NUMERO: 769

DATA: 15/11/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Greco

MATERIA: Geometria + Eserc.

Prof. Davì

Colonne e righe 08/03/2012

$\mathbb{R}^n$: insieme delle colonne di n numeri reali.

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si dicono colonne o vettori colonna o vettori e si indicano con i simboli $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$

Se $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ le componenti di $\vec{u}$ sono gli elementi della colonna.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

La colonna nulla si indica con $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ duale.

$(\mathbb{R}^n)^\vee$: insieme delle righe di n numeri reali

Gli elementi di $(\mathbb{R}^n)^\vee$ si dicono righe o vettori riga e si indicano con $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \dots$

Le componenti di $\vec{\alpha}$ sono gli elementi della riga

$$\vec{\alpha} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

Somma di colonne e somma di righe:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Esempio:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n), \quad \vec{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^n)^\vee$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in (\mathbb{R}^n)^\vee$$

empio: $\vec{\alpha} = (1, 2, 3) \in (\mathbb{R}^3)^\vee$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = (1, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 + 4 + 3 = 6$$

rasposta di una riga e trasposta di una colonna:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^n)^\vee$$

empio: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \vec{u}^T = (2, 3, 5) \in (\mathbb{R}^3)^\vee$

$$= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)^\vee \qquad \vec{\alpha}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

empio: $\vec{\alpha} = (1, 2, 3) \in (\mathbb{R}^3)^\vee \qquad \vec{\alpha}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

odotto scalare:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

empio: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 3 \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-4) + 5 \cdot 1 = 6 + 2 + 5 = 13$$

uindi: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$

empio: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{u}| = \sqrt{1 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

dice versore ogni vettore che ha modulo 1. Ogni vettore $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ si può
rmalizzare cioè si può determinare un versore $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che
vettore $\vec{u} = |\vec{u}| \cdot \vec{u}_0$ $\quad \vec{u}_0 = vers(\vec{u})$ (versore di $\vec{u}$)
e trovare un versore di un vettore non nullo è sufficiente calcolare il
odulo del vettore e dividere ciascuna componente del vettore iniziale per
modulo.

empio: Determinare il versore del vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$rs(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

odotto vettoriale:

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$

empio: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} \qquad \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{v}$

$\text{t}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1(-8+1) - 1(12-2) + (-3+4) = 7 - 10 + 1 = -2$

$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$\begin{pmatrix} \\ 1 \\ \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda + 3\mu \\ \lambda - 2\mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix}$

$-\lambda + 3\mu = 2 \quad \begin{cases} -4 + \mu + 3\mu = 2 \\ 4 - \mu - 2\mu = -1 \\ \lambda = 4 - \mu \end{cases} \quad \begin{cases} 4\mu = 6 \\ -3\mu = -5 \\ \lambda = 4 - \mu \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = 3/2 \\ \mu = 5/3 \\ \lambda = 4 - \mu \end{cases}$ Sistema impossibile.

$-2\mu = -1$

$+\mu = 4$

n esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

sservazione: Se $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ posso trovare λ e μ, se $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ non esistono λ e μ tale che $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ si dice che $\vec{w}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

e μ si dicono coefficienti della comb. lineare.

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

i dice che $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente dipendenti)

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$, allora non esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

i dice che $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearm. indipendenti)

ercizio: Siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Stabilire se i vettori sono ortogonali.
Trovare almeno un vettore ortogonale a $\vec{u}$.
Trovare almeno un vettore ortogonale a $\vec{v}$.
Trovare tutti i vettori ortogonali a $\vec{u}$.
Trovare tutti i vettori ortogonali a $\vec{v}$.
Trovare tutti i vettori ortogonali sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$.
Trovare almeno un vettore ortogonale sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$.

$w_3 = 2w_1 + 3w_2$
$-w_1 + 2w_2 - 6w_1 - 9w_2 = 0$

$\begin{cases} w_3 = 2w_1 + 3w_2 \\ +7w_1 + 7w_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} w_3 = 2w_1 + 3w_2 \\ w_2 = -w_1 \end{cases}$

$w_3 = 2w_1 - 3w_1$
$w_2 = -w_1$

$\begin{cases} w_3 = -w_1 \\ w_2 = -w_1 \end{cases}$ $\begin{cases} w_1 = t \\ w_2 = -t \\ w_3 = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

vettori ortogonali a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono $\vec{w} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -t \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$

La richiesta si può risolvere con 2 metodi.
1° metodo: si sfrutta il risultato ottenuto nella richiesta precedente assegnando un particolare valore di t. Ad esempio, per $t = \sqrt{2}$ si ottiene
$\vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2° metodo: si sfrutta la proprietà che il prodotto vettoriale di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è un vettore ortogonale sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & -1 \\ \vec{j} & 3 & 2 \\ \vec{k} & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-9+2) - \vec{j}(-6-1) + \vec{k}(4+3) = -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Dato il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

determinare un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{k}$ e $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{k}$
$|\vec{v}| = \sqrt{13}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & v_1 \\ \vec{j} & -1 & v_2 \\ \vec{k} & 0 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-v_3) - \vec{j}(2v_3) + \vec{k}(2v_2 + v_1) = -v_3\vec{i} - 2v_3\vec{j} + \vec{k}(2v_2 + v_1) =$$

$$\begin{pmatrix} -v_3 \\ -2v_3 \\ 2v_2 + v_1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Trovare i vettori $\vec{w} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}'$ che sono ortogonali a $\vec{u}$ e che hanno modulo uguale a $\sqrt{2}$

Verificare che le terne $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono formate da vettori linearm. indipendenti

$\vec{w} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}'$

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \\ |\vec{w}| = \sqrt{2} \end{cases} \Leftarrow \text{Impongo le 2 condizioni}$$

$$\vec{w} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + (\lambda+\mu)^2} = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu^2 + \mu^2 + \cancel{\mu^2} + \cancel{\mu^2} - \cancel{2\mu^2} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftarrow$$ $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ sono i vettori che soddisfano le 2 condizioni

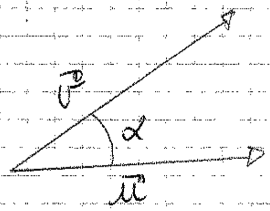
$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) - 1(1) = -2 \neq 0$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1(-1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Le terne $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2$ sono formate da vettori linear. indipendenti perché il loro determinante è $\neq 0$.

$\vec{u},\vec{v}\rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\alpha)$

$(0 \leq \alpha \leq \pi)$



sercizio: Dato $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ determinare i vettori di modulo 3 paralleli ad $\vec{u}$ e determinare un versore di $\vec{u}$.

$/\!/ \vec{v} \iff \vec{v} = \lambda\vec{u}$

eterminiamo tutti i vettori paralleli ad $\vec{u}$.

$\vec{v} = \lambda\vec{u} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}$

$\vec{v}| = 3$

$\overline{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2} = 3 \;;\; \sqrt{6\lambda^2} = 3 \;;\; 6\lambda^2 = 9 \;;\; \lambda^2 = \frac{9}{6} \;;\; \lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$= -\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3/2} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 2\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 2\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$

sservazione: $\sqrt{6\lambda^2} = 3 \;;\; |\lambda|\sqrt{6} = 3 \;;\; |\lambda| = \frac{3}{\sqrt{6}} \;;\; \lambda = \pm\frac{3}{\sqrt{6}}$

$\vec{u}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\text{ers}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

ercizio: Dati $\vec{u} = \begin{pmatrix} h \\ 2h \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determinare il parametro reale h ale che $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{6}$

$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} h \\ 2h \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 2h+1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{6}$

$\overline{h^2+(2h+1)^2+4}^{\,2} = (\sqrt{6})^2$

$^2 + 4h^2 + 4h + 1 + 4 = 6$

$h^2 + 4h - 1 = 0$

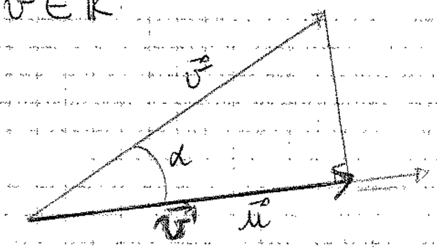
$\vec{u} = \vec{w} + \vec{w}'$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \lambda + \alpha = 1 \\ -\lambda + \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1-\lambda \\ 1-\lambda-\lambda = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1-\lambda \Rightarrow \alpha = 2 \\ -2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

vettori $\vec{w}$ e $\vec{w}'$ tali che $\vec{u} = \vec{w} + \vec{w}'$ sono $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{w}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

oiezione ortogonale di un vettore su un altro vettore:

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$



Sia $\vec{v}'$ la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}$.
$\vec{v}'$ è un vettore // ad $\vec{u}$.

$\vec{v}' = |\vec{v}'| \operatorname{vers}(\vec{u})$

$\vec{v}' = |\vec{v}'| \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$\vec{v}' = |\vec{v}| \cos(\alpha) \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$\vec{v}' = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \dfrac{1}{|\vec{u}|}$

$\vec{v}' = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha) \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}$

$\vec{v}' = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}$

$\vec{v}' = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$

ercizio: Dati $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

Nello spazio
2 vettori sono sempre complanari
3 vettori non sempre

la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}$
i vettori di modulo 2 ortogonali a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
verificare che $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono complanari.

$\vec{v}' = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$ (proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}$)

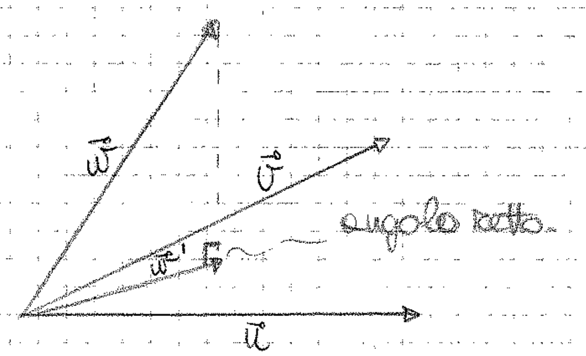
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -1$

$|\vec{u}|^2 = 1 + 1 = 2$

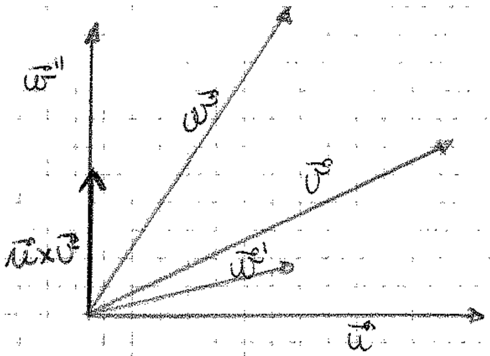
$\dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|^2} = -\dfrac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\pi$

oiezione ortogonale di un vettore su un piano vettoriale:



$\vec{w}'$: proiezione ortogonale di $\vec{w}$ sul piano vettoriale individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



$\vec{w}' + \vec{w}'' = \vec{w}$

$\vec{w}' = \vec{w} - \vec{w}''$

r determinare la proiezione ortogonale di $\vec{w}$ su un piano vettoriale individuato
a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si procede nel seguente modo:
- si determina un vettore ortogonale sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$, per esempio $\vec{u}\times\vec{v}$
- si determina la proiezione ortogonale $\vec{w}''$ di $\vec{w}$ su $\vec{u}\times\vec{v}$
- tenendo conto che $\vec{w}'+\vec{w}''=\vec{w}$ si ricava $\vec{w}'=\vec{w}-\vec{w}''$.

ercizio: Dati $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Determinare la proiezione ortogonale di $\vec{w}$ sul piano di $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & 3 & 1\\ \vec{j} & 1 & 0\\ \vec{k} & 1 & 0\end{vmatrix} = -\vec{j}(-1) + \vec{k}(-1) = \vec{j} - \vec{k} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{w}'' = \frac{\langle \vec{w}, \vec{u}\times\vec{v}\rangle}{|\vec{u}\times\vec{v}|^2}(\vec{u}\times\vec{v}) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\vec{w}'$: proiezione ortogonale di $\vec{w}$ sul piano di $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\vec{w}' = \vec{w} - \vec{w}'' = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Esercizio: Determinare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-1&3\\0&0&4\end{vmatrix}=(-4)-(4)=-8$$

$$V=|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|=|-8|=8$$

Esercizio: Determinare per quali valori del parametro reale h i vettori $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\h\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2h\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ sono linearm. dipendenti e in corrispondenza dei valori trovati scrivere uno di essi come comb. lineare degli altri due.

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sono linear dipend. $\Longleftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$.

$$\begin{vmatrix}1&2h&1\\h&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}=-h(2h-1)=0 \qquad h=0 \vee h=\frac{1}{2}$$

I 3 vettori sono linearm. dipendenti per $h=0 \vee h=\frac{1}{2}$.

$h=0 \Longrightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$h=\frac{1}{2} \Longrightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\0\\\mu\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\0\\\mu\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\lambda=1\\\mu=1\end{cases} \qquad \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$$

Esercizio: Sono dati i vettori $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\-6\\-3\end{pmatrix}$.

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a) $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sono complanari

b) $\vec{w}$ è $/\!/ \vec{v}$ no

c) $\vec{u}$ e $\vec{w}$ formano un angolo acuto.

d) $\vec{w}$ è $/\!/$ a $\vec{u}\times\vec{v}$.

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}1&0&3\\-1&1&-6\\+3&-2&-3\end{vmatrix}=(-3-12)+(6)-3(-3)=-15+6-9\neq 0$$

ati i punti P_1, P_2, P_3 per verificare se sono allineati si procede nel seguente odo:

si determinano le componenti dei vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$ (oppure $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$) se i due vettori sono paralleli allora i 3 punti sono allineati; se i due vettori non sono paralleli i 3 punti non sono allineati.

ercizio: Determinare i valori dei parametri h e K tali che i punti $P_1(0,1,1)$, $P_2(1,1,0)$ e $P_3(h,0,K)$ sono allineati.

$$\vec{P_2} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} h \\ -1 \\ K-1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P_3} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$$

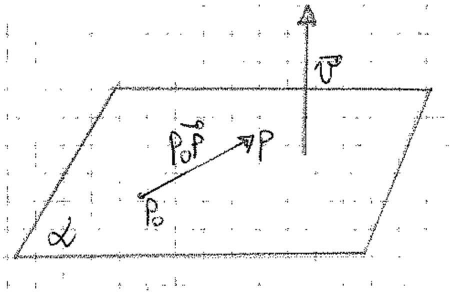
$$\begin{pmatrix} h \\ -1 \\ K-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} h = \lambda \\ -1 = 0 \\ K-1 = -\lambda \end{cases} \quad \text{Sistema è impossibile}$$

uindi non esistono valori di h e K per i quali i 3 punti sono allineati.

ani:

r individuare un piano α nello spazio possiamo assegnare:

un punto P_0 di α e un vettore $\vec{v}$ ortogonale ad α.



$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$

$P(x, y, z)$ p.to generico di α

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \qquad \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0$$

ercizio: Scrivere l'eq del piano α passante per $P_0(2,-1,1)$ ortogonale a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

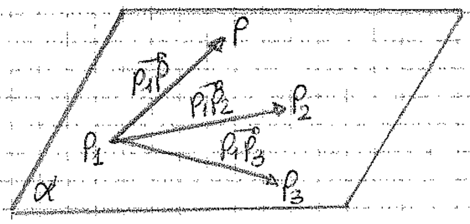
(x, y, z)

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{x-y+z=0}$

Osservazione: I vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ assegnati che sono paralleli al piano (da determinare) non devono essere paralleli tra loro.

2) tre punti P_1, P_2, P_3 di α non allineati



$P_1(x_1, y_1, z_1)$
$P_2(x_2, y_2, z_2)$
$P_3(x_3, y_3, z_3)$

$P(x,y,z)$

$$\overrightarrow{P_1P} = \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \\ z_3-z_1 \end{pmatrix}$$

La condizione di appartenenza del p.to P al piano α è che i vettori $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ siano complanari cioè che il $\det(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$.

Esercizio: Determinare l'eq. del piano passante per $P_1(1,0,1)$, $P_2(1,0,0)$, $P_3(3,1,2)$.

$P(x,y,z)$

$$\overrightarrow{P_1P} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0 \quad \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) - y(2) + (z-1)\emptyset = \emptyset \Rightarrow x-1-2y = 0 \Rightarrow \boxed{x-2y-1=0}$$

Dati due piani $\pi: ax+by+cz+d=0$ e $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$. Sono paralleli se e solo se i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\vec{v}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sono paralleli.

$$\pi /\!/ \pi' \Leftrightarrow \vec{v} /\!/ \vec{v}'$$

In due piani paralleli i coefficienti di x, y, e z nelle loro equazioni sono proporzionali.

a retta passante per i punti A e B è la retta che passa per A (o B) ed è parallela al vettore $\vec{AB}$.

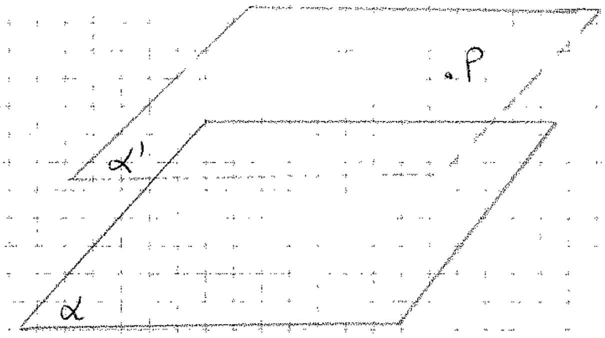
sercizio: Scrivere l'eq. passante per i punti $A(1,0,1)$ e $B(2,3,4)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

: retta per A e $/\!/ \vec{AB}$

$$: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

sercizio: Scrivere l'eq. cartesiana del piano passante per $P(2,-1,3)$ e parallelo al piano α: $x - 2y + z = 0$.



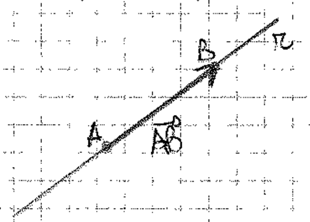
α': $x - 2y + z + d = 0$ (eq. del generico piano $/\!/$ al α)

eterminiamo il termine noto d imponendo che $P \in \alpha'$:

$2 + 2 + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -7$

α': $x - 2y + z - 7 = 0$

sercizio: Dare una rapp. parametrica e una rapp. cartesiana della retta che passa per $A(1,2,1)$, $B(3,2,3)$.



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

r: retta per A $/\!/ \vec{AB}$

$\det(\vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad x(-1) - (y-1)2 + (z-1)(-1) = 0$$

$-x - 2y + 2 - z + 1 = 0 \Rightarrow x + 2y + z - 3 = 0 : \alpha$

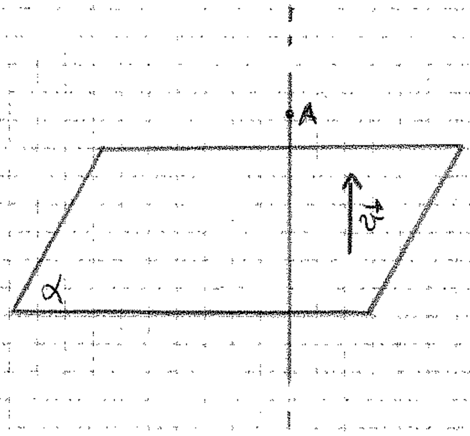
Per vedere se sono complanari verifichiamo se $P_4 \in \alpha$.

$1 + 4 - 3 = 0$

$2 = 0$ falso $\Rightarrow P_4 \notin \alpha$

I punti P_1, P_2, P_3, P_4 non sono complanari.

Esercizio: Dare una rapp. parametrica e una cartesiana della retta che passa per $A(1,2,1)$ ed è perpendicolare al piano $\alpha: x + 2z = 0$



$$\alpha \perp \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La retta r per A $\perp$ ad α è la retta per A $/\!/ \vec{v}$.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$ Rapp. parametrica

$t = x - 1$

$y = 2$

$z = 1 + 2x - 2$

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = -1 + 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$$ Rapp. cartesiana

Posizione reciproca di due rette:

Se due rette non hanno pti in comune allora sono parallele e distinte oppure sghembe. Due rette parallele e distinte sono complanari.

Due rette che hanno un solo pto in comune sono incidenti. Due rette incidenti sono complanari.

Due rette che hanno due o più pti in comune sono coincidenti.

a retta r in forma parametrica.

$\begin{cases} x+2y-y+3=0 \\ z=y-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+3=0 \\ z=y-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3-y \\ z=-3+y \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3-t \\ y=t \\ z=-3+t \end{cases}$

$r \parallel \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $s \parallel \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

poiché $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e r e s non hanno pti in comune, r e s sono parallele e distinte.

Per ottenere l'eq. del piano che contiene le 2 rette si possono usare 2 metodi:

1) si utilizzano i fasci di piani:

la retta r è individuata da 2 piani, consideriamo il fascio di piani che contiene la retta r esso ha equazione:

$$\lambda(x+2y-z)+\mu(y-z-3)=0$$

il piano che contiene le rette r ed s è il piano del fascio che contiene s:

$$\lambda(3-\cancel{t}+2\cancel{t}-1-\cancel{t})+\mu(\cancel{t}-1-\cancel{t}-3)=0$$

è un caso che le t spariscono.

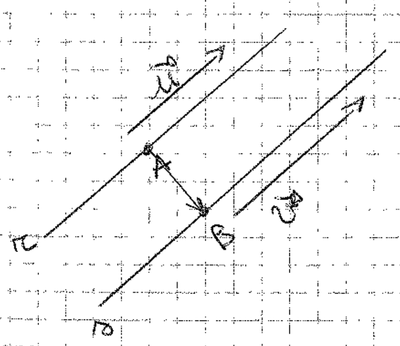
$$2\lambda-4\mu=0$$
$$2\lambda=4\mu$$
$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4}{2} \quad ; \quad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{2}{1}$$

$\begin{cases} \lambda=2 \\ \mu=1 \end{cases}$

sostituendo λ e μ trovati nell'eq. del fascio si trova l'eq. del piano che contiene r ed s.

$$2(x+2y-z)+y-z-3=0$$
$$2x+5y-3z-3=0$$

piano che contiene r ed s.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 121

quazione dell'asse z: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

Retta r: $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z-3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=t \\ y-3=t \\ z=t \end{cases}$ $\begin{cases} x=-6-2t+t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases}$ $\begin{cases} x=-t-6 \\ y=t+3 \\ z=t \end{cases}$

a retta r e l'asse z non sono paralleli perché $(0,0,1)$ e $(-1,1,1)$ non sono proporzionali.

$\begin{cases} 0=-t-6 \\ 0=t+3 \\ s=t \end{cases}$ $\begin{cases} t=-6 \\ t=-3 \\ s=t \end{cases}$ Sistema impossibile.

a retta r e l'asse z non hanno punti in comune, quindi sono sghemb

$\vec{P_1P}=\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{P_1P_2}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{P_1P_3}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3})=0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)-y(-1)+z(-2)=0$$

$x+y-2z-1=0$ Piano individuato dai punti P_1, P_2 e P_3.

$\begin{cases} x-y=1 \\ x-z=-h \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ t-y=1 \\ t-z=-h \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ y=t-1 \\ z=t+h \end{cases}$

$\cancel{t}+\cancel{t}-1-\cancel{2t}+2h-1=0 \Rightarrow 2h=2 \Rightarrow h=1$

La retta r' è contenuta nel piano $\Leftrightarrow h=1$.

$x = y+z$
$y+z+2z-1=0$

$\begin{cases} x=y+z \\ y+3z-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-3z+z \\ y=1-3z \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-2z \\ y=1-3z \end{cases}$

$$\begin{aligned} x&=1-2t \\ y&=1-3t \\ z&=t \end{aligned} \Rightarrow r /\!/ \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2+0t \end{cases} \Rightarrow s /\!/ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -2 & 1 \\ \vec{j} & -3 & -1 \\ \vec{k} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(1) - \vec{j}(-1) + \vec{k}(2+3) = \vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

piani ortogonali a $\vec{w}$ hanno equazione:
$x+y+5z+k=0 \quad (k \in \mathbb{R})$

ercizio:
rificare che i piani passanti per $P(3,-1,2)$ e ortogonali al piano
α: $x-y+4z-1=0$ appartengono a un fascio. Determinare l'asse di
ale fascio.

π: $ax+by+cz+d=0$
$P \in \pi$
mpongo $P \in \pi$: $3a-b+2c+d=0$

$$\alpha \perp \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad \pi \perp \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\alpha \perp \pi \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$
$a-b+4c=0$

$3a-b+2c+d=0$
$a-b+4c=0$

$\begin{cases} 3b-12c-b+2c+d=0 \\ a=b-4c \end{cases}$ $\begin{cases} 2b-10c+d=0 \\ a=b-4c \end{cases}$

$d=-2b+10c$
$a=b-4c$

$$\begin{cases} a=\lambda-4\mu \\ b=\lambda \\ c=\mu \\ d=-2\lambda+10\mu \end{cases}$$

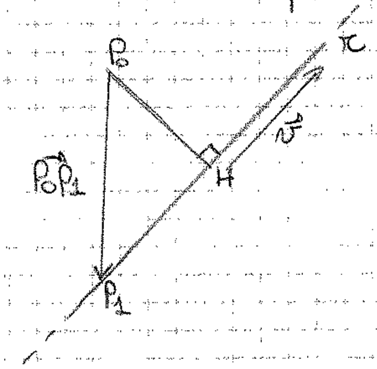
$(P_0,\pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ercizio:

terminare la distanza del punto $P(1,-3,\sqrt{2})$ dal piano $\alpha: x-2y+\sqrt{2}z-2=$

$(P,\alpha) = \dfrac{|1+6+2-2|}{\sqrt{1+4+2}} = \dfrac{|7|}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\cancel{7}\sqrt{7}}{\cancel{7}} = \sqrt{7}$

istanza di un punto da una retta:



$d(P_0,r) = d(P_0,H)$

dove H è la proiezione ortogonale da P_0 su r.

$d(P_0,r) = \dfrac{|\vec{P_0P_1} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

dove P_1 è un punto qualunque di r e $\vec{v}$ è un vettore parallelo ad r.

sercizio:

alcolare la distanza del punto $Q(1,1,1)$ dalla retta $r: \begin{cases} x+3y-z-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$

appresentare r in forma parametrica:

$\begin{cases} 1-y+3y-z-2=0 \\ x=1-y \end{cases} \quad \begin{cases} 2y-z-1=0 \\ x=1-y \end{cases} \quad \begin{cases} z=2y-1 \\ x=1-y \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$

passa per $P(1,0,-1)$ ed è parallela a $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d(Q,r) = \dfrac{|\vec{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$\vec{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{QP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 0 & -1 \\ \vec{j} & -1 & 1 \\ \vec{k} & -2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2+2) - \vec{j}(-2) + \vec{k}(-1) =$

$= +2\vec{j} - \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

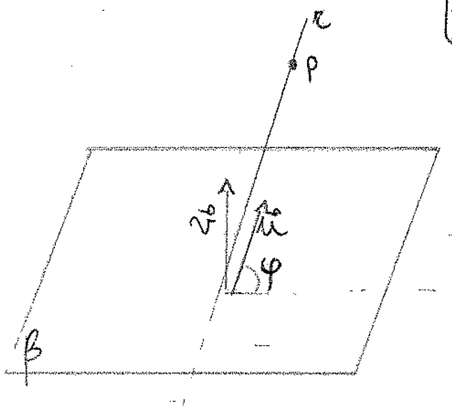
$|\vec{QP} \times \vec{v}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

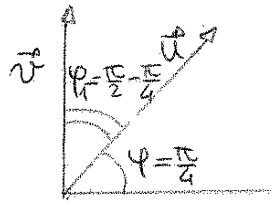
$d(Q,r) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

sercizio:

rovare le rette passanti per $P(1,-1,-2)$ contenute nel piano $\alpha: y-z-1=0$
formanti con il piano $\beta: x+z-3=0$ un angolo $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad P(\overset{x_0}{1}, \overset{y_0}{-1}, \overset{z_0}{-2}) \in r \qquad r: \begin{cases} x = 1 + lt \\ y = -1 + mt \\ z = -2 + nt \end{cases} \qquad r /\!/ \vec{u} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$





$$\beta \perp \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oichè la retta forma un angolo $\varphi=\frac{\pi}{4}$ con il piano β osserviamo che la
retta r forma un angolo $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ con il vettore $\vec{v}$ ortogonale al
piano β.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\varphi_1)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = l + n$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{l^2+m^2+n^2}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{2}$$

$$l+n = \sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

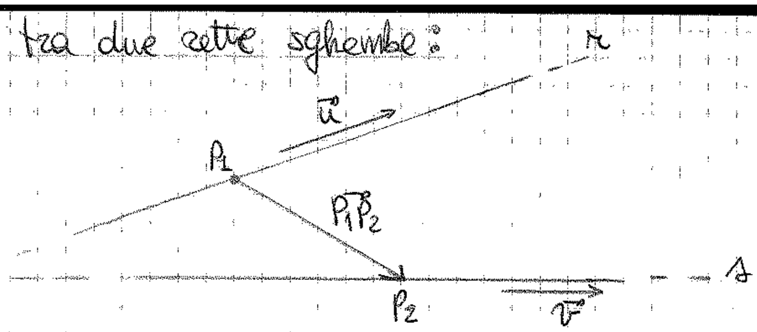
$$l+n = \sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

$$\cancel{l^2}+\cancel{n^2}+2ln = \cancel{l^2}+m^2+\cancel{n^2}$$

$$n^2 - 2ln = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + lt \\ y = -1 + mt \\ z = -2 + nt \end{cases}$$

Distanza tra due rette sghembe:



$$d(r,s) = \frac{|\langle \vec{P_1P_2}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

esercizio

Date le rette $r: \begin{cases} x-y+z=0 \\ y+3z=0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x+y-1=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}$ calcolare la distanza tra r ed s.

$\begin{cases} x+3z+z=0 \\ y=-3z \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-4t \\ y=-3t \\ z=t \end{cases}$ $\quad r$ passa per $P_1(0,0,0)$ ed è $//$ a $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x=-y+1 \\ z=-y+3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}$ $\quad s$ passa per $P_2(1,0,3)$ ed è $//$ a $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Poiché i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono $//$, le rette r ed s non sono $//$.

$\begin{cases} -4t = 1-\mu \\ -3t = \mu \\ t = 3-\mu \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -4t = 1+3t \\ \mu = -3t \\ t = 3+3t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -7t = 1 \\ \mu = -3t \\ -2t = 3 \end{cases}$ Impossibile.

quindi le rette r ed s sono sghembe.

$\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -4 & -1 \\ \vec{j} & -3 & 1 \\ \vec{k} & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3-1) - \vec{j}(4+1) + \vec{k}(-4-3) =$

$= 2\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\langle \vec{P_1P_2}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 1 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = -19$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4+25+49} = \sqrt{78}$

$$d(r,s) = \frac{|-19|}{\sqrt{78}} = \frac{19}{\sqrt{78}}$$

Esempio: $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&0&3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2}$

$A\cdot B \in \mathbb{R}^{2\times2}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\2&6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$$

DETERMINANTI: 12/04/2012

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&-4\end{pmatrix} \qquad \det(A)=\begin{vmatrix}1&2\\-3&-4\end{vmatrix}=-4+6=2$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

Regola di Laplace:

$$\det(A)=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}$$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-1&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-1&0\\-1&-2&0\end{vmatrix}=\cancel{\begin{vmatrix}-1&0\\-2&0\end{vmatrix}}-2\cancel{\begin{vmatrix}3&0\\-1&0\end{vmatrix}}-\begin{vmatrix}3&-1\\-1&-2\end{vmatrix}=-(-6-1)=7$$

$$=-\begin{vmatrix}3&-1\\-1&-2\end{vmatrix}=7$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{①}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{②}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

① $R_1 \to R_2$
② $R_3 \to R_3 + 3R_1$
③ $R_3 \to R_3 - 4R_2$
④ $R_4 \to R_4 - R_2$
⑤ $R_4 \to R_4 - \frac{1}{2}R_3$

$$\overset{③④}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6$$

Matrice inversa:
Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ si dice che A è invertibile se esiste una matrice quadrata $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ dove I è la matrice identità. La matrice identità è la matrice costituita da tutti 1 sulla diagonale principale e tutti zeri nei rimanenti posti. La matrice A^{-1} si dice matrice inversa di A.
Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.
Se la matrice inversa esiste allora è unica.

Data la matrice quadrata $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ si dice complemento algebrico dell'elemento a_{ij} il prodotto tra $(-1)^{i+j}$ e il determinante che si ottiene eliminando la riga i e la colonna j dalla matrice A, e si indica con A_{ij}. Per determinare la matrice inversa di una matrice A invertibile si procede nel seguente modo:
1) si scrive la matrice costituita dai complementi algebrici (A_{ij})
2) si scrive la trasposta della matrice dei complementi algebrici $(A_{ij})^T = A_{ji}$
3) la matrice inversa è $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A_{ij})^T$

CASO DI $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) \neq 0$

$A_{11} = a_{22} \quad A_{12} = -a_{21} \quad A_{21} = -a_{12} \quad A_{22} = a_{11}$

La matrice dei complementi algebrici è: $\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

La trasposta della matrice dei complementi algebrici è: $\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

a trasposta della matrice dei complementi algebrici è:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

a matrice inversa è: $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

I metodo:

$$A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

all'ultima matrice si crea un sistema nelle incognite X_1, X_2, X_3 dove le incognite sono le righe della matrice inversa.

$$\begin{aligned} &2X_1 - X_2 + X_3 = (1,0,0) \\ &X_2 = (-1,1,0) \\ &-X_3 = (2,-4,+1) \end{aligned} \qquad \begin{cases} 2X_1 = (-1,1,0) - (-2,4,-1) + (1,0,0) \\ X_2 = (-1,1,0) \\ X_3 = (-2,4,-1) \end{cases}$$

$$2X_1 = (2,-3,1) \Rightarrow X_1 = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$X_2 = (-1,1,0)$

$X_3 = (-2,4,-1)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Nello spazio sia r la retta passante per il punto $(1,1,2)$ e parallela al vettore $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) r è ortogonale al piano $2x + y + z = 0$.

b) r è contenuta nel piano $x - y + 2z = 0$.

c) r e il piano $x - y + 2z = 0$ sono incidenti.

d) r è parallela al piano $x - y + 2z = 4$.

$r \parallel \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $s \parallel \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

non è corretta. r ed s non hanno p.ti in comune perchè dalle eq.ni si vede che la x non può essere contemporaneamente $=0$ e $=1$.

) non è corretta perchè $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono $\parallel$.

) $\pi: x-2=0$ $\quad \pi \perp \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$r \parallel \pi \wedge s \parallel \pi \iff \begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \end{cases}$ $\quad \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$, $\quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$

è corretta perchè i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali entrambi a $\vec{w}$.

) $\alpha: x+y=0$

$r \cap \alpha: 0+t=0 \Rightarrow t=0$

tiene una sola soluzione quindi r ed s hanno un solo p.to in comune.

d non è corretta.

SFERE:

) $C(\alpha, \beta, \gamma)$ centro

$r \geq 0$ raggio

l'equazione della sfera di centro C e raggio $r \geq 0$ è:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$$

) l'equazione di una sfera è della forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

$\alpha = -\frac{1}{2}a$, $\beta = -\frac{1}{2}b$, $\gamma = -\frac{1}{2}c$

$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - d$

Se $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d>0$ l'eq. (1) rappresenta una sfera di centro $C(\alpha,\beta,\gamma)$ e raggio $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d}$.

Se $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d=0$ l'eq. (1) rappresenta una sfera di centro $C(\alpha,\beta,\gamma)$ e raggio $r=0$.

In questo caso la sfera è costituita da un unico p.to che è il centro.

Se $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d<0$ l'eq. (1) non rappresenta una sfera a p.ti reali.

Osserviamo che l'asse z è la retta per $O(0,0,0)$ parallela al vettore $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

asse z: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ (forma parametrica) asse z: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ (forma cartesiana)

Per determinare t si effettua l'intersezione tra l'asse z e S e si impone che il sistema abbia due soluzioni reali e coincidenti.

$$\begin{cases} (x-1-t)^2+(y+1-t)^2+(z+t)^2=3t^2 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(-1-t)^2+(1-t)^2+(z+t)^2=3t^2$$
$$1+\cancel{2t}+\cancel{t^2}+1-\cancel{2t}+\cancel{t^2}+z^2+2zt+\cancel{t^2}-\cancel{3t^2}=0$$
$$z^2+2zt+2=0$$
$$\frac{\Delta}{4}=0 \quad t^2-2=0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{2}$$

$t=-\sqrt{2}$
$S_1: (x-1+\sqrt{2})^2+(y+1+\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2=6$

$t=\sqrt{2}$
$S_2: (x-1-\sqrt{2})^2+(y+1-\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2=6$

19/04/2012

Riduzione di una matrice:
Una matrice $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ si dice ridotta per righe se in ogni riga non nulla esiste almeno un elemento non nullo che ha al di sotto nessun elemento oppure soltanto zeri. Per ridurre una matrice per righe si possono applicare le seguenti trasformazioni:
1) sommare ad una riga un'altra riga moltiplicata per una costante
2) scambiare due righe
3) moltiplicare una riga per una costante non nulla.

Una matrice $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ si dice ridotta per colonne se in ogni colonna non nulla c'é un elemento non nullo a destra del quale non ci sono elementi oppure ci sono soltanto zeri.
Per ridurre una matrice per colonne si possono applicare le seguenti trasformazioni:

er risolvere un sistema lineare di m equazioni in n incognite si crive la matrice completa del sistema A|B e la si riduce per ighe. Il sistema iniziale e quello che si ottiene dalla riduzione lella matrice completa sono equivalenti. Si determinano il rango rk(A|B) della matrice completa e il rango rk(A) della matrice lei coefficienti. Per decidere se il sistema è compatibile o ncompatibile si applica il teorema di Rouché-Capelli.

) se $rk(A) \neq rk(A|B)$ allora il sistema è incompatibile

) se $rk(A) = rk(A|B)$ allora il sistema è compatibile.

In particolare se $rk(A) = rk(A|B) = r \leq n$ e n è il numero delle incognite:

a) se $n = r$ allora il sistema è determinato cioè ammette un'unica n-upla di soluzioni.

b) se ~~$n<r$~~ $r<n$ allora il sistema è compatibile con ∞^{n-r} soluzioni (questo significa che le soluzioni dipendono da $n-r$ parametri.

sercizio: Risolvere il sistema:
$$\begin{cases} x+2y+3z+2t=1 \\ 2x-y+2z=0 \\ 3x+y+5z+2t=5 \end{cases}$$

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3-3R_1]{R_2 \to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} rk(A)=2 \\ rk(A|B)=3 \end{array}$$

oiché $rk(A) \neq rk(A|B)$ il sistema è incompatibile.

sercizio: Risolvere il sistema:
$$\begin{cases} x+2y+3z+2t=1 \\ 2x+y+2z=0 \\ 3x+y+5z+2t=1 \end{cases}$$

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3-3R_1]{R_2 \to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad rk(A)=rk(A|B)=2$$

$$\begin{cases} Kx = \frac{K(2-K)}{K} \\ y = \frac{K^2+1}{K} \\ z = \frac{1}{K} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2-K}{K} \\ y = \frac{K^2+1}{K} \\ z = \frac{1}{K} \end{cases}$$

$K=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk(A) = 1 \qquad rk(A|B) = 2$

Quindi per $K=0$ il sistema è incompatibile.

$K=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad rk(A) = rk(A|B) = 2$$

Per $K=2$ il sistema è compatibile con $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3 - z - z = 2 \\ y = 3 - z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = -1 + 2z \\ y = 3 - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + z \\ y = 3 - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$AX = B$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Se A è invertibile allora esiste A^{-1}. Moltiplichiamo entrambi i membri a sinistra per A^{-1}.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{10}\beta \\ y = \alpha \\ z = \frac{4}{5}\beta \\ t = \beta \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 <-> R_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 2R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$k(B) = 3$

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e il rango della matrice di un sistema omogeneo è uguale al numero delle incognite allora l'unica soluzione del sistema è la soluzione nulla.

sercizio: Sono dati i vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sapendo che essi sono oluzioni dello stesso sistema lineare $AX = B$ $(B \neq 0)$ scrivere:
una soluzione del sistema omogeneo associato $AX = 0$ (0 è la matrice nulla).
un'altra soluzione del sistema lineare $AX = B$.

è soluzione di $AX = B \iff A\vec{u} = B$
è soluzione di $AX = B \iff A\vec{v} = B$

$A\vec{u} = B$
$A\vec{v} = B$
ttriamo membro a membro.
$A\vec{u} - A\vec{v} = B - B$
$A(\vec{u} - \vec{v}) = 0$
uindi $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ è soluzione di $AX = 0$.

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$A\vec{w} = 0$

ncontrano in un solo punto.

e $h=-6$ e $K=\frac{3}{8}$ $\quad rk(A)=2=rk(A|B)$

sistema è compatibile con ∞^1 soluzioni pertanto r giace su α
nfiniti punti di intersezione).

e $h=-6$ e $K\neq\frac{3}{8}$ $\quad rk(A)=2 \quad rk(A|B)=3$

sistema è incompatibile quindi la retta r è parallela ad α.

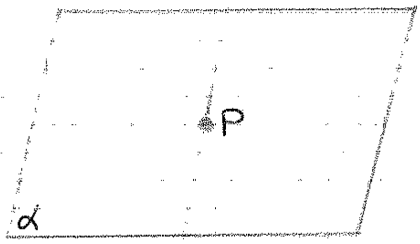
) $h=0 \quad K=1$ 26/04/2012

$\alpha: 2x+y+2z+1=0$

$$\begin{cases} y-2z=0 \\ y+z+2=0 \end{cases} \qquad r\cap\alpha: \begin{cases} 2x+y+2z=-1 \\ y-2z=0 \\ y+z=-2 \end{cases}$$

$$|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} 2x+y+2z=-1 \\ y-2z=0 \\ 3z=-2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 2x-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=-1 \\ y=-\frac{4}{3} \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=\frac{5}{3} \\ y=-\frac{4}{3} \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{5}{6} \\ y=-\frac{4}{3} \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad P\left(\frac{5}{6},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$$



La retta che giace su α deve passare per il punto P:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{5}{6}+lt \\ y=-\frac{4}{3}+mt \\ z=-\frac{2}{3}+nt \end{cases}$$

crivo r in forma parametrica:

$$\begin{cases} y=2z \\ 2z+z+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2z \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{4}{3} \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

sercizio: Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x+y=2 \\ x=0 \end{cases}$$

metodo (sostituzione)

$$\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$$

metodo (decidere con il rango).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad rk(A)=2=rk(A|B)$$ il sistema è compatibile.

$=n$ ho una sola soluzione

I metodo (matrice inversa)

$$=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$t(A)=-1 \qquad A^{-1}=-1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I metodo (Cramer)

$$\begin{matrix} 3x+y=2 \\ x=0 \end{matrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad det(A)=1 \rightarrow$$ Possiamo applicare il metodo di Cramer.

si può applicare la regola di Cramer perché $det(A)\neq 0$.

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sostituisco la colonna delle x con quella dei termini noti.

$t(A_1)=0$

$=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sostituisco la colonna delle y con quella dei termini noti.

$t(A_2)=-2$

$$\begin{cases} x=\dfrac{det(A_1)}{det(A)}=\dfrac{0}{1}=0 \\ y=\dfrac{det(A_2)}{det(A)}=\dfrac{-2}{-1}=2 \end{cases}$$

$AX=B$ se A è invertibile allora $X=A^{-1}B$ soluzione unica, invece ne abbiamo due distinte per ipotesi.

Se fosse invertibile il sistema ammetterebbe un'unica soluzione, mentre per ipotesi ce ne sono due distinte.

) falsa $AX_1=B$ $AX_1-AX_2=B-B$

$AX_2=B$ $A(X_1-X_2)=0$ perché X_1-X_2 è soluzione del sistema omogeneo associato, mentre per ipotesi il sistema dato non è omogeneo.

) corretta. Perché se un sistema lineare ammette almeno due soluzioni allora ne ammette infinite. Infatti le soluzioni di un qualunque sistema lineare si possono ottenere come somma delle soluzioni del sistema omogeneo associato e di una soluz. particolare del sistema dato.

$AX=B$

$AX=0 \to$ sistema omogeneo associato.

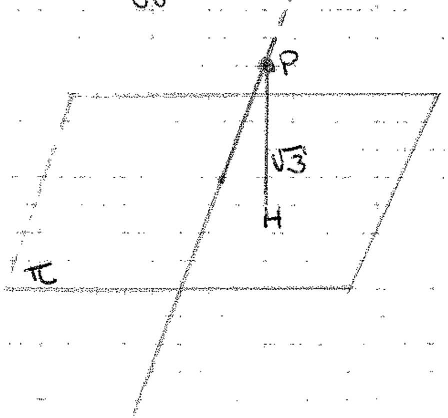
$\bar{X}$: soluzioni di $AX=0$.

X_1: soluzione particolare di $AX=B$.

utte le soluzioni del sistema $AX=B$ sono $X=\bar{X}+X_1$

el nostro caso il sistema omogeneo associato $AX=0$ ammette infinite oluzioni perché A non è invertibile per ipotesi, quindi $AX=B$ ammette nfinite soluzioni.

sercizio: Trovare i punti della retta $r: \begin{cases} y-3x=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ che hanno distanza $\sqrt{3}$ dal piano $\pi: x-y+z-3=0$. Scrivere le equazioni delle superfici sferiche di raggio $\sqrt{3}$ aventi centro su r e tangenti a π.



) Si scrive r in forma parametrica:

$y=3x$

$z=x-1$

$\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=t-1 \end{cases}$ $P\in r \Rightarrow P(t, 3t, t-1)$

Fascio di sfere: insieme di sfere tangenti in quel piano.

Fascio di sfere $\begin{cases} \text{2 sfere} \\ \text{un piano, una sfera.} \end{cases}$

Le sfere tangenti al piano π in Q sono tutte quelle appartenenti al fascio di sfere generato dalla sfera di centro Q e raggio zero e dal piano π.

Eq. della sfera di centro $Q(0,2,2)$ e raggio 0.

$$(x-0)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=0$$
$$x^2+y^2+z^2-4y-4z+8=0$$

π: $6x-4y+3z+2=0$.

Fascio di sfere generato da S e π $\quad S+t\pi=0$

$$x^2+y^2+z^2-4y-4z+8+t(6x-4y+3z+2)=0$$
$$x^2+y^2+z^2+6tx+(-4-4t)y+(-4+3t)z+8+2t=0$$

Le coordinate del centro (generico) della generica sfera del fascio sono:

$\alpha=-\frac{1}{2}(6t)=-3t \qquad \beta=-\frac{1}{2}(-4-4t)=2+2t \qquad \gamma=-\frac{1}{2}(-4+3t)=2-\frac{3}{2}t$

$C\left(-3t,\ 2+2t,\ 2-\frac{3}{2}t\right)$

$C\in\pi'$: $\quad \pi': x+y=0$

$\qquad -3t+2+2t=0 \rightarrow t=2$

Sostituendo il valore di t trovato nell'equazione del fascio si trova l'equazione della sfera richiesta:

$$x^2+y^2+z^2+12x-10y+2z+12=0.$$

2° modo: L'esercizio si può risolvere anche nel seguente modo:

1. si determina la retta passante per Q e perpendicolare a π.
2. si effettua l'intersezione tra la retta e il piano π' trovando così le coordinate del centro.
3. Il raggio della sfera è la distanza tra il centro C e il punto di tangenza Q (oppure la distanza tra C e π).

$x-4y-z+7=0$
$2x+1-9+6z=0$
$2x-4y-1-2x+2y+4z=0$

$$\begin{cases} x-4y-z+7=0 \\ -2x+6z-8=0 \\ -4x-2y+4z-1=0 \end{cases}$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -7 \\ -2 & 0 & 6 & 8 \\ -4 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3+4R_1]{R_2 \to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & -18 & 0 & -27 \end{array}\right)$$

$x-4y-z=-7$
$-8y+4z=-6$
$+18y=+27$

$$\begin{cases} x-4y-z=-7 \\ -\frac{24}{2}+6=-4z \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6+\frac{3}{4}-7=-\frac{1}{4} \\ z=\frac{3}{4} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \qquad K\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$$

Il raggio della circonferenza è:

$$R=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{19}{8}}$$

La sfera che individua la circonferenza è quella che ha come centro il centro della circonferenza e come raggio il raggio della circonferenza.

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{19}{8}$$

$$x^2+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}x+y^2+\frac{9}{4}-3y+z^2+\frac{9}{16}-\frac{3}{2}z=\frac{19}{8}$$

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{2}x-3y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}=0$$

Pertanto la circonferenza ha equazione:

$$\begin{cases} x-4y-z+7=0 \\ x^2+y^2+z^2+\frac{1}{2}x-3y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

2° modo: Il centro della circonferenza si può anche determinare nel seguente modo:

1) si scrive l'equazione del piano π' ortogonale ad $\overline{AB}$ e passante per il punto medio di $\overline{AB}$.
2) si scrive l'equaz. del piano π'' ortogonale ad $\overline{AC}$ e passante per il punto medio di $\overline{AC}$.
3) si risolve il sistema formato dalle equazioni dei piani π, π' e π''.

Esercizio: Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) / 2x_1-x_2-x_3=0,\ x_4-3x_5=0\}$

$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) / 3x_1-3x_2-x_4=0,\ 2x_1-x_2-x_3=0\}$.

Trovare una base di $U\cap W$, estenderla per trovare una base di U e una base di W e utilizzare la formula di Grassmann per determinare la dimensione di U+W.

1) Sottospazio U

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_4-3x_5=0 \end{cases}$$

Devo trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_2=2x_1-x_3 \\ x_4=3x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=\lambda \\ x_2=2\lambda-\mu \\ x_3=\mu \\ x_4=3\nu \\ x_5=\nu \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda-\mu \\ \mu \\ 3\nu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3\nu \\ \nu \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posto $\vec{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

si ha $U=[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]$

Poiché $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ sono linear. indipend. la $\dim(U)=3$ e $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ è una base di U.

2) Sottospazio W:

$$\begin{cases} 3x_1-3x_2-x_4=0 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=3x_1-3x_2 \\ x_3=2x_1-x_2 \end{cases}$$

$\lambda=1 \quad \mu=0 \quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \lambda=0 \quad \mu=1 \quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\3\\1\end{pmatrix}$

$U\cap W=[\vec{v}_1,\vec{v}_2]$

Poiché $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearm. indipend. $\dim(U\cap W)=2$ e $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ è una base di $U\cap W$.

Poiché $U\cap W\subseteq U$ i vettori della base di $U\cap W$ sono una parte dei vettori di una base di U.

$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\\1\end{pmatrix}$

basta aggiungere 1 vettore xkè $\dim(U)=3$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_3)$ è una base di U ottenuta da una base di $U\cap W$.

Poiché $U\cap W\subseteq W$ i vettori della base di $U\cap W$ sono una parte dei vettori di una base di W.

$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\3\\1\end{pmatrix} \quad \vec{w}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3)$ è una base di W ottenuta da una base di $U\cap W$.

$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)=3+3-2=4$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 \leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conviene sempre ridurre per colonne. Xkè se fossero lin. dipend. le nuove colonne sono...

$rk(A) = 4$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{w}_1$ sono lin. indip $\Rightarrow$ $\dim(U+W) = 4$ e $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{w}_1)$ è una base di $U+W$.

Osservazione: Per decidere se n vettori sono lin. ind. o lin. dip. si costruisce la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori: il rg della matrice è il numero di vettori lin. indip. Riducendo la matrice per colonne, le colonne non nulle della matrice ridotta rappresentano i vettori di una base del sottospazio generato dagli n vettori dati.

$U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$

$W = [\vec{w}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_3]$

$\vec{u}_1, \vec{u}_3 \in U \cap W$ xkè stanno sia in U che W.

$\vec{u}_1, \vec{u}_3$ sono linear. indip.

$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$4 = 3 + 3 - \dim(U \cap W)$

$\dim(U \cap W) = 2$

$U \cap W = [\vec{u}_1, \vec{u}_3]$ e $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ è una base di $U \cap W$.

) $U+W$ non è una somma diretta perchè $\dim(U+W) \neq \dim(U) + \dim(W)$

) $T \subseteq \mathbb{R}^4$ / $\mathbb{R}^4 = T \oplus U$.

$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(T) + \dim(U)$

$4 = \dim(T) + 3$

$\dim(T) = 1$.

T è il sottospazio generato da un vettore $\vec{v}$ tale che $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v}$ siano lin. indip.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo scelto $\vec{v}$ in modo che sia l.i. da $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ (in modo casuale).

Quindi $T = [\vec{v}]$

$\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})+\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})=\frac{1}{2}\vec{u}+\cancel{\frac{1}{2}\vec{v}}+\frac{1}{2}\vec{u}-\cancel{\frac{1}{2}\vec{v}}=\vec{u}$

Quindi $\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ sono lin. dipend e non posso generare $\mathbb{R}^3$.

FALSO!

c) FALSO! perché $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\vec{u}+\vec{v}$

d) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&3\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3\to C_3-C_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}=A \qquad rg(A)=2$

$\vec{u}, \vec{v}, (1,3,2)$ sono lin. dip.

FALSO!

Oppure $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\vec{u}+2\vec{v}$

3) Considerare i vettori di $\mathbb{R}^4$: $\vec{v_1}=(1,1,0,0)$, $\vec{v_2}=(1,0,1,0)$
$\vec{v_3}=(0,1,0,1)$, $\vec{v_4}=(0,0,1,1)$.

a) $\mathcal{L}(\vec{v_1},\vec{v_2})=\mathcal{L}(\vec{v_3},\vec{v_4})$

b) $\mathcal{L}(\vec{v_1},\vec{v_2})+\mathcal{L}(\vec{v_3},\vec{v_4})=\mathbb{R}^4$

c) $\mathcal{L}(\vec{v_1},\vec{v_2})\cap\mathcal{L}(\vec{v_3},\vec{v_4})=\mathcal{L}(\vec{0}_{\mathbb{R}^4})$

d) $\mathcal{L}(\vec{v_1},\vec{v_2})\cap\mathcal{L}(\vec{v_3},\vec{v_4})=\mathcal{L}((0,1,-1,0))$

$v_4\in\mathcal{L}(\vec{v_3},\vec{v_4})$

$\vec{v_4}\in\mathcal{L}(\vec{v_1},\vec{v_2})$

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+\mu\\\lambda\\\mu\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{v_4}\notin\mathcal{L}(\vec{v_1},\vec{v_2})$ perché $\vec{v_4}$ ha la quarta componente non nulla.

a) FALSO!

b) $\mathcal{L}(\vec{v_1},\vec{v_2})+\mathcal{L}(\vec{v_3},\vec{v_4})=\mathcal{L}(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4})$

$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \qquad rk(A)=2 \qquad \vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4}$ sono lin. dipend. quindi non possono generare $\mathbb{R}^4$.

FALSO!

$U \neq W$

allora $\dim(U \cap W) = 0$ e quindi $\dim(V+W) = 2$

VERA!

d) FALSO!

5) Consideriamo le matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $AB = (0)$

c) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$AB \in {}^{1\times 1}$ $\quad BA \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

d) FALSO!

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) VERO!

6) Consideriamo le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ed indichiamo con A^{-1} e B^{-1} le loro inverse.

a) $ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$

c) $(AB)^{-1}A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$

b) FALSO!

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

a) $ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} XAB &= (1\ 1\ 1)\, B^{-1} A^{-1} A\, B \\ &= (1\ 1\ 1)\, B^{-1} I\, B \\ &= (1\ 1\ 1)\, B^{-1} B \\ &= (1\ 1\ 1)\, I = (1\ 1\ 1). \end{aligned}$$

Applicazioni lineari: 10/05/2012

V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

Un'applicazione lineare da V in W è una funzione $f: V \to W$ tale che:

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

$\forall \vec{u} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$

Se f è lineare $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita

$\dim(V) = n \quad , \dim(W) = m.$

$\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n})$ base di V

$\mathcal{C} = (\vec{c_1}, \vec{c_2}, \dots, \vec{c_m})$ base di W

$f: \underset{(n)}{V} \to \underset{(m)}{W}$ applicazione lineare.

componenti immagine rispetto base C

componenti vettore V rispetto base B.

Allora esiste una matrice $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tale che $(f(\vec{v}))_{\mathcal{C}} = M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}} (\vec{v})_{\mathcal{B}}$

$\forall \vec{v} \in V$

$M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$: matrice associata all'applicazione lineare f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Le colonne della matrice associata sono le componenti dei vettori $f(\vec{b_1}), f(\vec{b_2}), \dots, f(\vec{b_n})$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.

Matrice associata e cambiamento di base:

V: $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n.

$\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n})$ base di V

$\mathcal{B}' = (\vec{b_1}', \vec{b_2}', \dots, \vec{b_n}')$ base di V.

$(\vec{v})_{\mathcal{B}}$: colonna i cui elementi sono le componenti di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$(\vec{v})_{\mathcal{B}'}$: colonna i cui elementi sono le componenti di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

$P^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$: matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$P^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = ((\vec{b_1}')_{\mathcal{B}}, (\vec{b_2}')_{\mathcal{B}}, \dots, (\vec{b_n}')_{\mathcal{B}}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\forall \vec{v} \in V \quad (\vec{v})_{\mathcal{B}} = P^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} (\vec{v})_{\mathcal{B}'}$.

Inoltre: se $n > m$, f non può essere iniettiva.
se $n < m$, f non può essere suriettiva.
se $n = m$, f è suriettiva $\Leftrightarrow$ f è iniettiva.
se $n \neq m$, f non può essere un isomorfismo.

La dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare è uguale al rango della matrice associata.

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = rg(M_f)$$

Esercizio: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (x-3y+2z,\ kx-2y+kz,\ 3x-y+4z)$.

a) Trovare i valori di k per cui $\ker(f)$ ha dimensione 1.
b) Trovare i valori di k per cui f è un isomorfismo.
c) Posto $k=1$ determinare $f^{-1}(0,0,6)$.

a) $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

$3 = 1 + \dim(\mathrm{Im}(f))$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \to rg(M_f) = 2$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ k & -2 & k \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - kR_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2+3k & -k \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2+3k & -k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 8R_3 - (-2+3k)R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -2k-4 \end{pmatrix}$$

$rg(M_f) = 2 \Leftrightarrow -2k-4 = 0$; $k = -2$.

b)
Poiché i due spazi hanno la stessa dimensione f è un isomorfismo se e solo se f è suriettiva, cioè $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3$ $\quad rk(M_f) = 3$; $k \neq -2$.

c) $k = 1$

$f(x,y,z) = (x-3y+2z,\ x-2y+z,\ 3x-y+4z)$

$f^{-1}(0,0,6) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0,6)\}$

$$\begin{cases} x-3y+2z = 0 \\ x-2y+z = 0 \\ 3x-y+4z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-y+t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y-3z \\ -2y-3z-y+t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y-3z \\ t=3y+3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2\alpha-3\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \\ t=3\alpha+3\beta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha-3\beta \\ \alpha \\ \beta \\ 3\alpha+3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\beta \\ 0 \\ \beta \\ 3\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\ker(f) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

Poichè i due vettori sono lin. indipend. $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\ker(f)$.

Esercizio: $\mathbb{K}_2[X]$: $\mathbb{K}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2.

a) Provare che $\mathcal{B}' = (1+x, 1-x, x^2)$ è una base di $\mathbb{K}_2[X]$.

b) Provare che $\mathcal{C}' = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ dove $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

c) $f : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{R}^3$

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix} a_0 + 2a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Provare che f è lineare.

d) Determinare $M_f^{\mathcal{C}'; \mathcal{B}'}$

a) $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ base canonica di $\mathbb{K}_2[X]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 121

$\mathbb{K}_2[X]$

$\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

$\mathcal{B}' = (1+X, 1-X, X^2)$

$\mathbb{R}^3$

$\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$\mathcal{E}' = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$

$$M_f^{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_f^{\mathcal{E}',\mathcal{B}'} = P^{\mathcal{E}',\mathcal{E}} M_f^{\mathcal{E},\mathcal{B}} P^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

$$P^{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = (P^{\mathcal{E},\mathcal{E}'})^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = (1,0,0) \\ -X_2 + X_3 = (-1,1,0) \\ 2X_3 = (-1,1,1) \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = (1,0,0) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ X_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (-1,1,0) = \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ X_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$P^{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$M_f^{\mathcal{E}',\mathcal{B}'} = P^{\mathcal{E}',\mathcal{E}} M_f^{\mathcal{E},\mathcal{B}} P^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizi:

1) Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ applic. lineare. A matrice associata rispetto alle basi canoniche.

a) se $rk(A) = 2$ f è iniettiva

b) f non è mai iniettiva

c) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) < \dim(\mathrm{Im}(f))$

d) $rk(A) \geq 1$

4) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z,t) = (x-y,\ z-t)$

a) $f^{-1}(1,1)$ contiene infiniti vettori

b) $f^{-1}(a,b)$ è vuoto per qualche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

c) $f^{-1}(1,1) = f^{-1}(2,2)$

d) $f^{-1}(1,1) + f(1,1) = (0,0)$

d) sicuramente falsa perchè $f(1,1)$ non ha senso.

$f^{-1}(1,1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / f(x,y,z,t) = (1,1)\}$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ z-t=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y+1 \\ z = 1+t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha+1 \\ y = \alpha \\ z = 1+\beta \\ t = \beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

le soluzioni del sistema sono infinite.

a) VERA!

5) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ endomorfismo.

$f(1,1,1,1) = f(1,0,1,0) = f(0,1,0,1)$

a) f è invertibile

b) $(1,0,1,0) \in \ker(f)$

c) $\ker(f)$ ha necessariamente dimensione 2.

d) f è suriettiva.

a) controimmagine non unica quindi f non è invertibile.
FALSO!

$f(1,0,1,0) = (0,0,0,0)$

posso fare qst xkè l'app. lineare è un endomorfismo

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

b) VERA!

6) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ appl. lineare

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y-z\\z-x\\x-y\end{pmatrix}$$

a) f è iniettiva

b) $\mathrm{im}(f)$ ha dimensione 2

Autovalori, autovettori, autospazi. 17/05/2012

V: $\mathbb{K}$-spazio vettoriale
$f: V \to V$ endomorfismo

$\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore di f, se esiste $\vec{v} \neq \vec{O}_V$ tale che $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.
Se λ è autovalore di f si dice autovettore ogni vettore $\vec{v} \neq \vec{O}_V$ tale che $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$
Si dice autospazio associato all'autovalore λ il sottospazio di V.
$V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, id_V)$

Per determinare gli autovalori di un endomorfismo si procede nel seguente modo:
1) si scrive la matrice M_f associata all'endomorfismo $f: V \to V$
2) si scrive la matrice $M_f - TI$ dove I è la matrice identità.
3) si determina il polinomio caratteristico: $P(T) = (-1)^n \det(M_f - TI)$
4) si determinano le radici del polinomio caratteristico uguagliandolo a zero; le radici appartenenti a $\mathbb{K}$ sono gli autovalori.

Per determinare l'autospazio associato ad un autovalore λ si procede nel seguente modo:
1) si scrive la matrice $M_f - \lambda I$
2) si trova il nucleo dell'applicazione lineare associata a $M_f - \lambda I$
3) il nucleo trovato è l'autospazio V_λ.

Esercizio: Verificare che l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da:
$f(x,y) = (-y, x)$ non ha autovettori e dare una spiegazione geometrica di questo fatto. Che cosa si può dire se si sostituisce $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}^2$.

1) $M_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $M_f - TI = \begin{pmatrix} -T & -1 \\ 1 & -T \end{pmatrix}$

3) $P(t) = (-1)^2 \det(M_f - TI) = T^2 + 1$
4) $P(t) = 0$, $T^2 + 1 = 0$; $T^2 = -1$ impossibile in $\mathbb{R}$.
Non ci sono autovalori e quindi non ci sono autovettori.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -i\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right]$$

Esercizio: Si consideri l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$f(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1}$

$f(\vec{e_2}) = \vec{e_3}$

$f(\vec{e_3}) = \vec{0}$

dove $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si determinino autovalori e autospazi.

1)
$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2)
$$M_f - TI = \begin{pmatrix} 2-T & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -T \end{pmatrix}$$

3) $P(T) = (-1)^3 \det(M_f - TI) = -1(2-T)(T^2) = (T-2)T^2$

4) $P(T) = 0 \quad T^2(T-2) = 0 \; ; \quad T^2 = 0 \vee T-2 = 0$

$T = 0 \vee T = 2$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0 \quad ma(\lambda_1) = 2$ e $\lambda_2 = 2 \quad ma(\lambda_2) = 1$

$\lambda_1 = 0$

$$M_f - TI = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \qquad \dim(V_{\lambda_1}) = 1 \Rightarrow mg(\lambda_1) = 1$$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \quad M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$M_f - TI = \begin{pmatrix} 1-T & -2 \\ -1 & -T \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 2$

$M_f - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$+x+2y=0$

$x=-2y$

$\begin{cases} x=-2\alpha \\ y=\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\lambda_2 = -1$

$M_f - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$-x+y=0$

$y=x$

$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$M_f - TI = \begin{pmatrix} 1-T & 1 \\ 2 & -T \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$

$M_f - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

La matrice diagonale è quella i cui elementi della diagonale principale sono gli autovalori ottenuti, scritti nell'ordine in cui sono considerati i vettori che formano le basi degli autospazi.

Una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile.

Esercizio: Stabilire se la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla.

. A è diagonalizzabile perchè è simmetrica $(A=A^T)$.

$$A-TI=\begin{pmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ 1 & 1-T & 1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{pmatrix}$$

$$P(T)=(-1)^3\det(A-TI)=-1[(1-T)[(1-T)^2-1]-1(\cancel{1}-T-\cancel{1})+1(\cancel{1}-(\cancel{1}-T))]=$$

$$=-1[(1-T)(\cancel{1}+T^2-2T-\cancel{1})+2T=-1[(1-T)(T^2-2T)+2T]=$$

$$=-T(1-T)(T-\cancel{2})+\cancel{2}=$$ fare calcoli (sbagliati)

$$T^2(T-3)=0$$

$P(T)=0$

$T^2(T-3)=0$

$T^2=0 \quad \vee \quad T-3=0$

$T=0 \quad \vee \quad T=3$

$\lambda_1=0 \qquad ma(\lambda_1)=2$

$\lambda_2=3 \qquad ma(\lambda_2)=1$

$\lambda_1=0$

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x+y+z=0$

$z=-y-x$

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-\alpha-\beta \end{cases} \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

Diagonalizzazione di una matrice simmetrica con autovalori con molteplicità algebrica 1 mediante matrice ortogonale:

Una matrice quadrata si dice ortogonale se è invertibile e la matrice inversa coincide con la trasposta.

Per diagonalizzare la matrice si procede nel seguente modo:
1) si trovano gli autovalori.
2) si trovano gli autospazi e una base per ciascuno di essi
3) si scrive la matrice ortogonale che ha come colonne i vettori normalizzati delle basi degli autospazi
4) si scrive $P^{-1} = P^T$ (perché è ortogonale).
5) P^TAP è diagonale e gli elementi della diagonale principale sono gli autovalori.

Esercizio: Costruire una matrice ortogonale P che diagonalizza la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A - TI = \begin{pmatrix} 2-T & 1 \\ 1 & 2-T \end{pmatrix}$$

$$P(T) = (-1)^2 \det(A - TI) = (2-T)^2 - 1 = 4 - 4T + T^2 - 1 = T^2 - 4T + 3$$

$P(T) = 0$

$T^2 - 4T + 3 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1 \qquad T = 2 \pm 1 \begin{smallmatrix} \nearrow 1 \\ \searrow 3 \end{smallmatrix}$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$

$ma(\lambda_1) = 1 \qquad ma(\lambda_2) = 1$

$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x + y = 0 \\ y = -x \end{matrix} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad V_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$

Normalizzando $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(|\vec{v}| = \sqrt{2})$ si ottiene $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -x + y = 0 \\ y = x \end{matrix} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$