NUMERO: 760

DATA: 30/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Lamparelli

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Dambrosio

• ANALISI TEORIA

• CONSEGUENZE DEL TEOREMA

1 OGNI FUNZIONE CONTINUA SU $[a,b]$ AMMETTE PRIMITIVE SU $[a,b]$

È UN RISULTATO TEORICO, MA NON È DETTO CHE DI QUESTA PRIMITIVA SI SAPPIANO TROVARE UN'ESPRESSIONE ESPLICITA IN TERMINI DI FUNZIONI ELEMENTARI.

Es. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (FUNZIONE GAUSSIANA)

CERTAMENTE f È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ f AMMETTE PRIMITIVE SU $\mathbb{R}$

$c = 0$ $\quad F_0(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$ È UNA PRIMITIVA DI f

SU $\mathbb{R}$, CIOÈ $F_0'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

• SI PUÒ DIMOSTRARE CHE DI F_0 NON È POSSIBILE SCRIVERE UN'ESPRESSIONE CHE NON USI IL SIMBOLO DI INTEGRALE E CHE USI SOLO LE FUNZIONI ELEMENTARI.

COME SI PUÒ CALCOLARE $F_0(1)$?

$F_0(1) = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ $\rightarrow$ NON SI PUÒ CALCOLARE IN MODO ESATTO PERCHÉ NON SI CONOSCE L'ESPRESSIONE ESPLICITA DELLA PRIMITIVA

$\downarrow$

SI PUÒ USARE IL CALCOLO APPROSSIMATO

• ALTRI ESEMPI DI FUNZIONI PER CUI NON SI CALCOLANO ESPLICITAMENTE LE PRIMITIVE:

$\sin x^2$, $\cos x^2$, $\sin e^x$, $\frac{e^x}{x}$, , $\frac{\sin x}{x}$

2 TEOREMA DI TORRICELLI

SIA $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA E SIA g UNA SUA PRIMITIVA SU $[a,b]$

ALLORA $\rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

• DIMOSTRAZIONE

SIA $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA E SIA g UNA SUA PRIMITIVA FISSATA

$\downarrow$

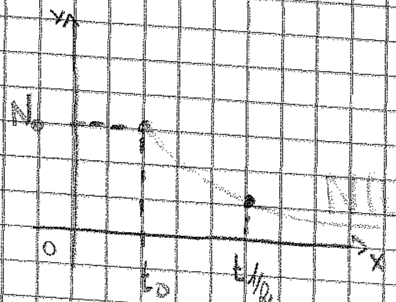
SI PUÒ APPLICARE IL TEOREMA FONDAMENTALE

QUESTO PERMETTE DI TROVARE c

$t = t_0 \quad N(t_0) = c e^{-\lambda t_0} \rightarrow N_0 \quad c = e^{\lambda t_0} N_0$

$$\begin{cases} N(t) = c e^{-\lambda t} \\ + \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \Rightarrow c = e^{\lambda t_0} N_0 \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda (t - t_0)}$$

UNICA SOLUZIONE CHE VERIFICA $N(t_0) = N_0$



DECADIMENTO ESPONENZIALE

SIGNIFICATO DI λ

CALCOLIAMO IL TEMPO DI DIMEZZAMENTO $t_{1/2}$ È TALE CHE

$$\boxed{N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0}$$

$t = t_{1/2} : \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \underbrace{(t_{1/2} - t_0)}_{\Delta t}} \qquad \frac{1}{2} = e^{-\lambda \Delta t} \qquad \log \frac{1}{2} = -\lambda \Delta t$

$\log 2^{-1} = -\lambda \Delta t \qquad -\log 2 = -\lambda \Delta t \qquad \Delta t = \frac{\log 2}{\lambda} \rightarrow$ TEMPO DI DIMEZZAMENTO

NON DIPENDE NÉ DA t_0 NÉ DA N_0

* COME SI PUÒ RISOLVERE TUTTO QUESTO PER LA DATAZIONE DEL CARBONIO RADIOATTIVO?

CARBONIO 3 ISOTOPI: C^{12} C^{13} STABILE; C^{14} RADIOATTIVO

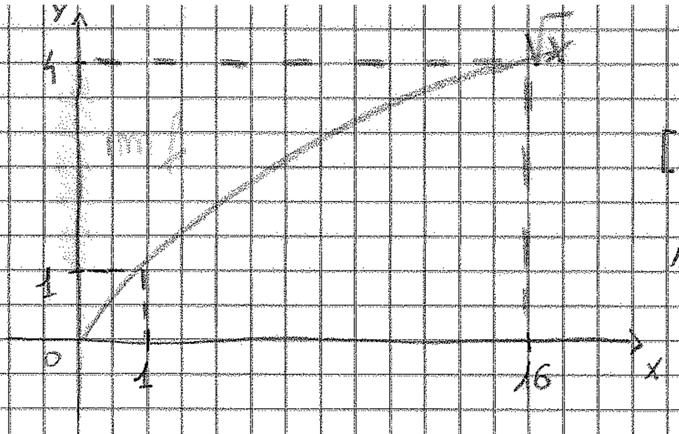
* GLI ORGANISMI VIVENTI SCAMBIANO C^{14} CON L'ATMOSFERA MANTENENDOLO STABILE $\rightarrow$ ALLA MORTE DELL'ORGANISMO QUESTO SCAMBIO CESSA $\rightarrow$ DECADE E SI TRASFORMA IN AZOTO

$\Delta t \simeq 5730\ y \rightarrow$ SIA t_0 L'ANNO DI MORTE E t L'ANNO IN CUI AVVIENE LA DATAZIONE $\rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda \underbrace{(t - t_0)}}$

TEMPO TRASCORSO DALLA MORTE

$\underbrace{t - t_0}_{\text{ETÀ DEL CAMPIONE}} = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N(t)}{N_0}$ = NON È UTILIZZABILE POICHÉ

NON CONOSC... N...



$[1;16] \rightarrow [1;4]$

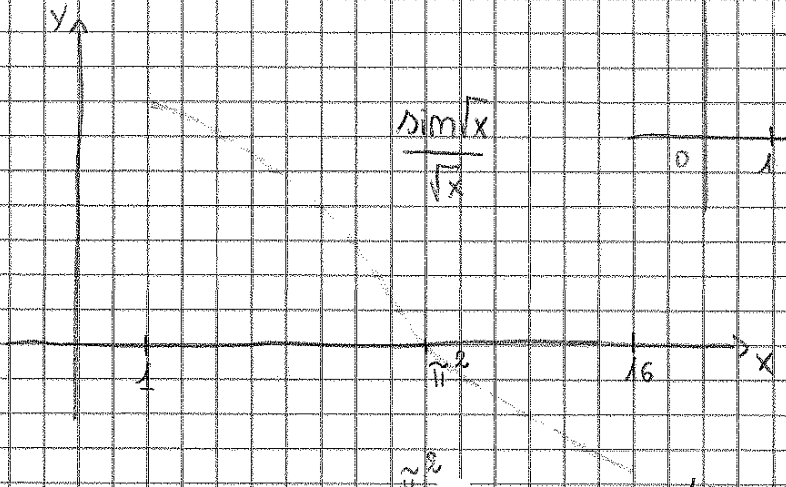
sin NON HA SEGNO COSTANTE SU $[1;4]$

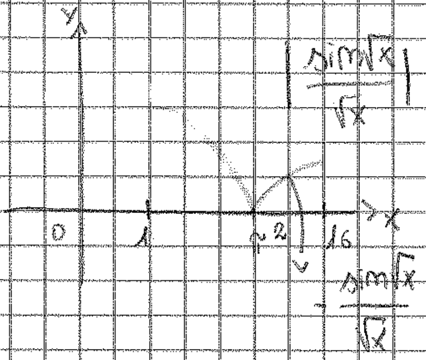
$\sin y \geq 0$ SE $1 \leq y \leq \pi$

$\sin y \leq 0$ SE $\pi \leq y \leq 4$

$\sin\sqrt{x} \geq 0$ SE $1 \leq \sqrt{x} \leq \pi^2$ $\quad \sin\sqrt{x} \leq 0$ SE $\pi^2 \leq \sqrt{x} \leq 4$

CONCLUSIONE ->





$$\int_1^{16} \left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| dx = \int_1^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_{\pi^2}^{16} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

- TROVIAMO LE PRIMITIVE DI $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ SOSTITUZIONE STANDARD $y = \sqrt{x} \rightarrow y^2 = x$

$\overset{\text{DERIVO}}{2y \cdot dy = 1 \cdot dx}$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin y}{y} 2y\,dy = 2\int \sin y\, dy = 2(-\cos y + c) \rightarrow c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{2(-\cos\sqrt{x} + c)}$$

GEOMETRICAMENTE SE $f \geq 0$ SU $[a,b]$ $\rightarrow$ $\underbrace{\int_c^x f(t)\,dt}_{F_c(x)}$ = AREA SE $x > c$

OSS $\rightarrow$ COSA SUCCEDE CAMBIANDO c?

SIA $c' \in [a,b]$ $\quad F_{c'}(x) = \int_{c'}^x f(t)\,dt$

RELAZIONE FRA $F_c(x)$ E $F_{c'}(x)$?

$$F_c(x) = \underbrace{\int_c^x f(t)\,dt}_{\text{INTEGRALE ORIENTATO}} = \int_c^{c'} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{c'}^x f(t)\,dt}_{F_{c'}(x)}$$

$$F_c(x) = F_{c'}(x) + \underbrace{\int_c^{c'} f(t)\,dt}_{\text{COSTANTE RISPETTO A } x \,=\, K} \quad , \forall x \in [a,b]$$

- CONCLUSIONE $\rightarrow$ 2 DIVERSE FUNZIONI INTEGRALI DI f DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE (K)

CIÒ SUGGERISCE CHE SE F_c E $F_{c'}$ SONO DERIVABILI ALLORA DEVONO AVERE LA STESSA DERIVATA OPPURE SONO PRIMITIVE DI UNA STESSA FUNZIONE

• TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

SIA $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ E SIA $c \in [a,b]$ SIA $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$

SE f È CONTINUA SU $[a,b]$ ALLORA F_c È DERIVABILE SU $[a,b]$ E VALE

$$F_c' = f(x) \quad , \forall x \in [a,b]$$

F_c È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$

OSS f CONTINUA SU $[a,b]$ IMPLICA f DERIVABILE SU $[a,b]$ $\rightarrow$ SI PUÒ DEFINIRE F_c

OSS SCRIVENDO F_c DERIVABILE SI INTENDE F_c DERIVABILE IN OGNI PUNTO $x_0 \in [a,b]$ E CHE ESISTA LA DERIVATA DESTRA $x=a$ E QUELLA SINISTRA $x=b$

(*) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta^* > 0 : |x - x_0| < \delta^* \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

DATO $\varepsilon > 0$ SCEGLIAMO COME δ IL NUMERO δ^* CHE VIENE FUORI DALL'IPOTESI DI CONTINUITÀ DI f IN x_0 E FACCIAMO VEDERE CHE:

$$|x - x_0| < \delta^*, \quad x > x_0 \Rightarrow |g(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|g(x) - f(x_0)| = \left| \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} - f(x_0) \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt}}{x - x_0} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| =$$

$$f(x_0)(x - x_0) = \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt$$

$f(x_0)$ COSTANTE

$$= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt}{x - x_0} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt}{x - x_0} \right|$$

- FINO A QUA VA BENE ANCHE SE FOSSE $x < x_0$

- $x > x_0$ $\quad |x - x_0| = x - x_0 \quad$ (5) $\quad \left| \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)\,dt \right| \le \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt$

$$\left| \frac{\int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)\,dt}{x - x_0} \right| \le \frac{\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt}{x - x_0}$$

• DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI TORRICELLI

• INTEGRALE ORIENTATO $\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \quad a<b$

• QUANDO $a=b \rightarrow \int_a^a f(x)\,dx \overset{DEF}{=} 0$

• QUANDO $a<b \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \overset{DEF.}{=} -\int_b^a f(x)\,dx$

• PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE ORIENTATO

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \rightarrow$ VALE INDIPENDENTEMENTE DALL'ORDINAMENTO a, b, c

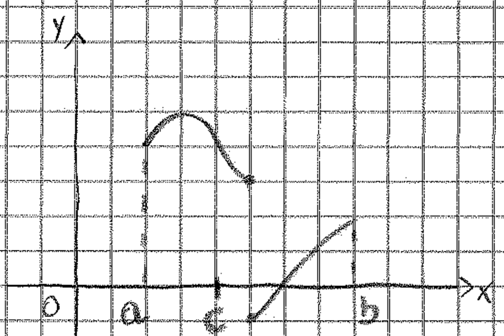
2. $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \rightarrow$ VALE SIA SE $a>b$, $a<b$, $a=b$

3. POSITIVITÀ SE $a<b$, $f \geq 0 \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

SE $a>b$, $f \geq 0 \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \leq 0$

ANALOGAMENTE PER LE PROPRIETÀ 1, 2

• FUNZIONI INTEGRALI $\rightarrow$ SIA $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad f \in \underset{\text{INTEGRABILE}}{\mathcal{R}}([a,b])$



SIA $c \in [a,b]$ FISSATO

E $x \in [a,b]$ VARIABILE

t = VARIABILE DI INTEGRAZ.

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

LA x VARIA PERCIÒ È UNA FUNZIONE DELLA x

F_c = FUNZIONE INTEGRALE DI f AVENTE PUNTO BASE c.

$C + \sin x$ -> SONO TUTTE PRIMITIVE

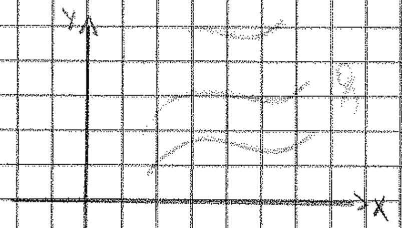
$\underbrace{D^{-1}(\{\cos x\})}_{\text{CONTRO IMMAGINE}} = \{C + \sin x,\ c \in \mathbb{R}\}$ -> INFINITE FUNZIONI

NON È L'INVERSA POICHÉ
NON È INIETTIVA

- $\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$ -> se g è una primitiva di f su $[a,b]$ allora anche tutte le funzioni del tipo: $g(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ costante, sono primitive di f su $[a,b]$

- SE g È UNA PRIMITIVA DI f SU $[a,b]$ ALLORA $g(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$ È ANCORA UNA PRIMITIVA DI f SU $[a,b]$ E NON CE NE SONO ALTRE

- $\boxed{\text{TEOREMA}}$ -> SIANO g e h PRIMITIVE DI f SU $[a,b]$ ALLORA ESISTE UNA COSTANTE $c \in \mathbb{R}$ TALE CHE $h(x) = g(x) + c$, $\forall x \in [a,b]$
  - COME SI INTERPRETA GEOMETRICAMENTE?



I GRAFICI DI DIVERSE PRIMITIVE SI OTTENGONO UNO DALL'ALTRO PER TRASLAZIONE

- CALCOLO INTEGRALE

$\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad g: [a,b] \to \mathbb{R}$ È UNA PRIMITIVA DI f SU $[a,b]$ se $g'(x) = f(x)$

- $f(x)$ È CONTINUA SU $[a,b]$ ALLORA AMMETTE PRIMITIVA SU $[a,b]$
- SE g È UNA PRIMITIVA DI f ALLORA TUTTE E SOLO LE PRIMITIVE DI f SONO LE FUNZIONI $g(x) + c$ $\quad C =$ COSTANTE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 171

- $h(x)$ CONTINUA + $g(x)$ CONTINUA -> SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE

$$\downarrow$$

$f(x)$ È CONTINUA IN $x = \pi$

- $\lim_{x \to \pi} (f(x)) = f(\pi)$ -> POICHÉ f È CONTINUA

$$\pi \cos \pi + 3 = -1 \cdot \pi + 3 = -\pi + 3$$

- f IN $x = c$ IL $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ SE TALE LIMITE ESISTE

FINITO, IN QUESTO CASO IL RISULTATO SI INDICA CON $f'_+(c)$

DERIVATA DESTRA.

- f È DERIVABILE SE $f'(c) = f'_+(c) \neq f'_-(c)$

- INTEGRALE DEFINITO

(1) • QUALI FUNZIONI SONO INTEGRABILI?

• TEOREMA -> SE f È $[a, b] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA SU $[a, b]$, ALLORA f È INTEGRABILE SU $[a, b]$

• LA CONTINUITÀ DI f SU $[a, b]$ È SUFFICIENTE PER LA SUA INTEGRABILITÀ SU $[a, b]$ QUESTA CONDIZIONE NON È NECESSARIA -> AD ESEMPIO LE FUNZIONI CONTINUE A SCALA SONO INTEGRABILI MA NON CONTINUE.

• ESEMPIO

$f(x) = \cos x$ SU $[0, \frac{\pi}{2}]$ È INTEGRABILE IN $[0, \frac{\pi}{2}]$?

SÌ PERCHÉ f È CONTINUA SU $[0, \frac{\pi}{2}]$ -> ALLORA ESISTE

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 171

• CONSEGUENZA

$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ESISTE ED È UGUALE A $\ell \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

ESISTONO $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ E $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ UGUALI FRA DI LORO

ED ENTRAMBI UGUALI A ℓ.

OSS 2 $\to$ ABBIAMO CALCOLATO $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}\pi} [\sin x] = -1$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [\sin x] = 0$

LA FUNZIONE f È DEFINITA SIA IN $\frac{3}{2}\pi$ SIA IN $\frac{\pi}{2}$ QUINDI ESISTONO:

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \left[\sin \frac{3}{2}\pi\right] = [-1] = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\sin \frac{\pi}{2}\right] = [1] = +1$$

SE f È DEFINITA IN $x = c$ ABBIAMO A DISPOSIZIONE

$f(c)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ $\to$ SI CONSIDERA x VICINO A c E DIVERSO DA c

$\downarrow$

SI CONSIDERA SOLO $x = c$

• IN GENERALE $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

NEL CASO IN CUI $\boxed{\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)}$ SI DICE CHE $\boxed{f \text{ È CONTINUA}}$ IN $x = c$

PARTE INTERA $\to$ $[\sin x]$ È CONTINUA IN $x = \frac{3}{2}\pi$ E NON È CONTINUA IN $x = \frac{\pi}{2}$

• DEFINIZIONE $\to$ SIA $c \in \mathbb{R}$, SIA $f : (c - r, c + r)$

f SI DICE CONTINUA IN $x = c$ SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

CIOÈ: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

• DEFINIZIONE → SIA $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ E SUPPONIAMO CHE f SIA DERIVABILE IN OGNI PUNTO $c \in (a,b)$ → ALLORA SI DEFINISCE UNA NUOVA FUNZIONE:

$$(a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f'(x)$$

QUESTA NUOVA FUNZIONE SI CHIAMA FUNZIONE DERIVATA DI f O DERIVATA PRIMA DI f

• OSSERVAZIONI SULLA DEFINIZIONE DI lim

1. IL CONCETTO DI LIMITE È UN CONCETTO DINAMICO → PREVEDE IL MOVIMENTO DI X VERSO C.

2. LA DEFINIZIONE DI LIMITE È TEORICA E NON SI PUÒ UTILIZZARE PER CALCOLARE IL LIMITE → PERCHÉ NELLA DEF. È RICHIESTO GIÀ DI SAPERE IL LIMITE ℓ.
→ LA DEFINIZIONE NON È OPERATIVA → SERVE PER DIMOSTRARE CHE UN CERTO LIMITE VALE ℓ MA NON PER CALCOLARLO SE NON SI SA QUANTO VALE.

3. NELLA DEFINIZIONE SI RICHIEDE CHE f SIA DEFINITA IN UN INTORNO DI C MA NON NECESSARIAMENTE NEL PUNTO C → AD ESEMPIO NELLA DEFINIZIONE DI DERIVATA SI CALCOLA IL LIMITE PER $x \to c$ DELLA FUNZIONE $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$x-c \neq 0$ CHE IN EFFETTI NON È DEFINITA IN $x=c$

$\lim_{x \to c} f(x)$ → NON SERVE CHE f SIA DEFINITA IN $x=c$

4. LA DEFINIZIONE DI LIMITE RICHIEDE SEMPRE E COMUNQUE DI NON TENERE CONTO DI $x=c$ → f È DEFINITA ANCHE IN $x=c$ → NELLO STUDIO DEL lim IL PUNTO C VA COMUNQUE ESCLUSO.

↓

f NON È DEFINITA IN $x=c$

È OVVIO CHE SI DEBBA AVERE $x \neq c$

ANALISI TEORIA

• $y(x) = x^5 + 4x^3$ È SOLUZIONE?

$y' = 5x^4 + 12x^2$ SOSTITUISCO $\underbrace{5x^4+12x^2}_{y'} \overset{?}{=} \underbrace{x^5+4x^3}_{y} + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

AD ES. È VERA PER $x=0$ MA NON PER $x=1$ → NON È VERA

$y(x) = x^5 + 4x^3$ NON È SOLUZIONE

N.B.: ABBIAMO VERIFICATO SE UNA CERTA FUNZIONE y SIA UNA SOLUZIONE, NON ABBIAMO SCRITTO UN METODO PER TROVARE LE SOLUZIONI

• DEFINIZIONE → SI CHIAMA INTEGRALE GENERALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE L'INSIEME DI TUTTE LE SUE SOLUZIONI.

UNA QUALSIASI SOLUZIONE SI CHIAMA INVECE INTEGRALE PARTICOLARE.

ES: $N' = -\lambda N$ LE SUE SOLUZIONI SONO: $N(t) = c e^{-\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}$

↓ INTEGRALE GENERALE

$c = 3$ $N(t) = 3e^{-\lambda t}$ → INTEGRALE PARTICOLARE

• CASO PARTICOLARE → RICERCA DELLE PRIMITIVE

es. SUPPONIAMO DI VOLER TROVARE LE PRIMITIVE DI $\cos x$ SU $\mathbb{R}$ ⇒ TROVARE LE FUNZIONI y AVENTI COME DERIVATA $\cos x$ → TROVARE $y = y(x)$ TALE CHE $y' = \cos x$

$f(x) = f(x, y)$ NON DIPENDE DA y → EQ. DIFFERENZIALE

$y' = \cos x$ HA COME SOLUZIONI $y(x) = \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$

CON IL LINGUAGGIO DEGLI INTEGRALI È L'INSIEME DELLE PRIMITIVE O INTEGRALE INDEFINITO

CON IL LINGUAGGIO DELLE EQ. DIFF. È L'INTEGRALE GENERALE

SE FISSO $c = 4$ $y(x) = \sin x + 4$ → INTEGRALE PARTICOLARE

SE VOLESSIMO AVVICINARCI ANCORA DI PIÙ A 0,02?

$$d < 10^{-4} \ ?$$

$$10^{-2}|x-1| < 10^{-4} \qquad |x-1| < 10^{-2}$$

- IN GENERALE FISSATA UNA TOLLERANZA (= MISURA DELL'ERRORE) $\varepsilon > 0$ SI VERIFICA CHE $d(m(x), 0{,}02) < \varepsilon$ SE x È ABBASTANZA VICINO A 1 $\rightarrow$

$$10^{-2}|x-1| < \varepsilon \qquad |x-1| < 10^{2} \cdot \varepsilon$$

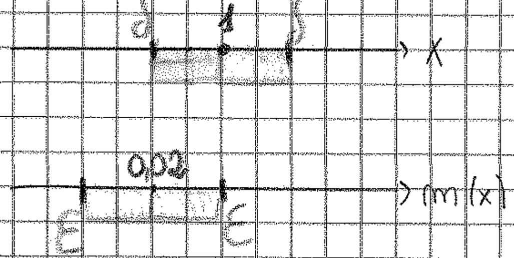
ES.

$\varepsilon = 10^{-3}$ $\quad |x-1| < 10^{-1}$

$\varepsilon = 10^{-20}$ $\quad |x-1| < 10^{-18}$

FISSATO $\varepsilon > 0$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE $|x-1| < \delta \Rightarrow |m(x) - 0{,}02| < \varepsilon$

$$\delta = 10^{2} \cdot \varepsilon$$



- TUTTO QUESTO SI RIASSUME NELLA SCRITTURA:

$$\lim_{x \to 1} m(x) = 0{,}02 \quad \Rightarrow \text{LIMITE}$$

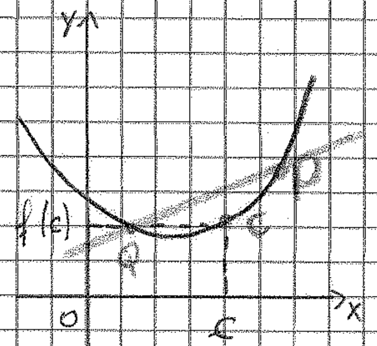
- DEFINIZIONE $\rightarrow$ SIANO $c \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ E $f : (c-r, c+r) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$

SI DICE CHE ESISTE IL LIMITE DI $f(x)$ PER $x \to c$ ED È $= \ell$ SE

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-c| < \delta,\ x \neq c \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : d(x,c) < \delta,\ x \neq c \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon \end{array}}$$ OPPURE

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

IDEA DINAMICA DI RETTA TANGENTE



Q PUNTO DIVERSO DA P SULLA CURVA -> SI DISEGNA LA SECANTE PASSANTE PER P E Q -> SI MUOVE Q LUNGO LA CURVA FACENDOLO ARRIVARE A P -> QUESTO INDUCE UN MOVIMENTO DELLE RETTE SECANTI -> SE Q SI AVVICINA A P LE SECANTI TENDONO A DISPORSI LUNGO UNA RETTA FISSA CHE SARÀ LA RETTA TANGENTE. QUESTO PROCEDIMENTO SI ESPRIME DICENDO CHE LA RETTA TANGENTE È LA POSIZIONE LIMITE DELLE RETTE SECANTI PQ QUANDO Q SI AVVICINA A P -> COME SI SCRIVE L'EQUAZIONE DELLA TANGENTE?

$f : \underbrace{I(c)}_{\text{INTORNO DI } c} \to \mathbb{R}$ LA RETTA TANGENTE PER P PASSA PER P

FASCIO DI RETTE PER P = $y - f(c) = m(x - c)$ $\quad y = m(x-c) + f(c)$

COME SI TROVA m? m = COEFFICIENTE ANGOLARE PQ

1) $y = \frac{1}{100}x^2$ $\quad P\left(1; \frac{1}{100}\right)$ Q SI AVVICINA A P MA NON PUÒ ESSERE P $\quad f(c) = \frac{1}{100}$ $\quad c = 1$ $\quad m = 0{,}02$

$y = 0{,}02(x-1) + \frac{1}{100}$ *

2) $f(x) = e^x$ $\quad c = 0$ CERCHIAMO NUMERICAMENTE IL COEFF. ANGOLARE $(c, f(c))$

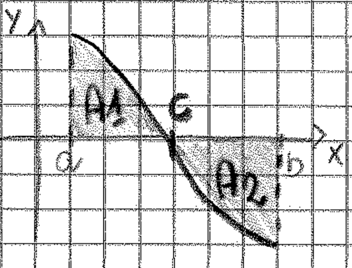
$y = m(x-c) + f(c)$ $\quad c = 0$ $\quad f(c) = e^0 = 1$ $\quad m = 1$

$y = 1(x - 0) + 1$ $\quad y = x + 1$

3) $f(x) \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad c = 0$ RETTE Tg IN $(0, f(0))$

NON SI HA L'EFFETTO DI STABILIZZAZIONE SU UN VALORE -> IN QUESTO CASO LA Tg NON ESISTE.

- SE f CAMBIA SEGNO



$$\text{AREA}(A_f) = \text{AREA } A_1 + \text{AREA } A_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

- ALLO STESSO RISULTATO SI ARRIVA CONSIDERANDO:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

- FORMULA GENERALE PER L'AREA $\rightarrow$ $\text{AREA}(A_f) = \int_a^b |f(x)|\,dx$

(2) x = TEMPO (t) $\quad f(x)$ = VELOCITÀ (v) $\rightarrow$ MOTO RETTILINEO

$S(x)$ = POSIZIONE $\quad \int_a^b f(x)\,dx = S(b) - S(a)$

(3) INTEGRALE E VALOR MEDIO (MEDIA INTEGRALE)

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \text{VALOR MEDIO DI } f \text{ SU } [a,b]$$

es. VALOR MEDIO $\sin x$ SU $[0, 2\pi]$

$$\frac{\int_0^{2\pi} \sin x\,dx}{2\pi} = 0 \quad \text{INFATTI} \quad \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$= 0$$

• DEFINIZIONE → SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ IPOTESI: f LIMITATA

E SIANO → $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ E $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ (DEFINITI COME PRIMA)

SE → $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ → ALLORA f SI DICE

INTEGRABILE SECONDO REIMANN SU $[a,b]$ E SI SCRIVE → $f \in R([a,b])$

IL VALORE COMUNE $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ SI CHIAMA

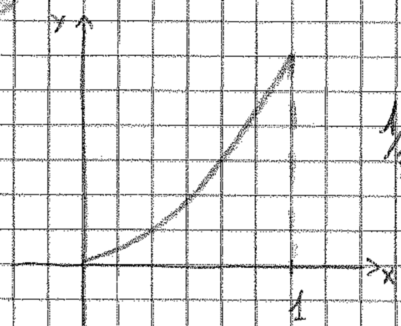
INTEGRALE DEFINITO DI f SU $[a,b]$ E SI DENOTA: $\int_a^b f(x)\,dx$

OSS. $f \in S([a,b])$ ALLORA $f \in R([a,b])$ E L'INTEGRALE SECONDO LA NUOVA DEFINIZIONE COINCIDE CON L'INTEGRALE PRECED. DEFINITO (ES. 2)

OSS. $\int_a^b f(x)\,dx$ È UN NUMERO REALE → $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,dt = \dots$

x È UNA VARIABILE MUTA

OSS. IL PROCEDIMENTO DI ARCHIMEDE SI PUÒ SCRIVERE ORA COSÌ:



$1/3$

$$\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$

1• DOMANDA → QUALI SONO LE FUNZIONI INTEGRABILI SU $[a,b]$?

2• DOMANDA → COME CALCOLO L'INTEGRALE SENZA UTILIZZARE LA DEFINIZIONE ?

ESEMPIO 1 -> LE DUE APPROSSIMAZIONI CONDUCONO A 2 RISULTATI DIVERSI

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q},\ x \in [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x \in [0,1] \end{cases}$$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ LIMITATA

$$g \in S^- f \to \begin{cases} g \in S([a,b]) \\ g \leq f \end{cases} \to \text{NECESSARIAMENTE } g \leq 0$$

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b 0 = 0 \to \boxed{\int_a^b g(x)\,dx \leq 0} \to \text{PER LA MONOTONIA}$$

$$\forall a \in A : a \leq 0 \to \boxed{\sup A \leq 0 = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx}$$

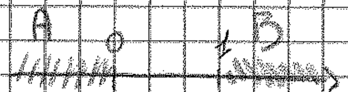
A = INSIEME DEI MINORANTI DI f

$$h \in S^+ f \to \begin{cases} h \in S([a,b]) \\ h \geq f \end{cases} \to \boxed{\text{NECESSARIAMENTE } h \geq 1}$$

$$\int_a^b h(x)\,dx \geq \int_a^b 1 = 1 \to \boxed{\int_a^b h(x)\,dx \geq 1}$$

B = INSIEME DEI MAGGIORANTI DI f

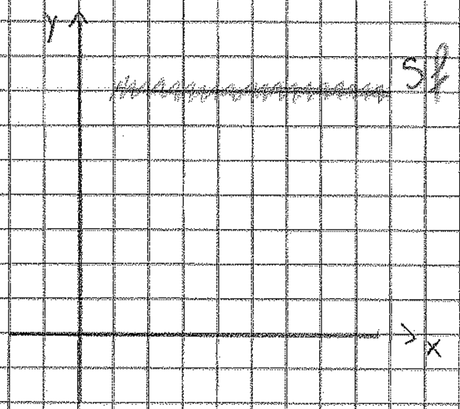
$$\forall b \in B : b \geq 1 \to \boxed{\inf B \geq 1 = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}$$



CONCLUSIONE

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq 0 \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq 1$$

-> SONO PERCIÓ NECESSARIAMENTE DIVERSI.



- PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE DELLA FUNZIONE A SCALA SI HA:

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b S_f\,dx = S_f\,(b-a)$$

$S_f(b-a)$ È UN MAGGIORANTE DI A

$$\sup A = \sup\left\{\int_a^b g(x)\,dx : g \in S_f\right\}$$

$\Downarrow$

QUINDI A È SUPERIORMENTE LIMITATO $\rightarrow A \subset \mathbb{R}$

PER DEFINIZIONE

PER LA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$ ESISTE $\sup A$

$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx}$ $\rightarrow$ SI CHIAMA INTEGRALE INFERIORE DI f SU $[a,b]$

② B È INFERIORMENTE LIMITATO $\rightarrow B \subset \mathbb{R}$ PER LA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$ ESISTE $\inf B$

$$\inf B = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \rightarrow \text{INTEGRALE SUPERIORE DI } f \text{ SU } [a,b]$$

- CI ASPETTIAMO CHE LE APPROSSIMAZIONI DAL BASSO E DALL'ALTO CONDUCANO ALLO STESSO RISULTATO $\rightarrow$ NON È SEMPRE VERO $\rightarrow$ IN GENERALE:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}$$

- È SEMPRE VERO CHE $\boxed{\underbrace{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx}_{\sup A} \leq \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx}_{\inf B}}$

$\Downarrow$

DIMOSTRAZIONE

DOBBIAMO PROVARE CHE $\sup A \leq \inf B$

PROPRIETÀ INTEGRALI

SIANO $f, g \in S([a,b])$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $c \in [a,b]$

ALLORA:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO

2. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

LINEARITÀ DELL' INTEGRALE DEFINITO

CASI PARTICOLARI: $\alpha = \beta = 1$ $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

α QUALSIASI E $\beta = 0$

$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

3. Se $f \geq 0$ su $[a,b]$ ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ -> POSITIVITÀ

• DIMOSTRAZIONE -> $\int_a^b f(x)\,dx \overset{\geq 0}{=} c_0(x_1 - x_0) + c_1(x_2 - x_1) \ldots + \ldots \geq 0$ se $f(x) \geq 0$

4. se $f \leq g$ su $[a,b]$ -> $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ MONOTONIA

• DIMOSTRAZIONE (SI USANO 1, 2) -> IPOTESI $f \leq g$ TESI -> $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

SIA $h = g - f$ $f \leq g \Rightarrow 0 \leq g - f$ CIOÈ $h \geq 0$

DALL' IPOTESI ABBIAMO DEDOTTO $h \geq 0 \overset{3}{\Rightarrow} \int_a^b h(x)\,dx \geq 0$

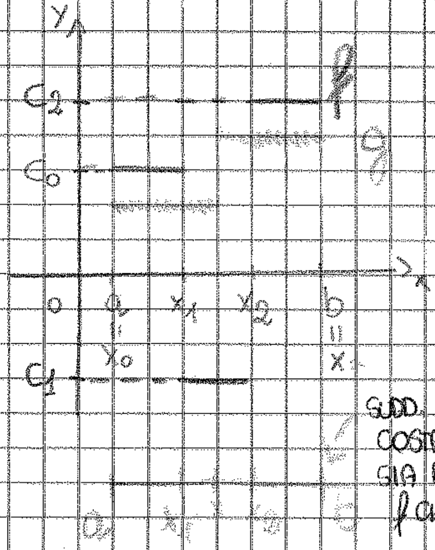
$\int_a^b h(x)\,dx \overset{2}{=} \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 = \boxed{\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx}$

• ANALISI TEORIA

• INTEGRALE DEFINITO

• FUNZIONE A SCALA $\quad f(x) = c_i \;,\; \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

$$\forall_i = 0, \dots, m-1$$



SUDD. COSTANTE SIA PER f CHE g

• INDICHIAMO CON $S([a,b])$ L'INSIEME DI TUTTE LE FUNZIONI A SCALA

OSS: DATE $f, e\ g \in S([a,b])$ E DATO $\alpha \in \mathbb{R}$ ALLORA:

$$\alpha f \in S([a,b]) \rightarrow f+g \in S([a,b])$$

f e g POTREBBERO ESSERE ADATTATE A DUE SUDDIVISIONI DIVERSE ->

ESISTE PERÓ UNA SUDDIVISIONE ADATTATA AD ENTRAMBE.

ESISTE QUINDI: $\{z_0, z_1, \dots, z_m\}$

SUDDIVISIONE DI $[a,b]$ ADATTATA SIA A f SIA A g

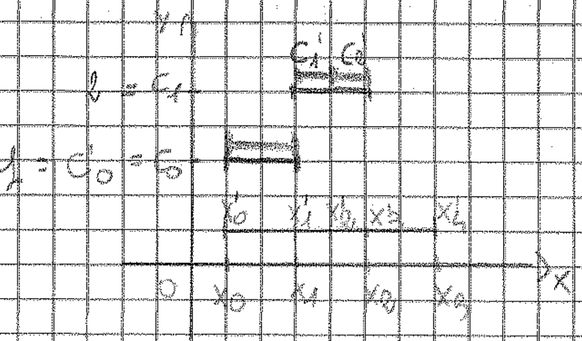
IN CORRISPONDENZA DI QUESTA SUDDIVISIONE SIANO:

$f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$; VALORE DI f

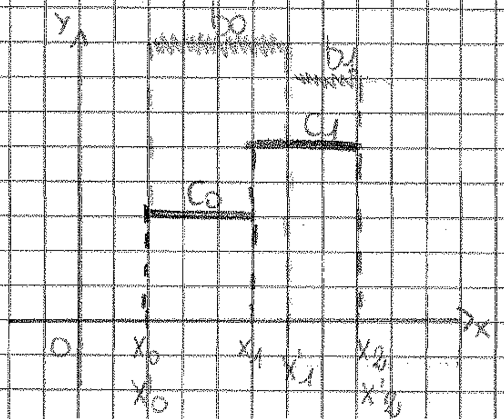
$g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$; VALORE DI g

ALLORA $f+g$ È UNA FUNZIONE A SCALA

OSS: LA DECOMPOSIZIONE DI f COME FUNZIONE A SCALA NON È UNICA $\to$ SE SI PASSA DA UNA SUDDIVISIONE AD UN SUO RAFFINAMENTO CAMBIA LA DECOMPOSIZIONE DELLA FUNZIONE.



OSS: DATE 2 FUNZIONI A SCALA f E g ESISTE SEMPRE UNA SUDDIVISIONE ADATTATA AD ENTRAMBE



f E g CORRISPONDONO A 2 SUDDIVISIONI DIVERSE $\{x_0, x_1, x_2\}$

$\{x'_0, x'_1, x'_2\}$

$\downarrow$

LA SUDDIVISIONE

$\{x_0, x_1, x'_1, x_2\}$ È ADATTATA SIA AD f CHE A g

- DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI UNA FUNZIONE A SCALA

$f\,[a;b] \to \mathbb{R}$ A SCALA

$\{x_0, \ldots, x_m\}$ SUDDIVISIONE ADATTATA A f

$c_0, c_1, \ldots, c_m \to$ VALORI CORRISPONDENTI DI f

RIASSUNTO

- CALCOLO DELL' AREA DEL SEGMENTO PARABOLICO

1. SI INTUISCE GEOMETRICAMENTE IL VALORE DELL' AREA $(A = \frac{1}{3})$
2. SI DIMOSTRA USANDO IL METODO DI ESAUSTIONE -> APPROSSIMAZIONE DELLA REGIONE DALL' INTERNO E DALL' ESTERNO

A DEVE SODDISFARE LA RELAZIONE -> $s_m < A < S_m \quad \forall m \geq 1$ (*)

SI PROVA CHE (*) IMPLICA $A = \frac{1}{3}$

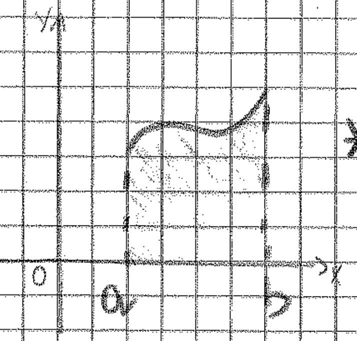
- PASSAGGIO DA m FISSATO A $m = \infty$ *

COME FORMALIZZARE QUESTO PASSAGGIO

- LA NOVITÀ IMPORTANTE DEL MET. DI ESAUSTIONE È CHE SUGGERISCE PER LA 1ª VOLTA DI PENSARE L'AREA COME IL RISULTATO DI UN'APPROSSIMAZIONE.

- LEIBNIZ E NEWTON (1600) -> INTRODDO I CONCETTI DI DERIVATA E INTEGRALE

INTEGRALE



* L'INTEGRALE È LA SOMMA DI INFINITE AREE AVENTI COME BASI GRANDEZZE ARBITRARIAMENTE PICCOLE E COME ALTEZZE LE ORDINATE DELLA FUNZIONE

- REIMANN -> FORMALIZZA MATEMATICAMENTE LE IDEE INTUITIVE DI LEIBNIZ E NEWTON (1800)

DEFINIZIONE MATEMATICA DI INTEGRALE

- INTEGRALE DEFINITO SECONDO REIMANN $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA

$\int_a^b f(x)\, dx$ È UN NUMERO REALE

4. DIMOSTRO CHE $\frac{1}{3}$ È L'UNICO NUMERO CHE RENDE VERA TALE RELAZIONE

SE VALE PER UN CERTO A ALLORA NECESSARIAMENTE $A = \frac{1}{3}$

$$1+2^2+\dots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1+2^2+\dots+n^2 \qquad \forall n \geq 1$$

$\downarrow$

AGGIUNGO n^2

$$(1+2^2\dots) < \frac{n^3}{3}+n^2 < \dots$$

$\downarrow$

MOLTIPLICO PER $\frac{1}{n^3}$

$$\frac{1}{n^3}(1+2^2\dots) < \underbrace{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3}+n^2}_{\frac{1}{3}+\frac{1}{n}} < \dots\cdot\frac{1}{n^3}$$

SOTTRAIAMO n^2 A TUTTI I MEMBRI

$$\dots < \frac{n^3}{3}-n^2 < 1+2^2+\dots+(n-1)^2$$

$\downarrow$

MOLTIPLICO PER $\frac{1}{n^3}$

$$\dots < \frac{1}{3}-\frac{1}{n} < \underbrace{1+2^2+\dots}_{s_n}$$

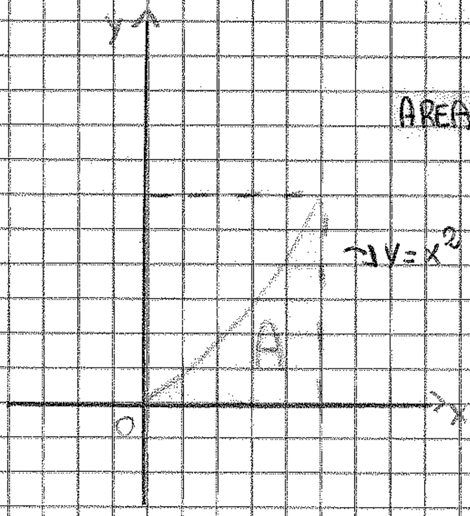
$$\begin{cases} \frac{1}{3}-\frac{1}{n} < s_n \\ S_n < \frac{1}{3}+\frac{1}{n} \\ s_n < A < S_n \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{n} < s_n < A < S_n < \frac{1}{3}+\frac{1}{n}$$

$\downarrow$

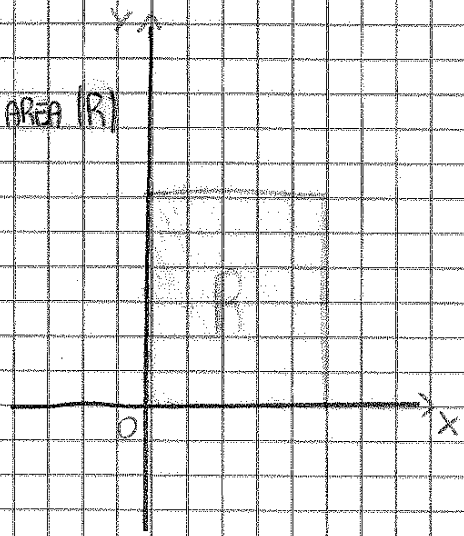
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{n} < A < \frac{1}{3}+\frac{1}{n}$$

$\downarrow$

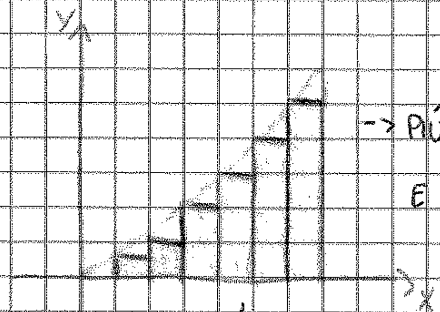
SOTTRAGGO $\frac{1}{3}$



AREA DI A $= \frac{1}{3}$ AREA (R)



- CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE E INTUIZIONI → ARCHIMEDE DIMOSTRAZIONE
- METODO DI ESAUSTIONE



→ PIÙ AUMENTO IL n° DI RETTANGOLI E PIÙ MIGLIORO LA MISURA

↳ POSSO COSTRUIRLI SIA ALL'INTERNO CHE ALL'ESTERNO → APPROSSIMAZIONE

$\boxed{\text{• AREA DELLA PARABOLA}}$

$y = x^2 \qquad I : [0, 1]$

AREA RETTANGOLO $= 1$

AREA PARABOLA $= \frac{1}{3} A_R = \frac{1}{3}$

↓

COME LO DIMOSTRO?

↓

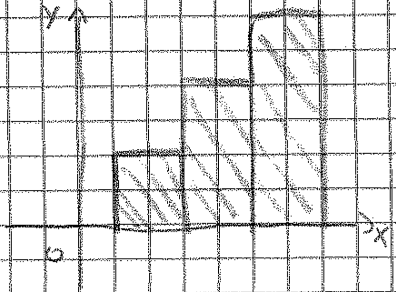
METODO ESAUSTIONE

- SI DIVIDE $[0, 1]$ IN n° PARTI UGUALI CIASCUNA LUNGA $\frac{1}{n}$ → SI COSTRUISCONO I RETTANGOLI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI AL SEGMENTO PARABOLICO

APPLICAZIONI ED INTERPRETAZIONI DELL'INTEGRALE DEFINITO

1. PUNTO DI VISTA GEOMETRICO

SE $f \geq 0$ ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx =$ AREA DELLA REGIONE TRATTEGGIATA



2. PUNTO DI VISTA FISICO

X TEMPO → MOTO RETTILINEO $S(x)$ = POSIZIONE AL TEMPO X

$V(x)$ = VELOCITÀ AL TEMPO x $[a, b]$ INTERVALLO DI TEMPO

SUPPONIAMO CHE V SIA COSTANTE A TRATTI → $V \in S([a, b])$ FUNZIONE A SCALA

- CHE SIGNIFICATO SI PUÒ DARE A $\int_a^b v(x)\,dx$?

$$\| $$

VARIAZIONE SPAZIO PERCORSO NEL 1° INTERV. DI TEMPO $\quad \underbrace{C_0(x_1 - x_0)} + C_1(x_2 - x_1) + \dots + C_{n-1}(x_n - x_{n-1})$

$$S(x_1) - S(x_0) = \Delta S$$

$$S(\cancel{x_1}) - S(x_0) + S(x_2) - S(\cancel{x_1}) \dots = S(x_n) - S(x_0) = S(b) - S(a)$$

$S(b) - S(a)$ = VARIAZIONE TOTALE DI SPAZIO IN $[a, b]$

- CONTROLLIAMO DAL PUNTO DI VISTA DELLE DIMENSIONI

$\overset{u_x}{X}$ TEMPO $[T]$ $\quad \overset{u_y}{v(x)}$ VELOCITÀ $\dfrac{[S]}{[T]}$

$\int_a^b V(x)\,dx$ HA LE DIMENSIONI DI $u_x u_y = [\cancel{T}] \dfrac{[S]}{[\cancel{T}]} = [S]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 171

TEOREMA: SIANO $m \in \mathbb{N}$ e $a > 0$ FISSATI

$x \in \mathbb{R}$

↓

ALLORA ESISTE UN UNICO NUMERO POSITIVO x TALE CHE $x^m = a$

N.B. ⇒ TALE NUMERO POSITIVO SI DENOTA CON $\sqrt[m]{a}$

DIMOSTRAZIONE → SI USA L'ASSIOMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^m < a \}$$

↓

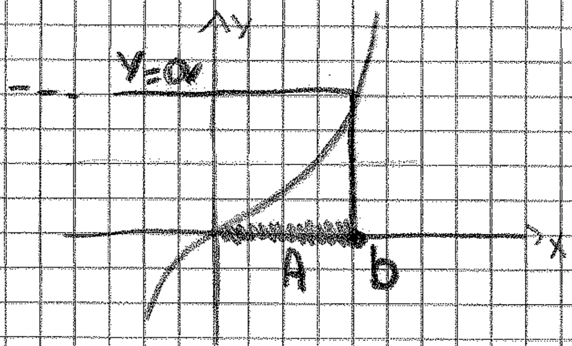
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE A È SUPERIORMENTE LIMITATO

↓

PER LA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

↓

ESISTE $\sup A = b \in \mathbb{R}$



OSS:

$b^m < a$

$b^m = a$

$b^m > a$

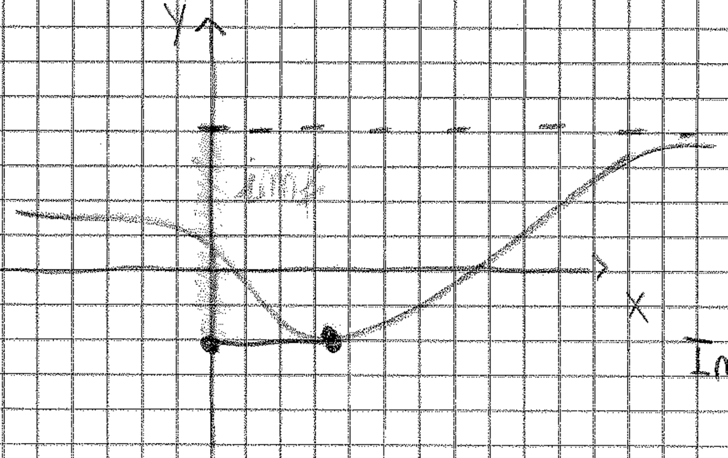
$b^m < a$ e $b^m > a$ SONO IMPOSSIBILI → $b^m = a$

↓

SI È TROVATO UN NUMERO REALE $b \in \mathbb{R}$ TALE CHE $b^m = a$

• FUNZIONE (IMMAGINE)

$f: X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad A = im f$ = IMMAGINE DI f



Imf È LIMITATO $\rightarrow$ f È LIMITATA

FUNZIONE $f \longrightarrow Imf \subset \mathbb{R}$

$\downarrow$ SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$

- sup limit., inf limit., limitato
- magg., minor.
- max, min
- sup, inf

• A PARTIRE DA QUESTI CONCETTI SULL'INSIEME Imf DEFINIAMO ANALOGHI CONCETTI PER f.

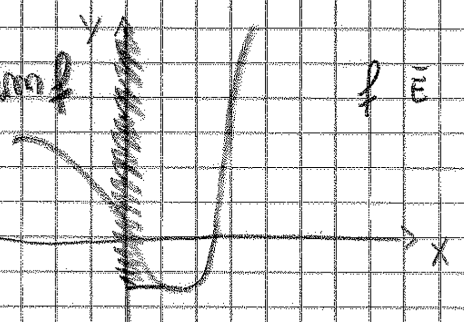
• DEFINIZIONI

f SI DICE SUPERIORMENTE, INFERIORMENTE LIMITATA

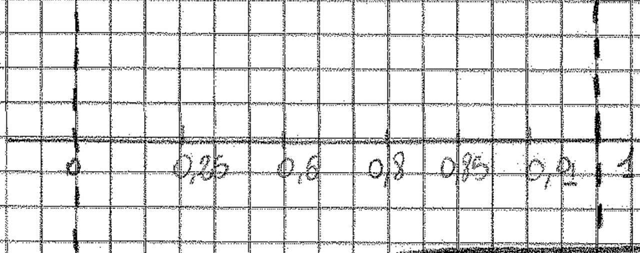
SE

$\downarrow$

$Imf \subset \mathbb{R}$ È SUPERIORMENTE LIMITATO / INFERIORMENTE " LIMITATO



f È INFERIORMENTE LIMITATA MA NON SUPERIORMENTE



I NUMERI AUMENTANO MA NON SUPERANO MAI L'UNO NEL CASO $1-\frac{1}{n}$ → SI INTUISCE $x<1 \quad \forall x \in A$

SEMBRA CHE $\boxed{x \geq 0 \text{ PER OGNI } x \in A}$ (*)

$\Downarrow$

$0 = \min A$
$0 = \inf A$ → $\begin{cases} 0 \text{ È UN MINORANTE DI } A \\ 0 \in A \end{cases}$

(*) VERIFICHIAMO

$x \in A$ ⟨ $x = 1 - \frac{1}{n}$; n DISPARI → $\frac{n-1}{n} \geq 0$ — num ≥ 0, den ≥ 0 — VERO

$x = \frac{1}{2n}$; n PARI

$\Downarrow$

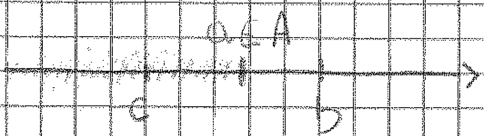
$x = \frac{1}{2n} \geq 0$ VERO PERCHÉ n È POSITIVO

$1 = \sup A$ MA 1 NON È IL MAX DI A

- CARATTERIZZAZIONE DELL'ESTREMO SUPERIORE

$b = \sup A$

1. $x \leq b$; $\forall x \in A$ (b È MAGGIORANTE DI A)
2. NON CI SONO MAGGIORANTI DI A PIÙ PICCOLI DI b → OGNI NUMERO PIÙ PICCOLO DI b NON È UN MAGGIORANTE DI A. → $\forall c < b$, c NON È UN MAGGIORANTE DI A → $\forall c < b \quad \underbrace{\exists a \in A : c < a}$



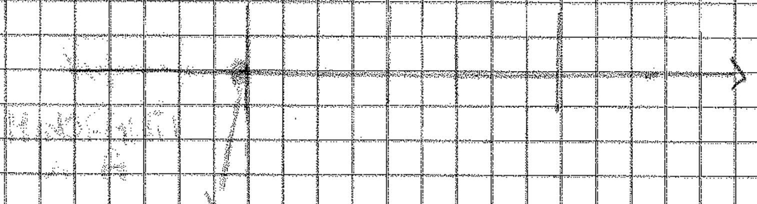
→ $\exists a \in A : c < a$ — C NON È UN MAGGIORANTE

*1 $\left.\begin{array}{l} 2 = \sup A \\ 2 \in A \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = \max A$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} 1 = \inf A \\ 1 \notin A \end{array}\right\} \Rightarrow$ 1 NON È min DI A

*2 $\left.\begin{array}{l} 2 = \sup A \\ 2 \notin A \end{array}\right\} \Rightarrow$ 2 NON È MAX DI A

• DEFINIZIONE

SIA $A \subset \mathbb{R}$ UN INSIEME INFERIORMENTE LIMITATO, SI DICE ESTREMO INFERIORE DI A, SE ESISTE, IL PIÚ GRANDE DEI MINORANTI DI A $\rightarrow \inf A$



inf A

È ANCHE min DI A

• ASSIOMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

OGNI INSIEME SUPERIORMENTE LIMITATO DI $\mathbb{R}$ AMMETTE ESTREMO SUPERIORE

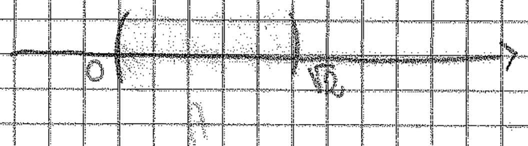
$A \subset \mathbb{R}$ SUP. LIMITATO

INSIEME DEI MAGGIORANTI DI A $\rightarrow B \neq \emptyset$ ← INSIEME VUOTO

L'ASSIOMA DI COMPLETEZZA AFFERMA CHE B HA SEMPRE MINIMO

min DI B = sup A

NB → QUESTO NON VALE IN $\mathbb{Q}$ → PERCIÓ QUESTO ASSIOMA CARATTERIZZA $\mathbb{R}$ RISPETTO A $\mathbb{Q}$



A È SUPERIORMENTE LIMITATO

$\exists$ UN sup DI A

INSIEME DEI MAGGIORANTI DI A $\rightarrow [\sqrt{2}; +\infty)$

$\min B = \sqrt{2} = \sup$ DI A

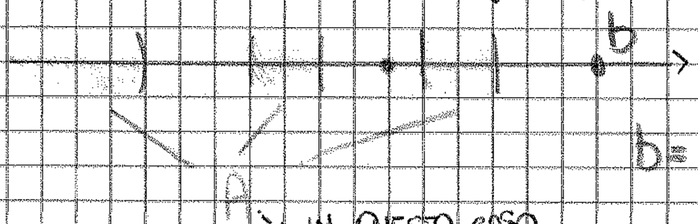
$\nexists \in \mathbb{N}$

- IN $\mathbb{Z}$ TRA DUE INTERI SUCCESSIVI NON SONO COMPRESI ALTRI NUMERI INTERI
- $\mathbb{Q}$ È DENSO, PER OGNI INTERVALLO $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ESISTE $z \in \mathbb{Q}$ TALE CHE $z \in (a, b)$

CONSEGUENZA → OGNI NUMERO IRRAZIONALE SI PUÒ APPROSSIMARE BENE QUANTO SI VUOLE CON NUMERI RAZIONALI.

- DEFINIZIONE

UN INSIEME $A \subset \mathbb{R}$ È DETTO SUPERIORMENTE LIMITATO SE ESISTE UN NUMERO REALE b TALE CHE $x \leq b$ PER OGNI $x \in A$



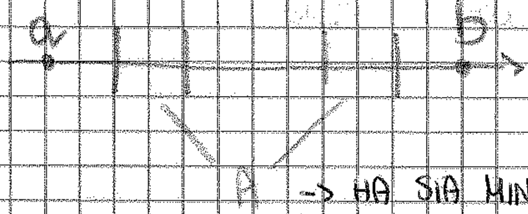
b = MAGGIORANTE DI A

↳ IN QUESTO CASO NON HA MINORANTI → NON LIMITATO POICHÉ SOLO SUP. LIMITATO

- DEFINIZIONE

UN INSIEME $A \subset \mathbb{R}$ È DETTO INFERIORMENTE LIMITATO SE ESISTE UN NUMERO REALE a TALE CHE $a \leq x$ PER OGNI $x \in A$

a = MINORANTE DI A



A → HA SIA MINORANTI CHE MAGGIORANTI
↳ SIA SUP CHE INF. LIMITATO PERCIÒ LIMITATO

- SUPERIORMENTE LIMITATO → A È SUP. LIMITATO SE:

$\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A : x \leq b$ → SCRITTO CON FORMULA

↳ FAR ATTENZIONE ALL' ORDINE DEI QUANTIFICATORI $(\exists, \forall)$

LUN-MERC TEORIA
MAR GIO ESERC.

ANALISI MATEMATICA

• PORTALE DELLA DIDATTICA

RIPASSO FUNZIONI

• INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ → NUMERI REALI: RAZIONALI / IRRAZIONALI

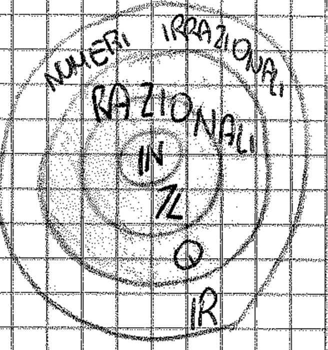
→ DAL PUNTO DI VISTA ALGEBRICO NON VI SONO OPERAZIONI IN PIÙ → $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{N}$ → NUMERI NATURALI → 0, 1, 2, 3, 4, 5 → INTERI POSITIVI → SOMMA, PRODOTTO

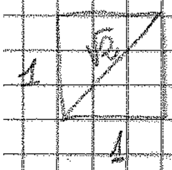
$\mathbb{Z}$ → NUMERI INTERI → −1, −2, 1, 2, 0 → SOTTRAZIONE, SOMMA, PRODOTTO

$\mathbb{Q}$ → NUMERI RAZIONALI → FRAZIONI → DIVISIONE, SOM., SOTT., PROD.



$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\pi \notin \mathbb{Q}$ → RAPPORTO TRA LA LUNGHEZZA DI UNA CIRCONFERENZA E IL SUO DIAMETRO

↓ SI DIMOSTRA PER ASSURDO



N.B → IL RAPPORTO TRA GRANDEZZE NON COMMENSURABILI NON DÀ ORIGINE A NUMERI RAZIONALI ($\mathbb{Q}$)

• RAPPRESENTAZIONI DECIMALI (NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$)

$r \in \mathbb{Q}$ / $r = \frac{m}{n}$

$$r = \pm \underbrace{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}, b_1 b_2 b_3 \dots$$

$r = 25$ $b_1 b_2 b_3 = 0$

$r = \frac{5}{4} = 1,25$ → NUMERO FINITO DI CIFRE DECIMALI DIVERSE DA 0

$r = \frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,\overline{3}$ → INFINITE CIFRE DECIMALI DIVERSE DA 0 MA SI RIPETONO SECONDO UN PERIODO

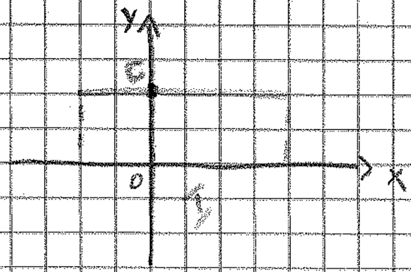
$r = 1 = \frac{1}{1}$ → 1 RAPPR. DECIMALE → $= 0,\overline{9}$

• EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$y' = g(x)\,h(y)$ $\quad g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$\qquad\qquad\qquad\quad h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA

1) SOLUZIONI COSTANTI (HANNO COME GRAFICO UNA RETTA)



DOBBIAMO TROVARE $c \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$y(x) = c \quad , \forall x \in I$ SIA SOLUZIONE

SOSTITUIAMO NELL'EQUAZIONE

$y' = g(x)\,h(y) \qquad y(x) = c = \text{COSTANTE} \Rightarrow y'(x) = 0$

$$0 = g(x)\,\underline{h(c)}, \quad \underline{\forall x \in I}$$

UNICO MODO PERCHÉ SIA SEMPRE 0 $\to h(c) = 0$

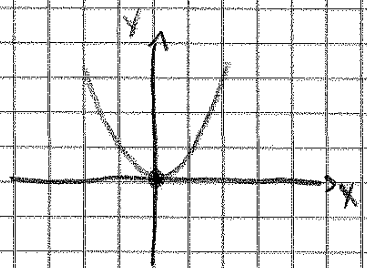
c È UNO ZERO DI h

• CONCLUSIONE $\to$ $y(x) = c$ È SOLUZIONE SE E SOLO SE $h(c) = 0$

• CI SONO TANTE SOLUZIONI QUANTI SONO GLI ZERI $\to$ SOLUZIONI COSTANTI

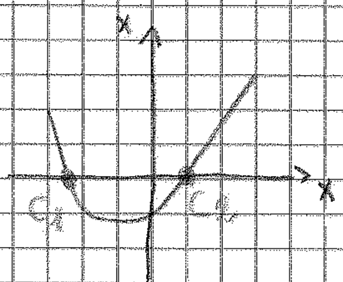
$y' = x^2 y^2$

$\quad g(x) \; h(y)$



h HA UN UNICO ZERO

$c = 0$



$\to$ 2 SOLUZIONI COSTANTI $\to$ $y(x) = c_1$

$y(x) = c_2$

OSS: G ESISTE PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

OSS: $1/h$ È CONTINUA SU J' POICHÉ h È CONTINUA SU J' E $h(y) \neq 0$ SU J'
-> ESISTE H PER IL TEOREMA FONDAMENTALE.

OSS: LA TESI ESPRIME UNA RELAZIONE SODDISFATTA DALLE SOLUZIONI E PIÙ SEMPLICE RISPETTO ALL' EQUAZ DIFF. DI PARTENZA (NON COMPARE y'):

$$H(y(x)) = G(x) + c \quad , \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + c) \quad , \forall x \in I'$$

NON SEMPRE SI RIESCE A FARE ESPLICITAMENTE

• DIMOSTRAZIONE

SIA $y: I' \subset I \longrightarrow J'$ SOLUZIONE DI $y' = g(x)h(y)$ SU I'

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \quad , \forall x \in I$$

OSSERVIAMO CHE $h(y(x)) \neq 0$, $\forall x \in I'$ -> INFATTI $y(x) \in J'$, $\forall x \in I'$ -> SICCOME $y(x) \in J'$ PER IPOTESI $h(y(x)) \neq 0$

ALLORA POSSIAMO DIVIDERE PER $h(y(x)) \neq 0$: $\dfrac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \quad , \forall x \in I'$

OSSERVIAMO CHE $\dfrac{y'(x)}{h(y(x))} = D\left[H(y(x))\right] \quad , \forall x \in I'$

INFATTI $D(H(y(x))) = H'(y(x)) \cdot y'(x)$ $\quad H' = \frac{1}{h}$ PER IPOTESI

$$\downarrow$$

$$= \frac{1}{h(y(x))} \cdot y'(x)$$

$D(H(y(x))) = g(x)$ ALLORA $H(y(x))$ È UNA PRIMITIVA DI $g(x)$ SU I'
MA PER IPOTESI ANCHE G È UNA PRIMITIVA DI $g(x)$ SU I

$$H(y(x)) = c + G(x) \quad \forall x \in I'$$

-> SONO 2 PRIMITIVE DELLA STESSA f SU I' PERCIÒ DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE

$-\frac{1}{y(x)} = \frac{x^3}{3} + c$ -> CHE È LA STESSA RELAZIONE TROVATA

• PASSO A H^{-1} PER RICAVARE $y(x)$

$$\frac{1}{y(x)} = -\frac{x^3}{3} - c$$

$y(x) = -\frac{3}{x^3} + \frac{1}{c}$ -> ESPRESSIONE ESPLICITA

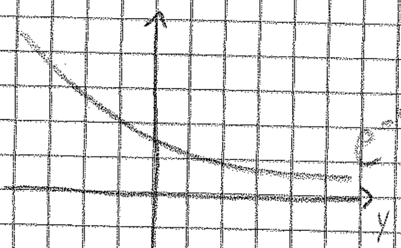
$\boxed{y' = e^{x+y} = e^x \cdot e^y}$ ← A VARIABILI SEP.

ESEMPIO: $y' = \underbrace{3x^2}_{g(x)}\underbrace{e^{-y}}_{h(y)}$ $\quad g(x) = 3x^2, \ \forall x \in \mathbb{R} = I$

$h(y) = e^{-y}, \ \forall y \in \mathbb{R} = J$

1. SOLUZIONI COSTANTI

$y(x) = c$ È SOLUZIONE -> $h(c) = 0$ $\quad c$ È UNO ZERO DI h



e^{-y} NON HA ZERI -> NON CI SONO SOLUZIONI COSTANTI

2. SOLUZIONI NON COSTANTI

$y(x)$ È SOLUZIONE SU $I' \subset I$ SE $y'(x) = g(x)\,h(y(x))$, $\forall x \in I'$

$y'(x) = 3x^2 e^{-y(x)}$ $\quad \frac{y'(x)}{e^{-y(x)}} = 3x^2$ $\quad$ POSSO DIVIDERE PERCHÉ $e^{-y} \neq 0$ SEMPRE

$$\int \frac{y'(x)}{e^{-y(x)}}\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + k$$

$(*) \int \frac{y'(x)}{e^{-y(x)}}\,dx = \int \frac{1}{e^{-s}}\,ds$ $\quad y(x) = s \quad y'(x)\,dx = ds$

$$= \int e^s\,ds = e^s + k = e^{y(x)} + k'$$

• EQUAZIONI LINEARI

$y' = p(x)y + q(x)$ POLINOMIO DI 1° GRADO IN y CON COEFFICIENTI CHE POSSONO DIPENDERE DA x

TEOREMA → SIANO $p, q \in C(I)$ E SIANO P UNA PRIMITIVA DI p SU I E R UNA PRIMITIVA DI $e^{-P}q$ SU I

ALLORA → $y: I \to \mathbb{R}$ È SOLUZIONE DI $y' = p(x)y + q(x)$ SE E SOLO SE ESISTE $c \in \mathbb{R}$ TALE CHE →

$$y(x) = e^{P(x)}(R(x) + c), \quad \forall x \in I$$

OSS: P ESISTE PERCHÉ $p \in C(I)$ [TEOREMA FONDAMENTALE]

OSS: R ESISTE PERCHÉ $e^{-P}q \in C(I)$

OSS: TUTTE LE SOLUZIONI SONO GLOBALMENTE DEFINITE

ESEMPIO → $y' = \frac{1}{x}y + x^3, \quad x > 0$

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad I = (0, +\infty) \qquad q(x) = x^3 \text{ CONTINUA SU } I$$

1. P PRIMITIVA DI $\frac{1}{x}$ SU $(0, +\infty)$ → AD ES. $P(x) = \log x, \quad \forall x > 0$
2. $e^{-P(x)}q(x) = e^{-\log x} \cdot x^3$ $\quad R$ È UNA PRIMITIVA DI g SU I

$$\int e^{-\log x} \cdot x^3 \, dx = \int e^{\log x^{-1}} \cdot x^3 \, dx = \int x^{-1} \cdot x^3 \, dx = \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + c \quad \to \text{AD ESEMPIO } R(x) = \frac{x^3}{3} \text{ CON } c = 0 \quad \forall x > 0$$

3. APPLICHIAMO LA FORMULA

$$y(x) = e^{\log x}\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) = x\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right), \quad c \in \mathbb{R} \quad \to \text{INTEGRALE GENERALE}$$

EQUAZIONI DIFF. DEL SECONDO ORDINE

PREMESSA → $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SE f È DERIVABILE IN OGNI $c \in I$ ALLORA È DEFINITA LA FUNZIONE DERIVATA PRIMA

$$f' : I \to \mathbb{R} \qquad c \to f'(c)$$

SE f' È DERIVABILE IN OGNI $c \in I$ ALLORA È DEFINITA LA SUA DERIVATA PRIMA: f'' = DERIVATA SECONDA = f''

ITERATIVAMENTE SI DEFINISCE → $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$, $\forall k \geq 0$

NOTAZIONI → $f', f'', f''' \ldots f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)} \ldots$

$$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2 \quad f'''(x) = 24x$$

- DEFINIZIONE → $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE DI CLASSE C^k SU I $(k \geq 0)$ E SI SCRIVE $f \in C^k(I)$ SE f È DERIVABILE k-VOLTE SU I E $f^{(k)}$ CONTINUA SU I → $C^1(I)$: ESISTONO f, f' E f' CONTINUA

  $C^2(I)$: ESISTONO f, f' E f'' CON f'' CONTINUA

- DEFINIZIONE → SI CHIAMA EQ. DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE UNA RELAZIONE DEL TIPO $y'' = f(x, y, y')$

  x = VARIABILE INDIPENDENTE y = VARIABILE DIPENDENTE $y = y(x)$ FUN. INCOGNITA

es: $y'' = -4y + 4y' + 3x$

- DEFINIZIONE → UNA FUNZIONE $y \in C^k(I)$ È SOLUZIONE DI $y'' = f(x, y, y')$ SU I SE $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$, $\forall x \in I$

- DEFINIZIONE → SI CHIAMA INTEGRALE GENERALE L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI. OGNI SINGOLA SOLUZIONE SI CHIAMA INTEGRALE PARTICOLARE.

ESERCIZIO → DETERMINARE $c \in \mathbb{R}$ IN MODO TALE CHE LA FUNZIONE $y(x) = ce^{2x}$ SIA SOLUZIONE DELL'EQ. DIFF. $y'' = e^{2x} - y$ SU $\mathbb{R}$

3. SE y_1 E y_2 SONO SOLUZIONI DELL' EQ. COMPLETA $y''+a(x)y'+b(x)y=g(x)$ SU I
ALLORA y_1-y_2 È SOLUZIONE DELL' EQ. OMOGENEA ASSOCIATA
$y''+a(x)y'+b(x)y=0$ SU I

- DIMOSTRAZIONE (1) (2) ESERCIZIO

(3) y_1 SOLUZIONE DELL EQ. COMPLETA
y_2 SOLUZIONE DELL' EQ. COMPLETA } IPOTESI $\quad v=y_1-y_2$ SOLUZ. DELL EQ. OMOGENEA ASSOC. } TESI

$$y_1''(x)+a(x)y_1'(x)+b(x)y_1(x)=g(x), \quad \forall x\in I$$
$$y_2''(x)+a(x)y_2'(x)+b(x)y_2(x)=g(x), \quad \forall x\in I$$
} IPOTESI

$$v''(x)+a(x)v'(x)+b(x)v(x)=0, \quad \forall x\in I$$
} TESI

SOTTRAIAMO MEMBRO A MEMBRO LE RELAZIONI (1), (2)

$$\underbrace{y_1''(x)-y_2''(x)}_{v''(x)}+a(x)\underbrace{[y_1'(x)-y_2'(x)]}_{v'(x)}+b(x)\underbrace{[y_1(x)-y_2(x)]}_{v(x)}=\overbrace{g(x)-g(x)}^{0}$$

POSSO FARE SOLO LA DIFF. PERCHÉ SE NO VERREBBE $2g(x)$

- TEOREMA DI STRUTTURA (FORMA DELL' INTEG. GENERALE DI UN' EQ. DIFF. LINEARE)

SIA $\psi: I\to\mathbb{R}$ UNA SOLUZIONE FISSATA DELL' EQ. COMPLETA
$$y''+a(x)y'+b(x)y=g(x)$$

1. SE m È UNA SOLUZIONE DI (C) ALLORA ESISTE UNA SOLUZIONE V DELL' EQUAZIONE OMOGENEA $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ TALE CHE $m=V+\psi$

2. VICEVERSA, PER OGNI V SOLUZIONE DELL' EQ. OMOGENEA LA FUNZIONE $w=V+\psi$ È SOLUZIONE DELL' EQ. COMPLETA (C)

ESEMPIO: $\ell^2+\ell+2=0$ $\Delta = 1-4\cdot 2 = 1-8 = -7 < 0$ NON CI SONO SOLUZ. REALI

$\ell = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$ IN $\mathbb{R}$ NON HA SIGNIFICATO $= \frac{-1 \pm \boxed{\sqrt{-1}}\ \sqrt{7}}{2}$

$\ell = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$ $\rightarrow$ NUMERI COMPLESSI

$\downarrow$

NON SONO NUM. REALI

$\Delta < 0 \rightarrow 2$ SOLUZIONI COMPLESSE

$\ell_1 = \alpha + i\beta$ $\ell_2 = \alpha - i\beta$

- OGNI EQUAZIONE ALGEBRICA DEL 2° ORDINE HA SEMPRE 2 SOLUZIONI

INTEGRALE GENERALE DI $y'' + ay' + by = 0$

SIANO ℓ_1, ℓ_2 SOLUZIONI DELL'EQ. ALGEBRICA $\ell^2 + a\ell + b = 0$

L'EQ. DIFFERENZIALE OMOGENEA HA INTEG. GENERALE:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

DOVE $y_1(x)$ E $y_2(x)$ SONO DATE NEI SEGUENTI MODI:

- $\Delta > 0$ $(\ell_1 \neq \ell_2) \rightarrow y_1(x) = e^{\ell_1 x}$ $y_2(x) = e^{\ell_2 x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\Delta = 0$ $(\ell_1 = \ell_2) \rightarrow y_1(x) = e^{\ell_1 x}$ $y_2(x) = x e^{\ell_1 x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\Delta < 0$ (ℓ_1, ℓ_2 COMPLESSE) $\rightarrow y_1(x) = e^{\alpha x} \sin\beta x$ $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

ESEMPIO 1 $\rightarrow y'' - 5y' + 6y = 0$ $\ell^2 - 5\ell + 6 = 0 \rightarrow$ EQ. CARATTERISTICA

$\ell = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$ $\begin{cases} \ell_1 = 2 \\ \ell_2 = 3 \end{cases}$ $y_1(x) = e^{2x}$ $y_2(x) = e^{3x}$

INTEGRALE GENERALE $\rightarrow$

$y(x) = c_1 e$

(2) INTEGRALE PARTICOLARE $g(x) = 4e^{2x}$ -> $\alpha = 2$ -> È SOLUZIONE DELL' EQ. CARATTERISTICA $(\ell_1 = 2)$

$\alpha = 2$ È SOLO RIPETUTA 1 VOLTA COME SOLUZ. DELL' EQ. CARATT. PERCIÒ

$m = 1$

QUINDI CERCHIAMO $\psi = Bx^1 e^{2x} = Bxe^{2x}$

TROVARE B IN MODO TALE CHE ψ SIA SOLUZIONE DI -> $y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x}$

-> DEVO PROCURARMI $\psi'(x)$ E $\psi''(x)$

$\psi'(x) = Be^{2x} + Bx \cdot 2e^{2x}$ $\quad$ $\psi''(x) = 2Be^{2x} + 2Be^{2x} + 2Bx \cdot 2e^{2x}$

- SOSTITUISCO

$$4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} - 5Be^{2x} - 10Bxe^{2x} + 6Bxe^{2x} = 4e^{2x}$$

DEVE VALERE SEMPRE -> $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$

$$-Be^{2x} = 4e^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$B = -4$$

$\psi(x) = -4xe^{2x}$

- CONCLUSIONE -> $y_{GEN(C)} = y_{GEN(O)} + y_{PART.(C)}$

$$= c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - 4xe^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$m = 0$ SE α NON È SOLUZIONE

$m = 1$ SE α È SOLUZIONE SEMPLICE $(\Delta > 0)$

$m = 2$ SE α È SOLUZ. DOPPIA $(\Delta = 0)$

⚠: α È IL COEFFICENTE DELL' ESPONENTE

$$= -\frac{\mu}{2m} \pm i\,\frac{\sqrt{4Km-\mu^2}}{2m} = -\frac{\mu}{2m} \pm i\sqrt{\frac{4Km-\mu^2}{4m^2}}$$

$$= \underbrace{-\frac{\mu}{2m}}_{\alpha} \pm i\,\underbrace{\sqrt{\frac{K}{m}-\frac{\mu^2}{4m^2}}}_{\beta}$$

$$x_1(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}-\frac{\mu^2}{4m^2}}\;t\right)$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}-\frac{\mu^2}{4m^2}}\;t\right)$$

$$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(c_1\sin\gamma + c_2\cos\gamma\right)$$

↳ COSA SUCCEDE SE NON AGISCONO FORZE ESTERNE

$$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(c_1\sin\gamma t + c_2\cos\gamma t\right)$$

$$\overset{!}{=} e^{-\frac{\mu}{2m}t} A\sin(\gamma t+\varphi)$$

ES: DATE $c_1\sin\gamma t + c_2\cos\gamma t = f(t)$

PROVARE CHE ESISTONO A E φ TALI CHE $f(t) = A\sin(\gamma t+\varphi)$

$x(t) = \ldots \rightarrow$ CHE TIPO DI MOTO È?

1) $\mu = 0$ ASSENZA DI ATTRITO $\rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{K}{m} - \cancel{\frac{\mu^2}{4m^2}}} = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \varphi\right) \rightarrow$ MOTO PERIODICO

PERIODO $\rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\qquad \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0$

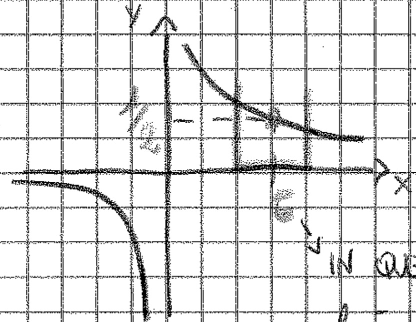
• TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE

SIA $f : I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ SUPPONIAMO CHE ESISTE

$\lim_{x \to c} f(x) = l$ FINITO $(l \in \mathbb{R})$ ALLORA f È LOCALMENTE LIMITATA

$\exists I'(c)$ $\exists M > 0$ $|f(x)| < M$, $\forall x \in I'(c)$ $x \neq c$

ESEMPIO: $f(x) = \frac{1}{x}$, $c = 2$



$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = f(2)$

POICHÉ f È CONTINUA IN $x = 2$

ESISTE FINITO

IN QUESTO $I(c)$

f È LIMITATA

• ESISTE UN INTORNO DI $x = 2$ IN CUI f È LIMITATA

VEDO DIMOSTRAZIONE

OSS f NON È GLOBALMENTE LIMITATA MA SOLO LOCALMENTE

• TEOREMA SUI LIMITE DI FUNZIONI MONOTONE

SIA $f : \underbrace{I_-(c)}_{\text{INTORNO SINISTRO}} \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ CON $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ → SUPPONIAMO CHE

f SIA CRESCENTE SU $I_-(c) \setminus \{c\}$

ALLORA ESISTE → $\lim_{x \to c^-} f(x)$

• IN PARTICOLARE f ILLIMITATA SU $I_-(c) \setminus \{c\}$

$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$

• f LIMITATA SU $I_-(c) \setminus \{c\}$ → $\lim_{x \to c^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ FINITO

IN QUESTO CASO $l = \sup \underbrace{\{ f(x) : x \in I_-(c) \setminus \{c\} \}}_{\text{IMMAGINE DI } f \text{ SU } I_-(c) \setminus \{c\}}$ ⊛

SUPPONIAMO $c \in \mathbb{R}$ $\quad I'_-(c) = (c-\delta, c)$

STUDIO BENE LA DEF DI LIMITE CHE NEI QUIZ C'È!

TESI $\rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : c-\delta < x < c \rightarrow S-\varepsilon < f(x) < S+\varepsilon$

RICORDIAMO CHE $S \in \mathbb{R} = \sup I_f \rightarrow \begin{cases} S \text{ È UN MAGGIORANTE DI } I_f \\ S \text{ È IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} y \leq S, \; \forall y \in I_f \\ \text{OGNI NUMERO } < \text{ DI } S \text{ NON È UN MAGGIORANTE DI } I_f \end{cases}$

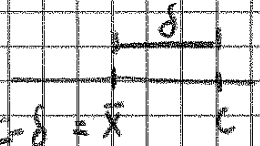
- DATO $\varepsilon > 0 \rightarrow \forall x \in I_-(c) \setminus \{c\} : f(x) \leq S < S+\varepsilon$

VERA SEMPRE, PER OGNI $x \in I_-(c)$

$S-\varepsilon < S \rightarrow$ NON È UN MAGGIORANTE DI $I_f \rightarrow \exists \bar{y} \in I_f : S-\varepsilon < \bar{y} \leq S$

SIA $\bar{x}$ TALE CHE $f(\bar{x}) = \bar{y}$ $\rightarrow$ COME δ PRENDO LA DISTANZA TRA c E $\bar{x}$

SIA $\delta = c - \bar{x}$



E SIA x TALE $c-\delta < x < c$

$\bar{x} < x$

$\downarrow$ $\rightarrow$ USO LA MONOTONIA

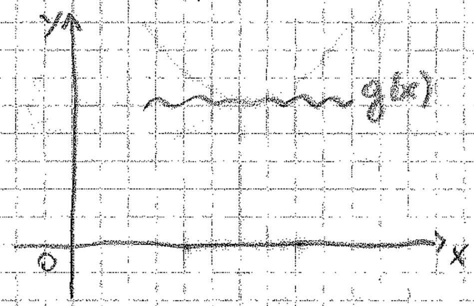
CRESCENZA

$\downarrow$

$\underbrace{f(\bar{x})}$ $\leq f(x)$

$S-\varepsilon < \bar{y} \Rightarrow S-\varepsilon < f(x)$

ALLORA ESISTE $\lim_{x \to c} g(x)$ E SI HA $\lim_{x \to c} g(x) = \ell$



• DIMOSTRAZIONE

IPOTESI $\to$ 1. $\exists I_1(c): f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in I_1(c)$ $x \neq c$

2. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists I_2(c): x \in I_2(c), x \neq c \to \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists I_3(c): x \in I_3(c), x \neq c \to \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

TESI $\to$ $\lim_{x \to c} g(x) = \ell$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists I^*(c): x \in I^*(c), x \neq c \to \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$$

$x \in \underbrace{I_1(c) \cap I_2(c) \cap I_3(c)}_{I^*(c)}, x \neq c \to x \in I^*(c), x \neq c \to$ POSSO USARE LE 3 DISUGUAGLIANZE

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$$

• CONCLUSIONE

DATO $\varepsilon > 0$ ESISTE $I^*(c)$ TALE CHE $x \in I^*(c), x \neq c \to \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

CIOÈ $\lim_{x \to c} g(x) = \ell$

• APPLICAZIONE

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

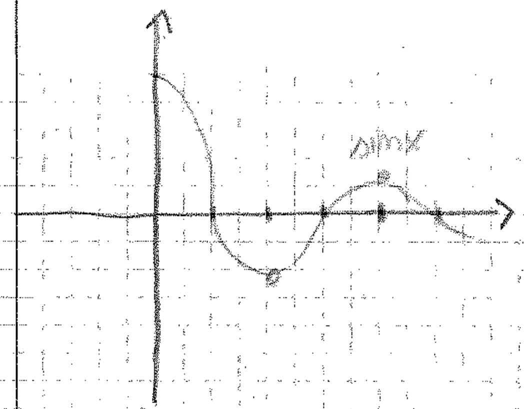
1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\quad \lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} x = 0$

APPLICHIAMO IL TEOREMA DEL CONFRONTO:

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} \leq \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\, 0} \leq \underbrace{+\frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0}$$

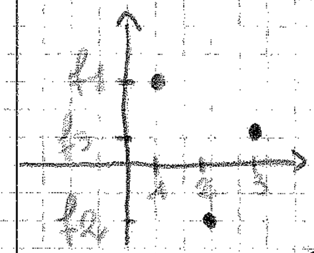
GRAFICO QUALITATIVO

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ PARI $\qquad -\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$



LE SUCCESSIONI

SONO CASI PARTICOLARI DI FUNZIONI $\rightarrow$ $f : \underset{\text{DISCRETO}}{D} \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \longmapsto f(n) = f_n$



SUCCESSIONE LIMITATA $\rightarrow$ $\operatorname{Im} f$ LIMITATA IN $\mathbb{R}$

$$\operatorname{Im} f = \{f_1, f_2, f_3 \dots\}$$

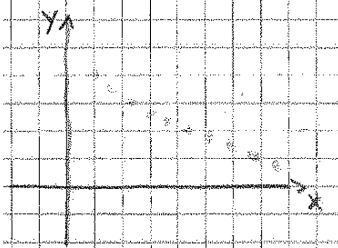
SUCCESSIONE CRESCENTE $\quad$ [FUNZIONE $\forall x, y \in D : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$]

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \leq m \rightarrow f(n) \leq f(m)$$

- QUESTA DEFINIZIONE È EQUIVALENTE A RICHIEDERE CHE: $f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(DOMINIO DISCRETO)

$a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$



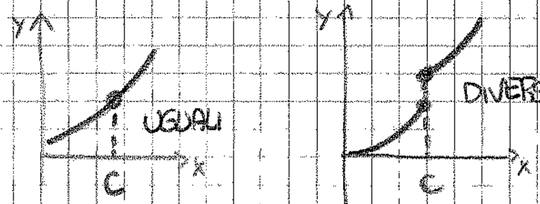
a_x È CONVERGENTE $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad \mathrm{Im}\, a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\}$

È LIMITATA QUINDI a_n È GLOBALMENTE LIMITATA

• TEOREMA SUI LIMITI DI SUCCESSIONI MONOTONE

(FUNZIONI) $f: I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ MONOTONA $\Rightarrow \exists$ (FINITI O INFINITI) , $\to$

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$



SIA $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ MONOTONA $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to +\infty} a_n$ (FINITO O INFINITO)

IN PARTICOLARE a_n LIMITATA MONOTONA $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} a_n$ FINITO CIOÈ a_n CONVERGENTE $\to$

a_n ILLIMITATA, MONOTONA $\to \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ INFINITO CIOÈ a_n DIVERGENTE

• ESEMPIO IMPORTANTE ⚠ $\to a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ CONVERGE? DIVERGE? MONOTONA? LIMITATA?

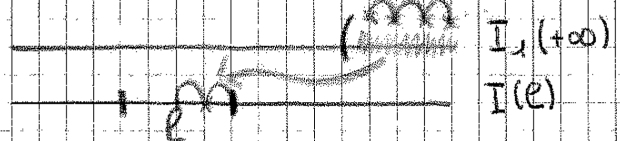
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE a_n È CRESCENTE, a_n È LIMITATA $\Rightarrow$
a_n È CONVERGENTE , CIOÈ ESISTE FINITO IL $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{DEF.}}{=} e$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE e È IRRAZIONALE $\to$ LA CONVERGENZA DI a_n AL NUMERO e È MOLTO LENTA; QUESTA SUCCESSIONE NON È USATA NEL CALCOLO EFFETTIVO DI e $\to$ PER IL CALCOLO APPROSSIMATO DI e SI USA UNA DIVERSA SUCCESSIONE $\to$ $b_0 = 1$ $\quad b_1 = 1 + 1$ $\quad b_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2!}$
$b_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$ $\quad b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

• CONFRONTO TRA LIMITI DI FUNZIONI E LIMITI DI SUCCESSIONI

1° CASO $\to f: I(+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad c = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ $\quad \forall I(\ell)\ \exists I_1(+\infty)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$x \in I_1(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$



PASSANDO ALLA SUCCESSIONE $f(n) \Rightarrow$ SI HA $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = e$ IN SOSTANZA $\to$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = e$ $\Big\}$ QUESTO SI USA NEL CALCOLO DEI LIMITI DI SUCCESSIONI

CONTINUA $\qquad$ DISCRETA

DIMOSTRAZIONE -> SE PER ASSURDO ESISTESSE $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ -> SI DOVREBBE AVERE $\lim_{m \to +\infty} f(a_m) = \ell = \lim_{m \to +\infty} f(b_m)$ CONTRARIAMENTE ALL'IPOTESI.

ESEMPIO: DIMOSTRIAMO FORMALMENTE CHE $\lim_{x \to +\infty} \sin x \nexists$

AD ESEMPIO SUCCESSIONE DEGLI ZERI DI $f \to a_m = m\pi \to +\infty$ $f(a_m) = 0 \to 0$

SUCCESSIONE DEI PUNTI DI MINIMO DI $f \to b_m = \frac{3}{a}\pi + 2m\pi$

$f(b_m) = -1 \to -1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sin x \nexists$

ESEMPIO -> $\lim_{x \to 0^+} \cos\frac{1}{x} = \nexists$ L'ARGOMENTO DEL COS TENDE A $+\infty$

DIMOSTRAZIONE -> CERCHIAMO I PUNTI IN CUI -> $\cos\frac{1}{x} = 1$ E $\cos\frac{1}{x} = -1$

$\cos\frac{1}{x} = -1$ $y = \frac{1}{x}$ $\cos y = -1$ $y = 2m\pi + \pi$ $\frac{1}{x} = 2m\pi$

$x = \frac{1}{2m\pi} = a_m \xrightarrow[m \to +\infty]{se} 0$ $f(a_m) = 1 \xrightarrow{m \to +\infty} 1$

$x = \frac{1}{2\pi m + \pi} = b_m \to 0$ $f(b_m) = -1 \xrightarrow{m \to +\infty} 1$

es. $\lim_{x \to 0^+} \underset{\downarrow 0}{x} \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\nexists}$ -> ESISTE E FA ZERO!

$\lim_{x \to 0^+} \underset{\downarrow 1}{e^x} \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\nexists}$ -> IL LIMITE NON ESISTE

PROVIAMO CHE $\lim_{x \to 0^+} x\cos\frac{1}{x} = 0$ SI USA IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$ MOLTIPLICHIAMO PER x $\underset{\downarrow 0}{-x} \leq \underset{\downarrow 0}{\cos\frac{1}{x} \cdot x} \leq \underset{\downarrow 0}{x}$ SE $x \to 0^+$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x\cos\frac{1}{x} = 0$

OSS: IL TEOREMA SI BASA SULL'IPOTESI DI CONTINUITÀ DI f SU $[a,b]$, SENZA QUESTA IPOTESI LA TESI POTREBBE ESSERE FALSA -> QUESTO NON SIGNIFICA CHE LA CONTINUITÀ SIA UNA CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ESISTENZA DI UNO ZERO -> SENZA DI ESSA POTREBBERO NON ESISTERE DEGLI ZERI OPPURE POTREBBE COMUNQUE ESISTERE UNO ZERO.

- NELL' ESEMPIO INIZIALE PER DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE, BASTA APPLICARE IL TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI A:

$$f(x) = x + e^x \quad \text{SU } [-1,0]$$

VERIFICA DELLE IPOTESI

1. f CONTINUA SU $[-1,0]$ -> VERO
2. $f(-1)\, f(0) < 0$ -> VERO

=> f HA ALMENO UNO ZERO SU $[-1,0]$, INOLTRE f È STRETTAMENTE MONOTONA E QUINDI LO ZERO È UNICO.

- CONCLUSIONE -> L'EQUAZIONE $x + e^x = 0$ HA UN'UNICA SOLUZIONE E QUESTA SOLUZIONE APPARTIENE ALL'INTERVALLO $[-1,0]$

OSS: LA TESI SIGNIFICA CHE $[f(a), f(b)] \subset im f$

OSS: VALGONO LE STESSE OSSERVAZIONI SULL'IPOTESI DI CONTINUITÀ DI f FATTE NEL CASO DI TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI.

OSS: IL TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI È UN CASO PARTICOLARE.

→ SE $f(a)<0$ E $f(b)>0$ ALLORA QUESTO TEOREMA AFFERMA CHE f ASSUME TUTTI I VALORI TRA $f(a)<0$ E $f(b)>0$ IN PARTICOLARE ASSUME IL VALORE 0 → f HA UNO ZERO.

• DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO $f(a)<f(b)$ E SIA $\bar{y}$ TALE CHE $f(a)<\bar{y}<f(b)$ → DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE ESISTE $\bar{x}\in(a,b)$ TALE CHE $\bar{y}=f(\bar{x})$ → $\bar{y}-f(\bar{x})=0$

BASTA PROVARE CHE → $g(x)=\bar{y}-f(\bar{x})$ HA UNO ZERO SU (a,b) →

APPLICHIAMO IL TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI A g SU $[a,b]$ → CONTROLLIAMO SE LE IPOTESI SONO SODDISFATTE:

1) g CONTINUA SU $[a,b]$ (VERO PERCHÉ f È CONTINUA SU $[a,b]$ PER IPOTESI)

2) $g(a)\cdot g(b)<0$ VERO PERCHÉ $g(a)=\bar{y}-f(a)>0$ $\quad g(b)=\bar{y}-f(b)<0$

$\Downarrow$

• ESISTE $\bar{x}\in[a,b]$ TALE CHE $g(\bar{x})=0$

DERIVABILITÀ, CONTINUITÀ

• $c\in\mathbb{R}$ $\quad f:(c-r, c+r)\to\mathbb{R}$ $\quad f(c)$ $\quad \lim_{x\to c} f(c)$

f È CONTINUA IN c SE $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ O $\lim_{x\to c}(f(x)-f(c))=0$

f È DERIVABILE IN c SE ESISTE FINITO IL

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

TEOREMA → SE f È DERIVABILE IN $x=c$, ALLORA f È CONTINUA IN $x=c$

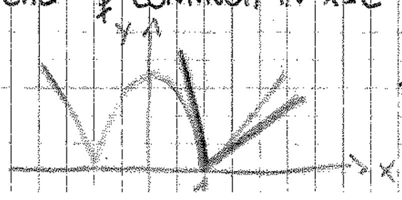
DIMOSTRAZIONE → $\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = \lim_{x\to c}\left(\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{f'(c)}\cdot\underbrace{(x-c)}_{0}\right)=f'(c)\cdot 0=0$

f DERIVABILE IN $x=c$ → f CONTINUA IN $x=c$

DERIVABILITÀ È UNA CONDIZIONE SUFFICENTE PER LA CONTINUITÀ → LA CONTINUITÀ È UNA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA DERIVABILITÀ.

• IN GENERALE NON È VERO CHE f CONTINUA IN $x=c$ → f DERIVABILE IN $x=c$

$f(x)=|x^2-1|$, $c=1$

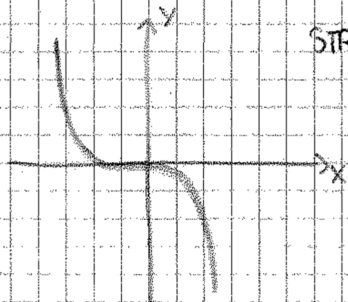


f CONTINUA IN $x=1$

f NON DERIVABILE IN $x=1$

OSS: NON È VERO IN GENERALE CHE f STRETTAM. CRESCENTE SU $(a,b) \rightarrow f' > 0$ SU (a,b)

ESEMPIO: $f(x) = -x^3$ SU $\mathbb{R}$



STRETTAMENTE DECRESCENTE SU $\mathbb{R}$ MA NON È VERO CHE

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [f'(0) = 0]$$

- IN GENERALE VALE SOLO f STRETTAMENTE DECRESCENTE SU $(a,b) \rightarrow f' \leq 0$ SU (a,b)

- ESEMPIO $\rightarrow$ DETERMINARE I MAX E MIN DI $f(x) = xe^x$

$Df = \mathbb{R}$ CERCO I PUNTI STAZIONARI PERCHÉ MAX E MIN NON POSSONO ESSERE ESTREMI $(D = \mathbb{R})$ E f È SEMPRE DERIVABILE

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 0 \quad e^x(1+x) = 0$$

PUNTO STAZIONARIO $\rightarrow x = -1$

- BISOGNA APPLICARE IL TEST DI MONOTONIA $\rightarrow$ STUDIO LA MONOTONIA DI $f \rightarrow$ STUDIO IL SEGNO DI $f' \rightarrow f'(x) \geq 0 \rightarrow (1+x)\underbrace{e^x}_{\text{SEMPRE } +} \geq 0 \quad x \geq -1$

$f'(x) \geq 0$ SU $(-1; +\infty)$

$f'(x) \leq 0$ SU $(-\infty; -1)$

$\Rightarrow f$ CRESCENTE DOPO -1 E DECRESCENTE PRIMA DI -1

$x = -1$ PUNTO DI MINIMO PER f

GRAFICO $\rightarrow xe^x$

$\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\downarrow$ POICHÉ PREDOMINA L'ESPONENZIALE

$e^{-\infty} = 0$