NUMERO: 770

DATA: 15/11/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Greco

MATERIA: Geometria + Eserc.

Prof. Gatto

ALGEBRA LINEARE: 06/03/2012

nasce storicamente dall'esigenza di studiare sistemi di equazioni di primo grado.

Per esempio: $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$

Si scopre che l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni omogenee

Es: $x + 2y - z = 0$ omogeneo: perchè il termine costante è zero.

S_E = insieme soluzioni $= \{(u, v, u + 2v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$

$u = 1 \quad v = 2 \quad (1, 2, 5)$

$s \in S_E$

Osservo che se $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad s_1, s_2 \in S_E$ soluzioni

$\Rightarrow \underbrace{\lambda s_1 + \mu s_2 \in S_E}$ combinazione lineare (pag 20)

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

Siano $s_1 = (u_1, v_1, u_1 + 2v_1)$

$s_2 = (u_2, v_2, u_2 + 2v_2)$

Allora

$$\lambda s_1 + \mu s_2 = \lambda(u_1, v_1, u_1 + 2v_1) + \mu(u_2, v_2, u_2 + 2v_2) =$$
$$= (\lambda u_1, \lambda v_1, \lambda(u_1 + 2v_1)) + (\mu u_2, \mu v_2, \mu(u_2 + 2v_2)) =$$
$$= (\underbrace{\lambda u_1 + \mu u_2}_{x}, \underbrace{\lambda v_1 + \mu v_2}_{y}, \underbrace{\lambda(u + 2v_1) + \mu(u_2 + 2v_2)}_{z}) \bigstar$$

La combinazione lineare di soluzioni è soluzione.

$x + 2y - z = 0$

$\cancel{\lambda u_1} + \cancel{\mu u_2} + \cancel{2\lambda v_1} + \cancel{2\mu v_2} - \cancel{\lambda u_1} - \cancel{2\lambda v_1} - \cancel{\mu u_2} - \cancel{2\mu v_2} = 0$

Quindi la terna $\bigstar$ è soluzione di $x + 2y - z = 0$

Tale proprietà (combinazione lineare di soluzioni è soluzione) si traduce dicendo che l'insieme delle soluzioni forma uno spazio vettoriale. Di qui la motivazione per studiare spazi vettoriali (perchè studiarli significa studiare i sistemi)

Es: $y'' - 5y' + 6y = 0$

$C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \qquad \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$ soluzione

spazio vettoriale soluzioni eq. differenziale

Proprietà distributiva prodotto rispetto a somma:

$(a+b)c = a\cdot c + b\cdot c$

$a(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ $\quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$

Es: $a\cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{K}$

$$a\cdot(0+0) = \begin{cases} a\cdot 0 \\ \| \\ a\cdot 0 + a\cdot 0 \end{cases}$$

$a 0 + a\cdot 0 = a\cdot 0$

$2a\cdot 0 = a\cdot 0 \qquad a\cdot 0 = 0$

$(\mathbb{K},+,\cdot)$ è un campo espressione che esprime le proprietà dette.
Anzi se $\mathbb{K}$ è un insieme arbitrario su cui sono definite due operazioni binarie interne $+$, $\cdot$ tali che valgono le proprietà viste per $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
$\Rightarrow$ $\mathbb{K}$ si dice campo.

Esempio:

$\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \{0,1\} = \mathbb{K}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Esercizio: Verificare che $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \{0,1\} = \mathbb{K}$ è un campo.

Gli elementi di un campo si dicono scalari.

07/03/2012

Ricordiamo che un campo è un insieme $\mathbb{K}$, dotato di due operazioni denotate convenzionalmente con "+" e "·", che verificano le stesse proprietà verificate dalla somma e prodotto definite sull'insieme: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.
d'ora in poi possiamo pensare che $\mathbb{K}$ sia uno dei predetti campi $(\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C})$

Breve ripasso su funzioni:
Se X e Y sono due insiemi
Una funzione $f: X \to Y$ è una "legge" che associa a ogni $x \in X$ uno ed un solo elemento di Y, detto immagine di $x \in X$ e indicato con $f(x) \in Y$.

Notazione:
$Y^X = \{f: X \to Y / f \text{ funzione}\}$

Esempio: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\text{funzioni reali di variabile reale}\}$

Se $A = \{a,b,c\} \quad B = \{b_1, b_2\}$

$B^A = \{f: A \to B\}$

iccome $(\mathbb{K}^X, +)$ è gruppo abeliano e valgono le a), b), c), d) si dice che $\mathbb{K}^X$ è uno <u>spazio vettoriale</u>. Per tale ragione i suoi elementi si dicono anche "<u>vettori</u>". In generale, ogni insieme V, dotato di un'operazione binaria interna "+" e di una "moltiplicazione" per scalari (di un campo) che verifica le stesse proprietà di un $\mathbb{K}^X$ (per qualche X) si dice <u>-spazio vettoriale</u> e i suoi elementi vettori.

el nostro corso le lettere U, V, W... indicheranno arbitrari spazi ttoriali tutti nella forma $\mathbb{K}^X$.

li elementi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale si diranno vettori e ci abitueremo indicarli con $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ etc...

e V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale si possono formare combinazioni lineari i vettori a coefficienti in $\mathbb{K}$. Cioè, se $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_h$ $\in \mathbb{K}$

$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_h \vec{u}_h$ <u>combinazione lineare</u> di $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_h$ a coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{K}$.

sempi: 1) Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto. esempio difficile che non fa parte

$\mathbb{R}^{(a,b)} = \{f : (a,b) \to \mathbb{R}\}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale del nostro corso.

$C^0(a,b) = \{f \in \mathbb{R}^{(a,b)} / f \text{ continua}\}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Infatti se f, g sono continue si è studiato che $\lambda f + \mu g \in C^0(a,b)$

$X = \{\emptyset\}$ $\quad (\mathbb{K}^\emptyset = \{0\})$ ← esempio banale che non ci interessa.

) $X = \{*\}$

$\mathbb{K}^X = \{f : \{*\} \to \mathbb{K}\}$

$\mathbb{R}^{\{*\}} = \{f : * \to \mathbb{R}\}$

$\mathbb{K}^{\{*\}} = \mathbb{K}$

$^{\{*\}}$ è la "stessa cosa" di $\mathbb{K}$, cioè, ogni campo è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

) $X = \{1, 2\}$

$\mathbb{K}^X = \{\vec{u} : X \to \mathbb{K}\}$

e $\vec{u} \in \mathbb{K}^{\{1,2\}} \Rightarrow$ so $\vec{u}(1) \in \mathbb{K}$

$\vec{u}(2) \in \mathbb{K}$

s. $\vec{u}(1) = 3$

$\vec{u}(2) = 5$

uindi $\mathbb{K}^{\{1,2\}}$ è identificabile con coppie ordinate di scalari

$\vec{u} \in \mathbb{K}^{\{1,2\}}$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\quad u_1, u_2 \in \mathbb{K}$ $\qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}(1) = 3$, $\vec{u}(2) = 5$

$$\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\\\vdots\\\lambda u_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu v_1\\\mu v_2\\\vdots\\\mu v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda u_1+\mu v_1\\\lambda u_2+\mu v_2\\\vdots\\\lambda u_n+\mu v_n\end{pmatrix}$$

Esempio: $3\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15+30\\3+5\\6+35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45\\8\\41\end{pmatrix}$

$(K^n,+)$ è gruppo abeliano

$K^{\{1,\dots,n\}}$ Elemento neutro è vettore nullo $\vec{0}:\{1,\dots,n\}\to\mathbb{K} \,/\, \vec{0}(i)=0$
$1\le i\le n$

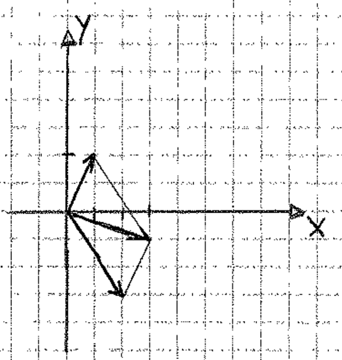
$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

Esempio: $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\\7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$ $\quad -\vec{u}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\\-7\end{pmatrix}$ vettore opposto.

$(-\vec{u})(i)=-(\vec{u}(i))$

Esempio (illegale): $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$



Sia V un K-spazio vettoriale arbitrario e siano $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_h\in V$

$[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_h]=\{\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\dots+\lambda_h\vec{v}_h \,/\, \lambda_i\in\mathbb{K}\}$ insieme delle combinazioni lineari di $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_h$

$\parallel$

$L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_h)$

sempio: per vedere che la comb. lineare non è unica.

$^2 \supseteq \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right] = W$

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in W$

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu+\nu\\ \lambda-\mu+2\nu\end{pmatrix}$

$\lambda+\mu+\nu=2$ $\quad \begin{cases}\lambda+\mu=-\nu+2\\ \lambda-\mu=-2\nu+1\end{cases}$ $\quad \lambda=\frac{1}{2}(3-3\nu) \quad \mu=\frac{1}{2}(1+\nu)$

$\lambda-\mu+2\nu=1$

a comb. lineare non è unica perchè per ogni scelta di ν abbiamo λ e μ.

e $\nu=0$

$\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

uando la comb. lineare è unica i vettori si dicono <u>linearm. indipendenti</u>.

asi particolari:

$\mathbb{K}=\mathbb{R} \quad n=3$

n $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{e}_1=\vec{i} \quad \vec{e}_2=\vec{j} \quad \vec{e}_3=\vec{k}$ $\qquad \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono le colonne coordinate.

$\vec{u}\in\mathbb{R}^3 \quad \vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$

<u>odotto scalare:</u>

e $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$<\vec{u}, \vec{v}> = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}(i)\,\vec{v}(i) = \vec{u}(1)\,\vec{v}(1) + \vec{u}(2)\,\vec{v}(2) + \vec{u}(3)\,\vec{v}(3)$

ssia se $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

$<\vec{u}, \vec{v}> = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

ostrazione ufficiale:

$$\vec{u}+\mu\vec{v}, \vec{w}> = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})(i)\cdot\vec{w}(i) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\vec{u}(i)+\mu\vec{v}(i))\cdot\vec{w}(i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda\vec{u}(i)\vec{w}(i)+\mu\vec{v}(i)\vec{w}(i)) = \sum_{i=1}^{n}\lambda\vec{u}(i)\vec{w}(i)+\sum_{i=1}^{n}\mu\vec{v}(i)\vec{w}(i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)\vec{w}(i)+\mu\sum_{i=1}^{n}\vec{v}(i)\vec{w}(i) = \lambda<\vec{u},\vec{w}>+\mu<\vec{v},\vec{w}>$$

rcizio: Provare linearità rispetto al secondo argomento.

ernativamente provo prima la simmetria.

$$\vec{u},\vec{v}> = \sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)\vec{v}(i) = \sum_{i=1}^{n}\vec{v}(i)\vec{u}(i) = <\vec{v},\vec{u}>$$

lla 1) e 3) $\Rightarrow$ 2)

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

$$,\lambda\vec{v},\mu\vec{w}> = <\lambda\vec{v}+\mu\vec{w},\vec{u}> = \lambda<\vec{v},\vec{u}>+\mu<\vec{w},\vec{u}> =$$

$$\lambda<\vec{u},\vec{v}>+\mu<\vec{u},\vec{w}>$$

ostrazione 4):

servazione: $\mathbb{R}^2$

$$\ldots),\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}> = 4 \qquad <\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}> = -3 \qquad <\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}> = 0$$

inito positivo: $\Longleftrightarrow \forall\vec{u}$

$$\vec{u},\vec{u}> = \sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)\vec{u}(i) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{u}(i))^2 \geq 0$$

$$(\vec{u}(1))^2+\ldots+(\vec{u}(n))^2 \geq 0 \leftarrow$$ perché somma di quadrati.

poniamo $\vec{u}=\vec{0} \Rightarrow <\vec{0},\vec{v}> = <\vec{0}\cdot\vec{u},\vec{v}> = 0<\vec{u},\vec{v}> = 0$

dentemente $<\vec{0},\vec{0}> = 0$

$\vec{u},\vec{u}> = 0 \Rightarrow \vec{u}=\vec{0}$

atti

$$\vec{u}(1)^2+\ldots+\vec{u}(n)^2 = 0 \; *$$

$\vec{u}(1)\neq 0 \Rightarrow \vec{u}(1)^2 = \delta > 0$ — contraddizione perché se * è vera

$<\vec{u},\vec{u}> \geq \delta^2 > 0$ — allora non può essere $\vec{u}(1)\neq 0$.

lora è sensata l'espressione:

$$\sqrt{<\vec{u},\vec{u}>} = |\vec{u}| \quad \text{modulo di } \vec{u}$$

$=0 \Longleftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$.

oposizione: se $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ sono vettori di una base di V
$\Rightarrow$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ sono linearm indipendenti, ossia non esiste nessuna
lazione lineare non banale cioè: $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \vec{0}$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

n: Infatti
$\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 \dots \lambda_n \vec{b}_n = \vec{0} = 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_n$
unicità della decomposizione implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

empio: Consideriamo il sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$

$(2, -1, 1)$
$(3, 2, 2)$
$(5, 1, 3)$

Non sono linearm. indipendenti perchè la terza è la somma delle altre due.

14/03/2012

ordiamo che se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, una n-upla ordinata
vettori $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ di V si dice base $\Longleftrightarrow$
$\vec{v} \in V, \exists! \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} / \vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$
a base di V ci consente di identificare ogni vettore di V con un
ttore di $\mathbb{K}^n$.

$$V \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad\qquad (\vec{v})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$$
$$\vec{v} \longmapsto (\vec{v})_{\mathcal{B}}$$

vettore colonna delle componenti di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. *

suriettiva:
vviamente trattasi di corrispondenza biunivoca, ossia $\forall \vec{u} \in \mathbb{K}^n$,
$\vec{v} \in V / (\vec{v})_{\mathcal{B}} = \vec{u}$, infatti basta scegliere $\vec{v} = \vec{u}(1)\vec{b}_1 + \dots + \vec{u}(n)\vec{b}_n$
uivalentemente se $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ basta scegliere $\vec{v} = u_1 \vec{b}_1 + \dots + u_n \vec{b}_n$

devono essere uguali oppure vale anche se uno è multiplo dell'altro?

iniettiva, ossia $(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}} = (\vec{v}_2)_{\mathcal{B}} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

sservazione:
pponiamo che $(\vec{v})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, (\vec{u})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})_{\mathcal{B}} = \lambda(\vec{u})_{\mathcal{B}} + \mu(\vec{v})_{\mathcal{B}} =$

fin: Un versore è un vettore di modulo 1.

$\vec{u}$ versore $\iff |\vec{u}| = 1$

sservazione: Ad ogni vettore colonna non nullo corrispondono due versori

$$e_{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \qquad -e_{\vec{u}} = -\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

ortogonali 2 a 2,

oposizione: Siano $\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}$ colonne non nulle di $\mathbb{R}^n$, allora sono linearmente indipendenti.

ova:

Sia $\lambda_1\vec{b_1} + \lambda_2\vec{b_2} + \dots + \lambda_n\vec{b_n} = \vec{O}$ una combinazione lineare nulla.

oviamo che $\lambda_i = 0 \quad \forall \; 1 \leq i \leq n$

serviamo che: $0 = \langle \lambda_1\vec{b_1} + \dots + \lambda_n\vec{b_n} \rangle =$ linearità rispetto al I argomento

$= \lambda_1 \langle \vec{b_1}, \vec{b_1} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{b_1}, \vec{b_2} \rangle + \dots + \lambda_n \langle \vec{b_n}, \vec{b_1} \rangle =$

$= \lambda_1 |\vec{b_1}|^2 \Rightarrow \lambda_1 \underbrace{|\vec{b_1}|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

oprietà: Supponiamo che $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n})$ siano tali che

$$\langle \vec{b_i}, \vec{b_j} \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

particolare: $|\vec{b_i}| = 1 \quad \forall \; 1 \leq i \leq n$

lora $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n})$ è una base di $\mathbb{R}^n$ (detta ortonormale)

: La base canonica di $\mathbb{R}^n$ $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ è ortonormale.

fatti: $\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

nost. Proveremo che $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{v} = \lambda_1\vec{b_1} + \dots + \lambda_n\vec{b_n}$ per degli unici λ_i.

: trovare λ_1 considero $\langle \vec{v}, \vec{b_1} \rangle = \langle \lambda_1\vec{b_1} + \lambda_2\vec{b_2} + \dots + \lambda_n\vec{b_n}, \vec{b_1} \rangle =$

linearità rispetto al I argomento)

$= \lambda_1 \langle \vec{b_1}, \vec{b_1} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{b_2}, \vec{b_1} \rangle + \dots + \lambda_n \langle \vec{b_n}, \vec{b_1} \rangle = \lambda_1$

alogamente si prova che $\lambda_i = \langle \vec{v}, \vec{b_i} \rangle \quad \forall \; 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \mathcal{B} = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

empio: Sia $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Provare che $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ è ortonormale.

Scrivere $\vec{u}$ come comb. lineare di $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$.

$x+3y=u_1$ $\quad 2(u_1-3y)+y=u_2 \quad -5y=u_2-2u_1$

$2x+y=u_2$

$=\frac{1}{5}(2u_1-u_2)$

$=u_1-\frac{3}{5}(2u_1-u_2)$

lcune ulteriori proprietà del prodotto scalare

cordiamo che $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$

$<\vec{u},\vec{v}>=\sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)\vec{v}(i)$

che $|\vec{u}|=\sqrt{<\vec{u},\vec{u}>}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)^2}$

le la disuguaglianza di Schwarz:

$\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$

$|<\vec{u},\vec{v}>|\leq|\vec{u}||\vec{v}|$

$n=1$ è nota $a,b\in\mathbb{R}$

$|<a,b>|=|a\cdot b|=|a||b|$

inizione: Siano $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$

$\cos(\vec{u},\vec{v})$ (coseno angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$)

definito da:

$<\vec{u},\vec{v}>=\cos(\vec{u},\vec{v})|\vec{u}||\vec{v}|$

vede che se $\vec{u}=\vec{0}$, $\cos(\vec{0},\vec{v})=$ indeterminato

se $\vec{u}\neq\vec{0}$ e $\vec{v}\neq\vec{0}$, $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{<\vec{u},\vec{v}>}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

empio: Siano $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ e $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ Calcolare $\cos(\vec{u},\vec{v})$

$s(\vec{u},\vec{v})=\frac{3+4-2}{\sqrt{6}\sqrt{17}}=\frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{17}}$

$s(\vec{u},\vec{v})|=\frac{|<\vec{u},\vec{v}>|}{|\vec{u}||\vec{v}|}\leq 1$

azie a Schwarz, si prova che $|\ |:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è una norma, ossia

rifica le seguenti proprietà

$|\vec{u}|\geq 0$ e $|\vec{u}|=0 \Rightarrow \vec{u}=\vec{0}$

) $|\lambda\vec{u}|=|\lambda||\vec{u}|$ $\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\vec{u}\in\mathbb{R}^n$

) $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (disuguaglianza di Minkowski o triangolare)

Esempio: Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Trovare $\pi_{[\vec{u}]}(\vec{v})$

$$\pi_{[\vec{u}]}(\vec{v}) = \frac{2+1+1+3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

Osservazione: $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{v} = \pi_{[\vec{u}]}(\vec{v}) + (\vec{v} - \pi_{[\vec{u}]}(\vec{v}))$$

$$<\pi_{[\vec{u}]}(\vec{v}), \vec{v} - \pi_{[\vec{u}]}(\vec{v})> = 0$$

$$<\pi_{[\vec{u}]}(\vec{v}), \vec{v}> - |\pi_{[\vec{u}]}(\vec{v})|^2 = <\frac{<\vec{v},\vec{u}>}{|\vec{u}|^2}\vec{u}, \vec{v}> - |\pi_{[\vec{u}]}(\vec{v})|^2$$

linearità rispetto al I argomento

$$\Rightarrow \frac{<\vec{v},\vec{u}>}{|\vec{u}|^2} <\vec{v},\vec{u}> - <\frac{<\vec{v},\vec{u}>}{|\vec{u}|^2}\vec{u}, \frac{<\vec{v},\vec{u}>\vec{u}}{|\vec{u}|^2}> =$$

$$\frac{<\vec{v},\vec{u}>^2}{|\vec{u}|^2} - \frac{<\vec{v},\vec{u}>^2}{|\vec{u}|^4} \underbrace{<\vec{u},\vec{u}>}_{|\vec{u}|^2} = 0$$

20/03/2012

Ricordiamo che una base di $\mathbb{R}^n$ euclideo è un insieme ordinato di vettori $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) / <\vec{b}_i, \vec{b}_j> = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

In particolare $|\vec{b}_i| = 1 \quad \forall\ 1 \le i \le n$ grazie al procedimento di Gram-Schmidt, per ogni base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ di $\mathbb{R}^n$ si può costruire una base ortonormale, definendo:

$\vec{b}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ Induttivamente

$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - <\vec{u}_2 \vec{b}_1> b_1$

$\Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|}$ (già costruito $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots$)

$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - <\vec{u}_3, \vec{b}_1> \vec{b}_1 - <\vec{u}_3, \vec{b}_2> \vec{b}_2$

$\vec{b}_3 = \frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}_3|}$ e così via ...

$\vec{AA} = \vec{0}$

) $\vec{AB} = -\vec{BA}$

) $\forall O \in \mathcal{E}_n \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$B = A + \vec{u} \qquad C = B + \vec{v}$

) equivale a provare che se $\vec{AB} = \vec{u}$ e $\vec{BC} = \vec{v}$ allora $C = A + (\vec{u} + \vec{v})$?

$A + (\vec{u} + \vec{v}) = (A + \vec{u}) + \vec{v} = B + \vec{v} = C$

basta applicare a) $A = B = C \quad \vec{AA} + \vec{AA} = \vec{AA} \Rightarrow 2\vec{AA} = \vec{AA} \Rightarrow \vec{AA} = \vec{0}$

applicare a) con $A = C \quad \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} = -\vec{BA}$

$\forall O \in \mathcal{E}^n \quad \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{AO} =$ (usando c) $= \vec{OB} - \vec{OA}$

$\mathcal{E}^n$ è uno spazio metrico rispetto alla funzione distanza definita da:

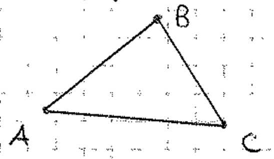
$d(A,B) = |\vec{AB}|$

La funzione "d" si dice "distanza" perchè verifica le seguenti proprietà:

a) $d(A,B) \geq 0 \qquad d(A,B) = 0 \iff A = B$

b) $d(A,B) = d(B,A)$ (simmetria)

c) disuguaglianza triangolare: $\forall A, B, C, \; d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$



Proviamo la c)

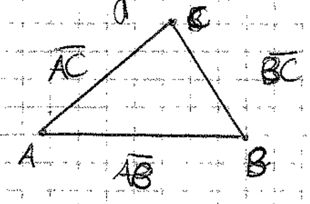
$d(A,B) = |\vec{AB}| = |\vec{AC} + \vec{CB}| \leq \quad \forall C \in \mathcal{E}^n$ Chasles

$\leq |\vec{AC}| + |\vec{CB}| = d(A,C) + d(C,B)$

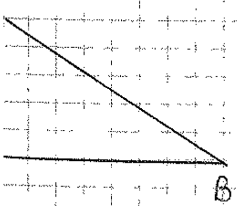
Notazione:

$|\vec{AB}| = d(A,B) = \overline{AB}$

Analogamente un triangolo in $\mathcal{E}^n$ è la scelta di 3 punti $A, B, C \in \mathcal{E}^n$



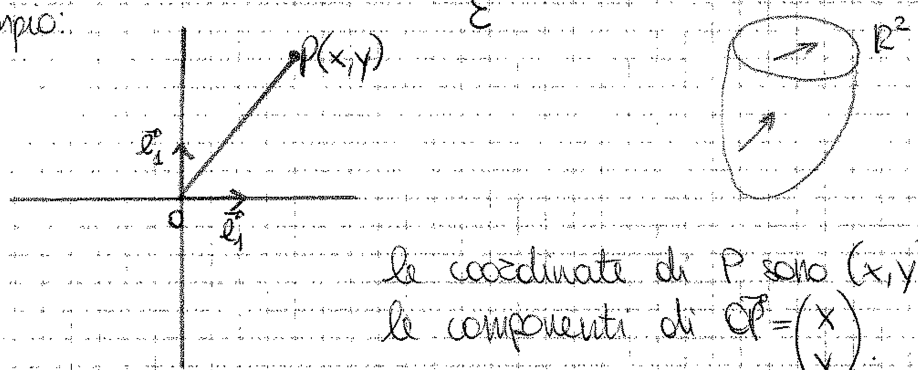
dico che ABC è rettangolo in A $\iff \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 0$



ordiamo che un riferimento affine di $\mathcal{E}^n$, 21/03/2012
spazio affine n-dimensionale è una coppia $R=(O;B)$ dove $O\in\mathcal{E}^n$
etto origine) e $B=(\vec{b_1},\dots,\vec{b_n})$ è una base di $\mathbb{R}^n$.
$P\in\mathcal{E}^n$, le R-coordinate di P sono $(x_1,x_2,\dots,x_n) \Leftrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\vec{OP}}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{b_i}$

particolare, se B è ortonormale $x_i=\langle\vec{OP},\vec{b_i}\rangle$.
particolare se $B=E_n=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ le coordinate di P sono $(x_1,\dots,x_n)$
$\Rightarrow \vec{OP}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

empio: $\mathcal{E}^2$



le coordinate di P sono (x,y) proprio perché le componenti di $\vec{OP}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

ormula distanza tra due punti:
iano $P_1,P_2\in\mathcal{E}^n$.
$d(P_1,P_2)=|\vec{P_1P_2}|$

$=(O;E_n)$ $E_n=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$

$(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $P_2(y_1,y_2,\dots,y_n)$
$(P_1,P_2)=|\vec{P_1P_2}|=|\vec{OP_2}-\vec{OP_1}|=\left|\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}y_1-x_1\\y_2-x_2\\ \vdots\\y_n-x_n\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$

sercizio: Provare che la stessa formula vale per qualsiasi base ortonormale (se la base non è ortonormale ci sono delle correzioni).

empio: In $\mathcal{E}^3$. Siano dati $P_1(2,1,5)$, $P_2(3,-1,4)$.
$|\vec{P_1P_2}|=\sqrt{(2-3)^2+(1+1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{6}$

particolare si è noto che se $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$
$|\vec{P_1P_2}|=\vec{OP_2}-\vec{OP_1}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\ \vdots\end{pmatrix}$

ercizio 1) Scrivere equazioni parametriche di retta di $\mathcal{E}^3$ passante per $P_0=(2,4,-2)$ e parallela a $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+5t \\ z = -2+7t \end{cases}$$

ercizio 2) Scrivere equazioni parametriche di retta che passa per $P_1(2,1,4)$ e $P_2(3,2,-4)$

$$\vec{P_1P_2}=\begin{pmatrix}3-2\\2-1\\-4-4\end{pmatrix}$$

$$x = 2+t$$
$$y = 1+t$$
$$z = 4-8t$$

ercizio 3) Si consideri la retta dell'es 1

$$x = 2+2t$$
$$y = 4+5t \quad (*)$$
$$z = -2+7t$$

rivere equazioni cartesiane per r.

servio(amo) che $(*) \iff \begin{cases} 5x = 10+10t \\ 2y = x+10t \\ z = -2+7t \end{cases}$

ttraendo II da prima: $5x-2y=2 \iff 5x-2y-2=0$

oltre $(*)$ è equivalente a: $\begin{cases} 7x = 14+14t \\ 2z = -4+14t \\ y = 4+5t \end{cases}$ Per una retta passano infiniti piani.

ttraendo II da prima: $7x-2z-18=0$

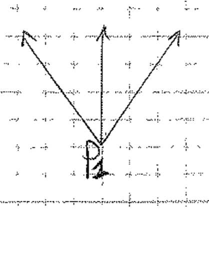
$$\begin{cases} 5x-2y-2=0 \\ 7x-2z-18=0 \end{cases}$$ eq. cartesiane della retta r.

retta vettoriale generata da $\vec{u}$ (tutti i multipli di $\vec{u}$)

finizione Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{E}^n$ e $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ / $[\vec{u}] \neq [\vec{v}]$ → $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno direzioni $\neq$

piano affine passante per P_1 generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (o parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$). l'insieme dei punti

$$\pi_{P_1,\vec{u},\vec{v}} = \{ P = P_1 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \;/\; \lambda,\mu \in \mathbb{R} \}$$
$$(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$



$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$
$$(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) \times \vec{k} \quad \vec{\imath} \times (\vec{\imath} \times \vec{k})$$
$$\vec{0} \neq -\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & & \\ y-y_0 & \vec{u} & \vec{v} \\ z-z_0 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 4 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z-4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)(5-6) - (y-2)(10-12) + (z-4)(4-4) = 0$$
$$-x+3+2y-4=0 \Rightarrow -x+2y-1=0 \Rightarrow x-2y+1=0$$

Esercizio: Scrivere un'equazione cartesiana del piano che passa per $P_1(1,0,1)$, $P_2(0,1,1)$, $P_3(1,1,0)$ (Anche parametriche)

Soluzione: $\pi_{P_1,P_2,P_3} = \{P / \overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ sono complanari $[P = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} + \mu \overrightarrow{P_1P_3}]\}$

$\Rightarrow \det(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$

$$\overrightarrow{P_1P} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

complanarità

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(x-1) - y - (z-1) = 0 \qquad x+y+z-2=0$$

$P_1(3,1,4) \quad P_2(3,3,2) \quad P_3(1,1,4)$ (somma delle componenti)

$x+y+z=8$

Eq. parametriche:

$$\begin{cases} x = 1-\lambda \Rightarrow \lambda = 1-x \\ y = \lambda+\mu \qquad y = 1-z-x+1 \Rightarrow x+y+z-2=0 \\ z = 1-\mu \qquad \mu = 1-z \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 146

pero di poter dare quindi per scontato che ogni piano di $\mathcal{E}^3$ può
rappresentarsi per mezzo di un'equazione della forma $ax+by+cz+d=0$

Per esempio: Piano per 3 punti P_1, P_2, P_3.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

→ Sono colonne costanti perché andremo a sostituire le coordinate.

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ Tutti i piani al variare di a, b, c passano per (x_1, y_1, z_1)

Equaz. STELLA di piani per P_1.

Esercizio: Scrivere equazione piano passante per $P_1(1,2,1)$ $P_2(1,1,0)$ $P_3(0,1,1)$.

Soluz: $a(x-1)+b(y-2)+c(z-1)=0$ ← Equaz. STELLA di piani per P_1.

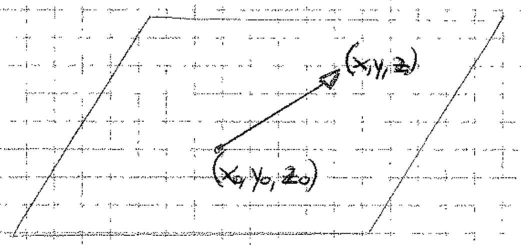
Impongo passaggio per P_2 e P_3.

$a(1-1)+b(1-2)+c(0-1)=0$
$a(0-1)+b(1-2)+c(1-1)=0$

$\begin{cases} b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=-c \\ a=c \end{cases}$

Prendendo $c=1$ ottengo $b=-1$ e $a=1$.
Pertanto un'eq. cercata è: $x-\cancel{1}-y+\cancel{2}+z-\cancel{1}=0$
$x-y+z=0$

Continuando: Se $(x_0,y_0,z_0) \in \pi: ax+by+cz+d=0$
$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
$d=-ax_0-by_0-cz_0$



$= a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

π_1 si ottiene ponendo $\lambda=1, \mu=0$.
π_2 si ottiene ponendo $\lambda=0, \mu=1$.

ffermo che se $r=\pi_1\cap\pi_2$
$\Rightarrow r\subseteq\pi_{(\lambda,\mu)}$

nfatti $(x_0,y_0,z_0)\in\pi_1\cap\pi_2$
$\Rightarrow \pi_1(x_0,y_0,z_0)=\pi_2(x_0,y_0,z_0)=0$

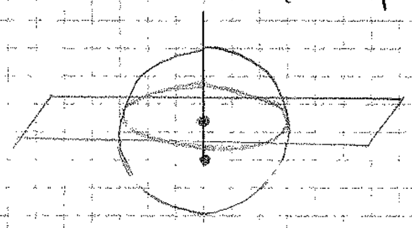
$(x_0,y_0,z_0)\in\pi_{(\lambda,\mu)}(x_0,y_0,z_0)$
$\lambda\pi_1(x,y,z)+\mu\pi_2(x,y,z)=0$
$\lambda\pi_1\cancel{(x_0,y_0,z_0)}+\mu\pi_2\cancel{(x_0,y_0,z_0)}=0$
0 perchè $P_0\in\pi_1$ $\quad$ 0 perchè $P_0\in\pi_2$

sercizio: Sia
$$r=\begin{cases}x=2-3t\\ y=4+2t\\ z=5-t\end{cases}$$
scrivere eq di fascio di piani avente per asse la retta r.
oluz: Basta scrivere r come intersezione di due piani che la contengono.
er esempio, dalla terza equazione si trova $t=5-z$

ostituendo nelle prime due si ottiene $x=2-3(5-z)$
$y=4+2(5-z)$
$x-3z+13=0$ piano // asse y
$y+2z-14=0$ piano // asse x.

ome fare a dire che $x-3z+13=0$ // asse y:
$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0$$

sservazione: $S^2 \cap \pi$ (intersezione sfera piano) è una circonferenza.



nfatti sia P_0 il centro della sfera e sia Q_0 il punto di intersezione
a la retta per P_0 ortogonale al piano π e il piano π stesso
: $P \in S \cap \pi$ $\quad d(P,Q)^2 = R^2 - d(P_0, \pi)^2$

uazione cartesiana di sfera:
ia $P(x,y,z) \in S^2_{P_0}(R)$
D (per defin) $\quad d(P_0,P)^2 = R^2 \iff |\vec{P_0P}|^2 = R^2$

$$\left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\|^2 = R^2$$

Equazione canonica della sfera di centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e raggio R.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \quad (*)$$

sservazione: Se fosse in $\mathcal{E}^1$ $\quad (x-x_0)^2 = R^2 \quad x = \begin{cases} x_0 + R \\ x_0 - R \end{cases}$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \quad$ (circonferenza)

equazione $(*)$ può anche scriversi nella forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

ve $A = -2x_0 \quad B = -2y_0 \quad C = -2z_0$
$D = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R$

a cui:
$x_0 = -\frac{A}{2} \quad y_0 = -\frac{B}{2} \quad z_0 = -\frac{C}{2}$
$^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - D$

sercizio: Si consideri la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y - 5z - 10 = 0$
eterminare coordinate del centro e il raggio.

oluzione:
$x_0 = \frac{3}{2} \quad y_0 = -3 \quad y_0 = \frac{5}{2}$
$\left(\frac{3}{2}, -3, \frac{5}{2}\right)$ (coordinate centro)
$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 10 = \frac{9}{4} + 9 + \frac{25}{4} + 10 =$

sercizio: Determinare centro e raggio della circonferenza:

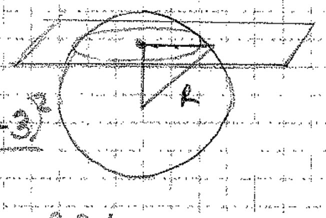
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+2y-10z-15=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$$

oluzione:

rovare centro sfera per determinare raggio della circonferenza.

$C(2,-4,5)$ $C(2,-1,5)$

$R^2 = 4+16+25+15 = 60$ $R^2 = 4+1+25+15 = 45$



$r^2 = R^2 - d(\pi, C)^2 =$

$= 60 - \dfrac{(2\cdot 2-(-4)+5-3)^2}{6} = $ $45 - \dfrac{(2\cdot 2-(-1)+5-3)^2}{6}$

$= 60 - \dfrac{100}{6} = \dfrac{130}{3}$ $45 - \dfrac{49}{6} = \dfrac{270-49}{6} = \dfrac{221}{6}$

er trovare il centro basta scrivere equazione della retta che passa per il centro ortogonale a π.

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -4-t \\ z = 5+t \end{cases}$$

$4+4t+4+t+5+t-3=0$

$10+6t=0$ $6t=-10 \Rightarrow t = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3}$

$C'\left(2+2\left(-\dfrac{5}{3}\right), -4+\dfrac{5}{3}, 5-\dfrac{5}{3}\right) = ($

ntro circonf.

ercizi:

1) Trovare centro e raggio della sfera: $2x^2+y^2+z^2-5x-y-z-7=0$.

Non è una sfera.

2) $3x^2+3y^2+3z^2-9x-10y+7z-5=0$

Divido per 3 e poi applico la formula:

$x^2+y^2+z^2-3x-\dfrac{10}{3}y+\dfrac{7}{3}z-\dfrac{5}{3}=0$

$C = ($

$R =$

3) Scrivere eq cartesiana per la circonferenza che passa per $(1,1,0)$ $(0,1,1)$ $(1,0,1)$.

$x+y+z-2=0$ equazione piano passante per i 3 punti.

$) = S_{(\lambda;\mu)}(x,y,z) = \lambda S_1(x,y,z) + \mu S_2(x,y,z)$ $\forall(\lambda;\mu)$, $S_{(\lambda,\mu)}$ è (quasi) una sfera.

tiamo dicendo che $\forall(\lambda;\mu) \neq (0,0)$

$\lambda S_1(x,y,z) + \mu S_2(x,y,z) = 0$ è equazione di una sfera.

$\lambda+\mu)x^2 + (\lambda+\mu)y^2 + (\lambda+\mu)z^2 + (\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z +$
$+ \lambda D_1 + \mu D_2 = 0.$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{\lambda A_1 + \mu A_2}{\lambda+\mu}x + \frac{\lambda B_1 + \mu B_2}{\lambda+\mu}y + \frac{\lambda C_1 + \mu C_2}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda D_1 + \mu D_2}{\lambda+\mu} = 0$$

però $\lambda + \mu \neq 0$.

in particolare $\lambda = -\mu$ $(\lambda = 1, \mu = -1)$

$_1(x,y,z) - S_2(x,y,z) = (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2)z + D_1 - D_2 = 0.$ piano radical

$S_{(1;0)} = S_1$ $S_{(0;1)} = S_2$

l piano radicale si può vedere come una sfera di raggio infinito.

sservazione:

gni $S_{(\lambda;\mu)}$ (ogni sfera del fascio generato da S_1 e S_2) contiene $S_1 \cap S_2$.

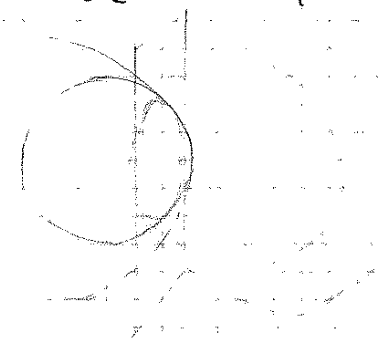
ssia $P \in S_1 \cap S_2 \iff P \in S_{(\lambda;\mu)}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$

Infatti se $P(a,b,c) \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow S_1(a,b,c) = S_2(a,b,c) = 0 \Rightarrow$

$(\lambda S_1 + \mu S_2)(a,b,c) = \lambda S_1(a,b,c) + \mu S_2(a,b,c) = 0 \Rightarrow P \in S_{(\lambda;\mu)}$

iceversa è ovvio.

llora $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap \Pi_{radicale}$ ed è quindi una circonferenza.



sercizio: Sia data la circonferenza $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+5z=0 \\ 3x-y+z+2=0 \end{cases}$

Scrivere equazione fascio di sfere da essa determinato.

Soluzione: Equazione fascio richiesto è:

$\lambda(x^2+y^2+z^2-2x-2y+5z) + \mu(3x-y+z+2) = 0$

Una matrice a entrate in un insieme X è un elemento di:
$$X^{\underline{m}\times\underline{n}} = \{\underline{m}\times\underline{n} \to X\}$$
Ci limiteremo a lezione al caso $X = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ è un campo)
Quindi $\mathbb{K}^{\underline{m}\times\underline{n}}$ è lo spazio vettoriale delle matrici $m\times n$.
Infatti se $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $\lambda A + \mu B : \underline{m}\times\underline{n} \to \mathbb{K}$
$(\lambda A+\mu B)(i,j) = \lambda A(i,j) + \mu B(i,j)$ ⇐ combinazione lineare di matrici a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Esempio: $A \in \mathbb{K}^{2\times 3}$
$A : \{1,2\}\times\{1,2,3\} \to \mathbb{K}$
$A : \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\} \to \mathbb{K}$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matrice $m\times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

è l'unica funzione $A : \underline{m}\times\underline{n} \to \mathbb{K}$ / $A(i,j) = a_{ij}$
$$\underline{m}\times\underline{n} = \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$$

Esempio:
$$2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 14 \\ 8 & 13 & -13 \end{pmatrix}$$

Una matrice $R \in \mathbb{K}^{1\times n}$ si dice (matrice) riga a n colonne.
Es: $(2,1,1,4) \in \mathbb{K}^{1\times 4} \cong (\mathbb{K}^4)^\vee$ ⇐ $\mathbb{K}^4$ duale.

Similmente una matrice $C \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ si dice (matrice) colonna $\mathbb{K}^{m\times} \cong \mathbb{K}^n$
Es: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \cong \mathbb{R}^4$

Ogni matrice può vedersi come riga di colonne o colonna di righe.
Ossia $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$A(C_1(A), C_2(A), \dots, C_m(A)) = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ R_2(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix}$$

Inoltre $\forall \alpha \in (\mathbb{K}^n)^\vee$
$(\alpha^T)^T = \alpha^{TT} = \alpha$.

Proprietà: la trasposizione è lineare, ossia conserva le combinazioni lineari.

In altri termini $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^n \quad \forall \alpha, \beta \in (\mathbb{K}^n)^\vee \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})^T = \lambda \vec{u}^T + \mu \vec{v}^T$

$(\lambda \alpha + \mu \beta)^T = \lambda \alpha^T + \mu \beta^T$

Esempio: $\left[\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \end{pmatrix}^T$

$(\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2) = \lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2) = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^T + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T$

Prodotto di righe per colonne

Def: Per ogni $\alpha \in (\mathbb{K}^n)^\vee \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{K}^n$, si definisce un "prodotto"

$$\alpha \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha(i) \vec{u}(i) = \alpha(1) \vec{u}(1) + \dots + \alpha(n) \vec{u}(n) \in \mathbb{K}$$

O, ancora, se $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \quad (\Longleftrightarrow \alpha(i) = a_i)$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_n u_n =$

$= u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_n a_n$

Es: $(1, 2, -3) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 10 - 3 = 10$

Def: se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T \cdot \vec{v}$

Proprietà: Il prodotto riga per colonna è bilineare, ossia

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in (\mathbb{K}^n)^\vee \quad \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u} \in \mathbb{K}^n \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$(\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2) \cdot \vec{u} = \lambda \alpha_1 \vec{u} + \mu \alpha_2 \vec{u}$

$\alpha(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda \alpha \vec{u}_1 + \mu \alpha \vec{u}_2$

Dimostrazione:

$[\lambda(a_1, \dots, a_n) + \mu(b_1, \dots, b_n)] \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \dots, \lambda a_n + \mu b_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} =$

$$A\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\49\end{pmatrix}$$

Si osservi che $A\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}R_1(A)\vec{u}\\R_2(A)\vec{u}\\\vdots\\R_m(A)\vec{u}\end{pmatrix}$

Es: $\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(3,1)\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}\\(5,2)\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\19\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Proposizione: $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$, la funzione $A\cdot:\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}^m$, $\vec{u}\longmapsto A\cdot\vec{u}$

è lineare, ossia, $\forall\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{K}^n$ $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$

$A(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda A\vec{u}+\mu A\vec{v}$

Dimostrazione: $A(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\overset{def.}{=}(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})(1)C_1(A)+(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})(2)C_2(A)+\ldots+$
$+(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})(n)C_n(A)=$
$=(\lambda\vec{u}(1)+\mu\vec{v}(1))C_1(A)+\ldots\ldots+(\lambda\vec{u}(n)+\mu\vec{v}(n))C_n(A)=$
$=\lambda(\vec{u}(1)C_1(A)+\ldots+\vec{u}(n)C_n(A))+\mu(\vec{v}(1)C_1(A)+\ldots+\vec{v}(n)C_n(A))=$
$=\lambda A\vec{u}+\mu A\vec{v}$

Prodotto di due matrici:

Esiste una funzione bilineare $\mathbb{K}^{m\times p}\times\mathbb{K}^{p\times n}\longrightarrow\mathbb{K}^{m\times n}$, $(A,B)\longmapsto A\cdot B$

dove AB è l'unica matrice tale che:

$(AB)\underset{\mathbb{K}^n}{\vec{u}}=A(B\vec{u})$

In pratica $A\cdot B$ è l'unica matrice tale che:

$AB(i,j)=R_i(A)C_j(B)$

2×3 $3\times2\to2\times2$

Es: Calcolare il prodotto $\underset{A}{\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&3\end{pmatrix}}\underset{B}{\begin{pmatrix}2&1\\4&5\\1&7\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}R_1(A)C_1(B)&R_1(A)C_2(B)\\R_2(A)C_1(B)&R_2(A)C_2(B)\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\cdot2+1\cdot4+2\cdot1&20\\3&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&20\\3&18\end{pmatrix}$$

Osservazione: Sia $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$. Allora $C_j(A)=A\cdot\vec{e}_j$

Infatti $A\vec{e}_j=\sum_{i=1}^{n}\vec{e}_j(i)C_i(A)=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}C_i(A)=C_j(A)$

Si era visto che è definito un prodotto righe per colonne

$\alpha \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha(i) \cdot \vec{u}(i)$

Essendo $\alpha \cdot \vec{u} \in \mathbb{K}$, può vedersi come una matrice 1×1

$(\alpha \cdot \vec{u})^T = \alpha \cdot \vec{u} = \vec{u}^T \cdot \alpha^T$

$= (\vec{u}(1), \dots, \vec{u}(n)) \cdot \begin{pmatrix} \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(n) \end{pmatrix}$

$\vec{u}^T \cdot \alpha^T$

Ricordiamo ancora che se $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, A^T è l'unica matrice $n \times m$ definita da una delle 2 seguenti (equivalenti) uguaglianze:

$C_i(A^T) = R_i(A)^T \quad (*)$

$R_j(A^T) = C_j(A)^T$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Siano ora $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{K}^{p \times n}$

$A \cdot B \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\underset{\mathbb{K}^{n \times m}}{\underset{\cap}{(A \cdot B)^T}} = B^T \cdot A^T$

Idea della dimostrazione:

Basta far vedere $\forall\, 1 \leq i \leq m$

$C_i[(A \cdot B)^T] = C_i(B^T \cdot A^T)$

$\parallel$

$[R_i(A \cdot B)]^T = ((A \cdot B)(i,1), \dots, (A \cdot B)(i,n))$

$(A \cdot B)(i,j) = R_i(A) \cdot C_j(B) = C_j(B^T) \cdot R_i(A^T)$

Continuare per esercizio: È sul libro.

MATRICE QUADRATA:

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ si dice quadrata

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ si dice simmetrica $\Leftrightarrow A^T = A$,

antisimmetrica $\Leftrightarrow A^T = -A$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Esercizio: Ogni $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si scrive in modo unico come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{\text{antisimmetrica}}$$

Provare per casa.

Esercizio: Sia $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Big/ \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

1) provare che $\mathcal{C}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
2) provare che il prodotto di matrici in $\mathcal{C}$ è commutativo.
3) Riconoscete $\mathcal{C}$? $\mathbb{C}$

Soluzione:

1) Siano $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c & -\lambda b - \mu d \\ \lambda b + \mu d & \lambda a + \mu c \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$$

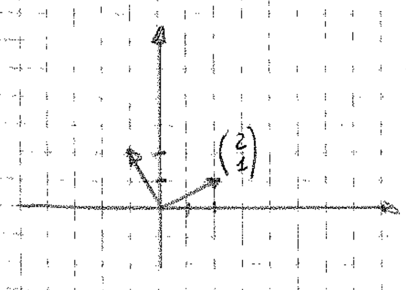
Base di $\mathcal{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a \overset{\text{identità}}{\mathbb{1}_2} + b\, \mathbb{I} \leftarrow i$$

$$A(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (A\vec{e}_1, A\vec{e}_2) = (C_1(A), C_2(A)) = A$$

$$\mathbb{I}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = (a\mathbb{1} + b\mathbb{I})(c\mathbb{1} + d\mathbb{I}) = (ac - bd)\mathbb{1} + (bc + ad)\mathbb{I}$$



$$\mathbb{I}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Come intuibile dall'ultimo esempio, il prodotto di matrici induce su $\mathbb{K}^{n\times n}$ una operazione binaria interna

$$(A, B) \in \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \longmapsto A \cdot B \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Quindi sia:
$$Gl_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / \exists A^{-1}\}$$

$Gl_n(\mathbb{K})$ è un gruppo (non commutativo) detto gruppo lineare.
Infatti, $A, B \in Gl_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A\cdot B \in Gl_n(\mathbb{K})$ in quanto esiste l'inversa data da $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

Infatti $B^{-1}(A^{-1}\cdot A)\,B = B^{-1}\mathbb{1}\cdot B = \mathbb{1}$
$A(B\cdot B^{-1})A^{-1} = A\cdot \mathbb{1}\cdot A^{-1} = \mathbb{1}$

Quindi il prodotto di matrici in $Gl_n(\mathbb{K})$ è interno; inoltre è associativo, c'è l'elemento neutro $\mathbb{1}$ $\forall A \in Gl_n(\mathbb{K}), \exists A^{-1}$ per costruzione.

Per mostrare che non è commutativo, prendete due matrice A e B 2×2 a piacere.

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. Allora $A \in Gl_2(\mathbb{R})$. Infatti $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}$

Regola pratica per trovare l'inversa 2×2.

Come fare dimost: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Imporre $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \\ ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$$ Risolvendolo troviamo che: (se esiste)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esempio: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 C_1(A) + \lambda_2 C_2(A) + \dots + \lambda_n C_n(A) = \vec{0}$ (**)

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

ra (**) per definizione di prodotto di matrici è equivalente a:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Siccome } \exists A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Viceversa siano $C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)$ una base di $\mathbb{K}^n$. Cerchiamo $B \in \mathbb{K}^{n \times n} / A \cdot B = \mathbb{1}_n$

$\cdot (C_1(B), C_2(B), \dots, C_n(B)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

$(AC_1(B), AC_2(B), AC_3(B), \dots, AC_n(B)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

Otteniamo così n-sistemi a n incognite

$A \cdot C_1(B) = \vec{e}_1$

$\vdots$

$A \cdot C_2(B) = \vec{e}_n$

Siccome $C_1(A), \dots, C_n(A)$ è una base di $\mathbb{K}^n$, $\forall 1 \leq j \leq n$

$\exists \lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{jn} / \vec{e}_j = \lambda_{j1} C_1(A) + \lambda_{j2} C_2(A) + \dots + \lambda_{jn} C_n(A)$

basta scegliere $C_j(B) = \begin{pmatrix} \lambda_{j1} \\ \lambda_{j2} \\ \vdots \\ \lambda_{jn} \end{pmatrix}$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1235 & 53 \\ 472 & 245 \end{pmatrix}$ è invertibile perché le colonne sono base di $\mathbb{R}^2$.

Impareremo ad associare ad ogni $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ uno scalare ($\in \mathbb{K}$) detto $\det(A)$ e una matrice A^* detta aggiunta di A che verifica la seguente proprietà:

$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n = (\det(A)\, \vec{e}_1, \dots, \det(A)\, \vec{e}_n) =$

$$= \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \det(A) \end{pmatrix}$$

sempio: $\begin{vmatrix} 3^{+} & \bar{1} & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \overset{+}{1} & 1 & 7 & 4 \\ 2 & \bar{-1} & \overset{+}{5} & \bar{9} & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 10^{+} & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -7 & -2 \end{vmatrix}$ Come determinare i segni.

sempio: Calcolare

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{3} & 2 & 5 \\ \overset{-}{5} & 3 & 8 \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -5(6+20)+3(9-35)-8(-12-14)$$
$$=0$$

roprietà del determinante:

ia det: $\underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n\text{-volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$ la funzione

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) \longmapsto \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \dots \wedge \vec{u}_n$$

llora det è una forma multilineare alternante ed è l'unica tale che $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \dots \wedge \vec{e}_n = 1$

ire che il determinante è alternante significa che scambiare la osizione di due elementi qualsiasi causa un cambiamento di segno.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

ssia $\vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_i \wedge \vec{u}_j \wedge \dots \wedge \vec{u}_n = -\vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_j \wedge \vec{u}_i \wedge \dots \wedge \vec{u}_n$

alternanza (antisimmetria) $\Rightarrow \vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_i \wedge \dots \wedge \vec{u}_i \wedge \dots \wedge \vec{u}_n = 0$

sempio: $\vec{u}_1 \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} = -\vec{u}_1 \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{u}_1 \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} = 0$

inearità rispetto al I argomento significa che $\forall \lambda, \mu$

$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 \wedge \dots \wedge \vec{u}_n = \lambda\vec{u} \wedge \vec{u}_2 \wedge \dots \wedge \vec{u}_n + \mu\vec{v} \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 \wedge \dots \wedge \vec{u}_n$

sercizio: Mostrare la linearità rispetto all'n-esimo argomento.

oluzione: $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-1} \wedge (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) =$

$= -(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{u}_2 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-1} \wedge \vec{u}_1 =$

$= -\lambda\vec{u} \wedge \vec{u}_2 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-1} \wedge \vec{u}_1 - \mu\vec{v} \wedge \vec{u}_2 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-1} \wedge \vec{u}_1 =$

$= \lambda\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-1} \wedge \vec{u} + \mu\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-1} \wedge \vec{v}$

${}_1C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A) = \vec{b}$

: $C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A) \neq 0$ ovvia

${}_1C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A)) \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A) = \vec{b} \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A)$

$x_1 C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A) + \cancel{x_2 C_2(A) \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A)} + \dots + \dots =$

$= \vec{b} \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A)$

: $C_1(A) \wedge \dots \wedge C_n(A) \neq 0$

$$= \frac{\vec{b} \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A)}{C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A)}$$

$${}_2 = \frac{C_1(A) \wedge \vec{b} \wedge C_3(A) \wedge \dots \wedge C_n(A)}{C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A)}$$

sempio:
$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ x - 3y + 7z = 2 \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{b}$

: calcolare y:

$\vec{u}_1 \wedge (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3) \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{b} \wedge \vec{u}_3$

$\cancel{x\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3} + y\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 + \cancel{z\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_3} = \vec{u}_1 \wedge \vec{b} \wedge \vec{u}_3$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3(8-21) - (4-14) + 5(3-4)}{3(-12+7) + 2(4-14) + 5(-1+6)} = \frac{+34}{+10} = \frac{17}{5}$$

efinizione: Sia $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\det(A) = |A| = A\vec{e}_1 \wedge A\vec{e}_2 \wedge A\vec{e}_3 \wedge \dots \wedge A\vec{e}_n = C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_n(A)$

roprietà: $A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$

onseguenza di regola di Cramer e del teorema (senza dimostrazione) di Binet:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 146

icordiamo che: 17/04/2012

una matrice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ si dice invertibile $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ /
$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$

iccome s'era detto che il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ segue che A è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

infatti se A è invertibile $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(\mathbb{1}) = 1$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0;$$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Viceversa se $\det(A) \neq 0$
$\exists B / A \cdot B = \mathbb{1}$

per trovare tale B $A(C_1(B), C_2(B), C_3(B), \dots, C_n(B)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

trovare la B equivale a risolvere i sistemi

$A \cdot C_j(B) = \vec{e}_j \qquad 1 \leq j \leq n$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ sistema risolubile con regola di Cramer.

Come determinare l'inversa di una matrice invertibile?

icordiamo che ciò è facile se $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$

infatti $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\det(A) = |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$

dove A^* si dice "aggiunta classica" di A: $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ si dice aggiunta classica, l'unica matrice $A^* \in \mathbb{K}^{n \times n}$ / $A \cdot A^* = \det(A) \mathbb{1}$

$$\Rightarrow A \cdot A^* = A^* A = (\det(A)\vec{e}_1, \det(A)\vec{e}_2, \dots, \det(A)\vec{e}_n) = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \quad A \cdot A^* = \det(A) \mathbb{1}$ implica

$A \cdot \dfrac{A^*}{|A|} = \mathbb{1} \Leftrightarrow A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

icetta per calcolare A^*

per ogni $1 \leq i, j \leq n$, sia

$a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ [determinante di sottomatrice quadrata ottenuta da A escludendo la i-esima riga e j-esima colonna]

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esercizio: Risolvere $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 5x + 7y = 17 \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix}$ dove $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118/31 \\ -9/31 \end{pmatrix}$$

Spazi di righe, colonne e ranghi di matrici:

Sia $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matrice

$$A = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ R_2(A) \\ \vdots \\ R_m(A) \end{pmatrix} = (C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A))$$

$1 \leq i \leq m \qquad R_i(A) \in (\mathbb{K}^n)^\vee$

$1 \leq j \leq n \qquad C_j(A) \in \mathbb{K}^m$

$\mathcal{C}(A) = [C_1(A), \dots, C_n(A)] = \{\lambda_1 C_1(A) + \dots + \lambda_n C_n(A) / \lambda_i \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^m$

Similmente denotiamo

$\mathcal{R}(A) = [R_1(A), \dots, R_m(A)] = \{\lambda_1 R_1(A) + \dots + \lambda_m R_m(A) / \lambda_i \in \mathbb{K}\} \subseteq (\mathbb{K}^n)^\vee$

$\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{R}(A)$ si dicono, rispettivamente, spazio delle colonne e delle righe di A.

$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{C}(A) = rk\text{-}col(A) \leftarrow$ rango colonna

$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{R}(A) = rk\text{-}riga(A) \leftarrow$ rango riga

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

rango riga$(A) = 2$ perchè $R_1(A), R_2(A)$ sono linearm. indipend. mentre $R_1(A) + R_2(A) = R_3(A)$.

consideravamo il sistema: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \cancel{5x_1 + 3x_3 = 8} \end{cases}$

$(1,1,2,3)+\mu(2,1,4,5)=(3,1,6,7)$

$=-1 \quad , \quad \mu=2$

sservazione: Sia $[R_1(A), R_2(A), \dots, R_n(A)]$ lo spazio riga di $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
Afferma che se sostituisco una qualsiasi riga (per es. prima) con una combinazione lineare di righe la riga più comb. lineare qualsiasi di righe.

$(A) \to R_1(A) + \lambda_2 R_2(A) + \dots + \lambda_n R_n(A)$

$R_1(A) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i R_i(A), R_2(A), \dots, R_n(A)]$

ef: Sia $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dice che A è ridotta per righe $\Longleftrightarrow$ ogni riga non nulla possiede almeno un elemento non nullo al di sotto del quale vi sono solo zeri.

na matrice A si dice ridotta per colonne $\Longleftrightarrow$ A^T è ridotta per righe.

sempio:
$$A=\begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 & \boxed{4} \\ 1 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
A è ridotta per righe

In una matrice ridotta $\left\{\begin{matrix}\text{per righe}\\ \text{per colonne}\end{matrix}\right\}$ il rango coincide con il numero di $\left\{\begin{matrix}\text{righe}\\ \text{colonne}\end{matrix}\right\}$ non nulle

Spiegazione: Supponiamo $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ridotta per righe e siano $R_1(A), R_2(A), \dots, R_s(A)$ le righe non nulle. Siano $i_1, i_2, \dots, i_s$ le posizioni degli elementi speciali in ciascuna riga.

$\lambda_1 R_1(A) = \lambda_2 R_2(A) + \lambda_3 R_3(A) + \dots + \lambda_s R_s(A) = (0, 0, \dots, 0)$

$$\underbrace{\lambda_1 R_1(A)(i_1)}_{\neq 0} + \underbrace{\lambda_2 R_2(A)(i_1)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_s R_s(A)(i_1)}_{=0} = 0 \implies \lambda_1 = 0$$

ef: $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ si dicono equivalenti per riga $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(B)$
equivalenti per colonna $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}(A)=\mathcal{C}(B)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

solvere $(*)$ $\Longleftrightarrow$ determinare $A^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in \mathbb{K}^n / A\cdot\vec{u} = \vec{0}\} = Ker(A)$

nucleo di A (vista come applicazione lineare).

roposizione: $Ker(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

imos: Occorre provare che $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in Ker(A)$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in Ker(A)$.

er vedere:

$$A(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda A\vec{u} + \mu A\vec{v} = \vec{0}$$

($A\vec{u} = \vec{0}$ ← ipotesi, $A\vec{v} = \vec{0}$) ■

tudieremo:

$A^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{u} \in \mathbb{K}^n / A\vec{u} = \vec{b}\}$ = insieme soluzioni $A\vec{x} = \vec{b}$

sservazione:

$$D: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$
$$(\lambda f + \mu g) \longmapsto D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$$

$(D^2 - 3D + 2) f = 0 \Rightarrow f'' - 3f' + 2f = 0$

$Ker(D^2 - 3D + 2) = 0$

$C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ è soluzione

$Ker(D^2 - 3D + 2) = [e^x, e^{2x}]$

18/04/2012

Ricordiamo che

un sistema di m equazioni in n incognite si può esprimere nella forma $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vettore incognite e $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$ la colonna costante.

isolvere il sistema equivale a determinare l'insieme:

$A^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{u} \in \mathbb{K}^n / A\vec{u} = \vec{b}\}$

iterio per l'esistenza di soluzioni.

ia $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$A = (C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A))$.

pponiamo che $rk(A) = r$.

n è restrittivo supporre che si tratti delle prime r.

$(C_1(A), C_2(A), \dots, C_r(A), C_{r+1}(A), \dots, C_n(A))$ matrice a n colonne a m entrate.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vec{b_2} \\ \vdots \\ \vec{b_n} \end{pmatrix}$

n quale caso $\vec{b}$ è combinazione lineare di $(C_1(A), \dots, C_n(A))$? $\iff$ $\vec{b}$ è comb. lineare di $(C_1(A), \dots, C_r(A))$.

$(C_1(A), C_2(A), \dots, C_r(A), C_{r+1}(A), \dots, C_n(A) \mid \vec{b})$ se b è comb. lineare l'aggiunta di b non mi aumenta il rango.

eorema di Rouché-Capelli:

$A\vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione $\iff rk(A) = rk(A|\vec{b})$

sercizio: Discutere e risolvere (se possibile) il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + hx_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 + K \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

aspettiamo ∞^1 soluzioni $(\infty^{n-r} = \infty^{4-3})$ perchè abbiamo 4 incognite e 3 equazioni.

iscutere: stabilire quali sono i valori di h e K per cui il sistema ha e non ha soluzione.

criviamo la matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & h & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1+K \\ 4 & 1 & -5 & 6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + 3R_1 \\ R_3 \to R_3 + 5R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & h & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2+3h & 7+K \\ 14 & -14 & 0 & 6+5h & 15 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - 2R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & h & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2+3h & 7+K \\ 0 & 0 & 0 & 2-h & 1-2K \end{array}\right)$$

24/04/2012

ordiamo il teorema di Rouché - Capelli.
sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione se e solo se $rk(A) = rk(A|\vec{b})$
e $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$^{-1}(\vec{b}) = \vec{u}_0 + Ker(A)$
e $\vec{u}_0$ è soluzione particolare e $Ker(A) = A^{-1}(\vec{0})$, ossia soluzioni del
stema lineare omogeneo.
poniamo ora di voler risolvere il sistema $AX = B$ dove
$\in \mathbb{K}^{m \times p}$ $X \in \mathbb{K}^{p \times n}$ e $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$

empio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sserviamo che $AX = B$ è equivalente a:

$$A(C_1(X), C_2(X), C_3(X), \dots, C_n(X)) = B$$

$$\|$$

$$(AC_1(X), AC_2(X), \dots, AC_n(X)) = (C_1(B), \dots, C_n(B))$$

$AC_1(X) = C_1(B)$
$AC_2(X) = C_2(B)$
$\vdots$
$AC_n(X) = C_n(B)$

unque il sistema è risolubile $\Leftrightarrow$ $AC_i(X) = C_i(B)$ risolubile.
$1 \leq i \leq n$
primo è risolubile $\Leftrightarrow$ $rk(A|C_1(B), C_2(B), C_3(B), \dots, C_n(B)) = rk(A)$
uindi il sistema è risolubile $\Leftrightarrow$ $rk(A) = rk(A|B)$

finizione: $W \in G(V)$ si dice generato da $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h$ (detti generatori) $\iff W = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h]$

...ora diremo W finitamente generato $\iff$ è generato da un numero ...ito di vettori.

...mpio: $\mathbb{R}^4$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$ prendiamo $\lambda = 1, \mu = 2, \nu = -1$.

$$\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \in [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ come sapere se appartiene a $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$? Se non cambia rango.

...se rg della matrice formata da $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ è uguale al rg della matrice di $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ e $\vec{v}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 2 & 1 & 1 & v_2 \\ 3 & -1 & 4 & v_3 \\ 4 & 3 & 1 & v_4 \end{pmatrix}$$

...serviamo che i generatori di un sottospazio potrebbero non essere ...utti necessari (non tutti indipendenti).

...r esempio: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

infatti $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{u}_3$, quindi $\vec{u}_3 \in [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = [\vec{u}_1, \vec{u}_3]$

$$\dim_{\mathbb{K}}[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = 2 = \dim_{\mathbb{K}}[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$$

$(\vec{e_i})_B = \vec{e_i}$

tenzione!

e $C = (\vec{c_1}, \vec{c_2}, \dots, \vec{c_n})$ è un'altra base $(\vec{b_i})_C \neq \vec{e_i}$

ome ricavare una base da generatori? (Metodo degli scarti successivi)

ia $W \in G(V)$ e siano $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_h}$ generatori di W ossia

$W = [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_h}]$

goritmo: $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_h}$ sono lin. indipendenti?

Se sì, non c'è nulla da fare.

e sono linearm. dipendenti allora almeno uno è comb. lineare degli altri. Se fosse $\vec{u_h}$ si avrebbe $[\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_{h-1}}, \vec{u_h}] = [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{h-1}}]$

(ho buttato via $\vec{u_h}$).

$\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_{h-1}}$ sono lin. indipendenti?

e sì, l'algoritmo finisce e la dim $= h-1$.

e non sono lin. indipendenti $\Rightarrow \exists$ almeno uno comb. lineare degli altri. Se fosse $\vec{u_{h-1}} \Rightarrow [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{h-1}}] = [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{h-2}}]$.

processo termina perchè i generatori sono finiti.

mpio: (Spazio vettoriale non finitamente generato).

$K = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{K}[X]$ $V = \mathbb{R}[X]$

generatori sono: $(1, x, x^2, x^3, \dots)$

fatti se V fosse finitamente generato esisterebbero

$P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X] \,/\, [P_1, P_2, \dots, P_n] = \mathbb{R}[X]$

ia $m = \max \deg(P_i)$

$X^{m+1} \notin [P_1, \dots, P_n]$

on posso ottenere polinomi di grado maggiore di $m = \max \deg(P_i)$.

posizione: Sia V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale (di dimensione finita) $/ \dim_{\mathbb{K}} V = n$.

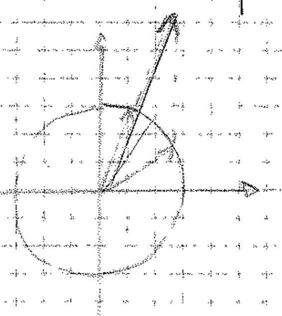
Sia ora $W \in G(V)$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(W) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$

nzi $W = V \iff \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$

Ricordiamo che se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, si indica con 02/05/2012
$G(V) = \{W \subseteq V \,/\, W$ è un sottospazio vettoriale$\}$ e che $W \in G(V) \iff$
$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in W, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
$\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2 \in W$

Esempio: Sia $V = \mathbb{R}^2$ $\quad W = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \,/\, |\vec{u}| = 1\}$



$W \notin G(\mathbb{R}^2)$

Ricordiamo ancora che se $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h \in V$
$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h] = \{\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \vec{u}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}$ è un sottospazio di V e se
$W \in G(V)$ è della forma $W = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h]$ per una scelta di vettori di V, allora W si dice generato dagli $\vec{u}_i$ e gli $\vec{u}_i$ si dicono generatori. Se i generatori $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h$ sono linearmente indipendenti
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h] = h$

Operazioni con sottospazi:
Sia $\{W_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazi di V: $W_i \in G(V)$

Esempio: Sia $V = \mathbb{R}[X]$
$W_m = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(m) = 0\}$
$(x-m)Q(x)$

W_m è evidentemente un sottospazio di $\mathbb{R}[X]$
$P_1, P_2 \in W_m$?
$\underset{?}{(\lambda P_1 + \mu P_2)(m)} = \lambda \underset{0}{P_1(m)} + \mu \underset{0}{P_2(m)}$

In questo caso $\{W_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia infinita di sottospazi
Proposizione: $W_i \in G(V)$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} W_i \in G(V)$ ossia intersezione di sottospazi è un sottospazio.

Dim: $\vec{u}, \vec{v} \in \bigcap_{i \in I} W_i$ $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W_i$ $\forall i \in I$, perché W_i è un sottospazio

f: Siano $W_1, W_2 \in G(V)$

a somma si dice diretta (si scrive) $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \iff$ l'unione di una base di W_1 e di una base di W_2 è una base di $W_1 + W_2 \iff$ $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 \oplus W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 \iff W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\} \iff$

$\vec{w} = W_1 \oplus W_2$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di W_1 e di un vettore di W_2.

piegazione: Se $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2$

sia $\vec{v} \in W_1 \cap W_2$

$W_1 = [\underbrace{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h}_{\text{base}}]$ $W_2 = [\underbrace{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k}_{\text{base}}]$

$\Rightarrow \vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_h \vec{u}_h = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_k \vec{v}_k$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_h \vec{u}_h - \mu_1 \vec{v}_1 - \dots - \mu_k \vec{v}_k = \vec{0}_V$

siccome $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ sono linearm. indipend.

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_h = \mu_1 = \dots = \mu_k = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

viceversa (per esercizio). c'è anche sul libro.

mostriamo $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\} \iff \forall \vec{w} \in W_1 + W_2 \Rightarrow \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ UNICA

infatti, se $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ sia $\vec{w}' = \underset{\cap\, W_1}{\vec{w}_1} + \underset{\cap\, W_2}{\vec{w}_2} = \underset{\cap\, W_1}{\vec{w}_1'} + \underset{\cap\, W_2}{\vec{w}_2'}$

$\Rightarrow \underset{\cap\, W_1}{\vec{w}_1 - \vec{w}_1'} = \underset{\cap\, W_2}{\vec{w}_2 - \vec{w}_2'} \in W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}_V\}$

$\vec{w}_1 - \vec{w}_1' = \vec{0}$ $\quad \vec{w}_2 - \vec{w}_2' = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{w}_1 = \vec{w}_1'$, $\quad \vec{w}_2 = \vec{w}_2'$ quindi ho provato che la decomposizione è unica

viceversa, supponiamo che la decomposizione sia unica e sia $\vec{v} \in W_1 \cap W_2$

allora $\vec{v} = \underset{\cap\, W_1}{\vec{v}} + \underset{\cap\, W_2}{\vec{0}} = \underset{\cap\, W_1}{\vec{0}} + \underset{\cap\, W_2}{\vec{v}}$

per l'unicità della decomposizione $\vec{v} = \vec{0}$.

Esempio: $\mathbb{R}^n$. $E_n = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

$[\vec{e}_1] \oplus [\vec{e}_2] \oplus \dots \oplus [\vec{e}_n] = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n] = \mathbb{R}^n$

In generale se $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ è base di $V \Rightarrow V = [\vec{b}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{b}_n]$

Infatti $A(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda A\vec{u}_1 + \mu A \vec{u}_2$

), V, $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V) = \{ f: U \to V \,/\, f \text{ lineare} \}$

lineare si dice anche omomorfismo.

oposizione: $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale rispetto alla nozione

$f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$(\lambda f + \mu g)(\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u})$

iù precisamente:

$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V) \in G(V^U)$

im: f, g lineari $\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ è lineare

Siano $\vec{u}, \vec{v} \in U$ e $a, b \in \mathbb{K}$

$(\lambda f + \mu g)(a\vec{u} + b\vec{v}) = \lambda f(a\vec{u} + b\vec{v}) + \mu g(a\vec{u} + b\vec{v}) =$

$= \lambda(a f(\vec{u}) + b f(\vec{v})) + \mu[a g(\vec{u}) + b g(\vec{v})] = \dots =$

$= a(\lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u})) + b(\lambda f(\vec{v}) + \mu g(\vec{v})) =$

$= a(\lambda f + \mu g)(\vec{u}) + b(\lambda f + \mu g)(\vec{v})$

iò prova che $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V)$ è spazio vettoriale.

oposizione: Siano U, V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

f, g lineare $\Rightarrow$ $g \circ f$ lineare

im: Ricordiamo che $(g \circ f)(\vec{u}) = g(f(\vec{u}))$

iano $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$(g \circ f)(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \overset{\Delta}{=}$ definizione di composizione

$g(f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})) =$ (linearità f)

$g(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})) =$ (linearità g)

$\lambda g(f(\vec{u})) + \mu g(f(\vec{v})) =$

$\lambda (g \circ f)(\vec{u}) + \mu (g \circ f)(\vec{v})$ ∎

efin: Sia $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V)$ f si dice isomorfismo $\Leftrightarrow$

f è una biiezione $\Leftrightarrow$ f è iniettiva e suriettiva.

$f \in End_{\mathbb{K}}(V)$

$f \circ id_V = id_V \circ f = f$

$f \circ id_V = f$

$\circ\, id_V(\vec{v}) = f(id_V(\vec{v})) = f(\vec{v})$

$\Rightarrow f \circ id_V = f$

nalogamente si prova $id_V \circ f = f$.

ef: $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$ si dice invertibile $\iff \exists\, f^{-1} \in End_{\mathbb{K}}(V) / f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_V$

sempio: Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

on è invertibile. Se lo fosse $\exists A^{-1}$. Impossibile.

$det(A) = 0$.

$End_{\mathbb{K}}(V)$ di sicuro non è un campo e non è un gruppo rispetto alla composizione. xkè non è vero che ogni End non nullo è invertibile.

$ut(V) = \{ f \in End_{\mathbb{K}}(V) / \exists\, f^{-1} \}$

gruppo automorfismo di V.

on è commutativo.

sempio: $V = \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$

Nucleo e immagine di applicazioni lineari.

ia $f \in Hom_{\mathbb{K}}(U, V)$ $\quad U \xrightarrow{f} V$ lineare.

ef: $V \supseteq Im(f) = \{ f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U \}$

$Ker f = \{ \vec{u} \in U / f(\vec{u}) = \vec{0}_V \}$

nucleo

sottospazio di U / Img di è sottospazio di V

vviamente f è suriettiva $\iff Im(f) = V$

Infatti in tal caso, $\forall \vec{v} \in V$ è della forma $f(\vec{u})$, ossia f suriettiv llora $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b_1} + \ldots + \lambda_n \vec{b_n}$ (perchè $\mathcal{B}$ è base)

$\Rightarrow f(\vec{v}) = f(\lambda_1 \vec{b_1} + \ldots + \lambda_n \vec{b_n}) = \vec{0}_V \quad \lambda_1 f(\vec{b_1}) + \ldots + \lambda_n f(\vec{b_n}) = \vec{0}_V \ (**)$

er ipotesi $f(\vec{b_1}), \ldots, f(\vec{b_n})$ sono lin. ind.

uindi $(**)$ è verificata unicamente per $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

$\Rightarrow \vec{v} = 0\vec{b_1} + \ldots + 0\vec{b_n} = \vec{0}_V$

iceversa $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$

siano $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_k}$ lin. ind.

$\Rightarrow f(\vec{u_1}), \ldots, f(\vec{u_k})$ sono l. ind.

$\lambda_1 f(\vec{u_1}) + \ldots + \lambda_k f(\vec{u_k}) = \vec{0}_V$

$f(\lambda_1 \vec{u_1} + \ldots + \lambda_k \vec{u_k}) = \vec{0}_V$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{u_1} + \ldots + \lambda_k \vec{u_k} \in \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_V\}$

$\Downarrow$

$\lambda_1 \vec{u_1} + \ldots + \lambda_k \vec{u_k} = \vec{0}_V$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ (per lineare indipendenza degli $\vec{u_i}$)

a cui l'asserto.

oposizione: Sia $f: U \to V$

$\mathrm{Im}(f) = [f(\vec{b_1}), \ldots, f(\vec{b_n})]$ dove $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ è base di U.

m: Sia $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$

$\Rightarrow \vec{v} = f(\vec{u})$

a $\vec{u} = \lambda_1 \vec{b_1} + \ldots + \lambda_n \vec{b_n}$ (perchè $\mathcal{B}$ è base)

uindi $\vec{v} = f(\vec{u}) = f(\lambda_1 \vec{b_1} + \ldots + \lambda_n \vec{b_n}) = (\text{linearità}) =$

$= \lambda_1 f(\vec{b_1}) + \ldots + \lambda_n f(\vec{b_n})$

$\Rightarrow \vec{v} \in [f(\vec{b_1}), \ldots, f(\vec{b_n})]$ è la dim $\mathrm{Im} = n$? Boh.

08/05/2012

icordiamo che: U, V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$f: U \to V$ si dice lineare $\Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$,

$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$

n questo caso $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$, $\mathrm{Ker} f \in G(U)$ e $\mathrm{Im} f \in G(V)$

$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{u} \in U / f(\vec{u}) = \vec{0}_V\}$

$\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{u}) / \vec{u} \in U\}$

cordiamo ancora che:

$\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ è iniettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$, è suriettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = V$

uindi iniettiva $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0$

suriettiva $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim V$.

Teorema dimensione nucleo e immagine:
$\dim U = \dim V$
f è isomorfismo $\Longleftrightarrow$ è iniettiva
$\Updownarrow$
è suriettiva

Teorema: Siano U e V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale
$\dim_{\mathbb{K}} U = n$ e siano $B = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$ una base di U e
$\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ vettori arbitrari di V.
Allora $\exists! \; f: U \to V / f(\vec{b_i}) = \vec{v_i}$.

Esempio: Supponiamo che $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare sia definita da
$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$$
Calcolare $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Osserviamo che $\vec{b_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $\vec{b_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sono base di $\mathbb{R}^2$.
$\vec{b_1} \wedge \vec{b_2} = -2 \neq 0$.
$\Rightarrow \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ è comb. lineare degli elementi di una base.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda \vec{b_1} + \mu \vec{b_2}$$
$$\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$\begin{cases}\lambda + \mu = x\\ \lambda - \mu = y\end{cases}$$
$$\lambda = \frac{1}{2}(x+y) \qquad \mu = \frac{1}{2}(x-y)$$
$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\left[\frac{1}{2}(x+y)\vec{b_1} + \frac{1}{2}(x-y)\vec{b_2}\right] = \frac{1}{2}(x+y) f(\vec{b_1}) + \frac{1}{2}(x-y) f(\vec{b_2}) =$$
$$= \frac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-y)\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-y\\ x+y+\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y\\ 2x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-y\\ \frac{7}{2}x-\frac{3}{2}y\\ 2x-y\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}2 & -1\\ 7/2 & -3/2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$(\vec{v})_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad (\vec{w})_B = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w})_B = ((\lambda v_1 + \mu w_1)\vec{b_1} + \dots + (\lambda v_n + \mu w_n)\vec{b_n})_B =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda v_1 + \mu w_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n + \mu w_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \lambda(\vec{v})_B + \mu(\vec{v})_B$$

Esempio: $V = \mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x \,/\, a_i \in \mathbb{R}\}$

$\underline{X} = (1, x, x^2)$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Altra base:

$B = (1-x,\ 1+x,\ 1+x+x^2)$ è base perché

$\lambda(1-x) + \mu(1+x) + \nu(1+x+x^2) = 0$

$(\lambda + \mu + \nu) + (\mu - \lambda)x + \nu x^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda + \mu + \nu = 0 \qquad \mu - \lambda = 0 \qquad \nu = 0.$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \lambda(1-x) + \mu(1+x) + \nu(1+x+x^2)$

$a_0 = \lambda + \mu + \nu$

$a_1 = \lambda - \mu$

$a_2 = \nu$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = a_0 - a_2 \\ \lambda - \mu = a_1 \end{cases}$$

$\lambda = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 - a_2)$

$\mu = \frac{1}{2}(a_0 - a_2 - a_1)$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 - a_2)(1-x) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1 - a_2)(1+x) + a_2(1+x+x^2)$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_0 + a_1 - a_2) \\ \frac{1}{2}(a_0 - a_2 - a_1) \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Proprietà: Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ basi di V. Allora:
$$P^{\mathcal{D},\mathcal{C}} \cdot P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P^{\mathcal{D},\mathcal{B}} \quad \text{(Relazione di Chasles).}$$

I modo:
$$P^{\mathcal{D},\mathcal{C}} \cdot P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P^{\mathcal{D},\mathcal{C}}((\vec{b_1})_{\mathcal{C}}, \dots, (\vec{b_m})_{\mathcal{C}}) = (P^{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\vec{b_1})_{\mathcal{C}}, \dots, P^{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\vec{b_m})_{\mathcal{C}}) =$$
$$= ((\vec{b_1})_{\mathcal{D}}, \dots, (\vec{b_m})_{\mathcal{D}}) = P^{\mathcal{D},\mathcal{B}}$$

Idea di II modo: matrice di passaggio dalla base C alla base D

$\forall\, 1 \leq j \leq n$
$$C_j(P^{\mathcal{D},\mathcal{C}} P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}) = P^{\mathcal{D},\mathcal{C}} P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} \vec{e_j} = P^{\mathcal{D},\mathcal{C}} P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} (\vec{b_j})_{\mathcal{B}} =$$
$$= P^{\mathcal{D},\mathcal{C}} (\vec{b_j})_{\mathcal{C}} = (\vec{b_j})_{\mathcal{D}} = C_j(P^{\mathcal{D},\mathcal{B}})$$

$\vec{e_j}$ componenti di un vettore di una base rispetto alla stessa base
es: $(\vec{c_j})_{\mathcal{C}}$, $(\vec{d_j})_{\mathcal{D}}$.

Proposizione: Una matrice $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ è invertibile ($P \in Gl_n(\mathbb{K})$) $\iff$ P è una matrice di cambio base

Dimost: Se $P \in Gl_n(\mathbb{K})$

Allora $P\vec{e_j} = C_j(P)$

$b_j = C_j(P) \qquad (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_m})$ è base di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow P = P^{\mathcal{B}, E_n}$

$E_n = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$

Viceversa sia $P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ matrice cambio base tra due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di V
$$P^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = P^{\mathcal{B},\mathcal{C}} P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathbb{1}_m$$
$$\Rightarrow P^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (P^{\mathcal{C},\mathcal{B}})^{-1}$$

Esempio: Siano $\mathcal{B} = \left(\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\quad \mathcal{C} = \left(\vec{c_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

Trovare $P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = ((\vec{b_1})_{\mathcal{C}}, (\vec{b_2})_{\mathcal{C}})$

$$\vec{b_1} = \lambda_1 \vec{c_1} + \mu_1 \vec{c_2} \iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \mu_1 = 1 \\ -\lambda_1 - 2\mu_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1/5 \\ \mu_1 = 2/5 \end{cases}$$

1ª colonna matrice $P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

controllare conti.

$$P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/5 & - \\ 2/5 & - \end{pmatrix}$$

Determiniamo $P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ in altro modo:
$$P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P^{\mathcal{C},E_2} P^{E_2,\mathcal{B}} = ((\vec{e_1})_{\mathcal{C}}, (\vec{e_2})_{\mathcal{C}})((\vec{c_1})_{E_2}, (\vec{c_2})_{E_2}) =$$
$$= (P^{E_2,\mathcal{C}})^{-1} P^{E_2,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1 \\ -4/5 & -1 \end{pmatrix} = P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$$

Proprietà: Siano B, B' basi di U e C, C' basi di V.

$\varphi \in Hom_{\mathbb{K}}(U, V)$

$M_{\varphi}^{C',B'} = P^{C',C} \cdot M_{\varphi}^{C,B} \cdot P^{B,B'}$

$C_j(P^{C',C} \cdot M_{\varphi}^{C,B} \cdot P^{B,B'}) = P^{C',C} \cdot M_{\varphi}^{C,B} \cdot P^{B,B'} \vec{e}_j = P^{C',C} \cdot M_{\varphi}^{C,B} \cdot P^{B,B'} (\vec{b}_j)_{B'} =$

$= P^{C',C} \cdot M_{\varphi}^{C,B} (\vec{b}'_j)_B = P^{C',C} \cdot (\varphi(\vec{b}'_j)_C) = \varphi(\vec{b}'_j)_{C'} = M_{\varphi}^{C',B'} (\vec{b}'_j)_{B'} =$

$= M_{\varphi}^{C',B'} \cdot \vec{e}_j = C_j(M_{\varphi}^{C',B'}) \quad \forall\ 1 \leq j \leq n$

Esempio: Sia $U = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ e $V = Ker(D^2 - 3D + 2\mathbb{1})$ dove

$D = \frac{d}{dx} : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$

$y / y'' - 3y' + 2y = 0$

$Ker(D^2 - 3D + 2\mathbb{1}) = [e^x, e^{2x}]$

$\varphi : U \to V$

$\varphi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1)e^x + (a_0 - a_2)e^{2x}$

$B = (\underset{\vec{b}_1}{1}, \underset{\vec{b}_2}{1+x}, \underset{\vec{b}_3}{1+x+x^2}) \qquad C = (\underset{c_1}{e^x}, \underset{c_2}{e^x + e^{2x}})$

$M_{\varphi}^{C_1,B_1} = (\varphi(1)_{C_1}, \varphi(x)_{C_1}, \varphi(x^2)_{C_1}) = ((e^x + e^{2x})_{C_1}, (e^x)_{C_1}, -(e^{2x})_{C_1}) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$M_{\varphi}^{C,B} = (\varphi(\vec{b}_1)_C, \varphi(\vec{b}_2)_C, \varphi(\vec{b}_3)_C) = ((e^x - e^{2x})_C, (2e^x - e^{2x})_C, (2e^x)_C)$

$e^x - e^{2x} = ae^x + b(e^x + e^{2x}) = (a+b)e^x + be^{2x}$

$a = 2 \quad a + b = 1$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow$ matrice associata all'applic. lineare

$2e^x - e^{2x} = 3e^x - (e^x + e^{2x})$

Provare e^x, e^{2x} lin. indipendenti:

$C^{\infty}(\mathbb{R}) \ni \lambda e^x + \mu e^{2x} = 0 \quad \substack{\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0(x) = 0}$

$x = 0 \quad \lambda + \mu = 0$

$x = 1 \quad \lambda e + \mu e^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^2 \end{pmatrix}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 146

Sia ora $\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$ e sia $B = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$ base di V.
Allora $M_\varphi^{B,B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$M_\varphi^{B,B} = ((\varphi(\vec{b_1}))_B, \dots, \varphi(\vec{b_n})_B)$$

Sia $id_V : V \to V$ l'endomorfismo identico, $id_V(\vec{v}) = \vec{v}$ e sia B base di V arbitraria

$$M_{id_V}^{B,B} = ((id_V(\vec{b_1}))_B, \dots, (id_V(\vec{b_n}))_B) = ((\vec{b_1})_B, \dots, (\vec{b_n})_B) =$$
$$= (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}) = \mathbb{1}_n$$

Proposizione: Sia $\varphi \in Gl(V)$ (ossia $\exists\, \varphi^{-1} \in End_{\mathbb{K}}(V)$)
$\Rightarrow M_{\varphi^{-1}}^{B,B} \in Gl_n(\mathbb{K})$ e $M_{\varphi^{-1}}^{B,B} = (M_\varphi^{B,B})^{-1}$.

Dim: per proprietà di prima

$$\mathbb{1}_n = M_{id_V}^{B,B} = M_{\varphi\circ\varphi^{-1}}^{B,B} = M_\varphi^{B,B} \cdot M_{\varphi^{-1}}^{B,B}$$
$$\Rightarrow (M_\varphi^{B,B})^{-1} = M_{\varphi^{-1}}^{B,B}$$

Tale proprietà stabilisce una "parentela" tra $Gl(V)$ e $Gl_n(\mathbb{K})$ (gruppi isomorfi). lavorare su uno o sull'altro è la stessa cosa.

Domanda: Sia $\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$. É sensato scrivere $\det(\varphi)$?
Def: Sia B base di V.

$$\det(\varphi) = \det(M_\varphi^{B,B})$$

la definizione è ben data perché se C è altra base

$$\det(M_\varphi^{C,C}) = \det(P^{C,B} M_\varphi^{B,B} P^{B,C}) =$$
$$= \det(P^{C,B})\det(M_\varphi^{B,B})\det(P^{B,C}) = \det(M_\varphi^{B,B})$$

$$\det(P^{B,C}) = \frac{1}{\det(P^{C,B})} \quad \text{xké } (P^{B,C})^{-1} = P^{C,B}$$

Tale osservazione motiva (lo studio del) la seguente definizione:
Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$
A si dice simile a $B \iff \exists\, P \in Gl_n(\mathbb{K}) \,/\, B = P^{-1}AP$.

Osservazione: se B, C sono basi di V e $\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V) \Rightarrow M_\varphi^{B,B}$ $M_\varphi^{C,C}$ sono simili.

Proposizione: La relazione $A \sim B \iff A$ e B sono simili è di equivalenza.

Infatti $A \sim A$ (riflessività) infatti $A = \mathbb{1}^{-1} A \mathbb{1}$

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$ simmetria infatti $B = P^{-1}AP \iff A = Q^{-1}BQ$ con $Q = P^{-1}$

Verificare infine che $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

15/05/2012

icordiamo che:

e $\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$ e $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$

$$\varphi \longmapsto M_\varphi^{B,B} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$M_\varphi^{B,B} = (\varphi(\vec{b}_1)_B, \varphi(\vec{b}_2)_B, \dots, \varphi(\vec{b}_n)_B)$

s: $M_{id_V}^{B,B} = \mathbb{1}$

se C è altra base $\Rightarrow M_\varphi^{C,C} = P^{C,B} \cdot M_\varphi^{B,B} \cdot P^{B,C}$

$\Rightarrow M_\varphi^{B,C} = (P^{B,C})^{-1} M_\varphi^{B,B} P^{B,C}$

iò suggerisce di definire simili due matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\Leftrightarrow \exists P \in Gl_n(\mathbb{K}) / P^{-1}AP = B$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ è diagonale $\Leftrightarrow A = (\lambda_1 \vec{e}_1, \dots, \lambda_n \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

A si dice diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A è simile a una matrice diagonale

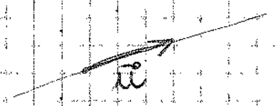
$\Leftrightarrow \exists P \in Gl_n(\mathbb{K}) / P^{-1}AP =$ diagonale

omanda: $\exists B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) / M_\varphi^{B,B}$ sia diagonale?

Sì, se e solo se V possiede n autodirezioni di φ linearmente indipendenti.

insieme delle direzioni

ia $\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$ e sia $[\vec{u}] \in \mathbb{P}V$



ef: $[\vec{u}]$ si dice "Autodirezione" di $\varphi \Leftrightarrow \varphi([\vec{u}]) \subseteq [\vec{u}]$

$$\varphi([\vec{u}]) = \{\varphi(\vec{v}) / \vec{v} \in [\vec{u}]\}$$

gni vettore di una autodirezione si dice autovettore di φ.

e $[\vec{u}]$ è autodirezione $\varphi([\vec{u}]) \subseteq [\vec{u}] \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in [\vec{u}], \varphi(\vec{v}) \in [\vec{u}]$

n particolare $\varphi(\vec{u}) \in [\vec{u}] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} / \varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

sserviamo che se $\vec{v} \in [\vec{u}] \Rightarrow \exists a \in \mathbb{K} / \vec{v} = a\vec{u}$

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi(a\vec{u}) = a\varphi(\vec{u}) = a\lambda\vec{u} = \lambda(a\vec{u}) = \lambda\vec{v}$$

ale valore λ si dice autovalore di φ.

λ è autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \exists \vec{u} \neq \vec{0} / \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow (\varphi(\vec{u}) \in [\vec{u}])$

ome trovare autovalori e autovettori:

e $\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi) \iff \exists \vec{v} \neq \vec{0} / \varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

$\Rightarrow \varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v} = \vec{0}$ (uguaglianza in V).

ia B base di V posso scrivere: $(\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v})_B = (\vec{0}_V)_B = \vec{0}$ (uguaglianza in $\mathbb{K}^n$)

$\varphi(\vec{v})_B - (\lambda\vec{v})_B = \vec{0}$

$M_\varphi^{B,B}(\vec{v})_B - \lambda(\vec{v})_B = \vec{0}$

$(M_\varphi^{B,B} - \lambda M_{id_V}^{B,B})(\vec{v})_B = \vec{0}$

$(M_\varphi^{B,B} - \lambda 1\!\!1_n)(\vec{v})_B = \vec{0}$

uindi $\lambda \in Spec(\varphi) \iff$ il sistema di Cramer $(M_\varphi^{B,B} - \lambda 1\!\!1_n)\, \vec{x} = \vec{0}$ ammette soluzione non nulla.

$$\Downarrow$$

$$\det(M_\varphi^{B,B} - \lambda 1\!\!1_n) = 0.$$

ssia detta $A = M_\varphi^{B,B}$ $\lambda \in Spec(\varphi) \iff P_A(T) = |A - T1\!\!1|$ si annulla in λ.

$(P_A(\lambda) = 0)$.

e C fosse altra base $\Rightarrow |M_\varphi^{B,B} - T1\!\!1| = |M_\varphi^{C,C} - T1\!\!1|$

sempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ trovare autovalori di A. $\rightarrow$ Rispondere per quiz: matrice quadrata di rango massimo ha solo soluzione nulla.

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

ol: Gli autovalori sono radici di $P_A(T) = |A - T1\!\!1|$

$$A - T1\!\!1 = \begin{pmatrix} 2-T & 3 \\ 2 & 7-T \end{pmatrix}$$

$$P_A(T) = (2-T)(7-T) - 6 = T^2 - 9T + 8$$

gli autovalori sono soluzioni di $T^2 - 9T + 8 = 0$

$$(T-1)(T-8) = 0 \qquad \begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 8 \end{cases}$$

in una matrice 2x2 non possiamo trovare più di 2 autovalori. Stessa cosa per nxn troveremo n autovalori.

utodirezione relativa a $\lambda = 8$ è l'insieme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff$

$$(A - 8 1\!\!1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 2-8 & 3 \\ 2 & 7-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x - y = 0 \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \qquad V_8(A) = \left\{\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}\right\}$$