NUMERO: 768

DATA: 15/11/2013

# A P P U N T I

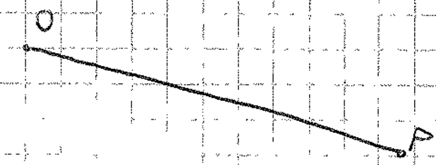
STUDENTE: Greco

MATERIA: Geometria + Eserc.

Prof. Cumino

CALCOLO VETTORIALE. 15/03/2011

Spazio della geometria euclidea
fisso O a piacere
scelgo P



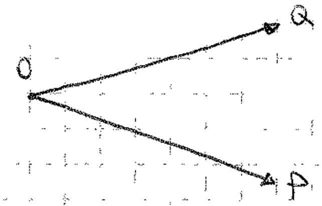

Vettore di origine O ed estremo P è il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$.

Il concetto di vettore racchiude in sé vari tipi di grandezze.

$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (P - O)$ $\quad \mathbf{v} \quad \underline{v}$

↳ simboleggia la scelta dell'orientamento.

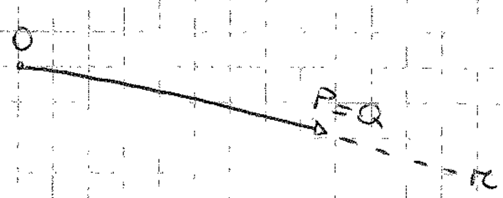
Problema: Dati 2 vettori $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ quando sono uguali?




$\vec{v} \neq \vec{w}$

Sono uguali quando

$\vec{v} = \vec{w} \iff P = Q$




2 vettori sono uguali qnd hanno:
stesso direzione
" modulo
" verso.

Che cosa caratterizza un vettore? $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$

- direzione: direzione della retta r (retta d'azione) su cui giace OP
- verso: orientamento (da O verso P)
- modulo: lunghezza di OP $= |\vec{v}|$ $\qquad |\vec{v}| = |\overrightarrow{OP}| = \|\overrightarrow{OP}\| = v \ldots$

Fissata $\stackrel{u}{\longmapsto}$ unità di misura dei segmenti.

Casi particolari:

1) vettore nullo $\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OO}$

$\cdot\, O$

- direzione indeterminata
- verso indeterminato
- modulo $|\vec{v}| = 0$

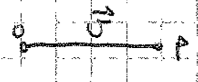
Osservazione: $\forall\, \vec{v},\ |\vec{v}| \geq 0$

proprietà:

) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V, \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

) $\forall \vec{w} \in V, \vec{w} \neq \vec{0} \quad \exists -\vec{w}$ (vettore opposto) tale che $\vec{w} + (-\vec{w}) = \vec{0}$

) $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{0}$ tale che $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$



↳ elemento neutro rispetto alla somma

) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Si dimostra che qst 2 risultati sono uguali xkè vale la propr. associativa della somma.

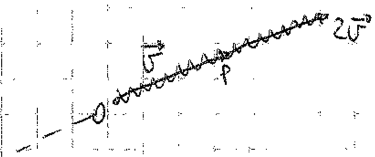
$\Rightarrow$ posso sommare $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 \dots$

Prodotto per un numero:

Def: Dato $\vec{v} = \vec{OP}$, $\forall K \in \mathbb{R}$ definisco $K\vec{v}$:

$$\begin{cases} \text{direzione: direzione di } \vec{v} \\ \text{verso} \begin{cases} K>0 & \text{stesso verso di } \vec{v} \\ K<0 & \text{verso opposto a } \vec{v} \\ K=0 & 0\vec{v} = \vec{0} \end{cases} \\ \text{modulo: } |K\vec{v}| = |K||\vec{v}| \end{cases}$$

Esempio: $\vec{w} = 2\vec{v}$



Esempio: Dato $\vec{v} = \vec{OP}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Trovare versore $\vec{v}$.

$\text{vers}\,\vec{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$

$|\text{vers}\,\vec{v}| = \left|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}\right| = \cancel{\left|\frac{1}{|\vec{v}|}\right|}\cancel{|\vec{v}|} = 1$

Esempio: Dati $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ e dati $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$

$\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n \in V$ si dice combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ e coefficienti $a_1, a_2, \dots a_n$.

) $\vec{v_1} \neq \vec{0}$, dire che $\vec{v_1}$ è linearmente dipendente vuol dire che $\exists$ una comb. lineare $k\vec{v_1} = \vec{0}$ con $k \neq 0$.

$k\vec{v_1} = \vec{0}$ con $k \neq 0$ moltiplico ambo i membri per $\frac{1}{k}$

$\vec{v_1} = \vec{0}$ così facendo ho ottenuto una contraddizione con la condizione di partenza.

Quindi $\vec{v_1}$ è linearmente dipendente $\iff \vec{v_1} = \vec{0}$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_n}$ sono linearm. dipendenti $\iff$ uno di essi è combin. lineare degli altri $\iff \exists$ una comb. lineare di $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_n}$ a coefficienti non tutti nulli che dà $\vec{0}$.

PRODOTTO PER UN NUMERO:

Proprietà: 1) $\forall \vec{v} \in V$

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

2) $\forall \vec{v} \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v} = b(a\vec{v})$$

3) $\forall \vec{v} \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$

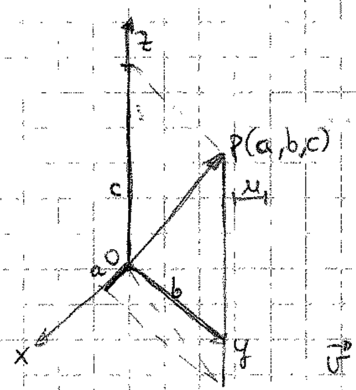
$$(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$$ $\exists$ propr. distributiva del prodotto rispetto alla somma.

4) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall a \in \mathbb{R}$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$ " " "

SISTEMA DI RIFERIMENTO:

Fisso $R(O, x, y, z)$




assi cartesiani ortogonali e monometrici (fisso l'unità di misura).

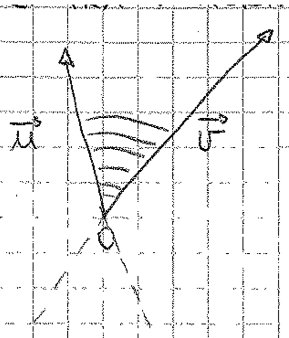
x: ascissa
y: ordinata
z: quota

$\vec{v} = \vec{OP}$

V = {vettori applicati in O} $\longleftrightarrow$ {punti dello spazio} $\longleftrightarrow$ {terna ordinata di num. (a,b,c)}

$\vec{v} = \vec{OP}$ ; $P \equiv (a, b, c)$

$|\vec{v}| = |\vec{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



$0 \leq \widehat{\vec{u}\vec{v}} \leq \pi$

L'angolo tra 2 vettori si misura in radianti.

PRODOTTO SCALARE:

Dati $\vec{u}$ e $\vec{v} \in V$

Def: si dice prodotto scalare $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} \in \mathbb{R}$.

Esempi: 1) Dati $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tali che $|\vec{u}| = 3$ $|\vec{v}| = 2$ $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\pi}{4}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

Problema inverso per trovare l'angolo $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}}$

$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} \Rightarrow \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$

2) quando $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ?

(A) quando $\vec{u} = \vec{0}$ oppure $\vec{v} = \vec{0}$

(B) quando $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\pi}{2}$

Prop. $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ sono ortogonali $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

3) Dato $\vec{u} \neq \vec{0}$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2\cos\widehat{\vec{u}\vec{u}} = |\vec{u}|^2$

$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

Propr. del prod. scalare: $\rightarrow |\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}}$

1) $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

2) $\forall\, m \in \mathbb{R}$, $m(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (m\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(m\vec{v})$

3) $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

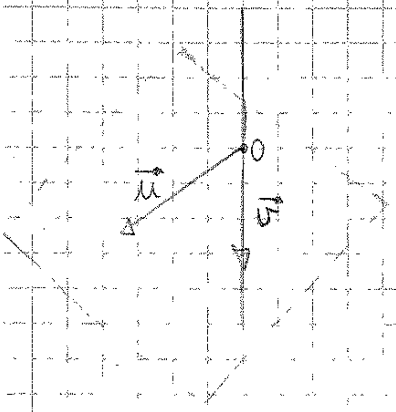
Ritorniamo a fissare $R(O, x, y, z)$

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a, b, c)$

$\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$

Calcoliamo il loro prodotto scalare:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 218

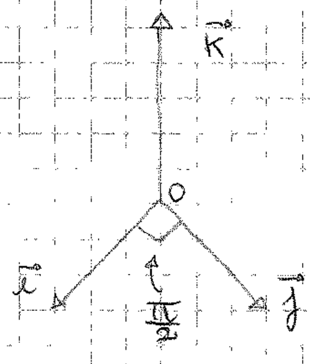



Esempio: 1) $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

$|\vec{i} \wedge \vec{j}| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$



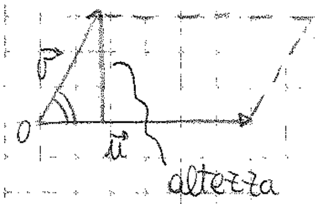

Il prodotto vettoriale ($\wedge$) è anticommutativo: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

2) $\forall\, \vec{u}, \vec{v}$ quando $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ ?

quando $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \iff \vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione.

oppure $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$

$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \widehat{\vec{u}\vec{v}}$ = base × altezza = area del parallelogramma di lati $\vec{u}$ e $\vec{v}$.




Proprietà: 1) $\forall m \in \mathbb{R}$

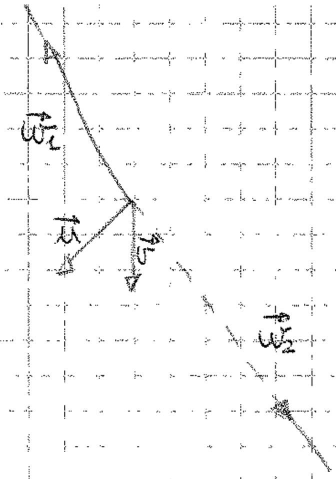
$m(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (m\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (m\vec{v})$

2) $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

$\vec{w_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2,2,-2)$

$\vec{w_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(2,2,-2)$




PRODOTTO MISTO:

Dati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

Def: si dice prodotto misto di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

PRODOTTO MISTO IN COMPONENTI:

$\vec{u} = (a,b,c)$ , $\vec{v} = (a',b',c')$ , $\vec{w} = (a'',b'',c'')$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = (a,b,c) \cdot \left[ (b'c''-b''c')\vec{i} - (a'c''-c'a'')\vec{j} + (a'b''-b'a'')\vec{k} \right]$$

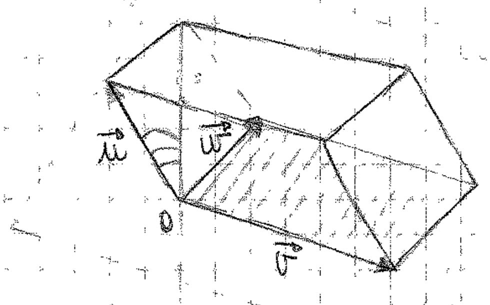
$$= a(b'c''-b''c') - b(a'c''-c'a'') + c(a'b''-b'a'')$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a(b'c''-b''c') - b(a'c''-c'a'') + c(a'b''-b'a'')$$

So che $|\vec{v} \wedge \vec{w}|$ = area del parallelogramma di lati $\vec{v}, \vec{w}$.

altezza

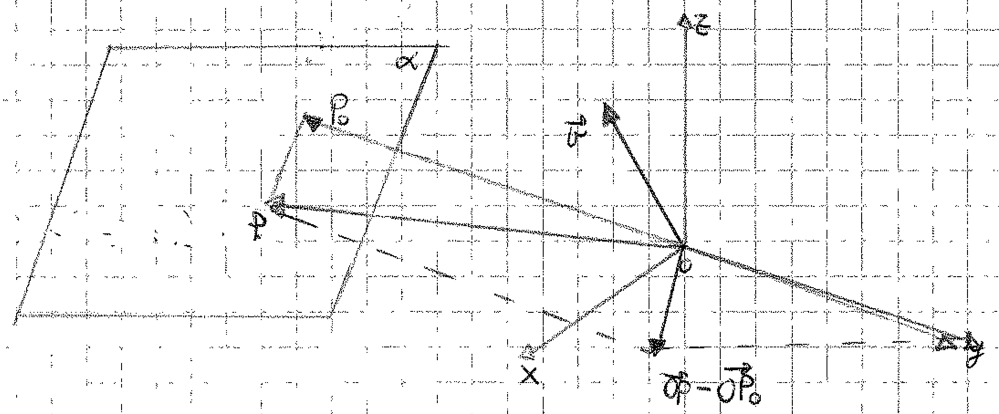
$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = |\vec{u}|\,|\vec{v} \wedge \vec{w}| \cos \widehat{\vec{u}\,(\vec{v} \wedge \vec{w})}$$




$|\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}|$ = volume del parallelepipedo di lati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

PIANI.

1) $\alpha$ è il piano per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ortogonale al vettore $\vec{v} = (a, b, c)$




$P(x, y, z) \in \alpha \iff PP_0 \perp \vec{v}$

$\iff (\vec{OP} - \vec{OP_0}) \perp \vec{v} \iff \boxed{(\vec{OP} - \vec{OP_0}) \cdot \vec{v} = 0}$ equaz. vettoriale di $\alpha$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$

$\boxed{\alpha: \ ax + by + cz + d = 0}$ equaz. cartesiana di $\alpha$

$\forall K \in \mathbb{R}, \ K \neq 0$

$Kax + Kby + Kcz + Kd = 0 \leftarrow$ anche se moltiplicato per K rappresenta lo stesso piano $\alpha$.

Osservazione:

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ Il piano è sempre lo stesso.

$Kax_0 + Kby_0 + Kcz_0 + Kd = 0$

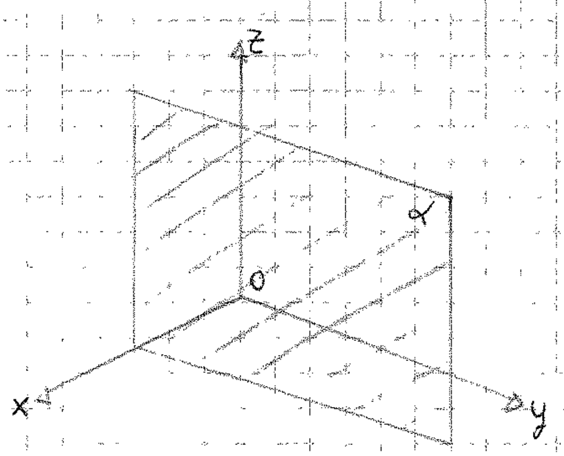
Il piano non è rappresentato da una sola equazione.

Posso moltiplicare l'equazione per $\forall K \neq 0$ e ottengo sempre lo stesso piano.

$\alpha: (\vec{OP}-\vec{OP_0})\cdot(\vec{OP_1}-\vec{OP_0})\wedge(\vec{OP_2}-\vec{OP_0})=0$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

Esempio: Disegnare $\alpha: 10x=0$

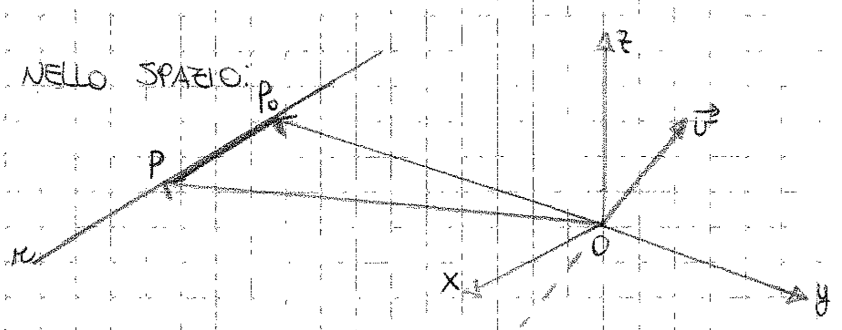



$P_0=(0,152,\pi)\in\alpha$

$O\in\alpha$

$\vec{v}\perp\alpha \Rightarrow \vec{v}=(10,0,0)$

RETTE NELLO SPAZIO:




D. Rappresentare analiticamente la retta r passante per $P_0$, parallela a $\vec{v}=(l,m,n)$ ; $P_0=(x_0,y_0,z_0)$

$P=(x,y,z)\in r \Longleftrightarrow P_0P \parallel \vec{v} \Longleftrightarrow \boxed{(\vec{OP}-\vec{OP_0})=t\vec{v}}$ per qualche $t\in\mathbb{R}$

↳ equaz. vettoriale di r

riduciamo l'eq. vett. di r in componenti:

$$\begin{cases} x-x_0=lt \\ y-y_0=mt \\ z-z_0=nt \end{cases}$$

equaz. parametriche di r (perché c'è t che si chiama parametro).

Esempio: Determinare la retta r passante per $P_0(1,0,1)$ parallela a $\vec{v}=(1,2,3)$.

$$r: \begin{cases} x-1=t \\ y-0=2t \\ z-1=3t \end{cases}$$

Qst sono p.ti della retta, per sceglierne uno faccio variare t

$P_0\in r$ per $t=0$ $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$

Esempio: 1) Data una retta: 23/03/2011

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$$

$r$ passa per $P_0(1,2,3)$ ed è parallela a $\vec{v} = (1, 0, -1)$ tutti i multipli di $\vec{v}$ sono paralleli alla retta.

Rapp. cartesiana:

$$\begin{cases} x - 1 = t \\ y = 2 \\ \frac{z-3}{-1} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 = -(z-3) \\ y = 2 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Alternativa:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

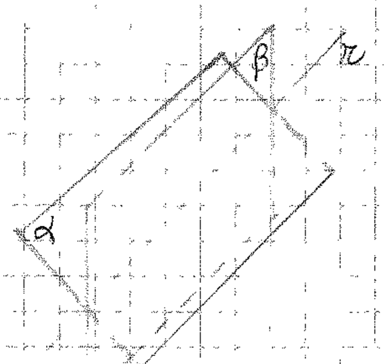
convenzione $\boxed{y - 2 = 0}$

Le componenti del vettore $\vec{v} \parallel r$ si dicono <u>parametri direttori</u> di $r$.

2) Data $r \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ ricavare una rappresentazione parametrica.

$P_0 \in r$ $\qquad P_0(4, 2, 0)$ una soluzione del sistema.

$\vec{v} \parallel r$




$\alpha: x + z - 4 = 0$

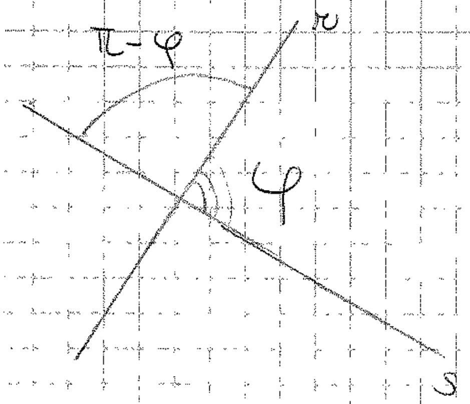
$\beta: y - 2 = 0$

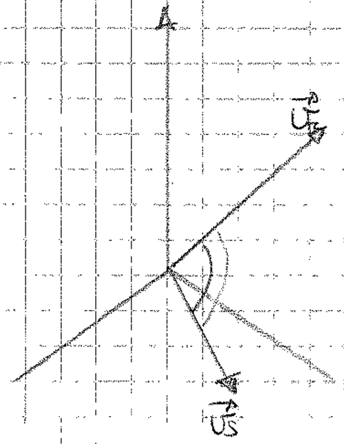
$\vec{n}_\alpha \perp \alpha \quad ; \quad \vec{n}_\alpha = (1, 0, 1)$

$\vec{n}_\beta \perp \beta \quad ; \quad \vec{n}_\beta = (0, 1, 0)$

$\vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta = \vec{v} \parallel r$

$$\vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-1)\vec{\imath} - (0-0)\vec{\jmath} + (1-0)\vec{k} = (-1, 0, 1)$$




Def: $\widehat{rs} = \widehat{\vec{u_r}\vec{u_s}}$ oppure $\pi - \widehat{\vec{u_r}\vec{u_s}}$

ricordo:

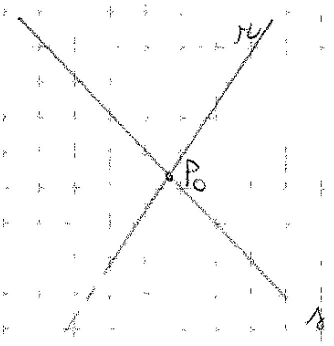
$\vec{u_r} \cdot \vec{u_s} = |\vec{u_r}||\vec{u_s}| \cos \widehat{\vec{u_r}\vec{u_s}} \Rightarrow \cos \widehat{\vec{u_r}\vec{u_s}} = \dfrac{\vec{u_r} \cdot \vec{u_s}}{|\vec{u_r}||\vec{u_s}|}$

$\cos \widehat{rs} = \pm \cos \widehat{\vec{u_r}\vec{u_s}} = \dots$

$\cos \widehat{\vec{u_r}\vec{u_s}} = \dfrac{(0,-1,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{1+1}\,\sqrt{1+1}} = \dfrac{0-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\cos \widehat{rs} = \mp \dfrac{1}{2}$ ; $\widehat{rs} = \dfrac{\pi}{3}, \pi - \dfrac{\pi}{3}$

) Determ. una retta $s$ per $P_0(1,0,1)$ ortogonale a $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$




$s \begin{cases} x = 1 + lu \\ y = 0 + mu \\ z = 1 + nu \end{cases}$

$(l,m,n)\cdot(0,-1,1) = 0$ $\quad 0 - m + n = 0$ ; $\boxed{m = n}$

m ed n variano quindi avremo tante rette.

una delle rette $s$:

$s: \begin{cases} x = 1 + \pi u \\ y = 0 + 5u \\ z = 1 + 5u \end{cases}$

Esempio: 1) $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $\alpha: x + y = 0$ Calcolare l'angolo tra r ed $\alpha$.

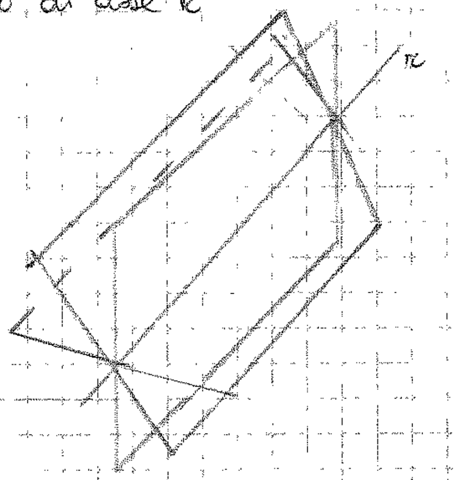
vettore ortogonale al piano

$$\sin \widehat{r\alpha} = \frac{(0,-1,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \left|-\frac{1}{2}\right|$$

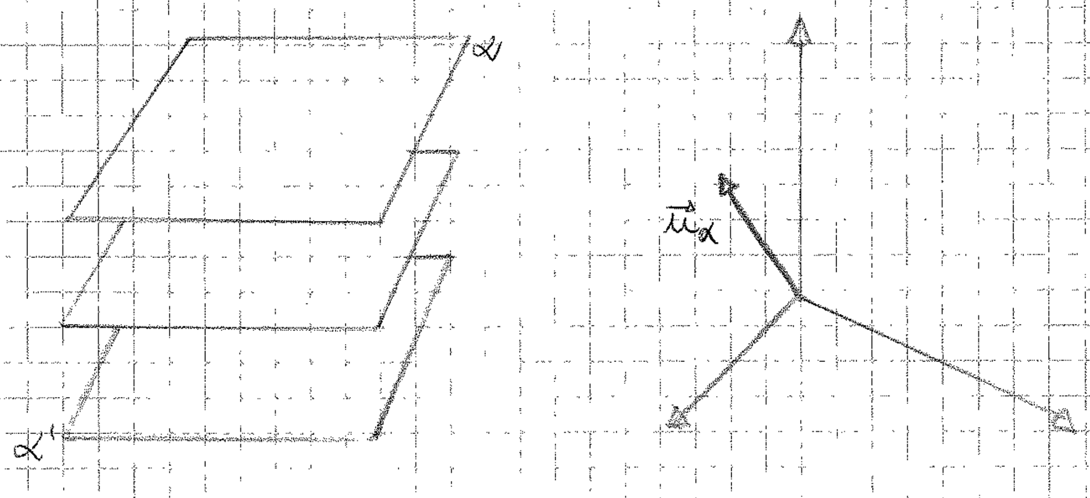
$$\widehat{r\alpha} = \frac{\pi}{6}$$

FASCI DI PIANI:

1) fascio proprio di asse r




2) fascio improprio di piani paralleli al piano $\alpha$.




2) $\alpha: ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$

un piano $\alpha'$ del fascio

$\alpha': ax + by + cz + K = 0 \quad \forall K \in \mathbb{R}$

$3\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{3}{2}\lambda$ ← qualunque coppia di valori che soddisfa qst relazione ∈ a quel piano $\alpha$.

$\lambda = 12$; $\mu = -18$

F: $12(x+2y) - 18(y+z+1) = 0$

$2x + 4y - 3y - 3z - 3 = 0$

$2x + y - 3z - 3 = 0$ ← eq. del piano $\alpha$ che sto cercando.

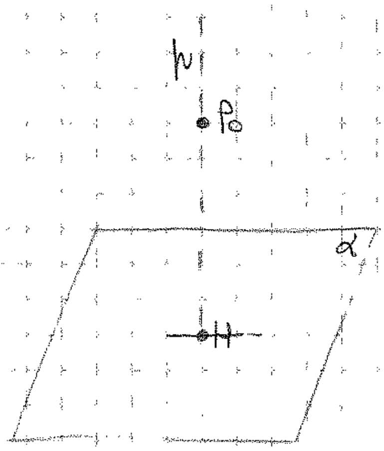
Qualunque altra scelta di $\lambda$ e $\mu$ purchè soddisfa $\mu = -\frac{3}{2}\lambda$ va bene.

DISTANZA TRA DUE PUNTI:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad P_1(x_1, y_1, z_1)$

$d(P_0, P_1) = |(\vec{OP_0} - \vec{OP_1})| = \sqrt{(x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 + (z_0-z_1)^2}$

DISTANZA PUNTO-PIANO:




$d(P_0, \alpha) = d(P_0, H)$

$H = \alpha \cap p$

Es: Data $\alpha: x + 2y + z + 1 = 0$ e $P_0(1,1,0) \notin \alpha$. Voglio calcolare la distanza tra $\alpha$ e $P_0$.

$$p: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

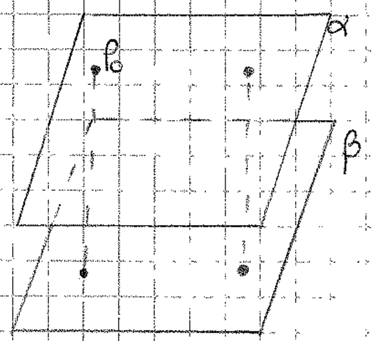
$H = p \cap \alpha \Rightarrow (1+t) + 2(1+2t) + (t) + 1 = 0$

$4 + 6t = 0 \rightarrow 2 + 3t = 0 \rightarrow t = -\frac{2}{3}$

$H = \left(1 - \frac{2}{3}, 1 - \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

$d(P_0, H) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(0+\frac{2}{3}\right)^2} = d(P_0, \alpha)$

DISTANZA TRA PIANI:

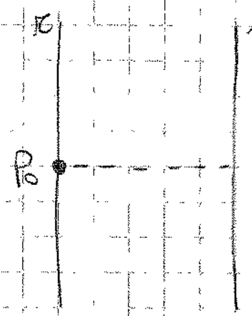



$\alpha // \beta$

$$d(\alpha,\beta)=d(P_0,\beta) \quad \forall P_0 \in \alpha$$

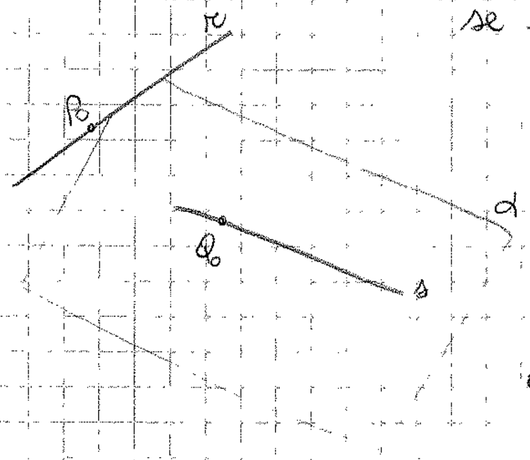
+ vedere come si fa per esercizio

DISTANZA TRA RETTE:




se $r // s$

$$d(r,s)=d(P_0,s) \quad \forall P_0 \in r$$




se le due rette sono sghembe:

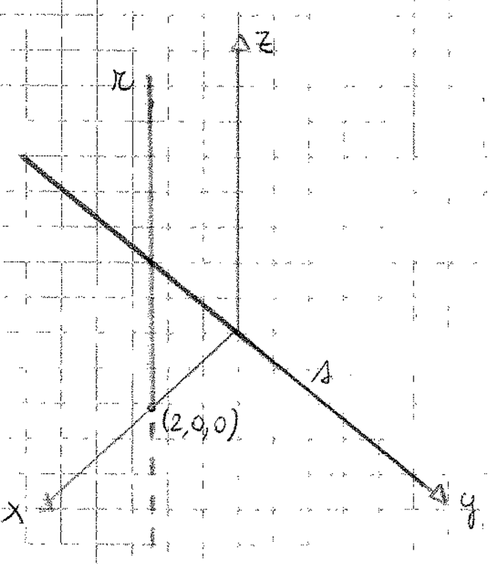
$\alpha$ = piano passante per s e // ad r.

↓

per ragioni di geometria qst piano è unico.

$$d(r,s)=d(P_0,\alpha) \quad \forall P_0 \in r$$

ES:




$$r: \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0+t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Voglio calcolare $d(r,s)$

OPERAZIONI CON LE MATRICI:

SOMMA:

$A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$

matrici

$A=(a_{ij}) \quad B=(b_{ij})$

$A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$

ES: 1) $A=(1,2,3) \in \mathbb{R}^{1,3}$

$B=(0,1,-1) \in \mathbb{R}^{1,3}$

$A+B=(1,3,2)$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Proprietà:

2 matrici di tipo diverso non si possono sommare.

1) $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$

$A+B=B+A$ prop. commutativa

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$

3) $\exists$ matrice nulla $O$ tale che $\forall A$, $A+O=A$.

$O$ ha i coefficienti nulli.

4) $\forall A \neq O \ \exists -A$ (matrice opposta) tale che $A+(-A)=O$

$-A$ è fatta di coefficienti opposti rispetto ad $A$.

Data $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,p}$ — Il numero di colonne di A è uguale al " " righe di B.

$AB = C = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,p}$

C definita da $c_{ij}$ = prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 1+0+0 = 1$ $\qquad c_{21} = 0+0+1 = 1$

$c_{12} = 2+2+0 = 4$ $\qquad c_{22} = 0+1+0 = 1$

$c_{13} = 3+2 = 5$ $\qquad c_{23} = 0+1+0 = 1$

$c_{14} = 4+2 = 6$ $\qquad c_{24} = 0+1+0 = 1$

Si può fare BA? No, non si può fare. In altri casi si può fare ma da risulta $\neq$.
In generale: il prodotto riga per colonna non è commutativo.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es: In qualche caso il prodotto tra matrici è commutativo.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ matrice identità o matrice identica.

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ $\qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Risolvo: (per sostituzione):

$$\begin{cases} 1+x_2+x_2-x_3=0 \\ x_1=1+x_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_3=1+2x_2 \\ x_1=1+x_2 \end{cases}$$

soluzione: $(1+x_2,\ x_2,\ 1+2x_2)$ al variare di $x_2 \in \mathbb{K}$ $\quad \infty^1$ soluzioni

Def: Sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matrice
dei coefficienti

sistema: $AX$ riga per colonna

$AX=B$

$$AX=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \dots +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \dots +a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \dots +a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}x_2+\dots+\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}x_n=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ combinazione lineare delle colonne di $A$ a coefficienti le incognite.

Continua esempio 1:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

matrice completa del sistema:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

30/03/2011

Def: Un sistema lineare $(A|B)$ si dice ridotto a scala quando in ogni riga non nulla di A esiste un elemento $\neq 0$, che ha a sx e al di sotto solo zeri.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p_2 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & & & & * & * & * \\ 0 & \cdots & & & & & p_r & * \end{pmatrix}$$

Teorema: Un sistema $(A|B)$ a scala con A quadrata $m \times m$ è compatibile se ha tutte le righe non nulle e ha una sola soluzione.

Es:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 2}_{A} & & & 1 \end{array}\right)$$
1 sola soluzione...

elementi dipe ...

Es:
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 2; \quad x_5 = 2 + x_6 \end{cases}$$

$x_1, x_3, x_5$ dipendenti dalle altre.
$x_2, x_4, x_6$ indipendenti o libere

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 - x_5 + x_6 + 1 \\ x_3 = 2x_4 - x_5 - x_6 \\ x_5 = 2 + x_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_4 + 2x_6 + 2 - 2 - x_6 + x_6 + 1 \\ x_3 = 2x_4 - 2x_6 - 2 \\ x_5 = 2 + x_6 \end{cases}$$

soluzioni: $(x_2 - 2x_4 - 2x_6 + 1,\ x_2 2x_4 - 2x_6 - 2,\ x_4,\ 2 + x_6,\ x_6)$ al variare di $x_2, x_4, x_6$ di $\mathbb{R}$ $\infty^3$

Es:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
Il sistema è incompatibile perché $0 = 1$ non ha soluzioni.

$R_2 \to R_2 + kR_1$

Ipotesi: $(c_1, c_2, \dots c_n)$ soluzione di $(A|B)$

sostituisco in $(A'|B')$

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n = b_1 \\ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots) + k(a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n) = b_2 + kb_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le soluzioni di $(A|B)$ sono anche soluzioni di $(A'|B')$

Viceversa: Ipotesi: $(k_1, k_2 \dots k_n)$ soluzione di $(A'|B')$.

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots a_{1n}k_n = b_1 \\ (a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \dots a_{2n}k_m) + k(a_{11}k_1 + \dots + a_{1n}k_n) = b_2 + kb_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (a_{21}k_1 + \dots + a_{2n}k_n) + \cancel{kb_1} = b_2 + \cancel{kb_1}$

$\Rightarrow (a_{21}k_1 + \dots + a_{2n}k_n) = b_2$

$\Rightarrow$ Deduco che l'operaz. elementare ③ produce sistemi equivalenti.

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS:

Dato $(A|B)$ posso ridurlo a un sistema equivalente $(A'|B')$ a scala con le operazioni ① ② ③.

ES: 1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (A|B)$

$R_2 \longleftrightarrow R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$R_2 \to R_2 - R_1$
$R_3 \to R_3 - R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Il sistema è incompatibile.

Esempio: 01/04/2011

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ non è a scala.

Cerco sistema equivalente ridotto a scala con le operazioni elementari sulle righe di $(A|B)$.

$R_2 \leftrightarrow R_3$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $R_3 \to R_3 - 2R_1$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Ho ottenuto un sistema ridotto a scala però è incompatibile.

$(A'|B')$ è incompatibile $\Leftrightarrow$ $(A|B)$ è incompatibile.

Teorema: Se $(A|B)$ è a scala e $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ ha tutti gli elementi della diagonale principale, allora $(A|B)$ è compatibile e ha una sola soluzione.

$A =$ 

Def: Data $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ a scala si dice rango di $A$, $rg(A)$ il numero.

Esempio: 1)

$$(A'|B')=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$rg(A')=2$

$rg(A'|B')=3$

Il rango della matrice non sempre è uguale al rango della matrice completa.

2)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A)=3$

$R_1, R_2, R_3$ righe non nulle di $A$.

$R_1=(0,2,3,0,4,6)$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$C_4 = aC_2 + bC_3$ ?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b \\ 7b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ 7b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sist. non omogeneo
$$\begin{cases} 0 = 2a+3b \\ 3 = 7b \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a = -\frac{9}{7} \to a = -\frac{9}{14} \\ b = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$C_4 = -\frac{9}{14}C_2 + \frac{3}{7}C_3 \implies C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ complessivamente sono linearm. dipendenti.

$C_4 = -\frac{9}{14}C_2 + \frac{3}{7}C_3 + 0C_5 + 0C_6$ $\quad C_4$ è linearmente dipendente dalle altre.

Perchè ho considerato la $C_4$? Perchè nella scala è l'unica che non contiene l'elemento marcato.

Dato $(A|B)$, $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ $\quad AX = B$ qst prodotto si può esprimere anche in un altro modo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad AX = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$C_1, C_2 \dots C_n$ le colonne di $A$

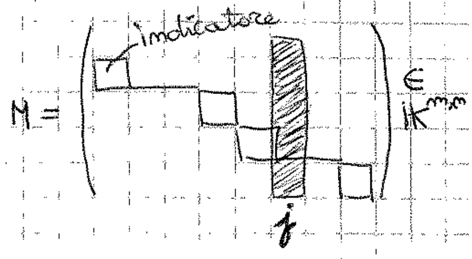
$(A|B) \iff x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_nC_n = B$

quando il sistema $(A|B)$ è compatibile vuol dire che $B$ è comb. lineare delle colonne e i coeff. della comb. lineare sono i coeff. della soluzione.

Data una matrice a scala: 05/04/2011

Proposizione ① le righe non nulle sono linearm. indipendenti.
② le colonne prive di elemento indicatore sono linearm. dipendenti da quelle che precedono.
③ le colonne che hanno l'indicatore sono linearm. indipendenti.

Da ② e ③ si deduce:




se ho $c_j$ senza indicatore

$c_j = a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_{j-1}c_{j-1}$

$a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_{j-1}c_{j-1} - c_j = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1}$

coefficienti $(a_1, a_2, \dots\dots a_{j-1}, -1)$
↳ coefficiente di $c_j$

Posso riscrivere:

$a_1c_1 + a_2c_2 + \dots\dots + a_{j-1}c_{j-1} + 0c_{j+1} + \dots + 0c_n = 0$

è una combin. lineare di tutte le colonne della M a coefficienti $(a_1, a_2 \dots a_{j-1}, -1, 0 \dots 0)$ non tutti nulli.

Penso al sistema lineare omogeneo $MX = 0$

$x_1c_1 + x_2c_2 + \dots\dots + x_jc_j + \dots\dots + x_nc_n = 0$

Interpretazione: una soluzione $(a_1, a_2 \dots, a_n)$ di $MX=0$ è una n-upla di numeri tale che $a_1c_1 + \dots\dots + a_nc_n = 0$.
Nelle nostre ipotesi una soluzione di $MX=0$ è $(a_1, a_2, \dots\dots a_{j-1}, -1, 0 \dots 0)$.

Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ qualsiasi, M ed $M' \in \mathbb{K}^{m,n}$ siano due riduzioni a scala di A, i sistemi omogenei $AX=0$, $MX=0$ ed $M'X=0$ sono equivalenti.

⇒ passando da M ad M' non cambia la posizione degli indicatori
⇒ il numero degli indicatori è lo stesso in M e in M'.

Def: Rango di una matrice M ridotta a scala:

rg(M) = numero righe non nulle
= " indicatori

rg(M) = rg(M')

⇒ Def. Si dice rg(A) qualunque il rango di una qualunque matrice M a scala, dedotta da A con operazioni elementari sulle righe.

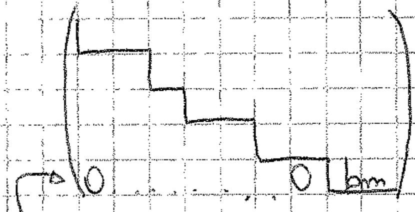
Dimostrazioni.

1) riduco a scala

$(A|B) \to \dots \to (A'|B')$ ridotto a scala

$\Rightarrow A'$ ridotta a scala

se $rg(A') < rg(A'|B')$



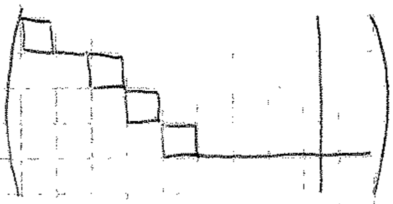
$(A'|B')$

$0x_1 + \dots + 0x_n = b_m \neq 0$

$\Downarrow$

sistema è incompatibile

2) se $rg(A) = rg(A|B)$ allora $rg(A') = rg(A'|B') = r \leq n$



$\Rightarrow$ posso esprimere $r$ incognite in funzione di $n-r$ incognite libere

$\infty^{n-r}$ soluzioni.

Conseguenze:

① Hp $(A|B)$ compatibile con $n = rg(A) = rg(A|B)$ le soluzioni sono $\infty^{n-n} = 1$

ogni incognita è dipendente.

② $AX=0$ non è mai incompatibile perchè $(A|0) \to rg(A) = rg(A|0)$
c'è almeno la soluzione $(0, 0, \dots, 0)$
$\exists$ soluzioni $\neq (0, 0, \dots, 0)$ solo quando $n \neq r$, allora $\infty^{n-r}$ soluzioni.

Osservazione: su $AX=0$ data una soluzione $\overline{Y}$ del sistema omogeneo

$\overline{Y} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ tale che $A\overline{Y} = 0$.

Sia data un'altra soluzione $\overline{Z} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tale che $A\overline{Z} = 0$

$\Rightarrow A\overline{Y} + A\overline{Z} = A(\overline{Y} + \overline{Z}) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow A(\overline{Y} + \overline{Z}) = 0 \Rightarrow \overline{Y} + \overline{Z}$ è soluzione

Confrontiamo le soluzioni di $(A'|B')$ con $(A|0)$.

Il sist. omogeneo associato è equivalente al sistema $A' = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

soluzioni: $\left(-\frac{x_3}{3} - x_4, -\frac{2}{3}x_3, x_3, x_4\right)$

Voglio verificare che:

$$\left(-\frac{x_3}{3} - x_4, -\frac{2}{3}x_3 + 1, x_3, x_4\right) = \left(-\frac{x_3}{3} - x_4, -\frac{2}{3}x_3, x_3, x_4\right) + \boxed{(0, 1, 0, 0)}$$

$\rightarrow$ soluzione particolare del sistema di partenza $(A|B)$.

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Trovare $X$ tale che $AX = B$ $\qquad$ $X \in \mathbb{R}^{2,2}$

si può generalizzare la teoria dei sist. lineari al caso in cui le incognite non sono più scalari ma sono matrici.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} X_1 = (0, 1) \\ X_2 = (2, 2) \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Trovare $X$ tale che $AX = I_3$

Se $\exists$ $X$ tale che $AX = I_3$, $X$ si chiama matrice inversa della matrice data e si indica con $X = A^{-1}$ e $A$ si dice invertibile. Allora anche $A^{-1}A = I$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

TEOREMA DI CRAMER:

Dato un sistema lineare a incognite scalari $(A|B)$ con $A$ quadrata $\in \mathbb{K}^{n,n}$ e invertibile.

$$AX = B$$

$\exists!\ A^{-1}$ $\qquad\qquad$ $\exists!$ = esiste ed è unica.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

proprietà:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Risolvere $AX = B$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A$ è di rg 2 $\iff \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} \iff (c,d) \neq k(a,b) \iff \boxed{ad - bc \neq 0} \iff \det(A) \neq 0$

CRAMER:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & b_1 \\ c & d & b_2 \end{array}\right)$$

Riduco a scala supponendo $(a \neq 0,\ c \neq 0)$

$R_2 \to aR_2$

$R_1 \to cR_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ac & bc & b_1 c \\ ac & ad & b_2 a \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} ac & bc & b_1 c \\ 0 & ad-bc & b_2 a - b_1 c \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} acx_1 + bcx_2 = b_1 c \\ (ad-bc)x_2 = b_2 a - b_1 c \end{cases} \to \begin{cases} a\cancel{c}x_1 = b_1\cancel{c} - b\cancel{c}\,\frac{b_2 a - b_1 c}{ad - bc} \\ x_2 = \frac{b_2 a - b_1 c}{ad - bc} = \frac{\det\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{a}\left(\frac{b_1(ad-bc) - b(b_2 a - b_1 c)}{ad - bc}\right) = \frac{1}{\cancel{a}}\,\frac{\cancel{a}b_1 d - \cancel{a}b_2 b}{ad - bc} = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

SPAZI VETTORIALI $\mathbb{R}^n$

Esempi: 1) vettori dello spazio e del piano.
Rispetto a un sist. di riferimento. $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ $\quad \vec{w} = (a_1, a_2)$

2) matrice riga $(a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{R}^{1,n}$

" colonna $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$

$h\vec{v}_1 = h(k_1\vec{u}) = (hk_1)\vec{u}$ facendo il prodotto per un numero qualsiasi con qualsiasi vettore, si ottiene un

$= (hk_1, 0, 2hk_1, hk_1) \in W$ multiplo di W.

$\Rightarrow$ W è "chiuso" rispetto al prodotto per un numero.

Definizione: sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, W si dice sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per un numero cioè:

① $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$

② $\forall \vec{v} \in W, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\vec{v} \in W$

Proposizione: se W è sottospazio di $\mathbb{R}^n$ valgono le 8 proprietà delle operazioni.

Esempio: $\vec{0} \in W$:

$W \neq \emptyset \Rightarrow \exists \vec{v} \in W, (-1)\vec{v} \in W$

$\vec{v} + (-1)\vec{v} \in W$

$\vec{v} + (-\vec{v})$

$\quad \| \vec{0}$

Esempi: 1) $\mathbb{R}^2$:

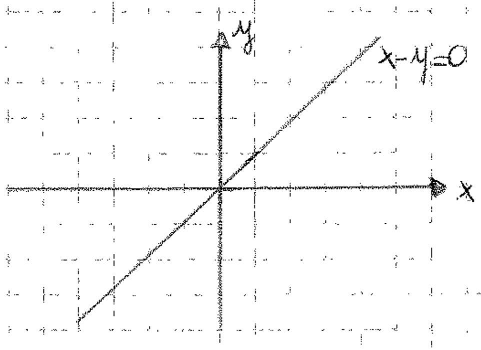
$W = \{(x,y) \mid x - y = 0\}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?

① $W \neq \emptyset$

② $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$

③ $\forall \vec{v} \in W, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\vec{v} \in W$

①




non è vuoto

② $\vec{v}_1 = (x_1, x_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, x_2)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in W$ perchè devo verificare che la prima componente sia uguale alla seconda cioè $x = y$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = x_1 + x_2$

$\mathbb{R}^n$, fisso $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$.

fisso $a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{R}$

$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ si chiama combinazione lineare di $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k$

Definizione: $\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k) = \{$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_k \}$

è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ generato da $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k$!

Proposizione: $\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione: ① per esempio $\vec{u}_1 \in \mathcal{L}$, $1\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \dots + 0\vec{u}_k$

② $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{L}$

$\vec{v}_1 = a_1\vec{u}_1 + \dots + a_k\vec{u}_k$

$\vec{v}_2 = b_1\vec{u}_1 + \dots + b_k\vec{u}_k$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1\vec{u}_1 + \dots + a_k\vec{u}_k) + (b_1\vec{u}_1 + \dots + b_k\vec{u}_k) =$

$= (a_1+b_1)\vec{u}_1 + (a_2+b_2)\vec{u}_2 + \dots + (a_k+b_k)\vec{u}_k \in \mathcal{L}$

③ $\vec{v}_1 = a_1\vec{u}_1 + \dots + a_k\vec{u}_k$, $k \in \mathbb{R}$

$k\vec{v}_1 = (ka_1)\vec{u}_1 + \dots (ka_k)\vec{u}_k \in \mathcal{L}$

Esempio: $\mathbb{R}^5$, $\vec{u}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$

$\vec{u}_2 = (1, 0, -1, 0, -1)$

$\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

$\mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \{a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2, \ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(a_1+a_2, 2a_1, 3a_1 - a_2, 4a_1, 5a_1 - a_2)\}$

Esempio: Data $M \in \mathbb{R}^{m,n}$

$MX = 0$ sistema lineare omogeneo nelle incognite $x_1, x_2 \dots x_n$

l'insieme delle soluzioni $MX=0$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Isomorfismo:
corrispondenza biunivoca tra matrici e insieme in cui si conservano le proprietà.

Esempio:

Data $M \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i vettori riga $\in \mathbb{R}^n$

i vettori colonna $\in \mathbb{R}^m$

$R(M)$ = sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di $M$.

$C(M)$ = sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di $M$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}) \subseteq \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v})$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{u}+\vec{v})$

In $\mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k \in V$

Def: Si dice base di V un insieme $\mathcal{B}=(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k)$ ordinato di vettori tali che:

① $V=\mathcal{L}(\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k)$

② $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k$ linearmente indipendenti.

Esempio: 1) $\mathbb{R}^3$, $(\vec{i}, \vec{j})=\mathcal{B}$

$(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})=\mathcal{B}'$ verifico che sono base di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (quale?)

$\mathcal{B}=(\vec{i}, \vec{j})$ ordinato, $\vec{i}, \vec{j}$ sono generatori di $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{i}, \vec{j}$ sono linearm. indipendenti?

$a\vec{i}+b\vec{j}=\vec{0}$

$a(1,0,0)+b(0,1,0)=(0,0,0)$

$(a,b,0)=(0,0,0) \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff$ linearmente indipendenti

$\mathcal{B}=(\vec{i}, \vec{j})$ è base di $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{j})=$ piano $(xy) \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}'$ è base di $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$?

$\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}$ sono generatori di $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$

$\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}$ sono linearmente indipend.?

$a\vec{i}+b(\vec{i}+\vec{j})=\vec{0}$

$a(1,0,0)+b(1,1,0)=(0,0,0)$

$(a+b, b, 0)=(0,0,0) \iff \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \iff$ linearmente indipendenti

$\mathcal{B}'=(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$ è base di $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})=$ piano $(xy)$

$\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{L}(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j})$

cambio base in $\mathbb{R}^3$

$B' = (\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}, -\vec{k})$ è base?

1) generatori di $\mathbb{R}^3$?

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \; \vec{v} = (a,b,c) = k_1\vec{i} + k_2(\vec{i}+\vec{j}) + k_3(-\vec{k})$

$\exists \, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$?

$(a,b,c) = (k_1+k_2)\vec{i} + k_2\vec{j} - k_3\vec{k} = (k_1+k_2, k_2, -k_3)$

$$\begin{cases} a = k_1+k_2 \\ b = k_2 \\ c = -k_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = a-k_2 = a-b \\ k_2 = b \\ k_3 = -c \end{cases}$$

esiste una sola soluzione

$(k_1, k_2, k_3) = (a-b, b, -c)$

Sì, sono generatori.

2) sono linearmente indipendenti?

$k_1\vec{i} + k_2(\vec{i}+\vec{j}) + k_3(-\vec{k}) = \vec{0} \iff k_1 = k_2 = k_3 = 0$

$$\begin{cases} 0 = k_1+k_2 \\ 0 = k_2 \\ 0 = -k_3 \end{cases} \iff k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

una sola soluzione.

Sì, sono linearm. indipendenti.

Il vettore $(a,b,c)$ rispetto alla base $B'$ ha componenti $(a-b, b, -c)$.

In $\mathbb{R}^n$ ci sono due sottospazi impropri:

1) $V = \{\vec{0}\}$, sottospazio nullo

① $\{\vec{0}\} \neq \emptyset$

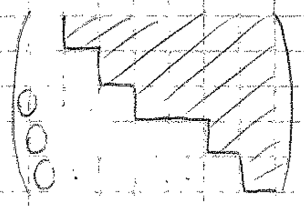
② $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$

③ $\forall k \in \mathbb{R}, \; k\vec{0} = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$

2) $V = \mathbb{R}^n$

Tutti gli altri sottospazi si dicono sottospazi propri.

odulo M a scala:

$M' =$  $\in \mathbb{R}^{k,n}$

ha $rg(M)$ righe non nulle che sono linearm. indipendenti $\to$ base di $R(M)$

empio: $V = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,4,0,1),(0,1,2,3),(1,1,2,0),(3,5,2,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$

trovare la base con il metodo di riduzione:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_5 \to R_5 - 3R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_5} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5 \to R_5 - R_4]{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base di $V$ è $\mathcal{B} = \{$righe non nulle di $M'\}$

Teorema:

Se $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio $\Rightarrow$ una base di $V$ ha al più $n$ elementi.

Dimostrazione:

Se $V = \{\vec{0}\}$ non esiste base.

Se $V \neq \{\vec{0}\}$, $\exists\ \vec{u}_1 \in V$, $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1,$

Se $V = \mathcal{L}(\vec{u}_1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1)$ fine

Se $V \neq \mathcal{L}(\vec{u}_1)$, $\exists\ \vec{u}_2 \neq \vec{0} \in V$, $\vec{u}_2 \neq k\vec{u}_1$

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2 \ldots\ldots)$

Alla fine il procedimento termina perchè il numero di righe non nulle di una matrice a scala non può essere > del numero di colonne.

Corollario:

Ogni base del sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$ non nullo ha lo stesso numero di elementi.

② $\vec{v}_1=(x_1, x_1, x_3)$, $\vec{v}_2=(y_1, y_1, y_3)$.

$\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+y_1, x_1+y_1, x_3+y_3) \in V$ — 1° e 2° componente sono uguali, quindi la somma $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sta ancora in V.

③ $\forall K$, $K\vec{v}_1=(Kx_1, Kx_1, Kx_3) \in V$ — Chiuso rispetto alla somma.

Trovo una base:

Le soluzioni di $x-y=0$ sono sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow V=S$

$S=(x,x,z)$ al variare di $x,z \in \mathbb{R}$.

$$= x(1,1,0)+z(0,0,1)$$

$x=1, z=0$ — $x=0, z=1$

Osservo: $(1,1,0), (0,0,1)$ sono generatori di S.

$(0,0,0) \in S$

$(0,0,0)=0(1,1,0)+0(0,0,1)$. unica possibilità infatti $(1,1,0), (0,0,1)$ sono linearm. indipendenti.

$\Rightarrow$ Una base $\mathcal{B}_V=((1,1,0),(0,0,1))$.

$\dim(V)=2$ perché il numero di vettori che compongono la base è 2.

) $V=\{(x,y,z) \mid x-y=0,\ x+2z=0\}$ → retta. → sistema lineare omogeneo 2 equaz. 3 incognite

Verifico che V è sottospazio vettoriale. Cerco base e dimensione.

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-\frac{1}{2}t \end{cases} \quad \forall \vec{v} \in V,\ \vec{v}=(t,t,-\tfrac{1}{2}t)\ \forall t \in \mathbb{R}$$

① $V \neq \emptyset$ infatti $(0,0,0) \in V$, $t=0$.

② $\vec{v}_1=(t_1, t_1, -\frac{1}{2}t_1)$, $\vec{v}_2=(t_2, t_2, -\frac{1}{2}t_2)$.

$\vec{v}_1+\vec{v}_2=(t_1+t_2, t_1+t_2, -\frac{1}{2}(t_1+t_2)) \in V$. — V è chiuso rispetto alla somma

③ $K\vec{v}_1=(Kt_1, Kt_1, -\frac{1}{2}Kt_1) \in V$

Le soluzioni sono: $S=\{(t,t,-\frac{1}{2}t)\}\ \forall t \in \mathbb{R}$ — $\infty^1$ soluzioni.

$\vec{v}=(t,t,-\frac{1}{2}t)=t(1,1,-\frac{1}{2})$

Una base $\mathcal{B}_V=((1,1,-\frac{1}{2})) \Rightarrow \dim V=1$

lternativa:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Trasposta di } M = {}^{T}M$$

invece che scrivere i generatori per righe gli abbiamo scritti per colonne.

so che $rg(C) = rg(M) = \dim \mathcal{L}$.

er trovare la base che $\in$ allo stesso $\mathcal{L}$ dovrei ridurre per colonne anzichè per righe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

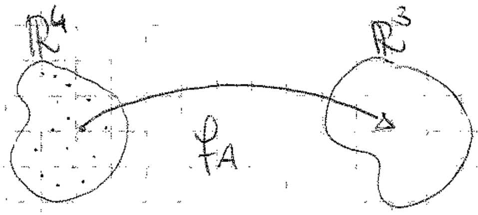
Voglio costruire una funzione.

Supponiamo di avere:

$\forall \vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$f_A(\vec{v}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{(riga per colonna)}$$

$$\stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$ perchè le componenti sono 3.




$f_A$: funzione definita dappertutto in $\mathbb{R}^4$ che ha dei valori in $\mathbb{R}^3$.

$f_A$ si dice applicazione lineare.

$f_A(\vec{v})$ = immagine di $\vec{v}$ tramite $f$.

sempio: 1) $f_A(0,1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sostituendo in $*$ ho ottenuto $f_A(\vec{v})$.

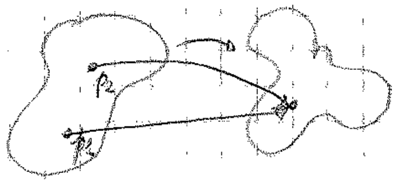
$$f_A(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es: $\operatorname{Ker} f_A = \{(-x_3 - 2x_4, -2x_3, x_3, x_4)\}$ $\forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

$\dim \operatorname{Ker} f_A = 2 = n - rg(A)$

una base $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f_A} = ((-1, -2, 1, 0), (-2, 0, 0, 1))$.

Def: Una funzione $f$ è iniettiva quando $\forall p_1, p_2$, $f(p_1) = f(p_2) \Rightarrow p_1 = p_2$




Teorema: $f_M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è iniettivo se e solo se $\operatorname{Ker}_{f_M} = \{\vec{0}\}$

Dimostrazione: 1) Hp $\operatorname{Ker} f_M = \{\vec{0}\}$

suppongo $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ con $f_M(\vec{v}_1) = f_M(\vec{v}_2)$

$f_M(\vec{v}_1) - f_M(\vec{v}_2) = \vec{0}$ per linearità:

$f_M(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \operatorname{Ker} f_M$ per definizione di nucleo.

$\Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Rightarrow f_M$ è iniettiva

2) viceversa hp. $f_M$ iniettiva:

$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2$, $f_M(\vec{v}_1) = f_M(\vec{v}_2) \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

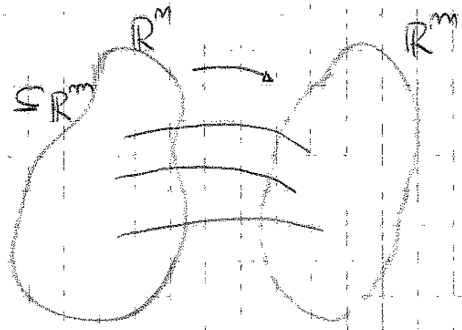
$f_M(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}$ vuol dire $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \operatorname{Ker} f_M$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Longleftrightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow$ in $\operatorname{Ker} f_M$ c'è solo il vettore nullo $(\vec{0})$.

Def: Data $f_M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice immagine di $f_M$

$\operatorname{Im} f_M = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ con } f_M(\vec{v}) = \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^m$




Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$

$\operatorname{Im} f_A = \left\{ \vec{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \exists \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ con } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right.$

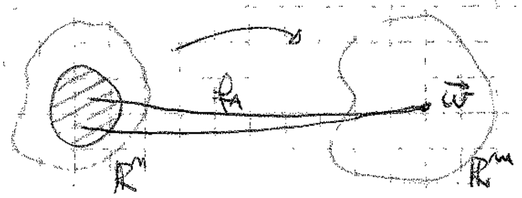
Osservazione: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deve essere linearm. indipendente dalle colonne di $A$.

: esempio: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

f: Si dice insieme delle controimmagini di $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$

$f_A^{-1}(\vec{w}) = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\vec{v}) = \vec{w} \}$




Trovare $f_A^{-1}(1,1,0)$.

cerco $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tale che $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad + x_4 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 \quad &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{cases} 2x_1 = -2x_3 + 1 + x_4 + 1 \\ x_2 = -2x_3 + 1 \end{cases}$$

$f_A^{-1}(\vec{w}) = \{(-x_3 + 2x_4 + 1, -2x_3 + 1, x_3, x_4)\}$

se $m=0$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg(M) = 2$ $f_M$ non è suriettiva.

se $m \neq 0$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & 1+2m \end{pmatrix}$

$rg(M) = 3$ se $1+2m \neq 0 \iff m \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow f_M$ suriettiva

se $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow rg(M) = 2 \Rightarrow f_M$ non è suriettiva

$f_M$ isomorfismo $\iff f_M$ biettiva.

$\cancel{\underbrace{\dim \mathrm{Im} f_M}_{3}} + \dim \mathrm{Ker} f_M = 3 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f_M = 0 \Rightarrow f_M$ isomorfismo.

(nel caso in cui $m \neq 0, -\frac{1}{2}$)

$f_M^{-1}(0,0,-1) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid f_M(\vec{v}) = (0,0,-1)\}$

$M\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sistema lineare incognite $x, y, z$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1+m & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2m & -1 \end{array}\right)$

se $m=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ sistema incompatibile

$\Rightarrow \nexists\, f_M^{-1}(0,0,-1)$

$m \neq 0, -\frac{1}{2}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2m & -1 \end{array}\right)$ $rg(M) = rg\left(M \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) = 3 \Rightarrow \infty^{3-3}$ soluzioni.

c'è una sola controimmagine

$$f_M^{-1}(0,0,-1) = \begin{cases} x = y - mz = -\dfrac{1}{m(1+2m)} + \dfrac{m}{1+2m} \\ my = z \ ; \ y = -\dfrac{1}{m(1+2m)} \\ (1+2m)z = -1 \ ; \ z = \dfrac{-1}{1+2m} \end{cases}$$

ez. es. 3) $\vec{u} = p_1(x)$

$\vec{0} = ?$ $\qquad\qquad$ $\vec{0} = 0 \in \mathbb{R}$

$p_1(x) + \vec{0} = p_1(x)$ $\qquad$ $p_1(x) + 0 = p_1(x)$

4) $-p_1(x) = ?$

$-p_1(x) = -a_0 - a_1 x - \ldots\ldots - a_n x^n$

Questo è un esempio di spazio vettoriale in cui i vettori sono delle funzioni.

$p_1(x) : x \longmapsto p_1(x)$ funzione

esempio 3) $V = \mathbb{C}_n[x] = \{ p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \}$ di grado $\leq n$, a coeff. in $\mathbb{C}$.

Stesse operazioni, valgono le proprietà 1) 2) ... 8)

$\Rightarrow$ spazio vettoriale su $\mathbb{C}$

Proprietà: Dato V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Si ha che: $\forall \vec{v} \in V$, $0\vec{v} = \vec{0}$, $0 \in \mathbb{K}$

Dimostro: $0\vec{v} + 0\vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0\vec{v}$ $\quad$ per le proprietà di spazio vettoriale

Sottraggo $0\vec{v}$

$0\vec{v} + \cancel{0\vec{v}} - \cancel{0\vec{v}} = \cancel{0\vec{v}} - \cancel{0\vec{v}} = \vec{0}$

Definizioni: 1) V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$

combinazione lineare

$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots\ldots + a_k\vec{v}_k$, $a_i \in \mathbb{K}$

2) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sono linearm. indipend. quando

$a_1\vec{v}_1 + \ldots\ldots + a_k\vec{v}_k = \vec{0} \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_k = 0$

$\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

2) $V = \mathbb{R}_2[x]$

$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi in x a coeff. reali di grado $\leq 2$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad x \longmapsto p(x)$

$p_1(x) + p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$

$Kp_1(x) = Ka_0 + Ka_1 x + Ka_2 x^2$

(a) $U = \{ p(x) \in V \mid p(1) = 0 \}$ verifico che è sottospazio

(b) Trovare base di V e una base di U

b) Una base di $V = \mathbb{R}_2[x]$ Verifico che $1, x, x^2$ sono linearm. indipendent e generatori di V

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0 \iff a_0 = a_1 = a_2 = 0$

una $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

(a) $U: p(x) \mid p(1) = 0$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2: \qquad x = 1$

$a_0 + a_1 + a_2 = 0 \iff a_0 = -a_1 - a_2$

$U = \{ p(x) = -(a_1 + a_2) + a_1 x + a_2 x^2 \} \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

① $U \neq \emptyset$ perché $0 \in U$ $(a_1 = a_2 = 0)$

② $[-(a_1 + a_2) + a_1 x + a_2 x^2] + [-(b_1 + b_2) + b_1 x + b_2 x^2] =$

$= -(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \quad \in U$

③ $K[-(a_1 + a_2) + a_1 x + a_2 x^2] \in U$

Osservazioni:

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[x]} = (1, x, x^2)$

I vettori di U rispetto a B si scrivono $p(x) = (-(a_1 + a_2), a_1, a_2) \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Una base $\mathcal{B}_U$ è $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$

$a_1 = 1, \ a_2 = 0$

$a_1 = 0, \ a_2 = 1$

$\mathcal{B}_U = (-1 + x, -1 + x^2)$

Def: Dati U, V $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

$f: U \to V$ si dice <u>applicazione lineare</u> quando $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U, \ \forall K \in \mathbb{K}$

① $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

n componenti rispetto a $\mathcal{B}$

$(x) = 1 = 1\cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

$(x^2) = 2x = 0\cdot 1 + 2x + 0x^2 + 0x^3$

$(x^3) = 3x^2 = 0\cdot 1 + 0x + 3x^2 + 0x^3$

$\boxed{04/05/2011}$

/ $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

$_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n)$ assegnata

efinisco $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow V$ applicazione lineare così

$(a_1, a_2, \dots a_n) \longmapsto a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$

$a_i \in \mathbb{K}$

facile verificare che $f$ è lineare. Volendo si può fare come esercizio.

è iniettiva?

$\ker f = \{(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = \vec{O}_V\}$

$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{O}_V \iff a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

$\iff \ker f = (0, \dots, 0) \iff f$ è iniettiva

è suriettiva?

generico vettore di $V$ è $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$ per definizione di base

$\Rightarrow \vec{v} = f(a_1, \dots, a_n)$ per definizione di $f$.

è isomorfismo: $\mathbb{K}^n \underset{f}{\cong} V$

ta $\mathcal{B}_V$ c'è $\mathbb{K}^n \underset{f}{\cong} V$

base canonica di $\mathbb{K}^n$

$(1,0\dots 0)(0,1,0\dots 0),(0,0\dots,0,1))$

$(0,1,0,\dots 0) = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \dots + 0\vec{v}_n = \vec{v}_2$

$(\vec{e}_i) = \vec{v}_i$

sempio: $V = \mathbb{R}_2[x]$

$\mathcal{B}_V = (1, x, x^2)$

efinisco un isomorfismo di $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$

$f(a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\subset V$, $W = \{p(x) \mid p(1) = 0\}$ base

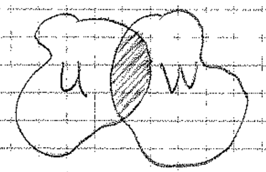
$(0,1,0) \longleftrightarrow x$

$\cancel{(0,x,0)}$

$(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^n$ $\quad x^{n+1}$ linear. indipend. da $1, x \dots x^n$

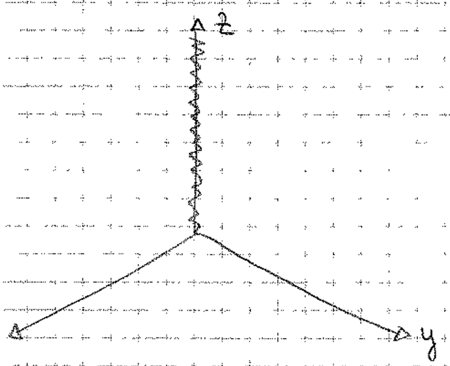
endiamo $U, W \subseteq V$ sottospazi

$U \cap W \underset{def}{=} \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \in U, \vec{v} \in W\}$




Proposizione: $U \cap W$ è sottospazio di $V$.

: $V = \mathbb{R}^3 \quad U = \{(x, y, z) / x = 0\} \qquad W = \{(x, y, z) / y = 0\}$




$U \cap W = \{(x, y, z) / x = 0, y = 0\}$ asse z.

mostrazione:

$U \cap W \neq \emptyset$ perchè almeno $\{\vec{0}\} \in U, \in W$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \cap W$

$\vec{v}_1 \in U, \vec{v}_2 \in U \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U$

$\vec{v}_1 \in W, \vec{v}_2 \in W \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$

$\Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U \cap W$

se interseco due sottospazi trovo un sottospazio.

$\vec{v}_1 \in U \cap W \Rightarrow \vec{v}_1 \in U, \ k\vec{v}_1 \in U$

$\vec{v}_1 \in W \Rightarrow k\vec{v}_1 \in W$

$\Rightarrow k\vec{v}_1 \in U \cap W$

$U \cup W$ è sottospazio?

Es: $V = \mathbb{R}^3, \ U = \{(x, y, z) / x = 0\} \quad W = \{(x, y, z) / y = 0\}$

$U \cup W$ <u>non</u> è sottospazio.

n generale, NO.

lo nel caso $U \subseteq W \Rightarrow U \cup W = W$ oppure $W \subseteq U \Rightarrow U \cup W = U$

finizione: Sottospazio somma di $U$ e $W$

$U + W = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, al variare di $\vec{u} \in U$ e $\vec{w} \in W\}$

mostrazione: (la metterà nei riassunti) (da fare)

servazione: $U + W$ è il minimo sottospazio che contiene $U \cup W$.

06/05/2011

/ $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $B_V = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ allora $V \cong \mathbb{K}^n$

/ $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$ $\quad B_V = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ assegnata.

$\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n$

sa succede se assegno anche un'altra base?

Sia assegnata anche: $B'_V = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_n)$

oblema: Che relazione c'è tra le componenti di un vettore $\vec{v} \in V$ rispetto a $B_V$ e rispetto a $B'_V$?

lare $B'_V \iff$ dare

$$\vec{v}'_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \dots + a_{n1}\vec{v}_n$$
$$\vec{v}'_2 = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{n2}\vec{v}_n$$
$$\vdots$$
$$\vec{v}'_n = a_{1n}\vec{v}_n + a_{2n}\vec{v}_n + \dots + a_{nn}\vec{v}_n$$

$$= x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n = x'_1\vec{v}'_1 + \dots + x'_n\vec{v}'_n =$$
$$= x'_1(a_{11}\vec{v}_1 + \dots + a_{n1}\vec{v}_n) + \dots + x'_n(a_{1n}\vec{v}_1 + \dots + a_{nn}\vec{v}_n) =$$
$$= (x'_1 a_{11} + \dots + x'_n a_{1n})\vec{v}_1 + \dots + (x'_1 a_{n1} + \dots + x'_n a_{nn})\vec{v}_n$$

D $\left.\begin{array}{l} x_1 = x'_1 a_{11} + \dots + x'_n a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ x_n = x'_1 a_{n1} + \dots + x'_n a_{nn} \end{array}\right]$ Qst è già la risposta al nstz problema. Bisogna sl scriverla in un altro modo.

ostruisco la matrice P.

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}$$

$\quad \vec{v}'_1 \quad \vec{v}'_2 \quad \dots \quad \vec{v}'_n$

$rg(P) = n$ (massimo possibile)

$$= (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$= (a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

o scoperto che:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad ; \quad X = PX'$$

Q la matrice di passaggio tra $B_W$ e $B'_W$.
matrice di passaggio tra $B_V$ e $B'_V$.

$= PX'$ in V

$= QY'$ in W.

facio i cambiamenti di base per capire come cambia la matrice f.
che: $M'_f X' = Y'$ rispetto a $B'_V$ e $B'_W$.

$X = Y \Rightarrow M_f(PX') = QY'$ Q è una matrice di cambio di base quindi è invertibile

$Q^{-1}M_f(PX') = Q^{-1}QY'$

$(Q^{-1}M_fP)X' = IY'$

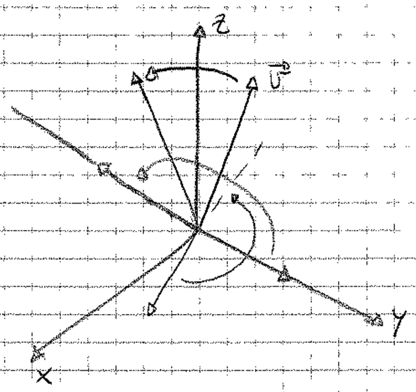
$(Q^{-1}M_fP)X' = Y'$ Ho ottenuto una corrispondenza tra X' e Y'.

$\Rightarrow M'_f = Q^{-1}M_fP$

ollario: Se ho un endomorfismo $f: V \to V$ e ho $M_f$ matrice associata a f rispetto a una base $B_V$ (in partenza e in arrivo), allora se P è matrice di passaggio da $B_V$ e $B'_V$:
matrice di f rispetto a $B'_V$ è $M'_f = P^{-1}M_fP$.

nsidero $f: V \to V$. V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

empio: $V = \mathbb{R}^3$ $f: V \to V$ definito da una rotazione dei vettori attorno all'asse z di $\pi$.




$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$f(\vec{i}) = -\vec{i}$

$f(\vec{j}) = -\vec{j}$

$f(\vec{k}) = \vec{k}$

quindi:

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

un applicazione lineare anche se non l'abbiamo verificato.

vettori $\vec{v}$ tali che $f(\vec{v})$ ha stessa direzione.
vettori $\vec{v}$ tali che $f(\vec{v})$ ha direzione diversa.

$) = f(\vec{v}_1)$ rispetto a $B$

$= D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ $\vec{v}_1$ è autovettore, $a_1$ è autovalore.

$) = f(\vec{v}_n) = D\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}_n$ è autovettore, $a_n$ è autovalore.

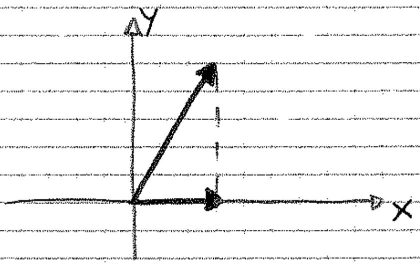
: Se $f$ ha matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ rispetto a $B = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$

allora $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sono autovettori di $f$ e $a_1, \ldots, a_n$ sono i relativi autovalori e viceversa.

: Se $f: V \to V$ ha matrice $M'_f = P^{-1} M_f P$ diagonale rispetto a $B'$, allora $f$ si dice <u>diagonalizzabile</u>.

diagonalizzante.

mpio: $f \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $f(x,y) = (x,0)$




è lineare (verificare)

rispetto a $(\vec{i}, \vec{j})$ matrice?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonale

$\vec{i}) = 1\vec{i} \Rightarrow \vec{i}$ autovettore, 1 autovalore

$\vec{j}) = 0\vec{j} \Rightarrow \vec{j}$ " , 0 "

: I vettori $(0,y)$ sono autovettori relativi all'autovalore 0 $(y \neq 0)$.

$V_0 =$ vettori dell'asse $y = \ker f$.

$f: V \to V$, $K \in \mathbb{K}$

$_k = \{\vec{v} \in V / f(\vec{v}) = K\vec{v}\} \subseteq V$

$= \{$autovettori relativi a $K\} \cup \{\vec{0}\}$

: $V_K$ è sottospazio di $V$

osso decidere di fare l'immagine mediante f dell'equaz. $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0}$.

$f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2) = f(\vec{0})$

$x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) = \vec{0}$

$x_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + x_2 \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$

oltiplico $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ per $\lambda_2 \neq 0$ e ottengo:

$x_1\lambda_2\vec{v}_1 + x_2\lambda_2\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{0} = \vec{0}$

ottraggo e ottengo:

$x_1\vec{v}_1(\lambda_1 - \lambda_2) = \vec{0} \Rightarrow x_1 = 0$ perchè $\lambda_1, \lambda_2$ e $\vec{v}_1 \neq 0$.

ostituisco nella equazione:

$\Rightarrow x_2\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow x_2 = 0$ se $x_1 \neq 0$, $\vec{v}_2 \neq 0$

etodo analitico per trovare autovalori e autovettori:

upponendo che: V R-spazio vettoriale, $\dim V = n$, $B_V = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

$f: V \to V$ endomorfismo.

oglio trovare tutti gli autovettori e autovalori dell'endomorfismo.

$f \longleftrightarrow M$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ rispetto a B.

$\vec{v} \in V$

$f(\vec{v}) = M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\vec{v}$ è autovettore $\Longleftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0}$; $\exists\, K \in \mathbb{R}$ tale che $f(\vec{v}) = K\vec{v}$

$$\underbrace{M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}\;;\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

sist. lineare quadrato omogeneo: n equaz. n incognite.

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - K\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

raccogliamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $(M - KI_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (K parametro reale)

trovare i valori del parametro reale K tali che il sistema abbia soluzioni non nulle.

soluzioni non nulle $\Longleftrightarrow rg(M - KI_n) < n \Longleftrightarrow \boxed{\det(M - KI) = 0} \Rightarrow$ lezione 11/05/2011.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$\ker f = \{(x,y) / x-2y=0\}$

$\vec{v}=(1,1)$ è autovettore di $f$ relativo all'autovalore $\lambda=2$.

...vare la matrice di $f$ rispetto alla base canonica e una base di $\mathbb{R}^2$ rispetto ...la quale $f$ ha matrice diagonale.

$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\qquad B_{can} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$(\vec{e}_1) \qquad f(\vec{e}_2)$

...devo trovare $f(\vec{e}_1)$ ed $f(\vec{e}_2)$

$\ker f = \{(2y, y)\} = \{y(2,1)\} \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(2,1) = (0,0)$

$2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = \vec{0}$

$f(1,1) = 2(1,1)$

$\boxed{f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2}$

$$\begin{cases} 2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = \vec{0} \\ f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\vec{e}_2) = -2f(\vec{e}_1) \\ f(\vec{e}_1) - 2f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \end{cases} ; \quad f(\vec{e}_1) = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$$

$f(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$

$= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \qquad \vec{v}_1, \vec{v}_2$ autovettori di $f$

$\vec{v}_1 = (1,1)$ autovettore, $\lambda = 2$

$\vec{v}_2 = (2,1)$ " , $\lambda = 0$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad f(\vec{v}_1) = (2,2) = 2\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$

$\qquad f(\vec{v}_2) = (0,0) = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$

...a matrice diagonalizzante è:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = PX'$

$D = P^{-1} M_f P$

sempio: $n=3$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

$t(A)=\cancel{0A_{21}}+4A_{22}+\cancel{0A_{32}}=$

$=4(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}=4\cdot1\cdot(2-3)=-4$

abbiamo sviluppato secondo la seconda riga dove c'erano 2 zero.

etodo di eliminazione di Gauss:

Avendo una matrice A. Potevamo fare delle oper. elementari che non cambiavano il rango della matrice:

$R_i \Leftrightarrow R_j$

$R_i \longrightarrow R_i + KR_j$

a voglio vedere cosa succede con i determinanti:

$R_i \Leftrightarrow R_j \implies \det(A)$ cambia segno

$R_i \longrightarrow R_i + KR_j \implies \det(A)$ non cambia

: $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}$ $\det(A)=-2-3=-5$

$_1 \Leftrightarrow R_2$ $A'=\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix}$, $\det(A)=3+2=5$

$_2 \longrightarrow R_2-R_1$ $A''=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$, $\det(A)=-4-1=-5$

uando dobbiamo calcolare il determinante di una matrice grande ossiamo applicare le operazioni elementari per ridurre a scala la atrice.

ata $A\in\mathbb{R}^{n,n}$ voglio calcolare $\det(A)$.

iduco a scala:

$\longrightarrow \cdots \longrightarrow A'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&&\\\vdots&&&\\0&&&\end{pmatrix}$

$\det A=\pm\det A'$

uand'è che il determinante si annulla?

$\boxed{\det(A)=0} \iff \det(A')=0 \iff \exists$ qualche riga nulla nella matrice ridotta a scala.

$\iff \boxed{rg(A)<n}$

$=2$, $V_2$ = soluz. del sist. omogeneo $\begin{pmatrix} -2-2 & 4 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} = M - 2I$ ← sostituendo 2 nella matrice $M-\lambda I$.

$-4x_1 + 4x_2 = 0$

$-2x_1 + 2x_2 = 0$ ← posso eliminarla xkè è proporzionale alla 1ª equaz.

$x_2 = x_1$

$0 = 0$

$_2 = \{(x_2, x_2)\}\ \forall x_2 \in \mathbb{R}$

$= \{(0,0)\} \cup \{$autovettori di $\lambda = 2\}$

$mV_2 = 2 - rg(M - 2I) = 2 - 1 = 1$

sservo $\lambda = 0$, $\vec{v}_1 = (2,1) \in V_0$

$\lambda = 2$, $\vec{v}_2 = (\pi, \pi) \in V_2$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linear. indip.

$\mathbb{R}^2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \Rightarrow M_f^{B',B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

L'endomorfismo era diagonalizzabile.

sempio: $f: \underset{B}{\mathbb{R}^3} \to \underset{B}{\mathbb{R}^3}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ovare autovalori e autovettori di f e dire se f è diagonalizzabile.

$t(M - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = p(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 + 1)$

adici di $p(\lambda)$: $\lambda = 2$, $\cancel{\pm i}$ ← scartiamo i valori complessi perchè noi stiamo cercando gli autovalori reali.

$=$ soluzioni di $(M - 2I)$.

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$= \{(0,0,x_3)\}\ \forall x_3 \in \mathbb{R}$

$mV_2 = 1$

$f: V \to V$ può non essere semplice per uno dei seguenti motivi:
- ci sono radici del $p(\lambda)$ che non stanno in $\mathbb{R}$.
- c'è almeno un autovalore $\lambda$ tale che $\dim V_\lambda <$ molteplicità di $\lambda$ come radice del polinomio caratteristico.

Teorema: $V$ $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$
$f: V \to V$ è semplice $\iff$
- tutte le radici di $p(\lambda)$ stanno in $\mathbb{R}$
- $\forall$ autovalore $\lambda$, $\dim(V_\lambda) = \text{molt}(\lambda)$.

Se qst 2 condizioni sono verificate contemporaneamente allora l'endomorfismo è semplice, quindi possiamo trovare una base fatta con gli autovettori.

Corollario: Se $f: V \to V$ è semplice una base $\mathcal{B}_V$ diagonalizzante è
$\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} \cup \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} \ldots \cup \mathcal{B}_{V_{\lambda_m}}$
unione delle basi di tutti gli autospazi di $f$.

Esempio: $f: \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \to \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3}$

$$M^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è diagonalizzabile?}$$

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + (-(1-\lambda)) = (1-\lambda)(\lambda^2-1)$$

Radici: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ $\quad$ $\text{molt}(1) = 2$ $\quad$ $\text{molt}(-1) = 1$ $\quad$ molt = molteplicità

Tutte le radici $\in \mathbb{R} \Rightarrow$ ①.

$\dim V_1 = 3 - rg(M-I) = 3 - 1 = 2 = \text{molt}(1) \Rightarrow f$ è semplice. $\quad$ ★ Vedi fatto generale

$$(M-I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad rg(M-I) = 1$$

Trovare matrice diagonale e di passaggio.

Fatto generale:
Dato $f: V \to V$ se $\lambda$ è autovalore
$1 \leq \dim V_\lambda \leq \text{molt}(\lambda)$
se $\text{molt}(\lambda) = 1$ allora $\dim(V_\lambda) = 1$

due autospazi di dim 1

$V_1 \cap V_3 = \{\vec{0}\} \Rightarrow V_1 + V_3 = \mathbb{R}^2$ (formula di Grassmann).

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ formata da autovettori

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{V_1} \cup \mathcal{B}_{V_2}$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x+y=0$ ; $V_1 = \{(-y,y)\},\ \forall y \in \mathbb{R}$

$\mathcal{B}_{V_1} = ((-1,1))$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$-x+y=0$ ; $V_3 = \{(y,y)\}\ \forall y \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{B}_{V_3} = ((1,1))$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((-1,1),(1,1))$ una base che diagonalizza.

La matrice diagonale per $f$ è $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sulla diagonale metto gli autovalori in un ordine che mi piace.

Possiamo notare che i 2 vettori della base diagonalizzante sono ortogonali:

$(-1,1)\cdot(1,1) = -1+1 = \emptyset$

$\Rightarrow$ vettori ortogonali tra loro.

Trovare una base diagonalizzante di $\mathbb{R}^2$ fatta da versori ortogonali.

Basta versorizzare la base trovata prima:

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \left(\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}\right)$ base ortonormale.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}MP$

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$