NUMERO: 762

DATA: 30/10/2013

A P P U N T I

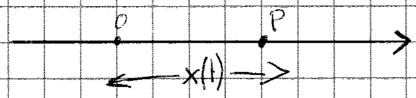
STUDENTE: Fea

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Carbone

Cinematica del punto

Moto rettilineo



$$\boxed{V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

equazione oraria del moto $x(t) = ?$

Velocità istantanea ai tempi $t_1, t_2, \dots, t_n$ corrispondenti alle posizioni $x_1, x_2, \dots, x_n$ $\quad V_{m_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad V_{m_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad V_{m_n} = \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n}$

Si può anche fare come:

Velocità istantanea: $\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$

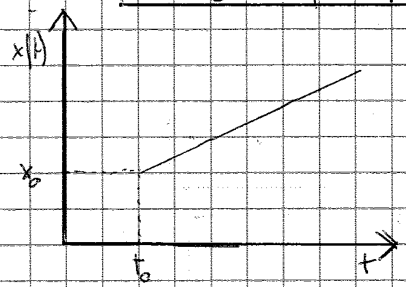
$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v(t)\,dt \qquad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \qquad x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt}$$

Moto rettilineo uniforme

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{costante} = V_m \rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \rightarrow x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{x - x_0 = v(t - t_0)}$$



variabile dipendente asse verticale

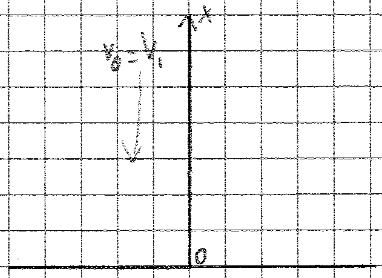
variabile indipendente asse orizzontale

Moto verticale (viene lanciato dall'alto)

$a = \text{costante} = -g \qquad v(t) = v_0 + a(t - t_0) \qquad \boxed{v(t) = -v_i - gt}$ con $t_0 = 0$ e $v_0 = -v_{iniziale}$

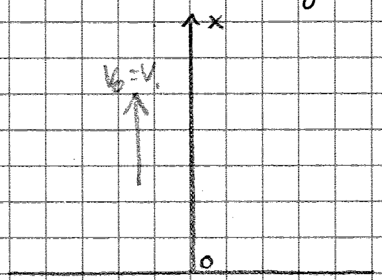
$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \qquad x(t) = h + \int_{t_0}^{t} (-v_i - gt)\,dt \qquad x(t) = h - v_i t - \frac{1}{2} g t^2$

$$\boxed{v(x) = \sqrt{v_i^2 - 2g(h-x)}} \qquad \boxed{t(x) = -\frac{v_i}{g} + \sqrt{\frac{v_i^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}}}$$



Moto verticale (viene lanciato dal basso)

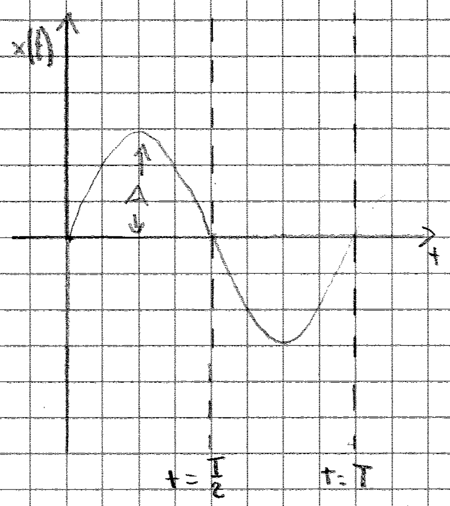
$a = \text{costante} = -g \qquad v(t) = v_0 + a(t - t_0) = v_i - gt$ con $t_0 = 0$ $v_0 = v_{iniziale}$



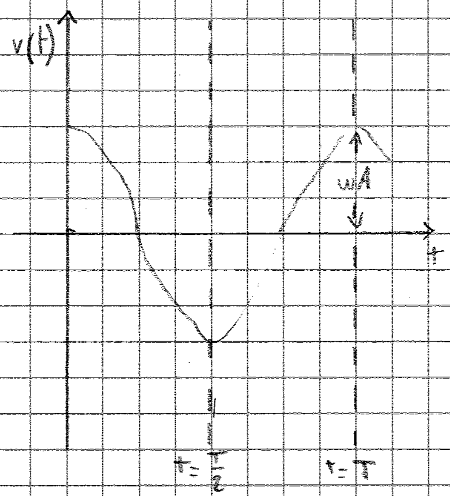
$$\boxed{v(x) = \sqrt{v_i^2 + 2g(h-x)}} \qquad \boxed{t(x) = \frac{v_i}{g} \pm \sqrt{\frac{v_i^2}{g^2} - \frac{2x}{g}}}$$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \rightarrow x(t) = h + \int_{t_0}^{t} (v_i - gt)\,dt \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{x(t) = v_i t - \frac{1}{2} g t^2}$

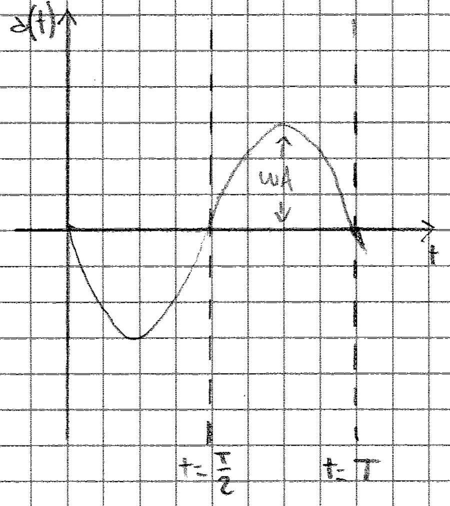


$$x(t) = A \,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$



$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

velocità sfasata di $\frac{\pi}{2}$



$$a(t) = -A\omega^2 \,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

velocità sfasata di π

Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{dt} = -kv \qquad \frac{dv}{v} = -k\,dt \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt$$

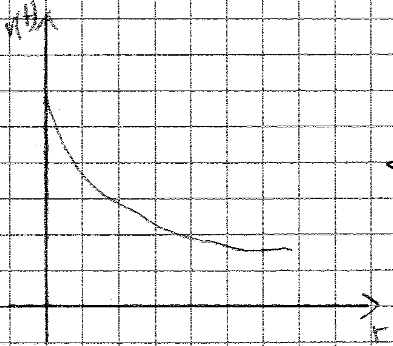
$$\log\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kt \qquad \frac{v}{v_0} = e^{-kt} \qquad \boxed{v(t) = v_0 e^{-kt}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v = -kv \qquad \frac{dv}{dx} = -k \qquad dv = -k\,dx$$

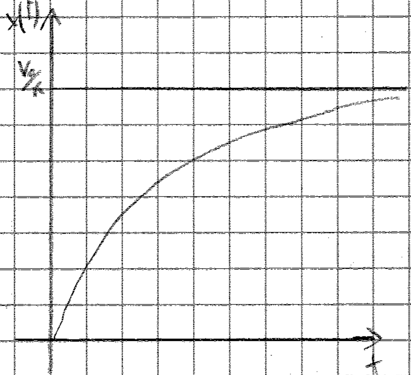
$$\int_{v_0}^{v} dv = -k\int_0^x dx \qquad v(x) - v_0 = -kx \qquad \boxed{v(x) = v_0 - kx}$$

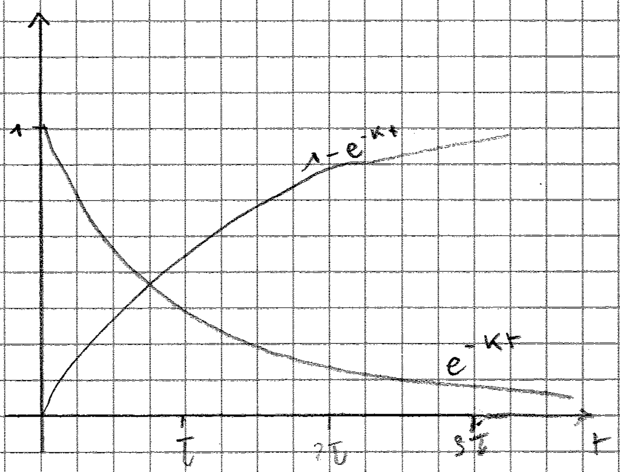
$$v(t) = \frac{dx}{dt} \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \qquad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 e^{-kt}\,dt \qquad x(t) - x_0 = v_0\int_0^t e^{-kt}\,dt$$

$$x(t) = x_0 - \frac{v_0}{k}\cdot\int_0^t e^{-kt} \qquad \boxed{x(t) = x_0 + \frac{v}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$



$\longleftarrow$ grafici di $a = -kv$ $\longrightarrow$

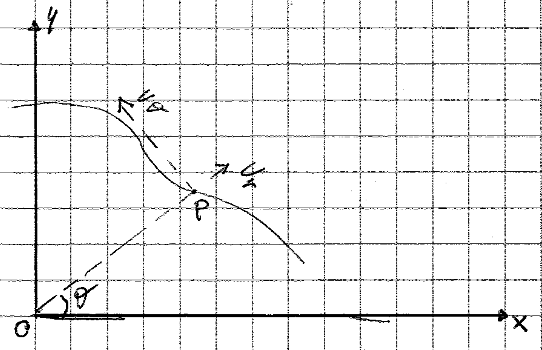




τ = rappresenta la stima dopo quando il sistema è in equilibrio $\tau = \frac{1}{e}$

Coordinate polari

$r(t) = OP \rightarrow OP = x(t)\,u_x + y(t)\,u_y \rightarrow OP = r(t)\,u_r$

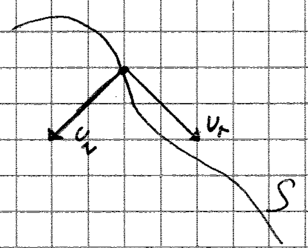


$V = \frac{dr}{dv} \rightarrow \boxed{V = \frac{dr}{dt} u_r + r \frac{du_\theta}{dt}}$

Le coordinate polari si basano sul versore dell'angolo e sul versore della direzione del vettore

Coordinate intrinseche

Non hanno sistema di coordinate definite

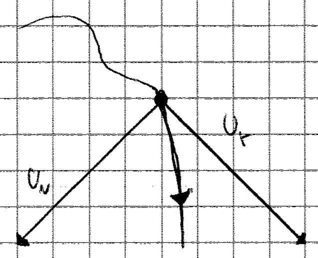


S = coordinata curvilinea

$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \cdot u_t = V \vec{u}_t$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 196

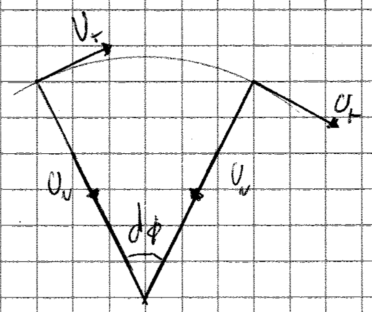
Coordinate intrinseche accelerazione



$$v = \frac{ds}{dt} u_t \rightarrow v = v \cdot u_t$$

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow a = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$a = \frac{d(v u_t)}{dt} \quad a = \frac{dv}{dt} u_t + v \frac{du_t}{dt}$$



$$a = \frac{dv}{dt} u_t + v \frac{d\phi}{dt} u_N \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} u_t - v \frac{d\phi}{dt} u_N = \frac{dv}{dt} u_t + \frac{v^2}{R} u_N = a_t + a_N$$

$a = a_t + a_N$ dove a_t = accelerazione tangenziale

a_N = accelerazione normale o centripeta

Moto circolare uniformemente accelerato

$$s(t) = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

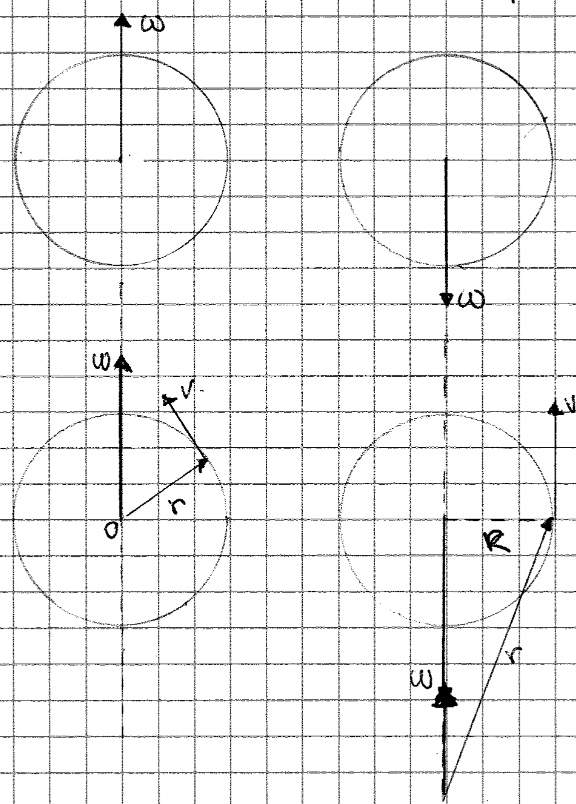
$$a = \frac{dv}{dt}u_T + \frac{v^2}{R}u_N \rightarrow a = R\frac{d\omega}{dt}u_T + \frac{v^2}{R}u_N \qquad a = a_T + a_N$$

$$a_N = \omega^2 R \qquad \boxed{a_N = (\omega_0 + \alpha t)^2 R}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \xrightarrow{\text{derivare}} \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t}$$

Notazione vettoriale: il vettore velocità angolare è ortogonale alla circonferenza e il verso è tale che dall'estremo del vettore il moto appare antiorario $\boxed{v = \omega \times r}$



Moto parabolico: traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ricavare il tempo dalla prima e sostituire →

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \\ y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$y = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$$

Si nota che $y = ax^2 + bx + c$ è l'equazione della parabola → Equazione traiettoria

$$\boxed{y = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}}$$

Per ottenere la gittata si mette $y = 0$ e si ottengono due risultati, quello diverso da 0 è la soluzione

gittata: $x = \frac{2 v_0^2 \cos^2\theta \operatorname{tg}\theta}{g}$ → $\boxed{x = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta}{g}}$

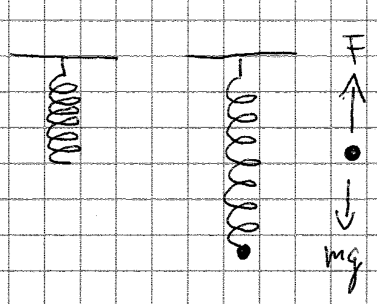
$$\boxed{\begin{cases} y_{max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} \\ x_{max} = \frac{v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g} \end{cases}}$$

sono le coordinate del punto con altezza massima

La forza può essere misurata staticamente mediante dinamometro

All'equilibrio, la forza peso (mg) eguaglia la forza di richiamo (F) esercitata dalla molla. Se indichiamo con x_c e F_c rispettivamente l'allungamento o la forza ottenuti con il peso di riferimento, si ha che con un allungamento x ed una forza F generica

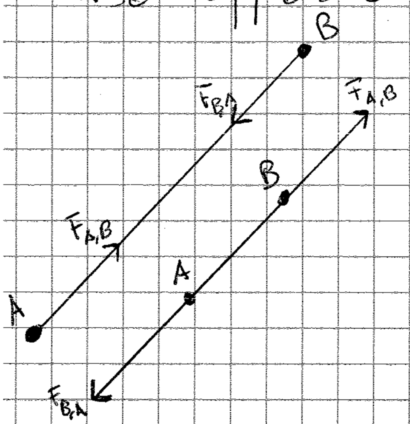
$$\boxed{\frac{F}{F_c} = \frac{x}{x_c}}$$



Quando si cerca di far cambiare la velocità di un corpo esso si oppone. Questo fenomeno è chiamato inerzia e si misura in Kg

Le interazioni tra due corpi si manifestano sempre come due forze esercitate reciprocamente da uno dei due corpi sull'altro

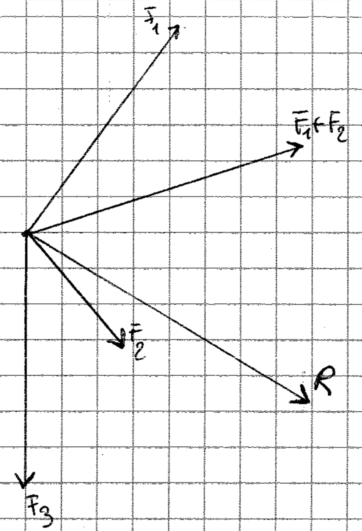
Se un corpo A esercita una forza su un corpo B allora B esercita su A una forza della stessa intensità ma di verso opposto



Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto

Risultante delle forze

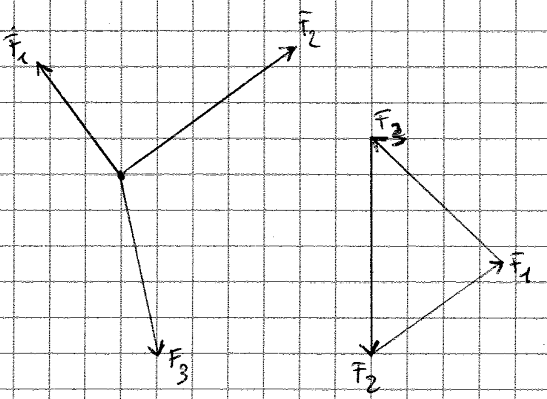
$$\boxed{R = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i}$$



$$a = \frac{R}{m} \quad a = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{F_i}{m}\right) \quad \boxed{a = \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

m può essere inserita nella sommatoria poiché costante

$R = F_1 + F_2 = 0$



La sommatoria delle F dei due sistemi è uguale a 0

$R = F_1 + F_2 + F_3 = 0$

Forza peso

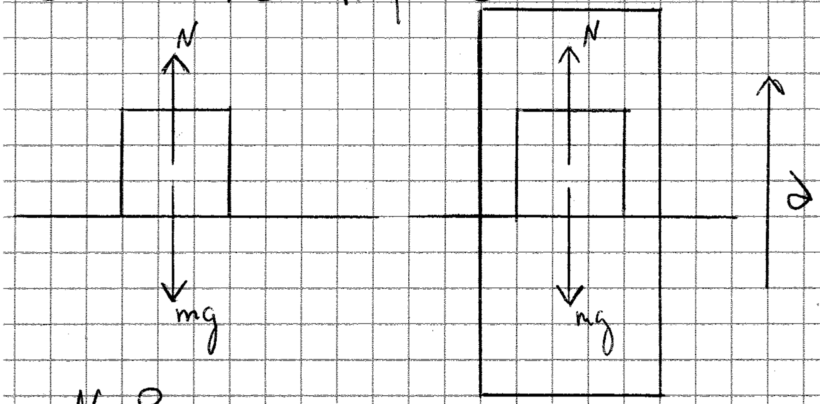
Quando un corpo cade subisce un'accelerazione qualunque sia la sua massa. Quest'accelerazione é la gravitá ed é uguale a $9{,}81\ m/s^2$

Per la seconda legge di Newton $F = ma \rightarrow P = ma \rightarrow P = mg$

$1\ Kg_{peso}$ = forza peso di un chilogrammo massa $= 1\ Kg \cdot 9{,}81\ m/s^2$

$1\ Kg_{peso} = 9{,}8N \rightarrow 1N = 1\ hg\ peso$

Sensazione di peso



Sistema completamente sottoposto al vettore $\vec{a}$

$N + P = 0$

$N + P = ma$

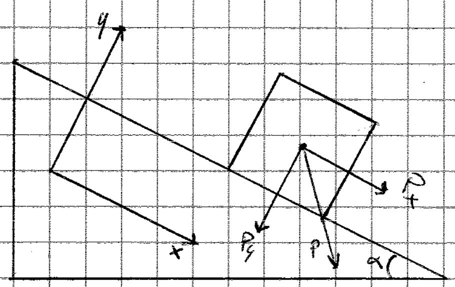
$N = m(a - g)$

La forza di attrito statico fra due superfici é sempre opposta alla componente parallela alla superficie della risultante delle altre forze applicate ad essa ed essa puó assumere valori compresi fra 0 e $\mu_s N$

Il coefficiente μ_s é detto coefficiente d'attrito

$$\boxed{F_a = \mu_s N}$$

Se la forza d'attrito diventa maggiore di $\mu_s N$ le superfici iniziano a scorrere e diventa attrito dinamico



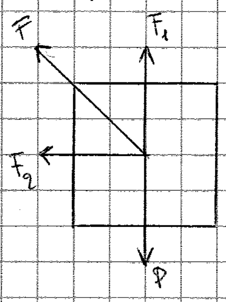
$\boxed{P = mg}$ $m = 10\,kg$ $P = 10 \cdot 9{,}81$ $P = 98\,N$

$P_x = P\,sen\,\alpha$

$P_y = P\cos\alpha$

Corpo fermo $a = 0$

$N - P_y = 0$ $N = P_y$ $\boxed{N = P\cos\alpha}$



$R + F + P = 0$

$F_1 = F\,sen\,\theta$

$F_2 = F\cos\theta$

direzione verticale $N - P + F_1 = 0 \rightarrow N = P - F_1 \rightarrow N = P - F\,sen\,\theta$

direzione orizzontale $F_{as} + F_2 = 0 \rightarrow F_{as} = -F_2 \rightarrow F_{as} = -F\cos\theta$

attrito statico

Condizione d'appoggio del corpo é data da $N > 0$

Forza elastica

I corpi in natura non sono completamente rigidi ma presentano in generale un certo grado di elasticità.
Il caso più semplice è la molla, essa è caratterizzata da:

- lunghezza a riposo x_0 ovvero la lunghezza quando $\sum F = 0$
- costante elastica k

Si osserva sperimentalmente che l'allungamento (o la compressione) di una molla è proporzionale alla forza applicata

$\boxed{F = -k\Delta x \rightarrow F = -k(x - x_0)}$ legge di Hooke

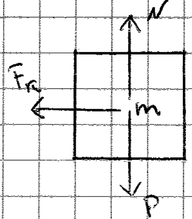
dove $\Delta x = (x - x_0)$ è l'entità della deformazione
Tale legge vale solamente se la deformazione Δx è relativa
Oltre un certo valore della deformazione il materiale di cui è fatta la molla perde elasticità. La forza ha segno negativo poiché è sempre opposta alla deformazione

La forza che la molla esercita è diretta come la deformazione
$F = -k\Delta x \rightarrow F = -k(x - x_0)$ $x_0 = 0 \rightarrow F = -kx$

Per una massa attaccata ad una molla la legge oraria è

$\boxed{-kx = ma}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$



$\sum F_y = 0$

$\sum F_x = ma$

Attrito viscoso

La forza attrito viscoso dovuto alla resistenza che un fluido oppone quando un corpo tenta di muoversi all'interno

$\boxed{F = -\beta v}$ → moto smorzato esponenzialmente

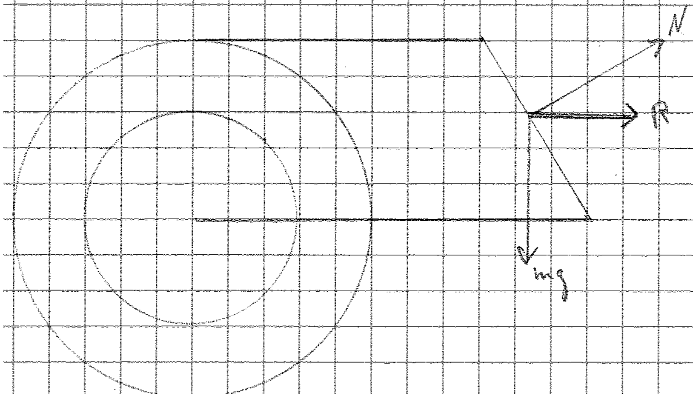
Forza centripeta

$F_N = m a_N \rightarrow F_N = m \frac{v^2}{R} u_N$

R = raggio curvatura traiettoria

Le forze centripete sono le componenti normali della traiettoria

Es: Si vuole determinare la condizione per cui un punto lanciato con velocità v percorra con velocità costante un arco di circonferenza come in figura



$R = N\operatorname{sen}\theta$

$N\cos\theta = mg$

$N\operatorname{sen}\theta = F_N \rightarrow N\operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{R} \rightarrow$

$\rightarrow tg\theta = \frac{v^2}{gr}$

$$\begin{cases} N_x = N\operatorname{sen}\theta \\ N_y = N\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N\operatorname{sen}\theta = m a_N \\ N\cos\theta = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N\operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{R} \\ N\cos\theta = mg \end{cases}$$

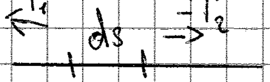
Riconsiderando le equazioni in direzione normale

$$\begin{cases} T_f - mg\cos\theta = m a_N \\ a_N = \dfrac{v^2}{L} \end{cases} \qquad m\frac{v^2}{L} = T_f - mg\cos\theta$$

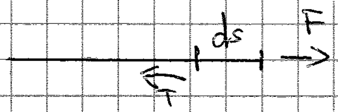
$$\boxed{T_f = m\left[g\cos\theta(t) + \frac{v^2(t)}{L}\right]}$$

Tensione dei fili

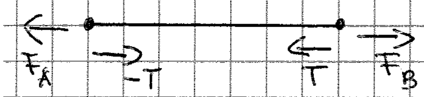
Consideriamo il filo inestensibile e di massa trascurabile.
Per l'equilibrio statico di ciascun elemento di filo deve esserci $\sum F = 0$



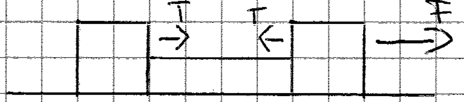
$$T_1 + T_2 = 0 \rightarrow T_1 = T_2$$



$$T + F = 0 \rightarrow T = -F$$



Se si considera il filo di massa trascurabile e soggetto ad accelerazione a
Per ciascun elemento di filo deve essere $\sum F = ma$
ma poiché la massa del filo é trascurabile si ha di nuovo $\sum F = 0$



Il filo non deve essere necessariamente rettilineo, infatti puó per esempio ruotare intorno ad una carrucola

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 196

Lavoro (segni)

$W_{A\to B} = \int_A^B F ds \to W_{A\to B} = \int_A^B F\cos\theta ds \to \int_A^B F_T ds$

Distinguiamo 3 casi

lavoro positivo se l'angolo $\theta < \frac{\pi}{2}$ detto lavoro motore

lavoro negativo se l'angolo $\theta > \frac{\pi}{2}$ detto lavoro resistente

lavoro nullo se l'angolo $\theta = 0$ ossia se forza e spostamento sono ortogonali

La forza può anche essere la risultante di diverse forze applicate per cui

$W_{A\to B} = \int_A^B F ds \to W_{A\to B} = \int_A^B (F_1 + F_2 + \dots + F_n) ds \to W_{A\to B} = \int_A^B F_1 ds + \int_A^B F_2 ds + \dots + \int_A^B F_n ds$

$\to W_{A\to B} = W_1 + W_2 + \dots + W_n$

Il lavoro é uguale alla somma dei lavori delle singole forze agenti ciascuno dei quali puó essere positivo, negatio o nullo.

Il lavoro é il prodotto di una forza per uno spostamento

$[lavoro] = [F] \cdot [L] \to [lavoro] = [M][L][T]^{-2}[L]$ Joule = Nm

Energia cinetica

$dW = F ds \rightarrow dW = F\cos\theta ds \rightarrow dW = F_T ds \rightarrow dW = m a_T ds$

$\rightarrow dW = m \frac{dv}{dt} ds \rightarrow dW = m \frac{ds}{dt} dv \rightarrow \boxed{dW = m v dv}$

I teorema dell'energia cinetica dice

Se consideriamo un percorso finito da A a B

$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B m v dv \rightarrow W_{A\rightarrow B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \rightarrow W_{A\rightarrow B} = E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K$

La quantità $\frac{1}{2} m v^2$ è Energia cinetica

Il lavoro W compiuto da una forza è pari alla variazione ΔE dell'energia cinetica della particella

$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B m v dv \rightarrow W_{A\rightarrow B} = \Delta E_K$ secondo il teorema dell'energia cinetica

Il teorema lavoro-energia cinetica vale qualunque sia la forza che agisce sulla particella

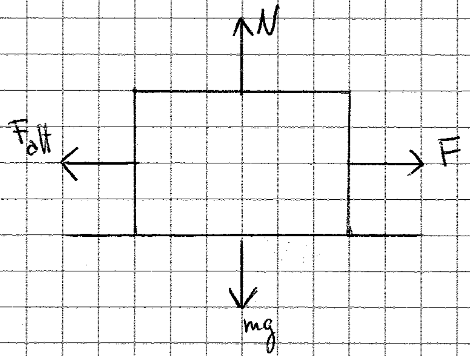
$$\boxed{W_{A\rightarrow B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2} \rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{\frac{2 W_{AB}}{m} + v_A^2}}$$

La quantità $\frac{1}{2} m v^2$ prende il nome di energia cinetica

Ricordando che $E_K = \frac{1}{2} m v^2$ e $P = m v$

è possibile scrivere $\boxed{E_K = \frac{p^2}{2m}}$ e $\boxed{p = \sqrt{2 m E_K}}$

Lavoro di una forza d'attrito radente



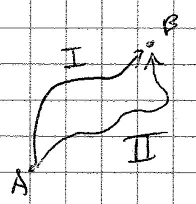
F_{ad} = Forza attrito dinamico

$F_{ad} = -\mu_d N u_r$

$$W_{A\to B} = \int_A^B F_{ad}\, ds \to W_{A\to B} = \int_A^B -\mu_{ad} N u_r\, ds \to W_{A\to B} = -\mu_{ad} N \int_A^B ds$$

L'integrale scalare è la lunghezza del percorso da A a B misurata lungo la traiettoria effettiva del punto materiale. Il lavoro non è esprimibile con una differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei vari punti A e B

Nel caso di un percorso chiuso ABA lungo I e II



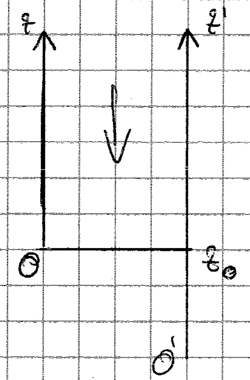
$$\int_A^B (Fds)_I + \int_A^B (Fds)_{II} = \int_A^B (Fds)_I - \int_B^A (Fds)_{II} = 0$$

Lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo $\oint Fds$

Energia potenziale

$$L_{A\to B} = -(E_{P,B} - E_{P,A}) \longrightarrow L_{A\to B} = -\Delta E_p$$

Non esiste una formulazione generale dell'espressione dell'energia potenziale, ma dipende dalla forza a cui si riferisce l'energia potenziale viene definita a meno di una costante



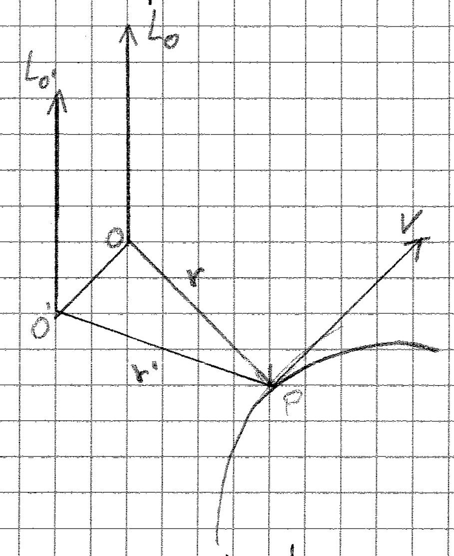
$$E_p = mgz$$

$$E'_p = mgz' \rightarrow E'_p = mg(z + z_0) \rightarrow E'_p = mgz + mgz_0 \rightarrow$$

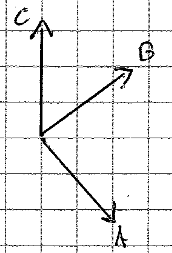
$$\rightarrow E'_p = E_p + mgz_0$$

Momento angolare

$L = r \times p \rightarrow L = r \times mv \rightarrow L = rp\,sen\theta$



Il momento angolare é una grandezza vettoriale per definire il verso



$C = a \times b$

V perpendicolare a r e p

$L_{o'} = L_o + O'O \times mv$

$\vec{L_o} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ $\quad L_{o'} = \vec{r'} \wedge m\vec{v}$ $\quad L_{o'} = (\vec{r} + \vec{OO'}) \wedge m\vec{r} \rightarrow$

$\rightarrow L_{o'} = \overbrace{(\vec{r'} \wedge m\vec{v})}^{L_o} + (\overline{OO'} \wedge m\vec{v})$

Nel moto curvilineo piano si può esprimere la velocità tramite le sue componenti radiale e trasversa, si ha:

$L = r \times mv \rightarrow L = r \times m(v_r + v_t) \rightarrow L = r \times m v_t$

con modulo $L = mrv_t \rightarrow L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$

se il moto é circolare $L = mr^2\omega$

$\vec{L} = \vec{L_r} + \vec{L_t}$ in cui $L_r = \vec{r} \wedge m\vec{v}_r$ e $L_t = \vec{r} \wedge m\vec{v}_t$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 196

Teorema momento angolare

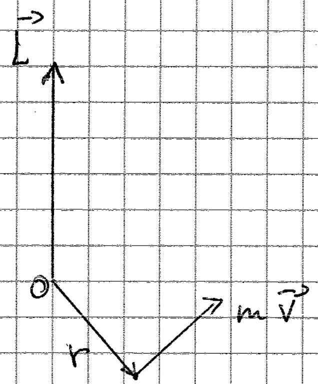
$L = r \times p \rightarrow L = r \times mv$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dr}{dt} \times mv + r \times m \frac{dv}{dt}$$

Se il polo O è fermo, allora $\frac{dr}{dt}$ coincide con la velocità di P

Invece: $m\frac{dv}{dt} = ma$ coincide con la forza applicata al punto

$$\frac{dL}{dt} = r \times ma \rightarrow \frac{dL}{dt} = r \times F \rightarrow \frac{dL}{dt} = M \quad *$$



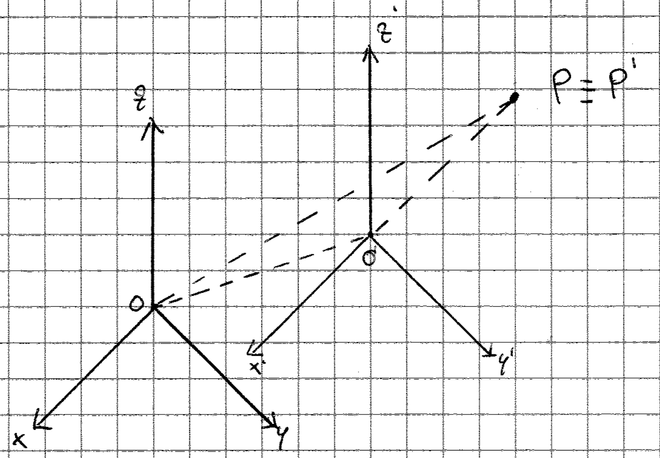
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \wedge m\vec{a}$$

prodotto vettoriale tra vettori paralleli

* La derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo di un sistema fisso

Moti relativi



Studiare il moto di un punto rispetto a due sistemi

$\overline{OO'}$ posizione di O' rispetto a O_{xy}

r posizione di p rispetto al sistema O_{xy}

r' posizione di $p(p')$ rispetto al sistema $O_{x'y'}$

$$r' = \overline{OO'} + r$$

$$V = \frac{dr}{dt} \rightarrow V = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dr'}{dt} \rightarrow V = V_{OO'} + V'$$

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow a = \frac{dV_{OO'}}{dt} + \frac{dv'}{dt} \rightarrow a = a_{OO'} + a'$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \rightarrow \vec{V} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$$

$$r' = \frac{d\vec{r'}}{dt} \rightarrow r' = \frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}$$

$$V_{O'} = \frac{dOO'}{dt} \rightarrow V_{O'} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z$$

$$r = \overline{OO'} + r'$$

$$V = V_{O'} + V' + x'\frac{du_{x'}}{dt} + y'\frac{du_{y'}}{dt} + z'\frac{du_{z'}}{dt}$$

$$\frac{du_{x'}}{dt} = \omega \times u_{x'} \qquad \frac{du_{y'}}{dt} = \omega \times u_{y'} \qquad \frac{du_{z'}}{dt} = \omega \times u_{z'}$$

$$V = V_O + V' + \omega \times (x' u_{x'} + y' u_{y'} + z' u_{z'}) \rightarrow V = V_O + V' + \omega \times r'$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dv'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz'}{dt}u_{z'}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dv'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}u_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}u_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}u_{z'} + \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{du_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{du_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{du_{z'}}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dv'}{dt} = a' + \omega \times v' \qquad \omega \times \frac{dr'}{dt} = \omega \times v' + \omega \times (\omega \times r')$$

$$a = a' + a_0 + \frac{d\omega}{dt} \times r' + 2\omega \times v' + \omega \times (\omega \times r')$$

dove si può anche cambiare qualcuno di questi elementi in modo che diventi

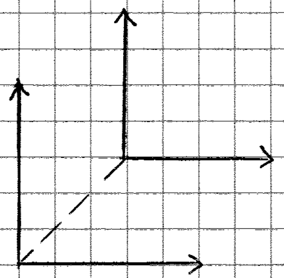
$$a = \frac{dv_{0'}}{dt} + \frac{dv'}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt}$$

$$\frac{dv_{0'}}{dt} \rightarrow a_{0'} \qquad \frac{dv'}{dt} \rightarrow a' + \omega \times v' \qquad \omega \times \frac{dr'}{dt} \rightarrow \omega \times v' + \omega \times (\omega \times r')$$

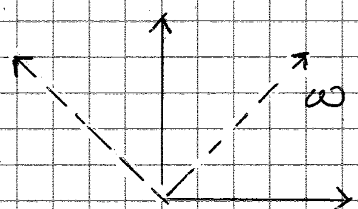
Se i versori variano nel tempo

$v = v_{OO'} + v' + \omega \times r'$

$v_T = v - v' \rightarrow v_T = v_{OO'} + \omega \times r' \rightarrow \begin{cases} \text{se } \omega = 0 \Rightarrow v_T = v_{OO'} \\ \text{se } v_{OO'} = 0 \Rightarrow v_T = \omega \times r' \end{cases}$



Traslazione



Rotazione

$$a = \underbrace{a' + a_{OO'} + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r'}_{a_T} + \underbrace{2\omega \times v'}_{a_C}$$

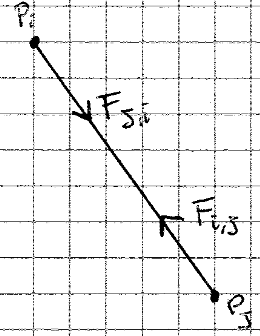
a_C = accelerazione Coriolis

$\left.\begin{array}{l} F = ma \\ a = a' + a_T' + a_C \end{array}\right\} F - m a_T - m a_C = m a$

Dinamica dei sistemi di punti materiali

Sistemi di punti, forze interne ed esterne

Consideriamo n punti materiali di masse $m_1, m_2, \dots m_i, m_j \dots m_n$

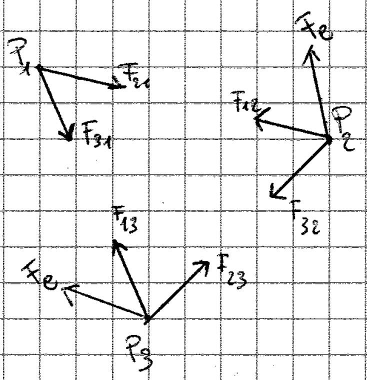


Le forze interne agiscono tra i punti del sistema (sono anche dette interazioni)

Per il principio di azione-reazione →

→ $F_{ij} = F_{ji}$

Le forze esterne sono quelle che agiscono su punti del sistema per cause esterne al sistema

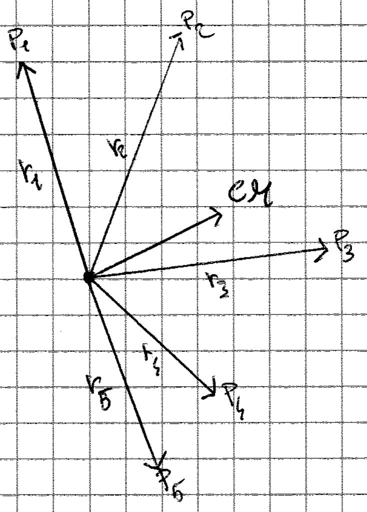


$$F_i = F_i^{(e)} + F_i^{(i)}$$

Le forze tra i punti interagiscono tra loro

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 196

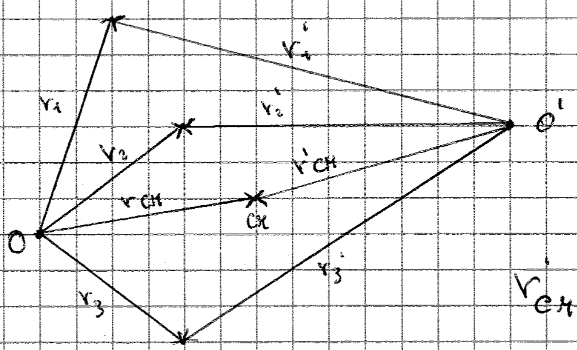
Centro di massa



$$r_{CM} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum_i m_i} \rightarrow r_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

La posizione del centro di massa sarà più spostata verso le masse che risultano più pesanti



$$r_i = r_i' + OO'$$

$$r_i' = r_i + O'O$$

$$r'_{CM} = \frac{\sum_i m_i r_i'}{\sum_i m_i} \rightarrow r'_{CM} = \frac{\sum_i m_i (r_i + O'O)}{\sum_i m_i} \rightarrow$$

$$\rightarrow r'_{CM} = r_{CM} + O'O$$

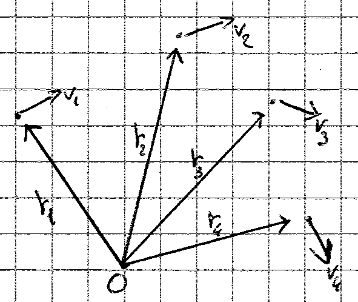
Velocità centro di massa

$$V_{CM} = \frac{dr_{CM}}{dt} \rightarrow V_{CM} = \frac{\sum_i m_i \frac{dr_i}{dt}}{\sum_i m_i} \rightarrow V_{CM} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} \rightarrow V_{CM} = \frac{P}{\sum_i m_i}$$

La quantità di moto totale P del sistema coincide quindi con la quantità di moto del centro di massa

$$P = \left(\sum_i m_i\right) V_{MC} \rightarrow P = m V_{CM}$$

Centro di massa: momento angolare



Ragionamenti analoghi possono essere fatti per il momento angolare di un singolo punto e del centro di massa

$$L_i = r_i \times m_i v_i \qquad \sum r_i \times m_i v_i = \sum L_i \rightarrow \sum_i L_i = L$$

La derivata rispetto al tempo è $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i L_i \rightarrow$

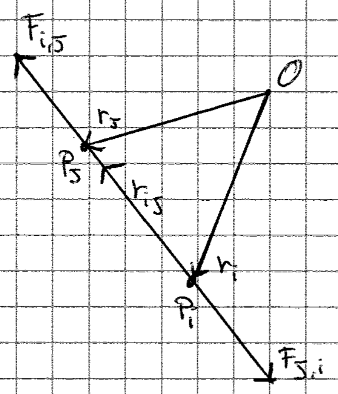
$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\sum_i r_i \times m_i v_i}{dt} \rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum \frac{dr_i}{dt} \times m_i v_i + \sum_i r_i \times m_i \cdot \frac{dv_i}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum v_i \times m_i v_i + \sum r_i \times m_i a_i \rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum r_i \times F_i \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum r_i \times F_i^{(e)} + \sum_{i,j} r \times F_{i,j}$$

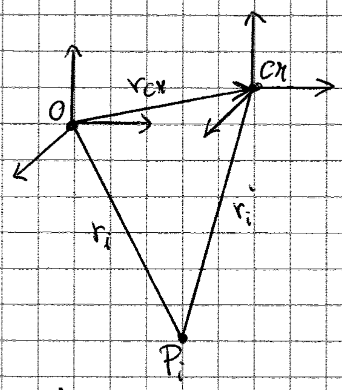
Teorema momento angolare

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i r \times F_i^{(e)} \rightarrow \frac{dL}{dt} = M^{(e)}$$ Momento totale delle forze esterne



$$\sum r_i \times F_{i,j} = 0$$

Sistema di riferimento del centro di massa



Se consideriamo il centro di massa come origine di un sistema di riferimento cartesiano con assi e orientazione fissa rispetto ad un sistema Oxy iniziale, valgono le seguenti proprietà:

a) L'origine è il centro di massa

b) Gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema di riferimento inerziale ed in particolare possono essere assunti paralleli

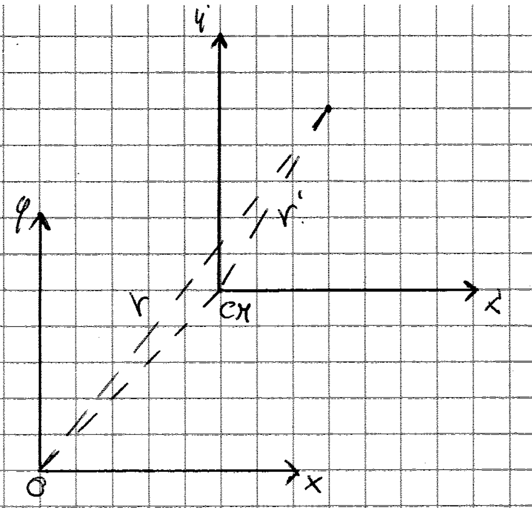
c) Si tratta in generale di un sistema non inerziale in base al punto b il moto è traslatorio ma non necessariamente rettilineo uniforme, ciò avviene solo se $R^{(e)}=0$ quindi $a_{CM}=0$

$r_i = r_i' + r_{CM}$ $\quad r_i'=0$ quando il punto da calcolare è nell'origine del sistema del CM

$V_i = V_i' + V_{CM}$ $\quad V_{CM}' = 0$ quando l'origine rimane ferma

$$r_{CM} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} \qquad V_{CM} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i}$$

$P'=0$ La quantità di moto totale del sistema è nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa



1) Moto centro di massa dovuto a forze esterne

$R^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right) a_{CM} = M a_{CM}$

2) Moto dei punti intorno al centro di massa dovuto al momento delle forze esterne

$M^{(e)}_{CM} = \frac{dL_{CM}}{dt} \rightarrow M^{(e)}_{CM} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(r_{CM} \times m_i v_i\right)$

Teorema di Koning per l'energia cinetica

$$E_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \rightarrow E_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_{CM} + v_i')^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{CIN} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i m_i v_i' \cdot v_{CM} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{CIN} = \frac{1}{2} M_{TOT} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Secondo teorema di Koning per l'Energia cinetica

$$E_K = \frac{1}{2} M_{TOT} \cdot v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \rightarrow E_K = E_K' + E_{K,CM}$$

L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere nel sistema di riferimento inerziale, come somma dell'Energia cinetica dovuta al moto del centro di massa, e di quella del sistema rispetto al centro di massa

Urti tra due punti materiali

$$P_{in} = m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1fin} + m_2 v_{2fin} = P_{fin}$$

$$P = (m_1 + m_2) v_{cm} = P_{in} = P_{fin} = \text{costante}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 v_{1fin} - m_1 v_{1,in} &= J_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} F_{2,1}\, dt \\ m_2 v_{2fin} - m_2 v_{2,in} &= J_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_{1,2}\, dt \end{aligned}\right\} \rightarrow F_{1,2} = -F_{2,1} \quad J_{1,2} = -J_{2,1}$$

$$\Delta P = \int_{t_1}^{t_2} F^{(e)} dt \rightarrow \Delta P = F^{(e)} \tau$$

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt \rightarrow J = F_m \tau$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$E_{k,in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rightarrow E_{k,in} = E_k + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2$$

$$E_{k,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 < E_{k,in}$$

$$\Delta E_{k,in} = E_{k,fin} - E_{k,in} = -E_k \rightarrow \Delta E_{k,in} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Urto anelastico

$$\frac{1}{2}m_1 v'^2_{1fin} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2fin} = e^2\left(\frac{1}{2}m_1 v'^2_{1in} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2,in}\right)$$

Nell'urto elastico il coefficiente di restituzione è $e=1$

$$v_{1fin} = \frac{(m_1 - em_2)v_{1in} + m_2(1+e)v_{2in}}{(m_1+m_2)}$$

$$v_{2fin} = \frac{m_1(1+e)v_{1in} + (m_2 - em_1)v_{2in}}{(m_1+m_2)}$$

Sistemi massa variabile

$$F = \frac{dp}{dt} \rightarrow F = \frac{d(mv)}{dt} \rightarrow F = m\frac{dv}{dt} + m\frac{dm}{dt} \rightarrow F = v\frac{dm}{dt}$$

Nel caso in cui non agisca alcuna forza, si può applicar la conservazione della quantità di moto tra due istanti

$$m_0 v_0 = m(t)\,v(t)$$

Un caso classico è quello del razzo il cui motore brucia carburante. Siano m e v, massa e velocità, del sistema ad un istante del moto. A seguito dell'espulsione di una massa dm con velocità v^*, si ha

$$mv = (m-dm)(v+dv) + dm(v-v^*) \qquad mdv = v^* dm \qquad dv = v^*\frac{dm}{m}$$

Nell'ipotesi che per esempio la massa vari linearmente nel tempo:

$$m(t) \overset{①}{=} m_0 - kt \qquad dm \overset{②}{=} -kdt \qquad dv \overset{③}{=} v^*\frac{dm}{m} \qquad dv \overset{④}{=} v^*\frac{kdt}{m_0-kt}$$

$$v(t) = v_0 + v^*\log_{10}\left(\frac{m_0}{m_0-kt}\right) \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{v^*k}{m_0-k}$$

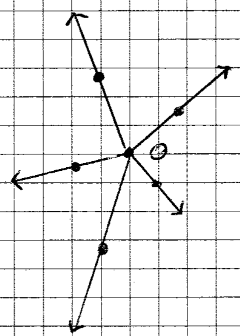
Nella ③ metto la ① e la ② e diventa la ④

Gravitazione

Forze centrali

Si definisce una forza centrale una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà:

1) In qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso, detto centro della forza
2) Il modulo é funzione soltanto della distanza dal centro
3) Se μ_r é il versore della direzione $OP = r$, $F = F(r)\mu_r$, con $F(r) > 0$ se la forza é repulsiva e $F(r) < 0$ se la forza é attrattiva

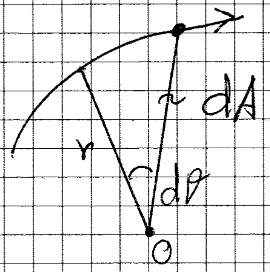


$$\vec{F} = F(r)\,\vec{\mu}_r \begin{cases} F(r) > 0 & \text{forza repulsiva} \\ F(r) < 0 & \text{forza attrattiva} \end{cases}$$

Campo di forze

La presenza di una forza che agisce in una certa regione dello spazio costituisce una modifica dello spazio stesso. Regione dello spazio all'interno della quale si esercita l'azione della forza

Velocità areale



Definizione di velocità areale di un punto

La quantità $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ é proporzionale all'area infinitesima spazzata dal vettore r congiungente il centro O a P che é proporzionale ad un triangolo di base $r\,d\theta$ e altezza r, quindi di Area $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

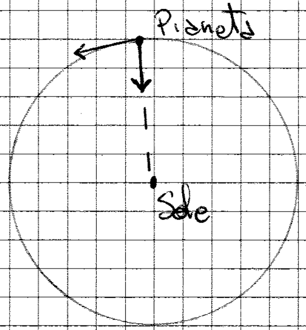
Si definisce velocità areale $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \rightarrow cost$

La traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano passante per il centro ed é percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante

Teoria di Newton

Le orbite dei pianeti possono essere approssimate con delle circonferenze

Considerando la relazione ottenuta per le forze centrali



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} v^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{costante}$$

Nel caso di traiettoria il raggio r é costante, quindi $\frac{d\theta}{dt} = \text{costante}$

Moto di rivoluzione di un pianeta

Se la traiettoria é circolare, il pianeta deve essere soggetto ad una forza centripeta

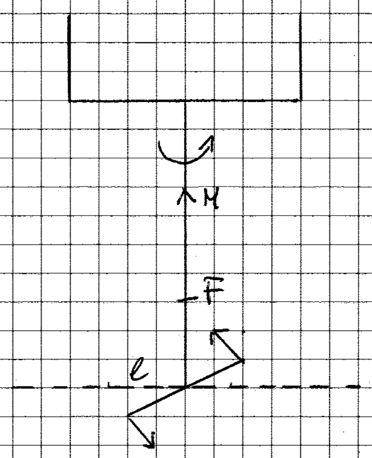
$$F = m\omega^2 r \rightarrow F = m\left(\frac{2\pi}{F}\right)^2 r$$

Inoltre tenendo conto della terza legge di Keplero: $T^2 = kr^3$

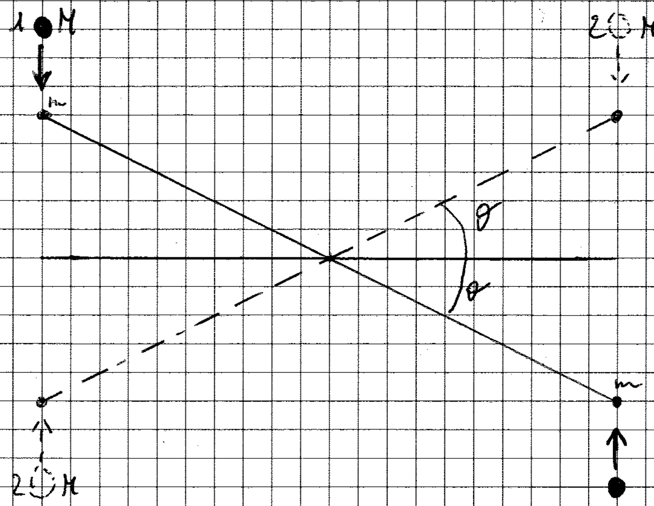
$$F = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{r^2}$$

La forza esercitata dal sole sui pianeti é inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole

Pendolo di torsione o di Cavendish



Il filo é libero di girare

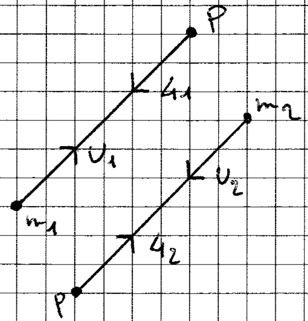


La seconda parte fa vedere perché c'é la torsione dell'asticella. Questo movimento é provocato dalla forza repulsiva delle due masse M

Campo gravitazionale

$$F_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} u_{1,2}\right) m_2 \qquad F_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2} u_{2,1}\right) m_1$$

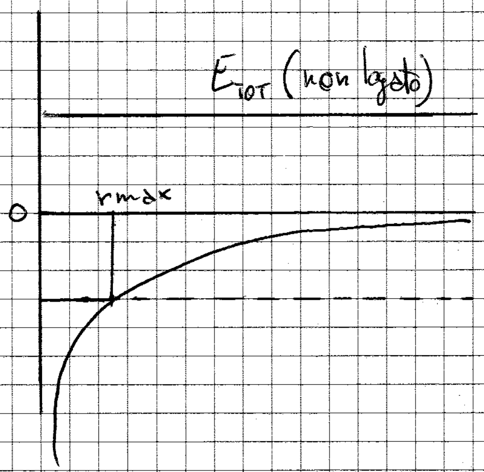
$$G_1 = -\gamma \frac{m_1}{r^2} u_1 \qquad G_2 = -\gamma \frac{m_2}{r^2} u_2$$



$$F_{1,2} = m_2 G_1$$

$$F_{2,1} = m_1 G_2$$

L'energia totale di un sistema di due masse è quindi dato dalla somma $E_{TOT} = E_K + E_P$
L'energia totale di un sistema di due masse può assumer quindi valore positivo, negativo o nullo a seconda che



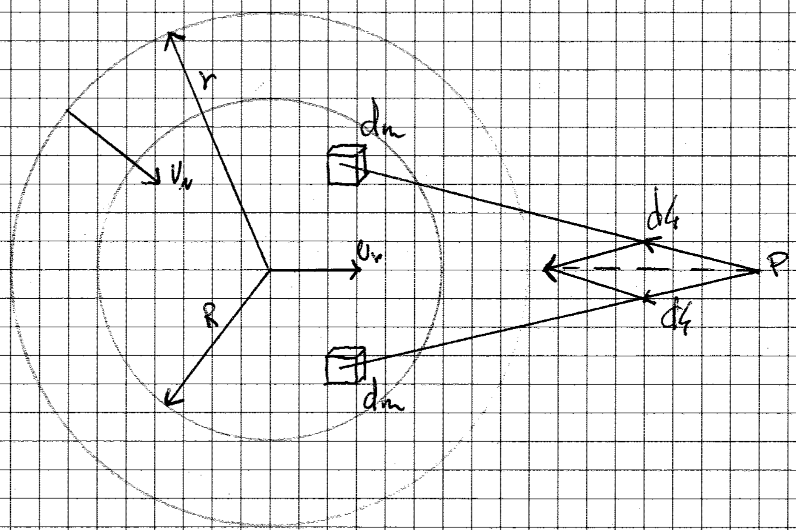
$E_K > |E_P|$ (orbita iperbolica)

$E_K = |E_P|$ (orbita parabolica)

$E_K < |E_P|$ (orbita ellittica)

Riassumendo:

$$\phi = \oint_S \mathcal{G} \cdot u_n \cdot dS \qquad \phi = 4\pi\gamma \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}(r)\, u_r$$



$$\phi = \oint_S \mathcal{G}(r)\, u_r \cdot u_n\, dS \Rightarrow \phi = \mathcal{G}(r) \oint_S dS \Rightarrow \phi = \mathcal{G}(r)\, 4\pi r^2$$

$$\mathcal{G}(r)\, 4\pi r^2 = 4\pi\gamma m \qquad \mathcal{G}(r) = \frac{\gamma m}{r^2}$$

I satelliti terrestri

Un satellite artificiale di massa $m = 10^3 kg$ descrive un'orbita circolare intorno alla terra. Calcolare in funzione del raggio r dell'orbita, la velocità, il periodo, l'energia meccanica, la forza gravitazionale, in particolare per r poco maggiore del raggio della terra r_T. Estendere i calcoli al caso di un satellite geostazionario (cioè di periodo eguale a 24 ore). Determinare infine il lavoro necessario per portare il satellite da un'orbita di raggio r_1 a un'orbita di raggio $r_2 > r_1$.

Ricordiamo che $m_T = 5.98 \cdot 10^{24} Kg$, $r_T = 6,38 \cdot 10^6 m$, $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N}{Kg}$

$$F = \gamma \frac{m m_T}{r^2} \rightarrow F = m\omega^2 r \rightarrow F = m\frac{v^2}{r} \qquad v = \sqrt{\gamma \frac{m_T}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\gamma m_T}} \qquad E_m = -\gamma \frac{m m_T}{2r}$$

$$T = 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot r^{3/2} s$$

$$F = \frac{3,99 \cdot 10^{17}}{r^2} N \qquad E_m = \frac{-2 \cdot 10^{17}}{r} J$$

Se $r = r_T$ $\quad T = 84$ minuti $\quad F = 9,81 \cdot 10^3 N$ $\quad E_m = -3,14 \cdot 10^{10} J$

Nel caso di un satellite geostazionario $r = 42\,300 Km$

Il lavoro per cambiare orbita è

$$W = \Delta E_m \rightarrow W = \Delta E_{m,2} - \Delta E_{m,1} \rightarrow W = \gamma \cdot \frac{m m_T}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \rightarrow W = 2 \cdot 10^{17}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) J$$

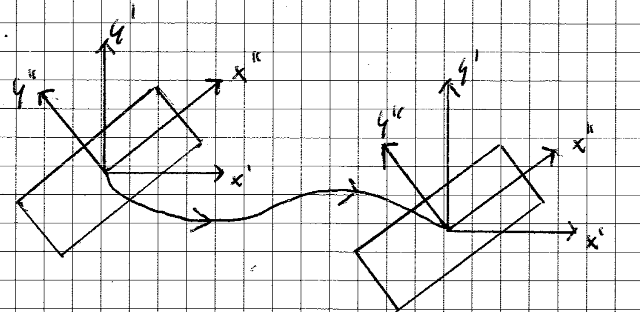
Parametri necessari per individuare la posizione di un corpo rigido nello spazio (gradi di libertà)

Un punto P é individuato da $l=3$ parametri
n punti P indipendenti sono individuati da $l=3n$ parametri
In un corpo rigido, dato che i punti sono vincolati tra di loro il numero di parametri sarà minore di $3n$
Il numero di parametri necessari é $l=6$

Riassumendo per sapere dov'é il corpo bisogna sapere dov'é il centro di massa e la direzione degli assi che ruotano con lui (assi solidali col corpo rigido) per sapere in che direzione é.

Moto corpo rigido: Traslazione

Tutti i punti descrivono traiettorie uguali, percorse con la stessa velocità v che coincide con la velocità del centro di massa



La dinamica é quella di un punto materiale e non c'é movimento rispetto al centro di massa. Le grandezze significative per una traslazione sono:

$L' = 0 \quad E'_k = 0 \quad P = M v_{cm} \quad E_k = E_{k\,cm} \rightarrow E = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$

$R = M a_{cm} \quad L = L_{cm} \rightarrow L = r_{cm} \times M v_{cm} \rightarrow L = r_{cm} \times P$

Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa

Un corpo rigido è costituito da un insieme continuo di punti materiali. Estendendo quindi ciò che si è visto per un insieme discreto di punti materiali le singole masse saranno infinitesime, ossia $m_i \Rightarrow dm$ $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \rho = \frac{dm}{dV}$

Quindi tutte le somme diventano degli integrali

$m = \rho V \rightarrow m = \int_V \rho dV$

Densità di un corpo rigido

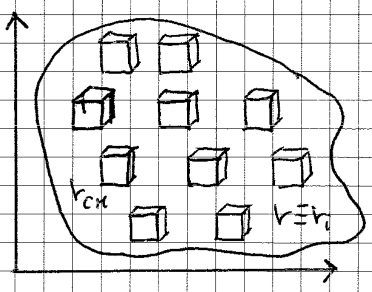
Densità volumica: $\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \rho dV \rightarrow m = \int_V dV \cdot \rho$

Densità superficiale: $\sigma = \frac{dm}{dS} \rightarrow dm = \sigma dS \rightarrow m = \int_S \sigma dS$

$\lambda = \frac{dm}{dt} \rightarrow dm = \lambda dt \rightarrow m = \int_\ell \lambda dt$

Centro di massa

Definiamo il centro di massa di un sistema di punti materiali



$r_{CM} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$ $dm = m_i$

per il corpo rigido

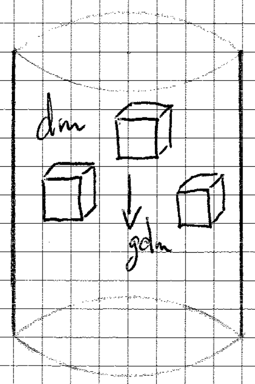
$r_{CM} = \frac{\int r dm}{\int dm} \rightarrow r_{CM} = \frac{\int r dm}{m}$

$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV \rightarrow dm = \rho dx dy dz$

$r_{CM} = \frac{\int_V r \rho dV}{\int_V \rho dV} \rightarrow r_{CM} = \frac{\int_V r dV}{\int_V dV} \rightarrow r_{CM} = \frac{\int_V r dV}{V} \rightarrow r_{CM} = \frac{\int_V r dx dy dz}{V}$

Centro di massa e forza peso

Consideriamo un corpo continuo sottoposto alla forza peso



La risultante di tutte queste forze parallele fra loro é:

$$\int g\,dm = g\int dm = mg = P$$

E tale forza é applicata nel centro di massa del sistema

Momento della forza peso

Il momento risultante della forza peso rispetto a un polo fisso (ad esempio l'origine delle coordinate) é dato da

$$M = \int r \times g\,dm \rightarrow M = \left(\int r\,dm\right) \times g$$

ma poiché $r_{CM} = \frac{\int r\,dm}{\int dm} \rightarrow \int r\,dm = r_{CM}\int dm \rightarrow$

$$\rightarrow M\left(r_{CM}\int dm \times g\right) = m\,r_{CM} \times g = r_{CM} \times mg$$

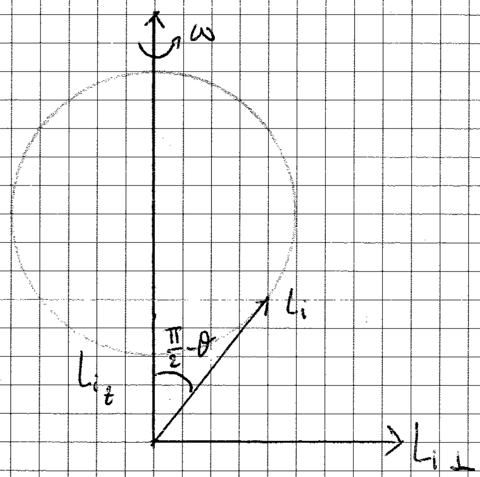
Calcolo momento angolare

Ciascun punto P é caratterizzato da un momento angolare

$L_i = r_i \times m_{v_i}$ $\quad L_i$ é perpendicolare al piano che contiene sia r_i, che v_i

L_i forma un angolo $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ con l'asse z

Il momento angolare ha modulo $L_i = m_i r_i v_i \rightarrow L_i = m_i r_i R_i \omega$



Vogliamo calcolare le componenti (ortogonale e parallela all'asse di rotazione) del momento angolare L_i

$L_{i_z} = L_i \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) \rightarrow L_{i_z} = L_i \, sen\, \theta_i \rightarrow$

$\rightarrow L_i = m_i r_i \, sen\, \theta_i R_i \omega \rightarrow L_i = m_i R_i^2 \omega$

$L_{i\perp} = L_i \cos\theta \rightarrow L_{i\perp} = m_i r_i R_i \cos\theta_i$

La proiezione del momento angolare lungo l'asse z é indicato come momento angolare assiale

$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega$ $\quad$ La risultante del momento angolare z.

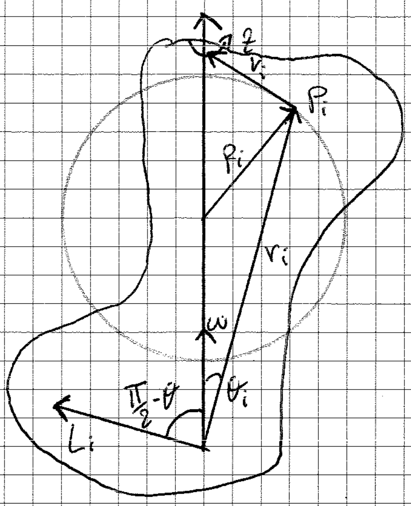
$L_z = \sum_i L_{i_z} \rightarrow L_z = \left(\sum_i m_i R_i^2\right) \omega \rightarrow L_z = I_z \omega$

$I_z = \sum_i m_i R_i^2 \rightarrow I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$

La componente del momento angolare ortogonale all'asse z é: $L_{i\perp} = L_i \cos\theta \rightarrow L_{i\perp} = m_i r_i R_i \omega \cos\theta_i$

La risultante del momento angolare ortogonale all'asse z ha risultante nulla, quando l'asse di rotazione é un asse di simmetria così per ogni punto P_i c'é sempre un punto P_j con componente $L_{j\perp}$ uguale e contraria a $L_{i\perp}$. Questo accade più in generale quando l'asse di rotazione coincide con un asse principale di inerzia

Calcolo dell'energia cinetica per la rotazione intorno ad un asse fisso (caso discreto)



$$E_{cin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \to E_{cin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 \to$$

$$\to E_{cin} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

- Relazione tra energia cinetica e momento angolare

$E_{cin} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ sapendo che $L = I_z \omega$ allora $E_{cin} = \frac{L^2}{2 I_z}$

- Relazione tra energia cinetica e lavoro (finito)

$E_{k,iniz} = \frac{1}{2} I_z \omega^2_{iniz}$ $\quad E_{k,fin} = \frac{1}{2} I_z \omega^2_{fin}$

$W = \Delta E_k \to W = \frac{1}{2} I_z \omega^2_{fin} - \frac{1}{2} I_z \omega^2_{iniz}$

- Relazione tra energia cinetica e lavoro (infinitesimo)

$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

$dW = dE_k \to dW = I_z \omega \, d\omega \to dW = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha \, dt \to dW = I_z \alpha \, d\theta \to$

$\to dW = M_z \, d\theta$

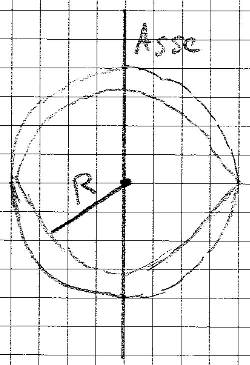
- Relazione tra lavoro e momenti

$dW = M_z \, d\theta$ $\quad W = \int_0^\theta M_z \, d\theta$

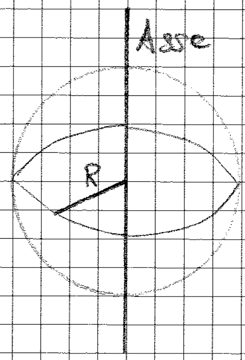
Inoltre si può ricavare la potenza associata al lavoro W:

$P = \frac{dW}{dt} \to P = M_z \frac{d\theta}{dt} \to P = M_z \omega$

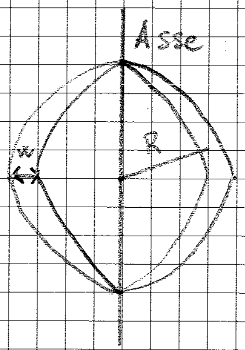
Momenti d'inerzia



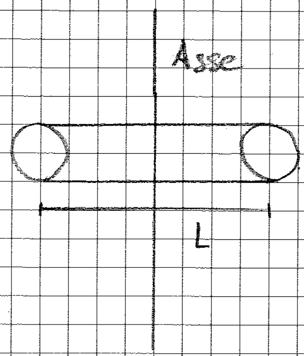
MR^2



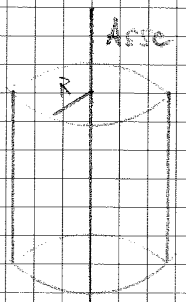
$\frac{2}{5}MR^2$



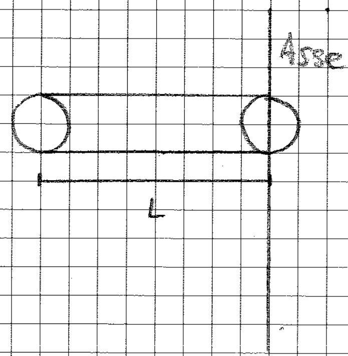
$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}MW^2$



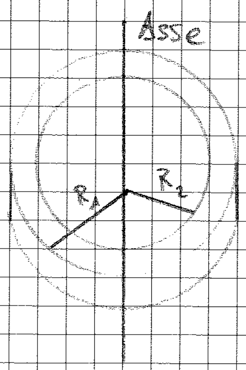
$\frac{1}{12}ML^2$



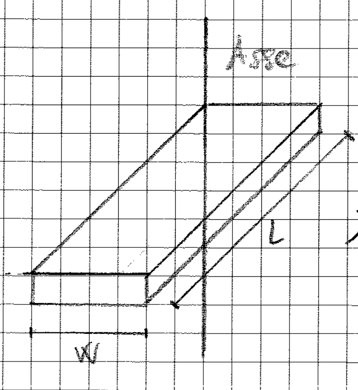
$\frac{1}{2}MR^2$



$\frac{1}{3}ML^2$



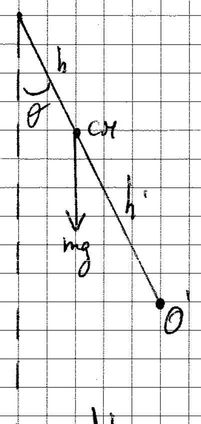
$\frac{1}{2}M\left(R_1^2+R_2^2\right)$



$\frac{1}{12}M(L^2+W^2)$

Pendolo composto

Si tratta di un corpo rigido che possa oscillare per azione del suo peso in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il suo centro di massa



Il momento della forza peso è

$M = r \times mg \quad M = -mgh\,sen\theta$

Il segno negativo implica che il momento funziona da richiamo

$$M = \frac{dL_z}{dt} \rightarrow M = I_z\alpha \rightarrow M = I_z\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow M = -mgh\,sen\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}sen\theta = 0$$

Per piccole oscillazioni, il seno può essere sviluppato in serie dell'angolo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0$$

Il seno di θ può essere sostituito dal valore dell'angolo quando θ tende a 0

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{sen\theta}{\theta} = 1$$

Tornando a $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0$ si risolve come

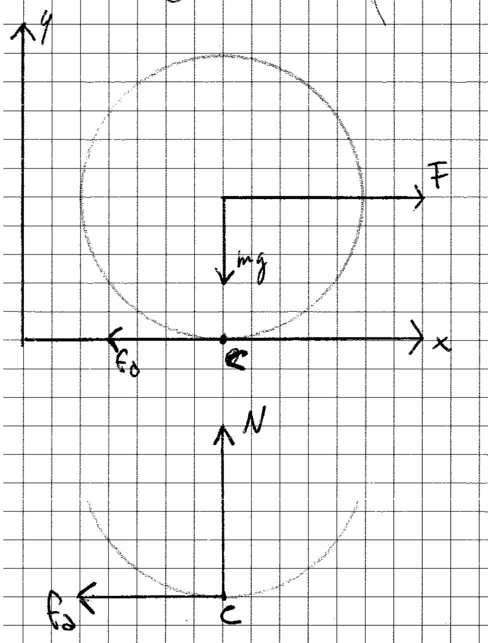
$$\theta(t) = \theta_0\,sen\left(\Omega\,sen(\Omega t + \phi)\right) \qquad \Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} \qquad l = \frac{I_z}{mh} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ l = lunghezza pendolo

$$l = \frac{I_z}{mh} \rightarrow l = \frac{I_c + mh^2}{mh} \rightarrow l = \frac{I_c}{mh} + h \qquad \text{Se } h' = \frac{I_c}{mh} \rightarrow I_c = mhh'$$

$$l = h' + h > h$$

Rotolamento puro



Traslazione

$$F + R + mg = m a_{cm}$$

$$\vec{R} = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y$$

$$\begin{cases} F - f_d = m a_{cm} \\ N - mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} f_d = R_x \\ N = R_y \end{matrix}$$

Rotazione. Scegli il centro di massa come polo O per il calcolo dei momenti. L'unica con momento non nullo è la forza di attrito

$$M = r \times f_d \Rightarrow M = I\alpha \qquad a_{cm} = \alpha r \Rightarrow f_d r = I\alpha \rightarrow f_d = I \frac{a_{cm}}{r^2}$$

$M_F = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$ poiché $\vec{r} = 0$

$M_{mg} = \vec{r}_0 \wedge mg = 0$ poiché $\vec{r}_0 = 0$

$M_N = \vec{r}_0 \wedge \vec{N} = 0$ poiché $r_0 = 0$

$M_d = \vec{r} \wedge f_d = I\alpha$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 196