^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \end{cases}$$

$$x^2\omega^2 + v^2 = A^2\omega^2 \left(\operatorname{sen}^2(\underset{\omega t +}{\phi}) + \cos^2(\omega t + \phi_0)\right)$$

$$v^2 = A^2\omega^2 - x^2\omega^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

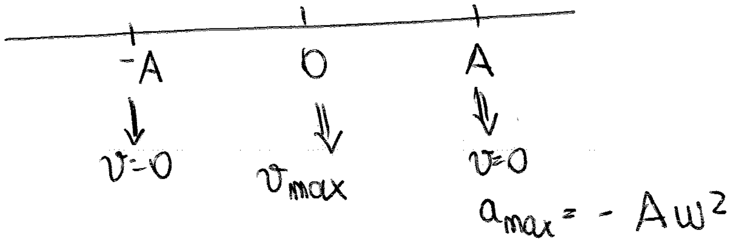
$v^2 = \omega^2(A - x^2)$

$x = A \implies v = 0$

derivo $v(t) \implies a_x(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

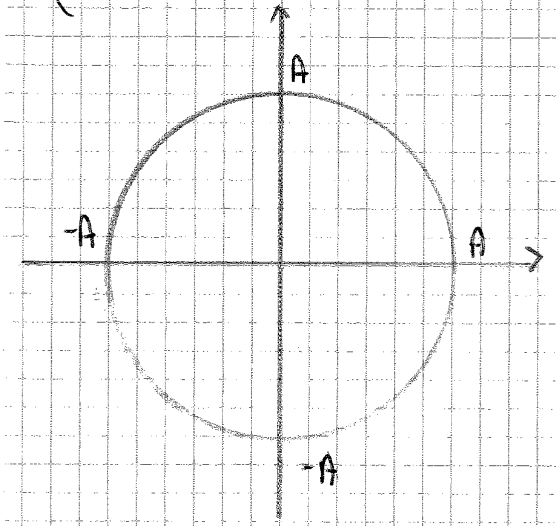
$$\begin{cases} a_x(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \end{cases} \implies a_x(t) = \omega^2 x(t)$$

$$\cancel{a_x = \alpha t + A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)(\omega^2 + 1)}$$

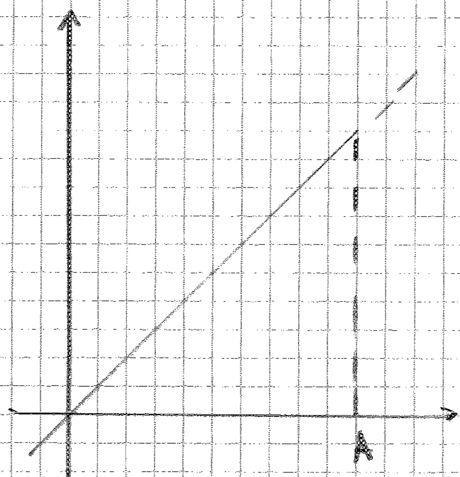


$$* \begin{cases} x(t) = A \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}$$

due moti armonici sfasati di $\frac{\pi}{2}$



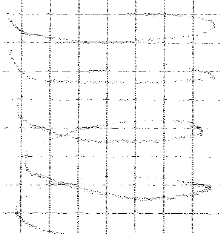
La loro composizione è un moto uniformemente accelerato



$$\begin{cases} x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) \\ y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases} \Rightarrow y = x \text{ bisettrice}$$

Moto elicoidale

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R \operatorname{sen}(\omega t) \\ z(t) = v_z t \end{cases}$$



$\uparrow$ il piano trasla

MOTO CIRCOLARE

$s = R \cdot \omega t \qquad v = R \cdot \omega$

- coordinate intrinseche

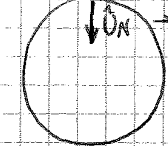
$\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(\theta)$ coincidono con quelle di prima $*$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\vec{v} = \vec{v}\, \hat{u}_T$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R} \cdot \hat{u}_N$

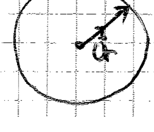
$\hookrightarrow$ 1 solo cerchio osculatore quindi è costante



$\rightarrow$ acc centripeta

- coordinate polari

$\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{u}_r(t) = R\, \hat{u}_r(t)$



$\vec{u}_r$ ruota nel tempo

$\vec{v} = R \frac{du_r}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta = R\omega\, \hat{u}_\theta$

$\frac{d\theta}{dt} \hookrightarrow \omega$

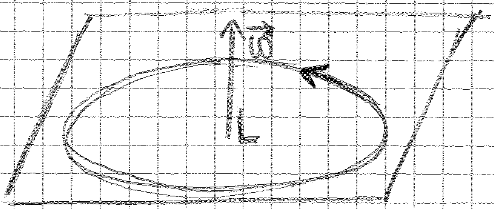
$\omega \downarrow$ velocità angolare

★ Se a_T non è costante

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_T(t') \cdot dt' \longrightarrow \omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt'$$

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \qquad \theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t')\,dt'$$

VETTORE ω



$\vec{\omega} \rightarrow$ direzione $\perp$

modulo $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

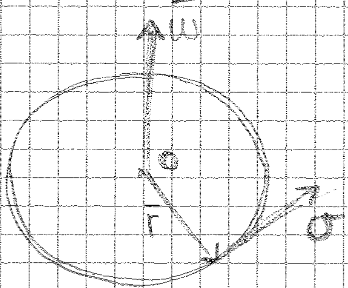
verso $\rightarrow$ Regola della mano destra

$\uparrow \vec{\omega}$ $\rightarrow$ $\uparrow \alpha$ se omega cresce

$\searrow$ $\downarrow \alpha$ se omega decresce

$\downarrow \vec{\omega}$ $\rightarrow$ $\downarrow \alpha$ se omega cresce

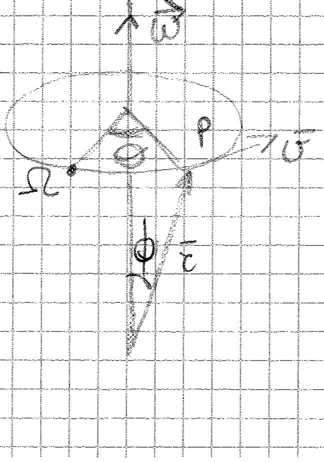
$\searrow$ $\uparrow \alpha$ se omega decresce



$\|\bar{r}\| = R$

$v = \omega R$

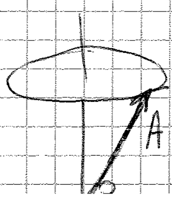
$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ prodotto vettoriale



$\|v\| = \|\vec{\omega}\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \operatorname{sen}\phi$

$= \omega R$

MOTO DI PRECESSIONE



$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{A}$$

Dinamica

Interazioni tra il corpo e l'ambiente attraverso le forze.
Una forza è generalmente legata alla variazione del moto di un corpo e alla sua deformazione

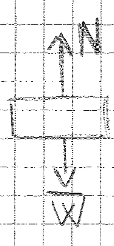
* Effetto statico della forza (deformazione)
  DINAMOMETRO → forza applicata a una molla

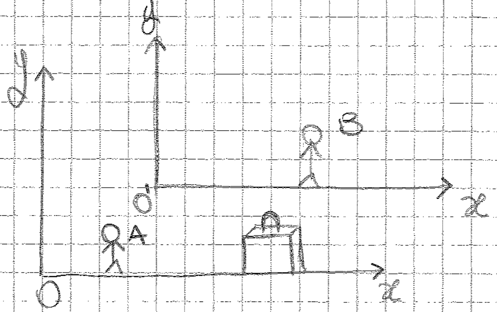
  UNITÀ DI FORZA → Newton

  Def di Forza → è quella grandezza che si misura con il dinamometro

1^a legge di Newton → <u>legge d'inerzia</u>

STATO NATURALE di UN CORPO / QUIETE \ MOTO COSTANTE





Per A $\sum F$ sulla valigia è 0
" B " " " "

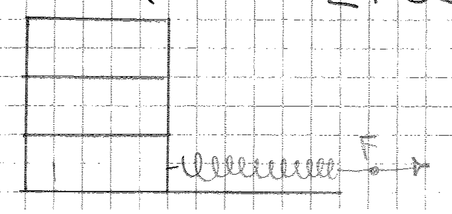
Questa vale solo per riferimenti inerziali, cioè che si muovono in moto uniforme.

$SRI \rightarrow \qquad \sum \vec{F} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = 0$

I sistemi di riferimento inerziali non esistono nella realtà

$\sum \vec{F} \neq 0 \quad \vec{a} \neq 0$ <u>2^a legge di Newton</u>
C'è una proporzionalità tra queste due grandezze misurate sperimentalmente

$(\hat{\vec{F}, \vec{a}})$ $\qquad \sum \vec{F} \propto \vec{a}$



$\sum \vec{F} = m\vec{a}$
↳ Massa (che esprimo in funzione della forza e dell'accelerazione)

Impulso

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow d\vec{p} = \vec{F}\, dt \rightarrow \vec{F}(t)$$

INTEGRO

$$\int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} F(t')dt' \qquad p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t')\, dt'$$

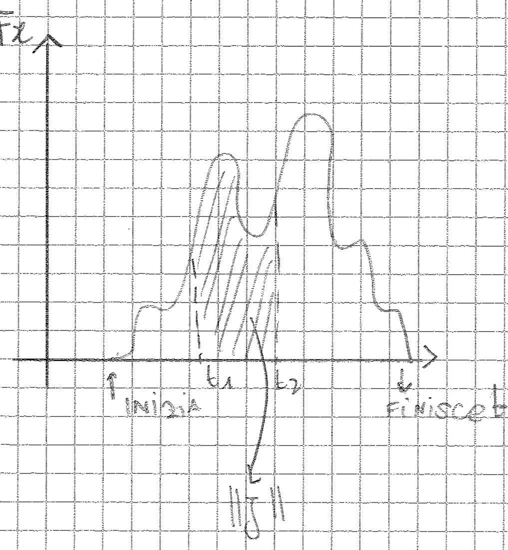
$\vec{J}$ (IMPULSO)

Impulso → integrale della forza nel tempo | non costante

Teorema → $\vec{J} = p_2 - p_1 = \Delta p$

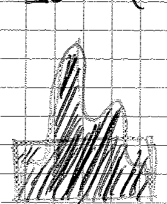
(1D) $\vec{F} = F_x(t) \cdot \hat{\imath}$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)\, dt'\, \hat{\imath}$$



Quando una forza è concentrata in un breve intervallo di tempo non mi interesso della forza nei suoi singoli istanti, ma tengo in considerazione l'impulso.

$$\overline{p_2} - \overline{p_1} = \vec{J} = \langle \vec{F} \rangle \cdot \Delta t \quad \text{(teorema del valor medio)}$$



$$\langle \vec{F} \rangle \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \qquad \langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} F(t')dt$$

Terza legge di Newton - Legge di azione e reazione

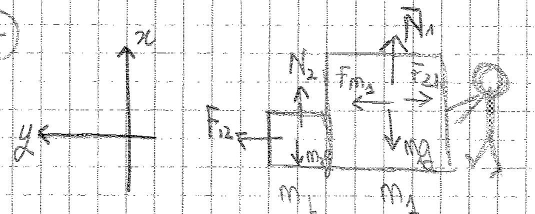
Se A esercita su B una forza (F_{AB}) allora B esercita su A una forza (F_{BA}) tale che

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Le forze agiscono sempre in coppia

Forza centrifuga → forza apparente (non c'è nessuno che la eserciti)

(4)



$\sum \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}$

$\sum \vec{F} = m_2 \cdot \vec{a}$

$$\begin{cases} \sum F_x = m_1 a_x = +F_{m_1} - F_{21} = m_1 a \\ \sum F_y = m_1 a_y = +N_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = m_2 a_x = F_{12} = m_2 a \\ \sum F_y = m a_y = +N_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{m_1} - F_{21} = m_1 a \\ F_{12} = m_2 a \end{cases}$$

$$F_{m_1} = (m_1 + m_2) a$$

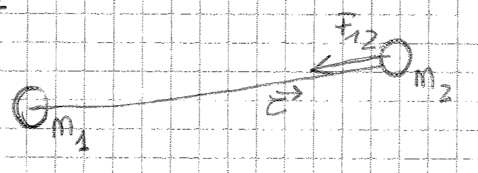
↓

somma di 2 masse → considero le due scatole come un corpo unico

Le Forze

- ★ Forza gravitazionale → rilevante su corpi molto grandi
- ★ forza nucleare forte → su particelle molto vicine
- ★ forza elettromagnetica → su corpi carichi elettricamente
- ★ Forza nucleare debole

$$F_G = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \gamma = 6{,}673 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2$$



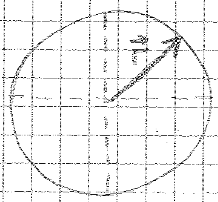
$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

5) $r(t) = A\,sen(\omega t)\,\hat{i} + A\cos(\omega t)\,\hat{j}$

$$\begin{cases} x = A\,sen(\omega t) \\ y = A\cos(\omega t) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = +A\cos(\omega t)\cdot\omega = +A\omega\cos(\omega t) \\ v_y = -A\,sen(\omega t)\cdot\omega = -A\omega\,sen(\omega t) \end{cases}$$

IMPORTANTE

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 A\,sen\,\omega t = -\omega^2 x(t) \\ a_y = -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 y(t) \end{cases}$$



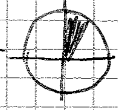
$\|\vec{r}\| = A$

$x_{r t_1} = A\,sen(\omega t_1) = 1\,m\cdot sen(1\,rad) = 0{,}84\,m$

$y_{r t_1} = A\cos(\omega t_1) = 1\cdot m\cdot\cos(1\,rad) = 0{,}54\,m$

$x_{r t_2} = A\,sen(\omega t_2) = 0{,}91\,m$

$y_{r t_2} = A\cos(\omega t_2) = -0{,}42\,m$

Se considero le coordinate ~~cart~~ angolari θ corrisponde a 
allora il moto è orario

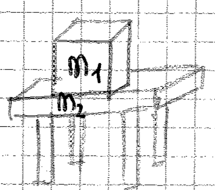
$x(t) = A\,sen\theta(t)$

$y(t) = A\cos\theta(t)$

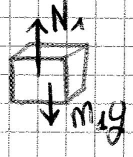
Dinamica

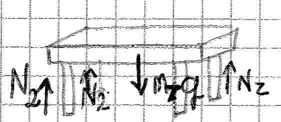
1^a-2^a formula → equazione $\sum\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{a}(t) = \frac{1}{m}\sum\vec{F}(t)$

1) 

$m_1 = 10\,kg \qquad m_2 = 20\,kg$





$m_{TOT} = m_1 + m_2$

$Mg + mg + 4N_2 = 0$

$N_2 = -\frac{(m+M)g}{4}$

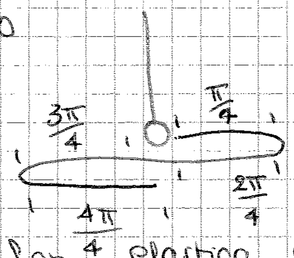
$-kx\hat{u}_x = ma\hat{u}_x \qquad -kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$\omega^2 \rightarrow$ pulsazione del moto armonico semplice

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \omega = 2\pi f \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

Periodo di un pendolo

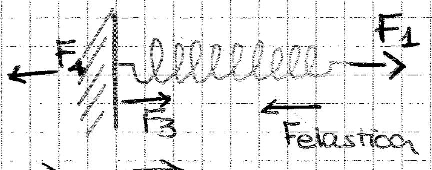


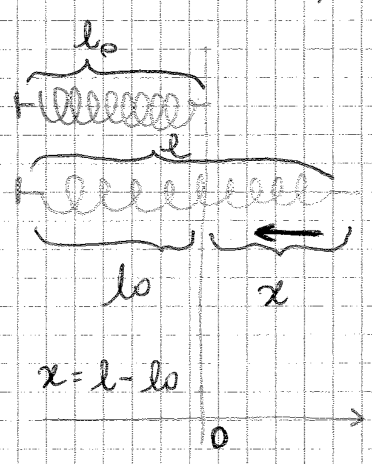
Fisicamente creo una forza elastica con una molla che rispetta la legge di Hooke

l_0 = lunghezza propria di una molla

l'allungamento è proporzionale alla forza applicata

limite di snervamento di una molla → limite oltre il quale non torna più a l_0



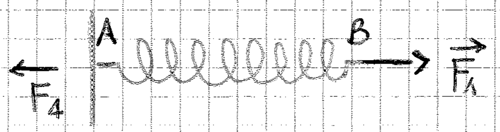


$\vec{F_1} = -\vec{F_{el}}$

F_4 = forza che il muro esercita sulla molla

F_3 = forza che la molla esercita sul muro

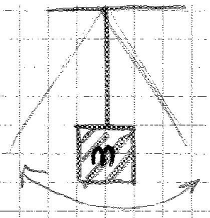
$\vec{F_3} = -\vec{F_4}$



$\sum \vec{F} = m_m \vec{a} = 0$ al momento di equilibrio

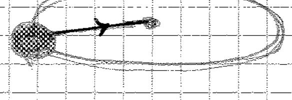
$\vec{F_1} = -\vec{F_4}$

$\|\vec{F_2}\| = \|\vec{F_3}\|$ la Fel nel punto A e B sono uguali

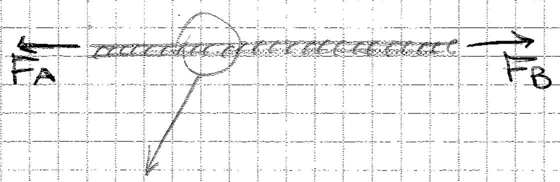


fune inestensibile → vincolo

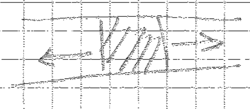
Pendolo semplice



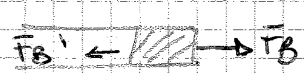
fune → fornisce l'accelerazione centripeta



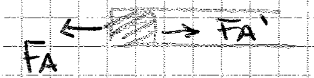
$\vec{F_A} + \vec{F_B} = 0$



Ogni singolo pezzo di corda sarà sottoposto a $\vec{F_A}$ e $\vec{F_B}$



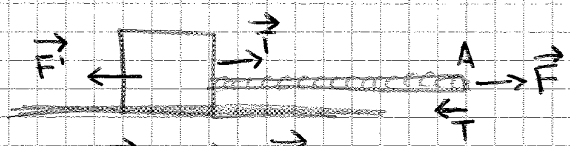
$\vec{F_B} = -\vec{F_B'}$



$\vec{F_A} = -\vec{F_A'}$

$\|F'_A\| = \|F'_B\| = \|F_A\| = \|F_B\|$

Si chiama TENSIONE T la forza che ogni pezzo di fune esercita su quello seguente. È costante se la forza applicata è costante

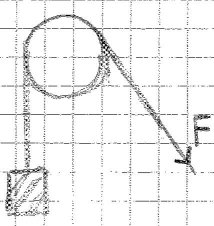


$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{F'} = m \cdot \vec{a} = 0 \qquad \vec{F} = -\vec{F'}$

La massa della corda è trascurabile = 0

$\|F\| = \|T\|$ in A $\qquad \|F'\| = \|\vec{T}\|$

CARRUCOLE e PULEGGE



T = F la forza è la stessa

È una questione di comodità

$\vec{f_K}$ = forza di attrito dinamico radente

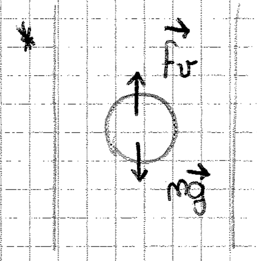
ha un valore preciso $f_K = \mu_K N$

$$0 < \mu_K < \mu_S < 1$$

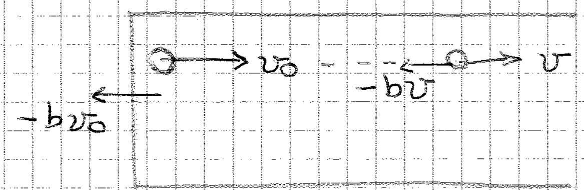
μ_K non dipende da v

VISCOSITÀ

Dovuta alla natura del fluido → difficoltà che ha nel fluire e che esercita su un corpo che fluisce al suo interno



$$\vec{f_v} = -b\vec{v}$$



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt \rightarrow$$

moto rettilineo smorzato (viscosità unica forza) $\quad v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \quad v = v_0 - \frac{b}{m}(x - x_0)$

Nel caso della pallina * c'è anche la forza peso che agisce

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \quad m\vec{g} + \vec{f_v} = m\vec{a} \quad m\vec{g} = +mg\hat{k}$$

$$\vec{f_v} = -bv\hat{k} \quad \vec{a} = a\hat{k}$$

$$+mg - bv = m\frac{dv}{dt} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}\cdot v = g$$

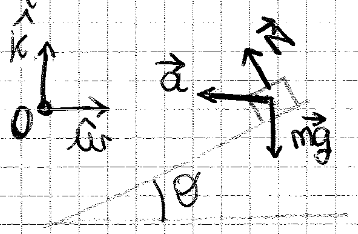
OMOGENEA ASSOCIATA: $\quad \frac{dv}{dt} + \frac{bv}{m} = 0 \quad v(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t}$

equazione GENERALE $\quad v(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}$

Condizione al contorno $\quad v(t=0) = 0$

$$v(t=0) \quad Ae^{0} + \frac{mg}{b} = 0 \quad A = -\frac{mg}{b} \quad \Longrightarrow$$

Esempio: Pista di collaudo



La direzione della f. di attrito dipende dalla velocità dell'auto. Immaginiamo che non ci sia. Allora:

L'accelerazione non è ~~perpendicolare~~ parallela al piano, quindi scelgo l'origine nel ~~vertice~~ punto O e imposto i versori $\hat{u}_r$ e $\hat{k}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$N + mg = ma$$

$$\begin{cases} \hat{u}_r: & +N\,\text{sen}\theta = -m\dfrac{v^2}{R} \\ \hat{k}: & -mg + N\cdot\cos\theta = ma = 0 \end{cases} \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$+\frac{mg}{\cos\theta}\cdot\text{sen}\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

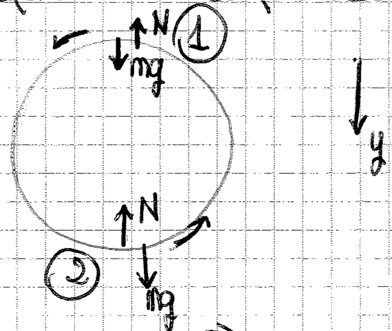
$$-g\,\text{tg}\theta = \frac{v^2}{R} \qquad \text{tg}\theta = -\frac{v^2}{Rg}$$

→ stessa formula dell'attrito statico del problema precedentemente ~~temente~~

⇓

EFFETTO DELL'ATTRITO = EFFETTO DELL'INCLINAZIONE

Esempio: ruota panoramica



① $\vec{N} + m\vec{g} = ma$

$$N - mg = m\left(-\frac{v^2}{R}\right)$$

$$mg - N = +m\frac{v^2}{R}$$

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

↓

minore che nel caso in cui il seggiolino fosse fermo. Parte del peso, dà origine all'acc centripeta

② $\vec{N} + m\vec{g} = m\cdot\vec{a}$

$$-N + m\vec{g} = -m\frac{v^2}{R}$$

$$N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$$

↓

maggiore

$\theta_{max} L = S_{max}$ $\quad S = S_{max} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$\frac{d\theta}{dt} = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$

$v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = S_{max} \cdot \omega \cos(\omega t \cdot \varphi_0)$ → E' massimo quando il $\cos(\dots) = 1$

Tolgo φ_0:

A $T = 0$ $\quad \theta = 0 \rightarrow v = v_{max}$
$\rightarrow a_T = 0$

A T corrispondente a $\theta_{max} \rightarrow v = 0$ $\quad \left(\operatorname{sen}(\dots) = \frac{\pi}{2}\right)$

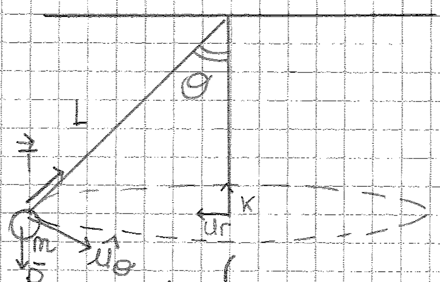
$\rightarrow a_c = 0$

ESEMPIO: PENDOLO CONICO

θ non cambia se non c'è attrito con l'aria

T e mg sono complanari → θ non varia

$a_T = 0$ → moto circolare uniforme



$\Sigma \vec{F}: \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ $\quad \begin{cases} \hat{u}_r & -T \operatorname{sen}\theta = -m \frac{v^2}{R} \\ \hat{k} & +T \cancel{\operatorname{sen}}\overset{\cos}{}\theta - mg = 0 \end{cases}$ $\quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$ costante

$\frac{mg}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta = m \frac{v^2}{R}$ $\quad \frac{g}{\cos\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{v^2}{R}$ $\quad g \operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{R}$

$\begin{cases} R = L \operatorname{sen}\theta \\ v = \omega \cdot R \end{cases}$ $\quad g \operatorname{tg}\theta = \omega^2 R$ $\quad g \operatorname{tg}\theta = \omega^2 \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta$

$\frac{g}{\cos\theta} = \omega^2 \cdot L$ $\quad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L}$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + x'(\omega \times \hat{i}') + y'(\omega \times \hat{j}') + z'(\omega + \hat{k}') + \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + \omega \times \underbrace{(x'\hat{i} + y'\hat{j}' + z'\hat{k}')}_{= \vec{r}'}$$

$\Downarrow$

Teorema delle velocità relative

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \underbrace{\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\frac{d\vec{r}'}{dt}}$$

$\vec{\omega} = 0$ se non ruota il sistema O' $\Rightarrow$ le velocità si sommano semplicemente

Velocità di trascinamento $\rightarrow$ velocità che ha un corpo per O solo perchè si trova su O'

$$v_t = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Per O l'accelerazione di P è:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

Per O'

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} = a' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}_0 + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{acc ang}}}{\vec{\alpha}} \times \vec{r}' +$$

$$+ \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') =$$

$$= \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$\Downarrow$

Teorema delle accelerazioni relative

Per O $\quad y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_0}$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a_0} \qquad \vec{v_0} = a_0 t$

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r_0} \qquad \vec{r_0} = \frac{1}{2} a_0 t^2 \hat{j}$

$\vec{g} = \vec{a}' + \vec{a_0} \qquad \vec{a}' = \vec{g} - \vec{a_0}$

$a'_y = -(g + a_0)$

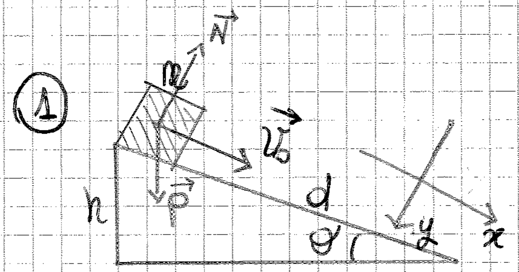
la persona nell'ascensore vede la pallina cadere più velocemente xk è in un sistema non inerziale

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\sum \vec{F} - m\vec{a_T} = m\vec{a}'$

26/03/2013

(1)



$P = mg$

$N = mg\cos\theta$

$F_{//} = mg\,\text{sen}\theta$

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$F_{//} = m\vec{a} \Rightarrow \cancel{m}\vec{g}\,\text{sen}\theta = \cancel{m}\vec{a} \qquad \vec{a} = \vec{g}\,\text{sen}\theta$

$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$

$v(t) = v_0 + g\,\text{sen}\theta\, t$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' =$

senza attrito

$x(t) = \cancel{x_0} + v_0 t + \frac{1}{2} g\,\text{sen}\theta\, t^2$

con attrito

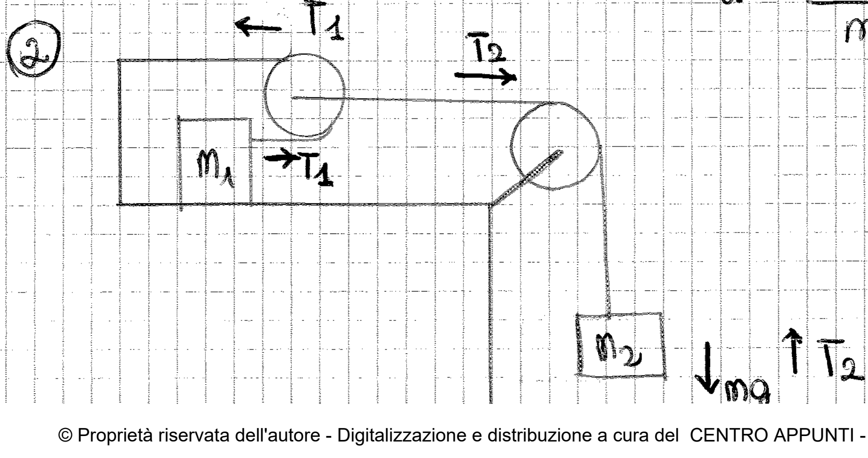
$f_d = \mu_d N = \mu_d\, mg\cos\theta$

Su y $\sum F_y = 0 \Rightarrow mg\cos\theta - N = 0$

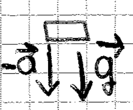
Su x $\sum F_x = F_{//} - f_d = ma$

$a = \frac{F' - f_d}{m} = \frac{g\,\text{sen}\theta}{m} - \mu_d g\cos\theta$

(2)



bullone:



$$\sum F = m a'$$
$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{g}$$
$$y = h = \frac{1}{2}(g+a)t^2$$
$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{a+g}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

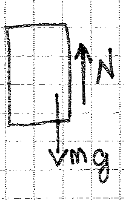
Per O^* $\quad \sum F = m\vec{a} = ma' + m\vec{a}_0$

Per O' $\quad \sum \vec{F} \underbrace{- m\vec{a}_0}_{} = m\vec{a}'$

↳ forza inerziale (non è una forza vera e propria)

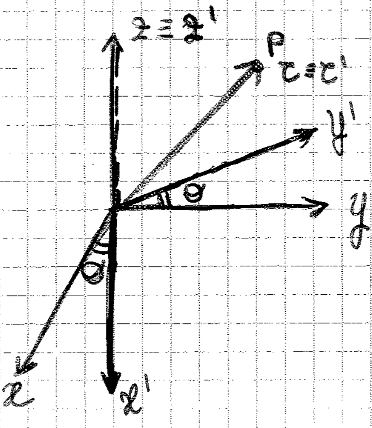
Un soggetto in u SRI può dire che $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Un soggetto in un SRNI non lo può dire, ma nel caso dell'ascensore che accelera verso l'alto può dire che $\sum \vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}' = 0$



$$+N - mg - ma_0 = 0$$
$$N = m(g + a_0)$$

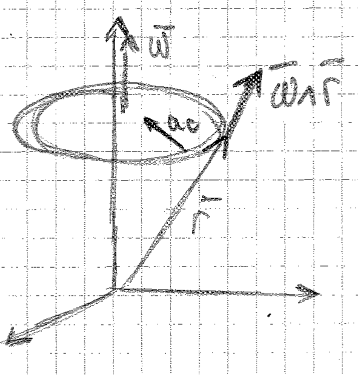
Nel caso di un sistema in moto solo rotatorio...



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$
$$\vec{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath} + v_z \hat{k} =$$
$$= \frac{d\bar{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

a' = acceler della pallina rispetto all'uomo sulla giostra

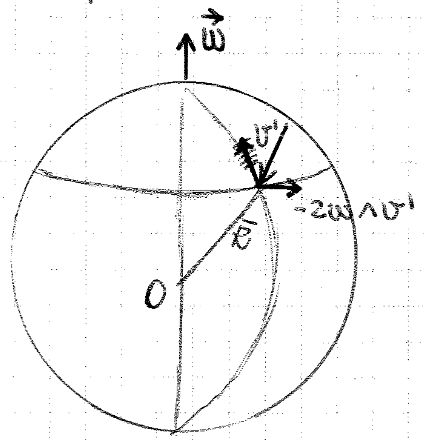
a = " " " " " sulla terra



$\overline{w} \wedge \vec{r}$ lo ricavo con la regola della mano dx ed è la v_T

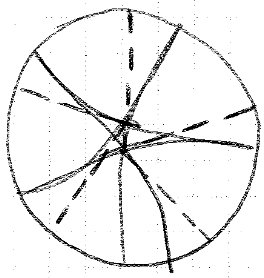
Mentre $\omega \wedge (\omega \wedge r')$ è l'accelerazione centripeta che si ricava sempre con la regola della mano dx

Se un corpo sta cadendo sulla Terra



L'acc di Coriolis fa cadere il corpo leggermente più a destra

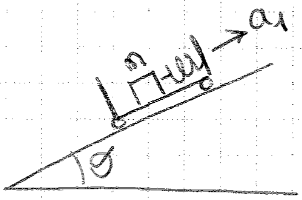
Pendolo di Foucault



E' l'acc di Coriolis che devia la traiettoria verso destra

L'acc di Coriolis è responsabile della formazione degli uragani

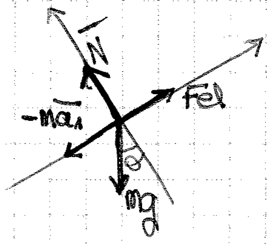
Esercizio 2.2



Per chi è fuori dal carrello → SRI

Per chi è nel carrello → SRNI

Sul carrello



$a_1 = a$ trascin

$\sum F - ma_1 = m \cdot \underset{\uparrow}{0}$

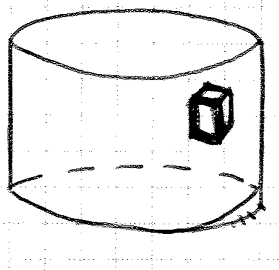
acc del corpo x l'uomo sul carrell

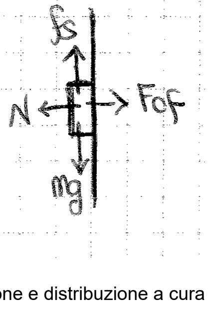
$N + mg + F_{el} - m\vec{a}_1 = 0$

$$\begin{array}{l} x' \\ y' \end{array} \begin{cases} +kx - ma_1 - mg\sin\theta = 0 \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Esempio 3.7

Nel SRNI interno al cilindro il corpo è fermo



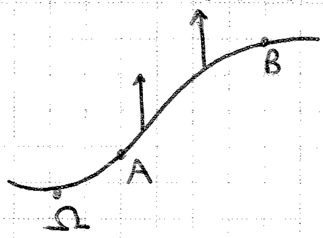


$\sum \vec{F} + \vec{F}_{cf} = 0$

$\vec{N} + \vec{f_s} + m\vec{g} + \underbrace{\vec{F}_{cf}}_{-m \cdot a_c} = 0$

$a_c = v^2/R = \omega^2 R$

Traiettoria curva



Uso le coordinate intrinseche

$W_{AB} = \int \vec{F} d\vec{r}$ $\quad d\vec{r} = (ds)\hat{u}_T$

$\vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \cdot ds \cdot \hat{u}_T = \underbrace{\vec{F} \cdot \hat{u}_T}_{F_T} \cdot ds$

F_T (componente tangenziale della forza)

Il lavoro compiuto su due percorsi diversi non è uguale

$$\int_{A,\gamma_1}^{B} \vec{F} d\vec{r} \neq \int_{A,\gamma_2}^{B} \vec{F} d\vec{r}$$

$\bar{F} \cdot d\bar{r}$ viene chiamato
dW dal Mazzoldi
δW dal Focardi (più corretta perché non si tratta di un differenziale esatto)

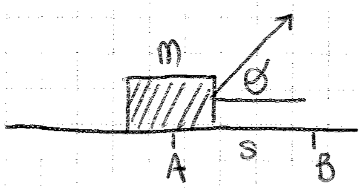
$$\bar{F} \cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i$ risultante delle forze

$$W_{AB} = \int_A^B \bar{R} d\bar{r} = \int_A^B \sum_i \bar{F}_i d\vec{r} = \sum_i \int_A^B F_i d\vec{r} = \sum_i W_{AB}^i$$

Esempio



$s = 12 m$ $\quad W_{AB}?$

$\theta = 45°$

$m = 5{,}6 kg$

$\mu_d = 0{,}20$

$W_{AB} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} =$

$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot s \cdot \cos\theta$

moto rett unif $\Rightarrow \sum \bar{F} = 0$

$$\begin{cases} x: & F\cos\theta - f_d = 0 \\ y: & +N - mg + F\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad f_d = \mu_d N$$

$N = mg - F\text{sen}\theta$

$f_d = \mu_d \cdot mg\, F\text{sen}\theta$

$\Rightarrow F\cos\theta - \mu_d \cdot mg \overset{+\mu_d F}{\cancel{\ }}\text{sen}\theta = 0$

$F(\cos\theta - \mu_d \cancel{mg}\, \text{sen}\theta) = \cancel{\ }\mu_d\, mg$

Potenza → lavoro compiuto in un tempo elementare

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{"\vec{F}\cdot d\vec{r}"}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

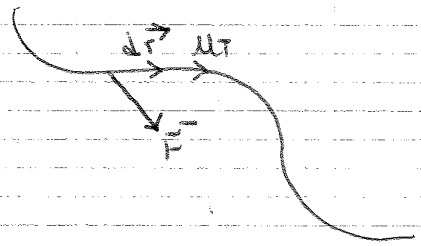
$$[P] = \frac{[W]}{[T]} = \frac{[F]\cdot[L]}{[T]} = [M][L][T]^{-2}\cdot[L]\cdot[T]^{-1} = ML^2L^{-3}$$

$$1\,W = \frac{1\,J}{1\,s}$$

---

(1) caso 1D; $\vec{F}$ costante

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad P_{cost} \rightarrow \begin{matrix}\vec{v}\ cost\\ \vec{F}\ cost\end{matrix}$$



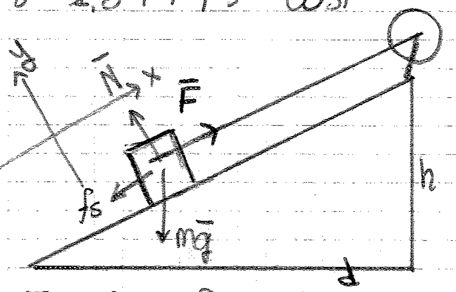
$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\frac{ds}{dt}u_T \quad \text{(in coord. intrinseche)}$$

$\rightarrow F_t$

$$= F_t \cdot v$$

$m = 1380$ kg $\mu_d = 0{,}41$ $h = 28{,}2$ m $d = 39{,}4$

$v = 1{,}34$ m/s cost



$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = F\cdot v$$

$$\Sigma\vec{F} = 0$$

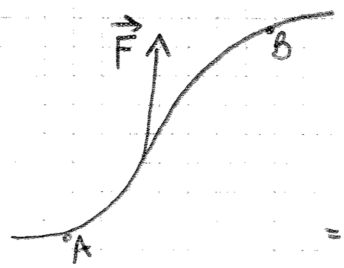
$$\begin{cases} x & -f_s + F - mg\,sen\theta = 0 \\ y & +N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$F = mg\,sen\theta + \mu_d\,mg\cos\theta = mg\,(sen\theta + \mu_d\cos\theta)$$

$$P = mgv\,(sen\theta + \mu_d\cos\theta)$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (forze vive)

$\vec{F}$ risultante delle forze applicate al corpo



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}\,d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}\,ds\,\hat{u}_T =$$

$d\vec{r} \rightarrow ds\,\hat{u}_T$

$$\vec{a}\cdot u_T = \vec{a}_T = \frac{dv}{dt}$$

$$= \int_A^B m\,\frac{dv}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot dt \quad \text{moltiplico e divido per } dt$$

Il lavoro totale su un percorso chiuso è nullo

$$W_{TOT} = \oint_\Gamma \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \quad \forall \Gamma$$

Circuitazione su un qualunque percorso chiuso $\oint_\Gamma$

$W_{AB} = mg(z_B - z_A)$ se $z_A = z_B \rightarrow W = 0$

La circuitazione di una forza è nulla se

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \iff rot\,\vec{F} = 0$$

rotore

∇ (nabla) $\quad \nabla = \hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$

rot: operatore differenziale vettoriale

∇: vettore che ha per componenti delle derivate.

$f(x,y,z)$

∇f = gradiente di f (grad f) (E' UN VETTORE)

$$\nabla f = grad\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Esempio:

$$f(x,y,z) = 3x^2\frac{y}{z} \qquad \nabla f = 3 \cdot 2x\frac{y}{z}\vec{\imath} + \frac{3x^2}{z}\vec{\jmath} + \frac{3x^2y}{z^2}\cdot(-1)\vec{k}$$

$$= 6\frac{xy}{z}\vec{\imath} + \frac{3x^2}{z}\vec{\jmath} - 3\frac{x^2y}{z^2}\vec{k}$$

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = div\,\vec{v} \quad \text{divergenza}$$

$\nabla \wedge \vec{F} =$

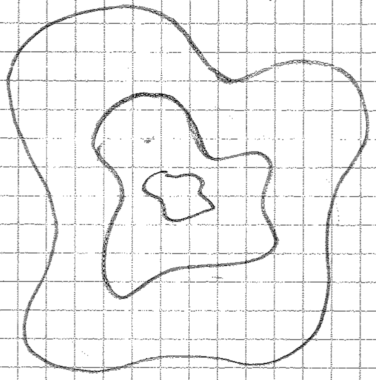
$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \quad \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(a_y b_z - a_x b_y) +$$

$$- \hat{\jmath}(a_x b_z - b_x a_z) + \hat{k}(a_x \cdot b_y - b_x a_y)$$

(1D) $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{dE_p}{dx}$



LINEE EQUIPOTENZIALI

z cost

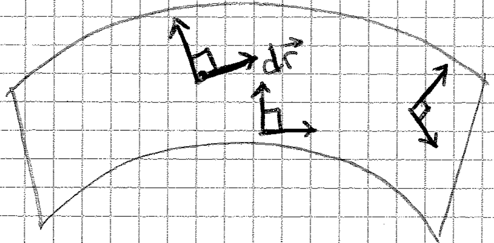
$z(x,y)$

$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{j}$

↓

vettore che ha la direzione rispetto alla quale la variazione è maggiore

SUPERFICI EQUIPOTENZIALI



$\overline{F} = -\nabla E_p$

$\overline{F} \perp$ sup equipotenziale

$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB}$

$E_p = f(\vec{r}) + c$

$W_{AB} = f(\vec{r_A}) \cancel{+c} - f(\vec{r_B}) \cancel{+c}$

$W_{AB} = mgz_A - mgz_B$

$\left.\begin{array}{l} Ep(z) = mgz \\ Ep(z) = mgz + c \end{array}\right\}$ sono valide entrambe perché sto calcolando una differenza

$W_{AB} = \frac{1}{2}k\,x_A^2 - \frac{1}{2}k\,x_B^2$

$E_p^{el} = \frac{1}{2}kx^2 + c$

SISTEMA CONSERVATIVO

È un sistema di forze conservative e non conservative, purchè queste ultime non compiano un lavoro

$\left.\begin{array}{l} W_{AB} = E_{K_2} - E_{K_1} = \Delta E_K \\ W_{AB} = E_{p_1} - E_{p_2} = -\Delta E_p \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E_{K_2} - E_{K_1} = E_{p_1} - E_{p_2} \\ E_{p_1} + E_{K_1} = E_{p_2} + E_{K_2} \end{array}$

La somma di E_K e E_p è costante lungo tutto il moto e si chiama ENERGIA MECCANICA

$mg\,sen\theta - ma_0\cos\theta \le (mg\cos\theta + ma_0\,sen\theta)\,\mu_s$

$g\,tg\theta - a_0 \le \mu_s\,(g + a_0\,tg\theta) \qquad g\,tg\theta - 1 \le \mu_s g + a_0\mu_s\,tg\theta$

$$a_0 \ge \frac{g\,tg\theta - \mu_s g}{1 + \mu_s\,tg\theta}$$

$N = ma_0\,sen\theta + mg\cos\theta$

$f_s = -\,mg\,sen\theta + ma_0\cos\theta$

$f_s > 0 \rightarrow -\cancel{m}g\,sen\theta + \cancel{m}a_0\cos\theta > 0 \qquad a_0 > g\cdot tg\theta$ (opposto della condiz precedente)

Affinchè sia fermo $f_s \le \mu_s N$

$-\cancel{mg\,sen\theta}^{\,tg\theta} + \cancel{ma_0\cos\theta}^{\,1} \le \mu_s\,(\cancel{mg\cos\theta}^{\,1} + \cancel{ma_0\,sen\theta}^{\,tg\theta})$

$-g\,tg\theta + a_0 \le g\mu_s + \mu_s\,tg\theta\,a_0$

$a_0\,(1 - \mu_s\,tg\theta) \le g\,(tg\theta + \mu_s)$

$$a_0 \le \frac{g\,(tg\theta + \mu_s)}{1 - \mu_s\,tg\theta}$$

a_0 mantiene il suo segno se la inserisco a dx nell'eq di N
lo inverte se lo inserisco a sx

ENERGIE

$E_m = E_k + E_p \qquad \Delta E_m = W_{NC}$ (Abbiamo dissipato energia)

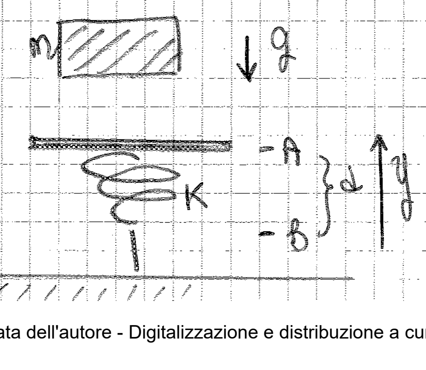
$\Delta E_m = 0$ (nel caso di forze solo conservative)

$E_K = \frac{1}{2}mv^2$

$U_G = mgh \qquad \Delta U_G = mg\,\Delta h \qquad$ G → dovuto a un campo conservativo

$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{s}$

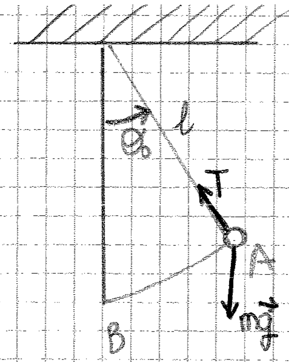
Esercizio



$W_e = \int_A^B -ky\,dy$

$= \int_0^d -ky\,dy = -\,\frac{k\,(y^2)_0^d}{2}$

CONSERVAZIONE DELL'EN MECCANICA NEL PENDOLO



θ_0 = massimo spostamento angolare

E_M = costante

$E_K = \frac{1}{2} m v^2$

$E_p = mgz + C$

In B pongo lo zero dell'energia potenziale

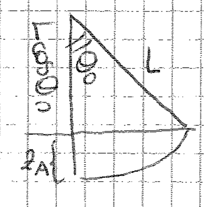
Nel punto A $\quad E_m = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgz_A$

$v_A = 0$

$E_m = mgz_A$

$z_A = L - L\cos\theta_0 =$

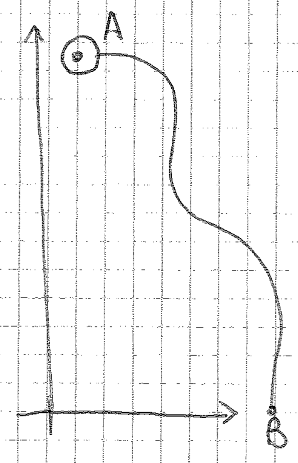
$= L(1 - \cos\theta_0)$



Nel punto B $\quad E_m = \frac{1}{2} m v_B^2 + \underbrace{mgz_B}_{=0} = \frac{1}{2} m v_B^2$

$E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_B^2 = mgL(1-\cos\theta)$

$$v_B = \sqrt{2g\underbrace{L(1-\cos\theta_0)}_{h}} = \sqrt{2gh}$$



$E_p = mgz$

$E_{m_A} = mgz_A + 0$

$E_{m_B} = mgz_B + \frac{1}{2} m v_B^2$

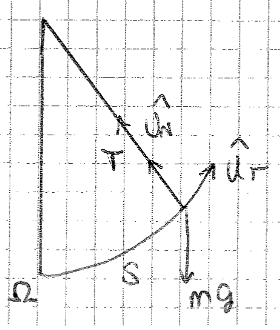
$mgz_A = mgz_B + \frac{1}{2} m v_B^2$

$v_B^2 = 2g(z_A - z_B) = 2gh$

Nel problema del pendolo è molto più complicato calcolare v_B con la Dinamica.

Uso le coord intrinseche

$$\begin{cases} \hat{u}_T & -\cancel{m}g\,\text{sen}\theta = \cancel{m}a_T \\ \hat{u}_N & +T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{L} \end{cases} \qquad a_t = \frac{dv}{dt} = -g\,\text{sen}\theta$$



$a = \frac{dv}{dt} \quad dv = a\,dt \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$

non la posso utilizzare xk dovrei sapere come v dipende da t

In A l'Ec comincia ad aumentare (verso della F →)
In C l'Ec è massima ma F si annulla (punto stazionario)
Da C in poi il corpo rallenta (verso della F ←), diminuisce l'Ec ed aumenta la sua Ep
L'Ep dopo B è > dell'Em quindi il corpo non si può trovare in quel punto → dunque torna indietro.

$$v_A = v_B$$

$$F_{A\,x} > 0$$

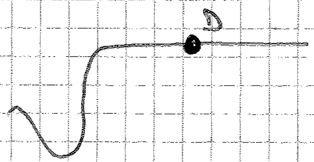
$$v_C = max$$

$$F_{C\,x} = 0$$

Il punto C si chiama punto di eq stabile. Si chiamano pt di eq stabile i punti in cui F=0 (punti stazionari)

Forza di richiamo → forza che sposta un corpo da un punto compreso tra A e C o tra C e B al punto C

Eq stabile → in C
Eq instabile → in A
Eq indifferente



SISTEMI NON CONSERVATIVI

Forze non conservative compiono lavoro

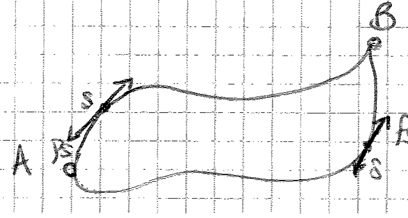
$$W_{AB} = \underset{\downarrow}{W_{AB}^{C}} + \underset{\downarrow}{W_{AB}^{NC}}$$

$$E_{PA} - E_{PB} + W_{AB}^{NC}$$

$$W_{AB} = E_{KB} - E_{KA}$$

$$W_{AB}^{NC} = E_{KB} + E_{PB} - (E_{KA} + E_{PA}) = \Delta E_m$$

Varia l'Em e la sua variazione dipende dal lavoro fatto dalle forze non conservative



lavoro sempre negativo

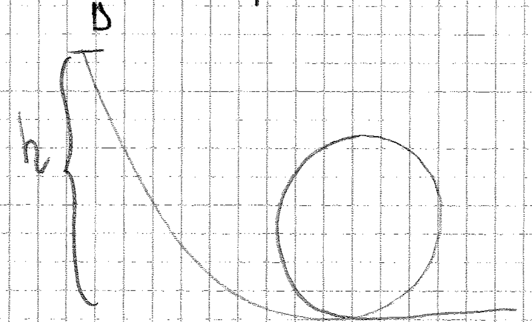
$N_A = mg$ $\quad N_B = \frac{m v_B^2}{R} = \frac{m}{R}(v_0^2 - 2gR)$ $\quad N_C + mg = m\frac{v_C^2}{R}$

$N_C = -mg + \frac{m}{R}(v_0^2 - 4gR) = -mg + \frac{m v_0^2}{R} - 4mg = \frac{m v_0^2}{R} - 5mg$

v minima è quella per cui N_C è nulla ma $v_0 \neq 0$

$$N_C = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{m} v_{0\,min}^2}{R} = 5\cancel{m}g$$

$$v_{0\,min} = \sqrt{5gR}$$



minima h?

Impongo la conservazione dell'energia

$\cancel{m} g h_{min} = \frac{1}{2} \cancel{m} v_{0\,min}^2$

$g h_{min} = \frac{1}{2} v_{0\,min}^2$

$h_{min} = \frac{1}{2} v_{0\,min}^2 g^{-1}$

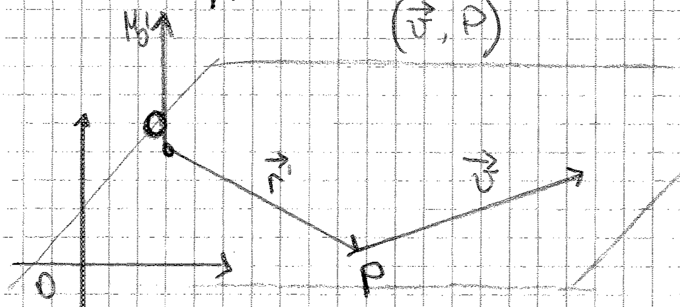
$h_{min} = \frac{1}{2} 5gR \cdot \frac{1}{g}$

$h_{min} = \frac{5}{2} R$

Campo Elettrostatico

Momento di un vettore

Vettore applicato: l'insieme del vettore $\vec{v}$ e del punto P nel quale è applicato. $(\vec{v}, P)$

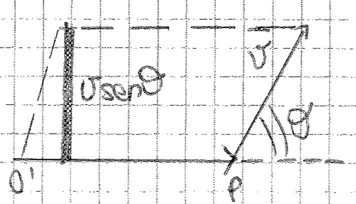


$\vec{M}_0 = \vec{O'P} \wedge \vec{v}$ rispetto al polo O

Trovo il piano che contiene $\vec{O'P}$ e $\vec{v}$

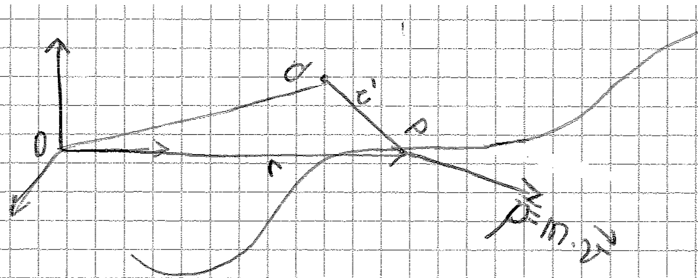
$\|\vec{M}_0\| = \|O'P\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\theta =$

AREA DEL PARALLELOGRAMMA



$M_{O'} = \|O'P\| \cdot v \cdot \operatorname{sen}\theta = r \cdot v \operatorname{sen}\theta =$
$= r \cdot v_\perp$

$v_\perp$ componente di $v \perp$ a r



$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}' \wedge \vec{p}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{O'O''} \wedge \vec{p} + \vec{L}_{O''}$$

$$\frac{dL_{O'}}{dt} = \frac{dr'}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r}' \wedge \frac{d\vec{p}'}{dt}$$

$\vec{OO'}$

$\vec{r} = \vec{OP}$

$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'$

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{d(\vec{r} - \vec{OO'})}{dt}$$

$$\frac{dL_{O'}}{dt} = \frac{d(\vec{r} - \vec{OO'})}{dt} \wedge p + r \wedge \frac{dp}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{p}}_{=0} + \underbrace{\frac{dOO'}{dt} \wedge \vec{p}}_{=0} + \vec{r}' \wedge \sum_i \vec{F}_i$$

xK sono paralleli   xK O e O' sono fermi

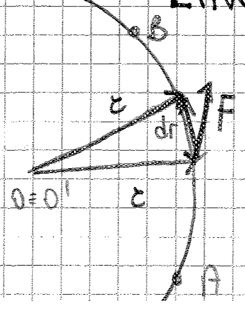
$$\frac{dL_{O'}}{dt} = \vec{r}' \wedge \sum_i \vec{F}_i = \sum M_{O'}$$

$$dL_{O'} = \sum M_O \cdot dt \xrightarrow{\text{Integro}} \Delta\vec{L}_{O'} = L_{O'}(t_2) - L_{O'}(t_1) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \sum M_{O'}\, dt}_{\text{IMPULSO ANGOLARE}}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{r}' \wedge \sum \vec{F}_i\right) dt$$

Per Forze Impulsive $\Delta L_{O'} = r' \wedge \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \sum F_i\, dt}_{\text{IMPULSO } J} = r' \wedge J$ → MOMENTO DELL'IMPULSO

LAVORO NEL MOTO CIRCOLARE



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot s \cdot u_T \cdot ds = \int_A^B F_t \cdot ds =$$

$$= \int_A^B F_t \cdot r \, d\theta$$

$F_t \cdot r$ → modulo del momento della forza F dal polo O'

Ne calcolo il modulo:

$$\|\vec{r} \wedge d\vec{r}\| = r^2 |d\theta|$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

↓

Tolgo il modulo perché l'area è sempre positiva.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{L_0} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \hat{k}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_0}{2m}$$

Se una F è centrale la velocità è costante

(2ª legge di Keplero)

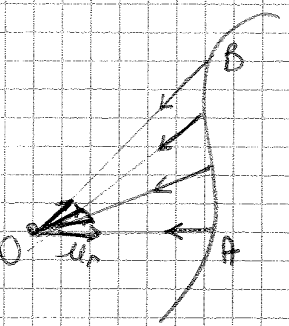
[Il vettore che unisce un pianeta la Sole spazza aree uguali in tempi uguali.]

LA FORZA CENTRALE è CONSERVATIVA

Si può dimostrare verificando che $\text{rot}\,\vec{F} = 0$

$\text{rot}\,\vec{F} = 0 \longleftrightarrow W_{AB} = \int_A^B F \cdot dr$ non dipende dal percorso.

Dimostro che è conservativa in quest'ultimo modo.



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = + \int \left(\vec{F}(r)\, \hat{u}_r\right) \cdot d\vec{r} =$$

calcolo il prodotto scalare $\hat{u}_r \cdot d\vec{r}$

$$\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = \hat{u}_r \left(dr\, \hat{u}_r + r\, d\theta\, \hat{u}_\theta\right)$$

$= dr + 0 = dr$ (differenza nella distanza tra A e B)

$$W_{AB} = + \int_A^B \underbrace{F(r)\,dr}_{\text{funz unidimensionale}} = + \int_A^B -dE_p = E_{p_A} - E_{p_B}$$

$$-\frac{dE_p}{dr} = F(r) \qquad -\nabla E_p = \vec{F}$$

L'Ep è in funzione di r (distanza) e non dello spostamento