



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 756

DATA: 30/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Romeo

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Esercizi

Prof. Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

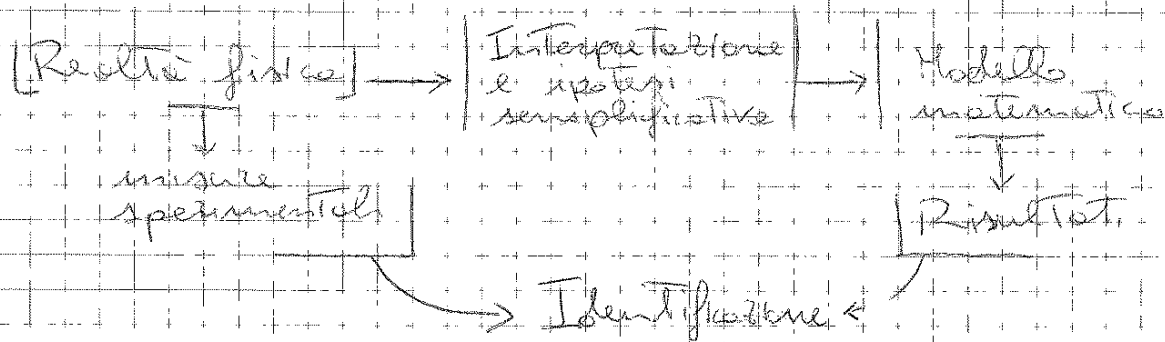
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Introduzione

- 1) Strutture e modelli: definizione di progettazione strutturale e dei modelli di strutture destinate a sopportare sforzi.
- 2) Statica delle strutture: valutazione delle forze, reazioni vincolari, sollecitazioni ecc.
- 3) Comportamento meccanico dei materiali: caratteristiche di resistenza statica tramite prove di trazione.
- 4) Sollecitazioni semplici: calcolo delle sollecitazioni degli elementi strutturali, solido di St Venant.
- 5) Meccanica del continuo: definizione di stato di tensione.
- 6) Comportamento meccanico dei materiali: resistenza alla fatica, criteri di progetto ecc.

Modello matematico



Permette di dire se il mio modello è adeguato, di fare altre sperimentazioni aggiuntive, di incrementare le variabili e concludere il progetto.

• Equilibri e calcolo delle reazioni vincolari

- Sistema meccanico: è il termine utilizzato per indicare una qualsiasi parte o porzione isolata di una macchina o struttura che si vuole studiare. Un sistema potrebbe essere composto da uno o più corpi rigidi oppure corpi deformabili.

Ogni corpo rigido possiede "intrinsecamente" dei gradi di libertà, cioè è in grado di muoversi lungo specifiche direzioni. Nello spazio il corpo possiede 6 gradi di libertà, nel piano solo 3.

* Vincoli

Un corpo si dice vincolato quando le sue possibilità di movimento sono parzialmente o completamente impediti.

Sviluppano forze contrastanti su di uno o più movimenti.

Queste reazioni vincolari definiscono così l'equilibrio, che di tipo statico, che dinamico, infatti prende il nome di "equilibrio vincolato" (impedisce all'oggetto qualsiasi movimento).

Quando i vincoli sono sufficienti per garantire l'equilibrio statico il sistema si dice "isostatico"; se i vincoli sono sovrabbondanti il sistema sarà "iperstatico"; infine, se sono minori si dice "labile".

Per impedire ogni movimento del sistema, non basta che i vincoli siano in numero sufficiente, ma occorre anche accertarsi che siano efficaci, che non consentano piccoli spostamenti!

Grado di iperstaticità

$$G = 3 \times i + 2 \cdot c_e + 2 \cdot (v - 1) \cdot c_i + a - m \cdot u$$

- Dove:
- m = numero di p.d.l. del corpo
 - u = numero di corpi rigidi nel sistema
 - i = numero di incastri
 - c_e = cerniere fisse
 - c_i = cerniere interne che collegano 2 diversi corpi rigidi
 - a = appoggi semplici

Se $G=0 \rightarrow$ ipostatica; $G < 0 \rightarrow$ labile; $G > 0 \rightarrow$ iperstatico

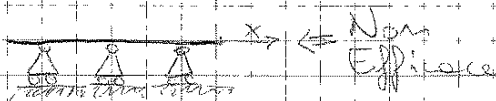
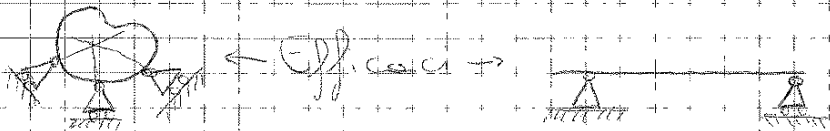
Equazioni di equilibrio vincolato

L'equilibrio tra i carichi statici e le reazioni vincolari si traduce in un certo numero di equazioni che legano queste quantità.

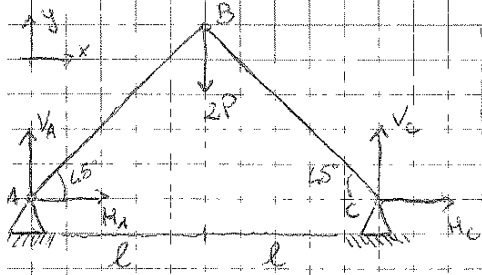
Le condizioni di equilibrio sono:

- Nella spazia: $\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0 \rightarrow$ componenti delle forze agenti sul sistema
- $\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0 \rightarrow$ momenti rispetto agli assi delle forze
- Nel piano: $\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$

* I vincoli, affinché siano efficaci, ciascuno deve impedire il movimento consentito dagli altri due.



Problema



Calcolare le reazioni vincolari

1) Vediamo se la struttura è isostatica

$$G = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (2-1) \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 2 = 0$$

$$= 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (2-1) \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 2 = 0$$

È isostatica

2) Equazioni di equilibrio nel piano

$$\sum X = 0 \rightarrow H_A = H_C = 0$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_A + V_C - 2P = 0$$

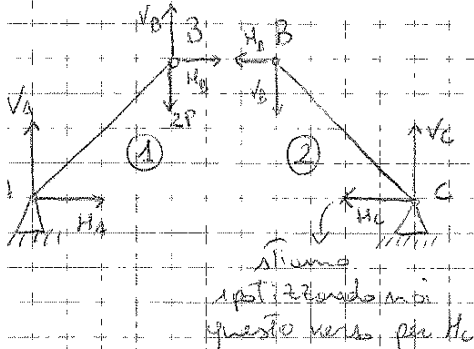
$$\sum M_z = 0$$

Siccome, in x, abbiamo solo due vincoli identici possiamo usare una "scorciatoia" e considerare i due vincoli come forze opposte e casi equilibrati.

Dobbiamo scegliere un punto da cui calcolare il momento della struttura, un punto che consente di facilitare i nostri calcoli.

Scegliamo C $\Rightarrow V_A l = 2Pl$

Abbiamo 3 equazioni con 4 incognite, utilizzeremo così il metodo della sottostuttura:



Importante: il corpo 2P non deve essere diviso e posto metà su un lato e metà sull'altro ma deve essere posto su uno solo, scelto da noi o indicato in precedenza

1) $H_A + H_B = 0$

2) $H_C - H_B = 0 \rightarrow H_A = H_C$

$$V_A + V_B = 2P$$

$$V_C - V_B = 0 \Rightarrow V_B = V_C$$

$$\sum_A V_B l - 2Pl - H_B l = 0$$

$$\sum_C V_C l + H_C l = 0 \rightarrow V_C = -H_C \Rightarrow V_B = +H_B$$

$$\begin{cases} V_B = H_B \\ V_B - H_B = 2P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_B = P \\ H_B = -P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = P \\ V_A = P \end{cases} \quad \begin{cases} V_C = P \\ H_C = +P \end{cases}$$

Dei due gruppi di equazioni di cui:

$$H_C = qL = 2000 \text{ N}$$

$$H_A = -H_C = -2000 \text{ N}$$

$$V_E = \frac{3}{4} qL = 1500 \text{ N}$$

$$V_A = -\frac{11}{4} qL = -5500 \text{ N}$$

$$V_C = \frac{5}{4} qL = 2500 \text{ N}$$

$$V_B = 5 qL = 10000 \text{ N}$$

Travature reticolari

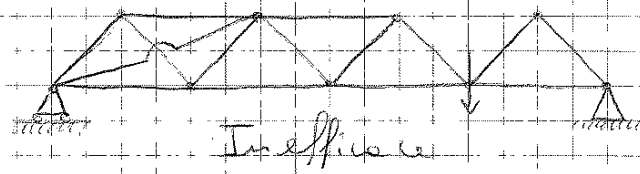
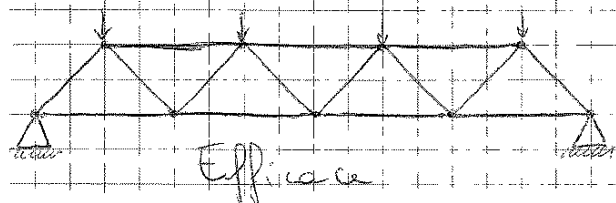
Si definisce "osta" un particolare modello di trave che è collegata al resto della struttura mediante delle cerniere che, in questo caso, vengono dette "nodi"; ammette carichi esterni solo su i nodi e potrà quindi trasmettere solo carichi paralleli all'asse dell'osta stessa.

Sistemi di osta e cerniere formano le cosiddette "Travature reticolari".

Del punto di vista statico, vale sempre l'equazione di isostaticità:

Una travatura presenta $(a+3)$ incognite, dove "a" sta per numero di osta; tali incognite saranno le reazioni interne (quindi, gli sforzi normali delle osta) e le reazioni esterne. Le equazioni risolventi saranno $2u$, con u numero dei nodi-cerniera.

In definitiva, la condizione necessaria (ma non sufficiente!) perché la travatura sia isostatica è: $a+3 = 2u$



in modo più semplice per giudicare l'isostaticità interna è quello di controllare se essa è costituita da triangoli con lati adiacenti, senza intrecci o giunzioni in un solo vertice.



Caratteristiche di sollecitazione

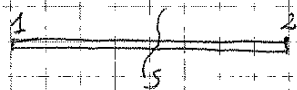
Sono le azioni interne che agiscono su di un corpo deformabile.

Definizioni

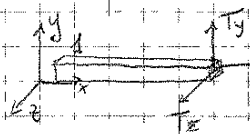
- Trave: corpo in cui le dimensioni trasversali sono molto minori di quella longitudinale.
- Asse geometrico della Trave: la linea lungo dei baricentri delle sue sezioni rette.

La sezione di una Trave può variare, ma spesso si mantiene costante (Travi a sezione costante).

Supponiamo di avere una Trave e di dividerla in due parti, in corrispondenza di una sezione S .



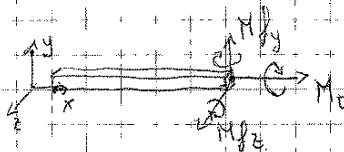
Prendiamo il tratto a sinistra, essendo l'intero corpo in equilibrio, anche questa parte dovrà essere in equilibrio. Il tratto a destra trasferisce al tratto a sinistra delle forze e ^{dei} momenti:



Le tre forze sono:

Sforzo normale (N)

Sforzi di taglio (T_y, T_z)



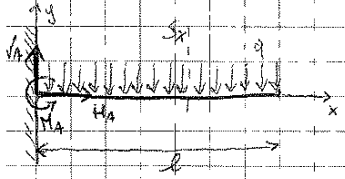
I tre momenti sono

Momento Totante (M_t)

Momenti flettenti (M_{fy}, M_{fz})

semplici

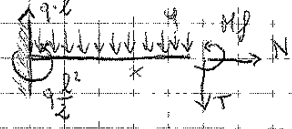
1) Trave menolata con incastrò e carico uniforme



Le reazioni vincolari (precedentemente calcolate)

sono: $M_A = 0$; $V_A = q \cdot l$; $M_A = q \frac{l^2}{2}$

Considero la parte a sinistra della sezione Sx



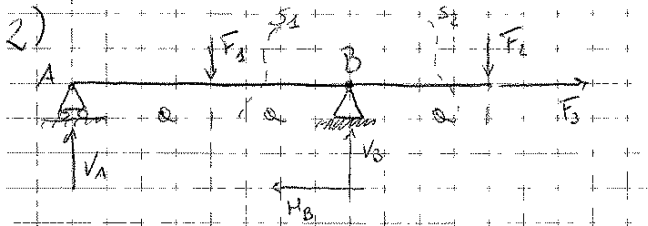
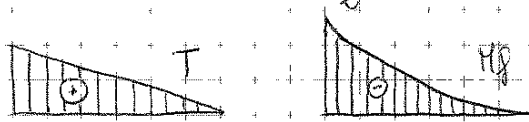
Equazioni di equilibrio

x: $N = 0$ y: $q \cdot l - q \cdot x - T = 0$

M: $q \frac{l^2}{2} - q \cdot l \cdot x + M_f + q \frac{x^2}{2} = 0$

Si ricava: $N = 0$; $T = V_A - q \cdot x$; $M_f = -q \frac{(l-x)^2}{2}$

Graficamente avremo:



$a = 400 \text{ mm}$

$F_1 = 2000 \text{ N}$; $F_2 = 2000 \text{ N}$

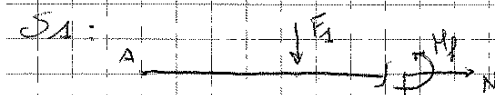
$F_3 = 30000 \text{ N}$

x: $F_3 - H_B = 0 \rightarrow H_B = 30000 \text{ N}$

y: $V_A + V_B - F_1 - F_2 = 0 \rightarrow V_A = 0$

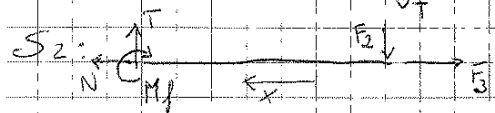
$M_A + 2a V_B - F_1 a - 3a F_2 = 0 \rightarrow V_B = 4000 \text{ N}$

Caratteristiche di sollecitazione per la struttura: si sceglie una sezione dopo ogni carico concentrato



$N = 0$ $T = -F_1 = -2000 \text{ N}$

M: $M_f + F_1 a \rightarrow M_f = -800000 \text{ N}$



$N = F_3 = 30000 \text{ N}$ $T = F_2 = 2000 \text{ N}$

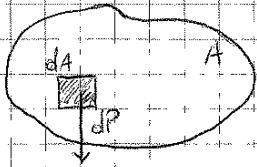
Diagrammi

- Sforzo Normale: $A + 30000 \text{ N}$

- Sforzo di Taglio: $A + 4000 \text{ N}$; $B - 2000 \text{ N}$

- Momento flettente: $A - 800000 \text{ N}$

Baricentro della sezione retta di una trave



Consideriamo la generica sezione A con una sua densità ρ di tipo costante

($\frac{Kg}{m^3}$), la forza peso per unità di lunghezza sarà $d\vec{P} = \rho \cdot dA$.

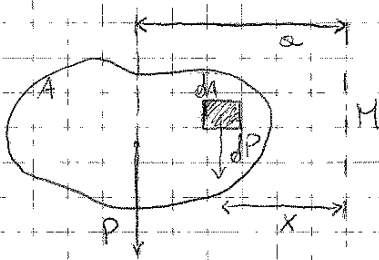
Sommando gli infinitesimi contributi delle sezioni dA , otteniamo la risultante delle forze peso:

$$|P| = \int_A dP = \rho \int_A dA = \rho \cdot A$$

Da questa formulazione non conosciamo però dove sia concentrata questa risultante; per trovare il punto di applicazione si può calcolare il momento delle forze elementari dP rispetto ad un asse parallelo a P e imponendo che esso debba eguagliare P per la distanza (e) dallo stesso momento sull'asse parallelo:

$$P \cdot e = \int_A x \cdot dP = \rho \int_A x \cdot dA$$

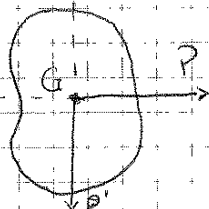
Da qui otteniamo $S = \int_A x \cdot dA$ che prende il nome di "Momento Statico"



La distanza fra la risultante P e l'asse passante per G vale:

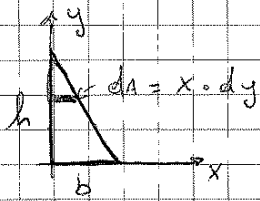
$$e = \frac{\rho \int_A x \cdot dA}{P}$$

Ruotando ruotore di 90° la sezione, passeremo una nuova posizione (P'); l'intersezione tra le risultanti delle due forze peso è denominato "Baricentro", indicato con G .



Esempi di calcolo

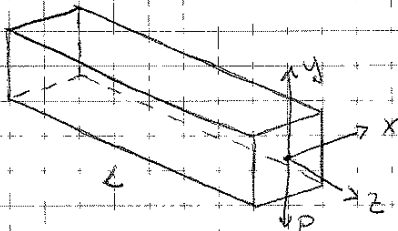
a) Baricentro per un triangolo



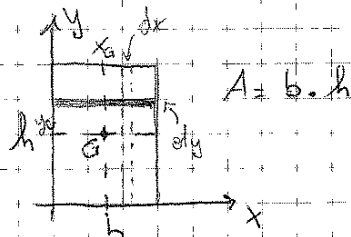
La coordinata del lato obliquo, in funzione di y è: $x = b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)$

Segue che: $S_x = \int_A y \cdot dA = \int_A y \cdot x \cdot dy = \int_0^h \left[b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \right] y \cdot dy = \frac{b \cdot h^2}{6}$

b) Baricentro per un rettangolo



Sezione \Leftrightarrow

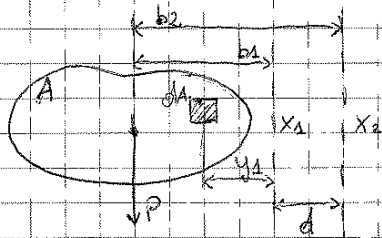


$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_A y \cdot b \cdot dy = \int_0^h b \cdot y \cdot dy = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA = \int_A x \cdot h \cdot dx = \int_0^b x \cdot h \cdot dx = \frac{b^2 \cdot h}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{b^2 \cdot h}{2}}{b \cdot h} = \frac{b}{2} \quad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{2}}{b \cdot h} = \frac{h}{2}$$

Teorema di trasposizione dei momenti statici



Pensiamo di conoscere già da rispetto all'asse x_1 e cerchiamo di calcolare S_2 rispetto all'asse x_2 , spostato del primo asse di una quantità d .

Considerando y_1 come la distanza di dA dall'asse x_1 , il momento S_1 è dato da: $S_1 = \int_A y_1 \cdot dA = A \cdot b_1$

Segue che $S_2 = A \cdot b_2 = A \cdot (b_1 + d) = A \cdot b_1 + A \cdot d \Leftrightarrow S_2 = S_1 + A \cdot d$

Niente ci ostacola ad imporre x_1 come l'asse baricentrico e quindi si avrà che $S_1 = 0$ e $S_2 = A \cdot d$.

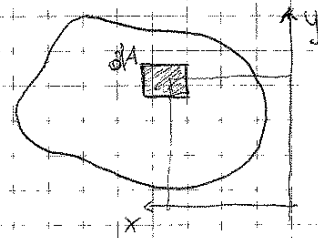
Momento d'Inerzia di una superficie

Il momento d'inerzia (I_x, I_y), detto anche momento d'area del second'ordine, si può pensare come la somma dei prodotti delle aree dA per la loro distanza dall'asse x al quadrato; saranno sempre valori positivi indipendentemente dalla scelta degli assi.

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad I_x = \int_A y^2 dA$$

- Momento d'inerzia centrifugo

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

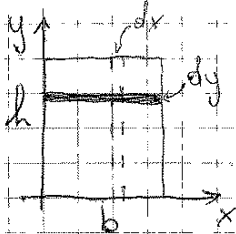


- Momento d'inerzia polare

Calcolato non rispetto ad un asse (o rette) ma rispetto a un polo (punto); ad esempio il punto P , I vale

$$I_P = \int_A r^2 dA \quad r = \text{distanza di } dA \text{ dal polo}$$

Momento d'inerzia per un rettangolo



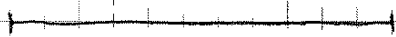
$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \cdot b dy = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 \cdot h dx = \frac{hb^3}{3}$$

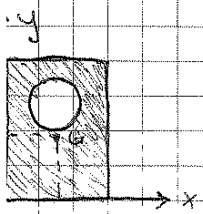
Calcolo del momento I per gli assi baricentrici

$$y_G = \frac{h}{2}, \quad x_G = \frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad I_{x_0} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y_0} = \int_A x^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot h \cdot dx = \frac{hb^3}{12}$$



\rightarrow



$$I_{xxG}^{\text{Tot}} = I_{xxG}^{\text{Ret}} + (y_{G_{\text{Ret}}} - y_G)^2 A_{\text{Ret}} - (I_{xxG}^{\text{C}} + (y_{G_{\text{C}}} - y_G)^2 A_{\text{C}})$$

$$I_{yyG}^{\text{Tot}} = I_{yyG}^{\text{Ret}} + (x_{G_{\text{Ret}}} - x_G)^2 A_{\text{Ret}} - (I_{yyG}^{\text{C}} + (x_{G_{\text{C}}} - x_G)^2 A_{\text{C}})$$

Questo perché il Baricentro dell'intera struttura non coincide con quello del rettangolo e del cerchio, si somma così la componente $(d)^2 \cdot A$.

• Sollecitazioni: semplici nelle travi

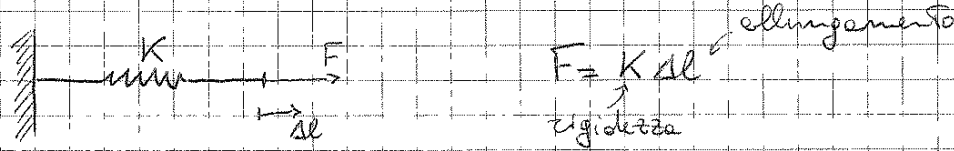
Abbiamo fino ad ora studiato i modelli di strutture secondo l'equilibrio delle forze, la determinazione delle reazioni vincolari e le sollecitazioni: N (sforzo normale), T (taglio), M_f (momento flettente) e M_t (momento torcente).

Queste ultime sono caratteristiche molto importanti di una trave, perché da esse derivano delle azioni interne che modificano le proprietà e le caratteristiche della trave stessa.

Si cercherà soprattutto di definire quali sono gli sforzi in tutti i punti della sezione di trave, conoscendo le caratteristiche di sollecitazione della sezione stessa.

Proprio per questo ci serviranno dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, perché ci daranno informazioni sulla "sezione maggiormente sollecitata".

Legge di Hooke



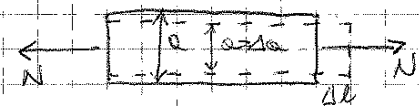
Dalla legge di Hooke ricaviamo $\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$ che corrisponde a $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$ cioè la tensione unitaria è direttamente proporzionale alla deformazione. E è un coefficiente di proporzionalità denominato "modulo di elasticità normale" oppure "Modulo di Young".

Unità di misura: $E = \text{dimensionale } \sigma = \frac{N}{\text{mm}^2} = \text{MPa}$
 $E = \text{MPa} \quad (M = \text{mega})$

K è detta "rigidezza assiale", vale $K = \frac{EA}{l}$. Più è grande l'area del corpo più sarà rigido assialmente; invece, più sarà lungo e meno sarà rigido!

° Contrazione trasversale

L'esperienza ci mostra che, ad un allungamento longitudinale corrisponde anche una contrazione:



$$E_{yy} = \frac{\Delta e}{e}$$

$$E_{yy} = \nu E_{xx}$$

ν è il coefficiente di proporzionalità detto "modulo di Poisson" (coefficiente), viene determinato sperimentalmente e per i metalli il suo valore oscilla tra 0,25 e 0,35.

Prove di Trazione

La risoluzione di problemi elementari di trazione e compressione, richiede la conoscenza di particolari caratteristiche del materiale sotto esame:

E : modulo (campo) elastico

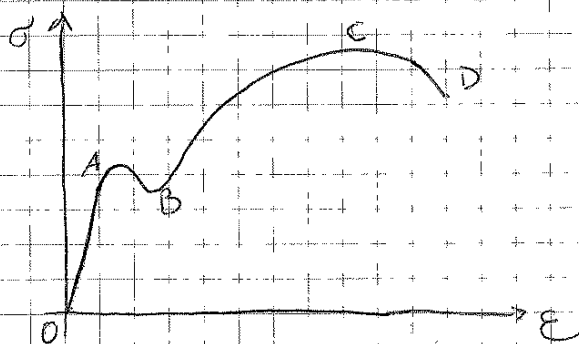
σ_e : limite di elasticità

σ_R : punto di rottura, importante valore nel progetto, con lo scopo di evitare cedimenti del sistema.

Queste caratteristiche vengono determinate sperimentalmente attraverso delle prove in laboratorio, fatte con speciali macchine.

Grazie a queste macchine si ottengono grafici da cui ricavare i valori cercati.

• Esempio di diagramma Tensione - deformazione



Consideriamo le varie zone separatamente:

• OA: "zona di elasticità"; il materiale segue la legge di Hooke, $\sigma = E \cdot \epsilon$

• AB: "zona di smarrimento"; qui inizia la zona plastica

• BC: "zona di incrudimento"; l'allungamento si accompagna al aumento del carico ma non in maniera lineare.

• CD: "zona di strizione", la sezione inizia a restringersi ed a cambiare colore.

Il punto D corrisponde

al punto di rottura del provino, il punto C è il punto di massimo carico sopportato.

Ap₁: allungamento percentuale di rottura (CD), se il suo valore è minore di 5% il comportamento del provino si dice "fragile", se maggiore del 5%, invece, "dutile".

Acciaio

È una lega di ferro e carbonio, con una presenza di quest'ultimo elemento inferiore al 2%. A seconda di quanto carbonio è contenuto nella lega, gli acciai si suddividono in:

- acciai dolci (0,15% - 0,25%)
- acciai semiduri (0,25% - 0,50%)
- acciai duri (0,50% - 0,75%)

Le grandezze che caratterizzano le proprietà meccaniche degli acciai sono:

- Resistenza: viene determinata dalla prova di trazione
- Durezza: è la resistenza locale che il materiale oppone e viene misurata attraverso una macchina sperimentale chiamata "duremetro"
- Duttilità: misura l'energia che il materiale riesce ad assorbire prima di giungere alla rottura; è possibile calcolarne il valore integrando l'area della curva del diagramma di prova.

Al crescere della percentuale di carbonio si ha un aumento della resistenza alla trazione ma diminuisce l'allungamento a rottura e la duttilità di conseguenza.

Oltre al carbonio possiamo trovare altri elementi, detti "leganti", come il Manganese, cromo, nichel ecc.

Dal 2005 le normative UNI EN 10020 e UNI EN 10027 hanno riformato la classificazione degli acciai in tre gruppi:

- 1°) acciaio non legato: C40; si indica la percentuale di carbonio moltiplicata per 100
- 2°) acciaio da costruzioni: S355JO; S identifica l'acciaio, il valore numerico è σ_s , J indica l'energia di resilienza e O temperatura.
- 3°) acciaio legato da bonifica: 34CrMo4; il primo numero indica la percentuale di C, i due simboli seguenti sono i leganti.

Comportamento meccanico dei materiali compositi:

Un materiale composito è dato dalla combinazione di due o più micro (macro) costituenti, che differiscono nelle forme, nella composizione chimica e quindi anche per la solubilità.

Di solito si indica con "matrice" il costituente principale e gli altri costituiscono le "inclusioni".

Distinguiamo i materiali compositi in base alla matrice, avendo così:

- Compositi a matrice polimerica (PMC)
- Compositi a matrice metallica (MMC)
- Compositi a matrice ceramica (CMC)

Se invece li distinguiamo a seconda delle inclusioni:

- Inclusioni sferiche (proprietà isotrope)
- Inclusioni irregolari (proprietà non isotrope)
- Inclusioni a piatello (isotrope nel piano)
- Inclusioni a fibre corte o fibre lunghe (ortotrope)

• Tipi di fibre possono essere:

- + Vetro: ottima resistenza meccanica, basso costo e modulo elastico ma buona tenacità.
- + Carbonio: ottima resistenza meccanica, alto costo e modulo elastico ma bassa tenacità.
- + Aramidiche (Kevlar e Nomex): anch'essi ottima resistenza, alta tenacità, medio costo e modulo E.

Il problema dei materiali fibrosi è la loro plasticità, sono molto fragili (zona plastica quasi inesistente).

Calcolo del modulo elastico per fibre lunghe, unidirezionali:

$$E_c = E_f \Phi + E_m (1 - \Phi)$$

fibre
matrice
} costante

Tensione ammissibile

Mediante le prove di trazione e compressione, abbiamo visto, si ottengono i dati riguardanti le proprietà meccaniche del provino.

Un ultimo parametro importante, indispensabile per la costruzione (reale) di strutture, è il "carico di sicurezza", cioè la sollecitazione massima applicabile alla struttura.

Per evitare deformazioni nella costruzione si assume come carico limite il rapporto tra il limite di snervamento e un numero "n" detto coefficiente di sicurezza:

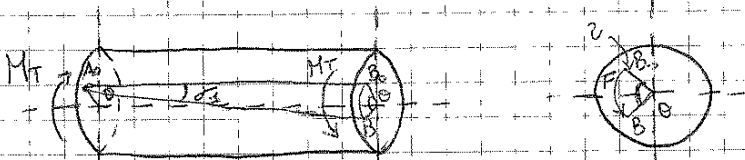
$$K = \frac{\sigma_s}{n}$$

Per materiali fragili, invece, si assume come carico limite il limite di rottura: $K = \frac{\sigma_R}{n}$

Torsione

Si parla di torsione semplice ogni qual volta, ogni sezione del corpo, è soggetta solo al momento torcente, essendo nulle tutte le altre caratteristiche di sollecitazione.

Sezione di una trave



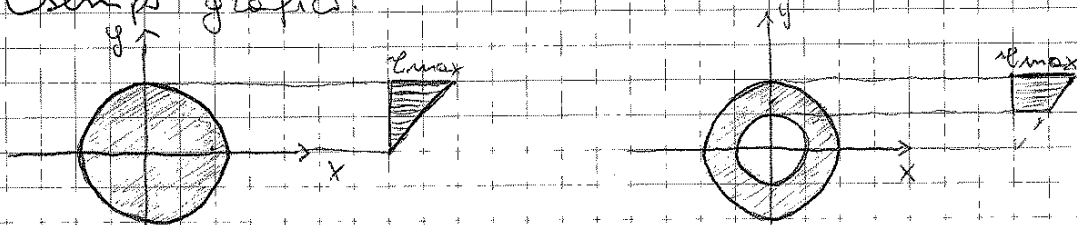
Per effetto della torsione la fibra A_0B_0 assume una inclinazione α (detta scorrimento) rispetto all'asse, il cui valore è: $\tan \alpha \approx \alpha = \frac{B_0B}{l}$. Inoltre, ogni punto della sezione ruota attorno al centro di un angolo θ , rispetto alla sezione adiacente: $B_0B = r_1 \theta$. Segue che $\alpha = r_1 \frac{\theta}{l}$

Caratteristiche della Tensione Tangenziale

è proporzionale al raggio r della sezione, quindi il valore massimo della tensione si raggiungerà quando

considereremo $r = \frac{d}{2} \rightarrow \tau_{max} = \frac{M_T d}{2 J_p} = \frac{M_T}{W}$
 dove $W = \frac{J_p}{d/2}$ è il "modulo di resistenza"

Esempi grafici:



$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \quad W = \frac{\pi D^3}{16} \quad J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} \quad W = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$$

Lavoro di deformazione Tensionale

Con lo stesso procedimento utilizzato per lo sforzo normale, si ottiene che il lavoro, per una trave sottoposta

a torsione semplice, è: $L = \frac{1}{2} M_T \theta$

Indicando con $G \cdot J_p$ la "rigidezza Tensionale" possiamo riscrivere l'equazione del lavoro come: $L = \frac{1}{2} \frac{G J_p \theta^2}{l}$

Torsioni in Travi a sezione rettangolare

Le determinazioni di formule e valori fatte per le travi circolari non possono essere applicate anche alle sezioni rettangolari!

Infatti, durante la torsione, le sezioni rettangolari si ingobbano, incurvano i propri lati. Per lo studio di questi problemi si ricorre, quindi, all'idrodinamica, considerando l'analogia che potrà emergere tra un recipiente, con fondo orizzontale, di forma uguale alla sezione del rettangolo soggetto a torsione.

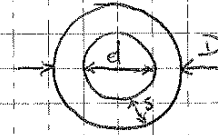
Esercizi

1) Calcolo dell'angolo di torsione e stato di tensione
Torsionale per una Trave circolare cava:

$$D = 35 \text{ mm} \quad d = 28 \text{ mm}$$

$$M_t = 120 \text{ Nm} \rightarrow 120\,000 \text{ Nmm}$$

$$G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$$



Per risolvere l'esercizio possiamo applicare due metodi:

1) Soluzione "esatta" $\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}$ $\theta_u = \frac{M_t}{G J_p}$

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (35^4 - 28^4) \text{ mm}^4 = 86\,935,7 \text{ mm}^4$$

$$\theta_u = \frac{120\,000}{80\,000 \cdot 86\,935,7} \cdot \frac{\text{Nmm}}{\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \text{mm}^4} = 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

$$W_t = \frac{J_p}{d/2} = \frac{86\,935,7}{17,5} = 4\,967,8 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{120\,000}{4\,967,8} = 24,16 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ (MPa)}$$

2) Soluzione come se fosse una parete sottile

Questo metodo può essere utilizzato solo quando $s < \frac{1}{10} D$ perché porterebbe ad un errore di valutazione troppo

irilevante. $\tau_{max} = \frac{M_t}{2R_s}$ $\theta_u = \frac{M_t}{4G R_s^2} \int \frac{dr}{s}$

$$s = \frac{D-d}{2} = 3,5 \quad D_m = \frac{D+d}{2} = 31,5$$

$$R_s = \frac{\pi D_m^2}{4} = \frac{\pi 31,5^2}{4} = 779 \text{ mm}^2$$

$$\theta_u = \frac{120\,000}{4 \cdot 779^2 \cdot 80\,000} \cdot \frac{\pi 31,5}{3,5} = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{120\,000}{2 \cdot 779 \cdot 3,5} = 22 \text{ MPa}$$

Notiamo come il valore della torsione si riduce e invece il valore di θ_u aumenta (la deformabilità).

1) Sezione circolare cava

$$D = 40 \text{ mm} \quad d = 38 \text{ mm}$$

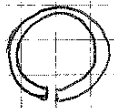
$$M_t = 200 \text{ Nm} \quad G = 80 \text{ 000 N/mm}^2$$

Abbiamo che $\frac{S}{L} < \frac{1}{10} D$ e quindi possiamo ricorrere al metodo della parete sottile:

$$A = \frac{\pi D_m^2}{4} = \frac{\pi 39^2}{4} = 1194 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_u = \frac{M_t}{A \rho^2 G} \int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{200 \text{ 000}}{4 \cdot 1194^2 \cdot 80 \text{ 000}} \cdot \pi 39 = 5,37 \text{ rad/mm}$$

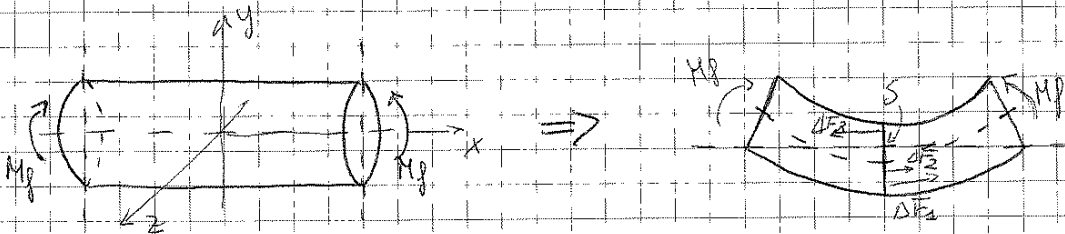
In seguito, viene fatta una incisione sulla sezione:



$$\sigma_u = \beta \frac{M_t}{G \rho b^3} = \beta \frac{M_t}{G S (\pi D_m)^3} = 3 \cdot \frac{200 \text{ 000}}{80 \text{ 000} \cdot 1 \cdot (\pi 39)^3} = 4,08 \times 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

• Sollecitazioni semplici: Flessione

Per momento flettente si intende un modo di carico tale che, nelle sezioni rette della Trave, la sollecitazione si riduce soltanto al momento M_f ; in questo caso si parlerà di "flessione pura".



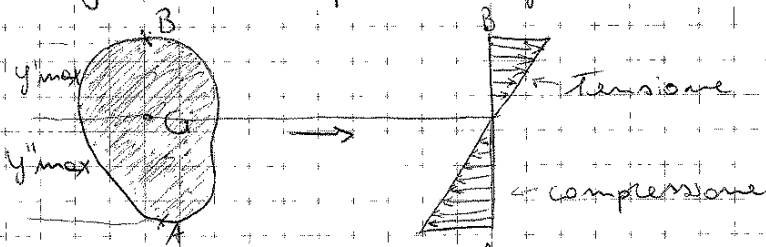
Per effetto dei momenti, la Trave si inflette e il suo asse si dispone lungo una linea detta "linea elastica" che, nel caso considerato, è un arco di circonferenza. Il piano su cui giace la linea elastica è il "piano di flessione" che coincide con il piano di sollecitazione.

La prima equazione rappresenta il momento statico della sezione rispetto all'asse z che, siccome l'integrale è uguagliato a zero, (z) sarà l'asse baricentrico!
 La seconda equazione, invece, presenta un integrale che corrisponde al momento d'inerzia rispetto l'asse $z \rightarrow J_z$

Si ha quindi $\frac{E J_z}{R} = M_f$

Indicando con $\sigma = \frac{E}{R} y = \frac{M_f}{J_z} y$, la "rigidezza flessionale" e con $\frac{1}{R} = \frac{M_f}{E J_z}$ la "curvatura della trave". $E \cdot J_z$

• Diagramma per la flessione



$$\sigma_{max} = \frac{M_f y_{max}}{J_z}$$

$$\sigma'_{max} = \frac{M_f y'_{max}}{J_z}$$

È detto "diagramma a forbice"

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} \rightarrow \sigma_{max} = \frac{M_f}{W_z}$$

- Flessione semplice per trave a sezione rettangolare

$$J_z = \frac{bh^3}{12} \quad y_{max} = \frac{h}{2} \quad W_z = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{6 M_f}{bh^2}$$

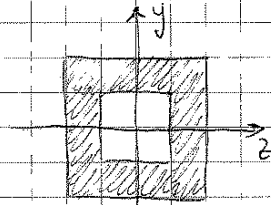
- Flessione su sezione circolare piena

$$\left. \begin{aligned} J_z &= \frac{\pi D^4}{64} \\ y_{max} &= \frac{D}{2} \\ W_z &= \frac{\pi D^3}{32} \end{aligned} \right\} \sigma_{max} = \frac{32 M_f}{\pi D^3}$$

1) Si ha una sezione piena quadrata con $l = 60 \text{ mm}$ e $A = 3600 \text{ mm}^2$ e una seconda sezione quadrata ma con una cavità di lato $l = 60 \text{ mm}$, di area sconosciuta, con uno spessore che può essere di 2 o 15 mm. Riportare, nei due diversi casi, le condizioni delle due diverse sezioni.

$$M_f = 500\,000 \text{ Nmm}$$

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$



$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{J_z} y_{\max}$$

a) Spessore 2 mm: $y' = 56 \text{ mm}$

$$J_z = J_z^{\text{P}} - J_z^{\text{C}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y^2 dA - \int_{-\frac{l}{2}+2}^{\frac{l}{2}-2} y^2 dA = \int y^2 z dy - \int y^2 -z dy$$

$$dA = z dy \text{ e } y = z \rightarrow J_z = \left[\frac{zy^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} - \left[\frac{z \cdot y^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}+2}^{\frac{l}{2}-2} = \frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{12} = 260\,659 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{500\,000 \cdot 30}{260\,658} = 58 \text{ MPa}$$

b) Spessore 15 mm: $y' = 30 \text{ mm}$

$$J_z = J_z^{\text{P}} - J_z^{\text{C}} = \frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{12} = 1\,012\,500$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{J_z} \cdot y_{\max} = 15 \text{ MPa}$$

Nell'esercizio precedente avevamo ricavato che la flessione massima della sezione quadrata piena era 16 MPa; notiamo quindi che la diminuzione dell'area comporta un aumento della flessione. La cosa però non vale se la diminuzione dell'area non è eccessiva, anzi, considerando lo spessore 15 mm abbiamo ottenuto un valore di σ quasi uguale a quello della sezione piena, valore che diminuisce ancora di più se consideriamo, per esempio, $s = 20 \text{ mm}$!

Sollecitazioni semplici: Taglio

Una sezione di Trave è soggetta al solo sforzo di Taglio quando la risultante di tutte le forze esterne che precedono S giace sul piano della sezione stessa e passa per il suo baricentro.

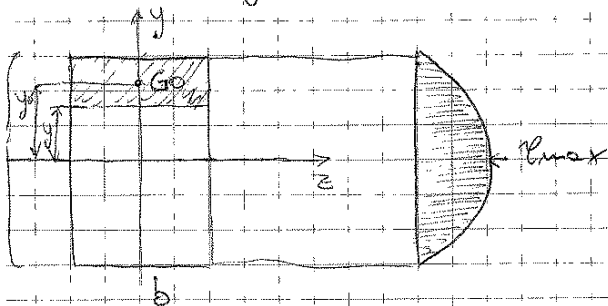
Lo sforzo di Taglio è sempre accompagnato dalla flessione, si avrà Taglio puro solo nel punto in cui il momento passa per lo zero.

Si definisce "sforzo di Taglio medio" $\tau_m = \frac{T}{A}$;
per qualsiasi punto si avrà la formula generale data da $\tau = \frac{T S}{b I_z}$.

S è il momento statico, rispetto a z , della porzione di area definita dalla retta, parallela a z , e passante per il punto dove si vuol calcolare il valore τ .

I_z : momento d'inerzia dell'intera sezione

b : larghezza della sezione.



$$S = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \cdot y_0 \rightarrow \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$I_z = \frac{b h^3}{12}$$

$$\tau = \frac{6 \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \cdot T}{b h^3}$$

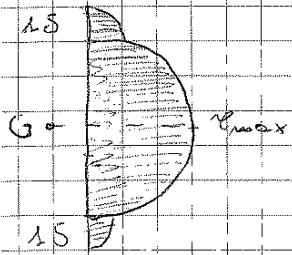
Si ha il valore massimo di Taglio quando $y=0$;

$$\text{quindi: } \tau_{max} = \frac{6 T \cdot \frac{h^2}{4}}{b h^3} = \frac{3}{2} \frac{T}{b h}$$

ma $b h = A$ e cioè, per questo caso: $\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_m$

Dove il Taglio ha valore massimo il momento flettente è pari a zero (cioè nel baricentro) e viceversa!

Grafico della Tensione di Taglio

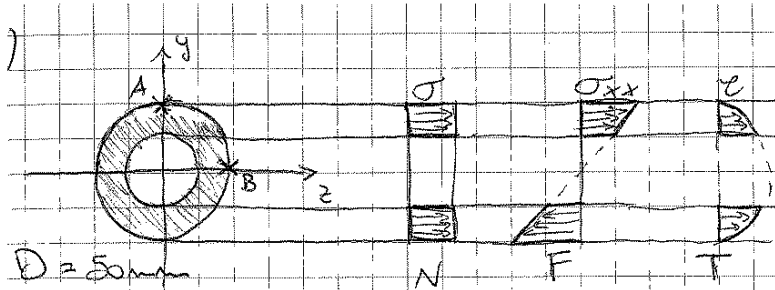


Notiamo come l'anima centrale abbia un valore τ molto maggiore rispetto alle due dette. Si può quindi trascurare la loro tensione di taglio e considerare solo l'area dell'anima, si ottiene così un diverso valore medio: $\tau_m = 65 \text{ MPa}$

Notiamo come, effettivamente, questo valore è molto prossimo al valore di τ_{max} .

• Schema riassuntivo per i calcoli di verifica:

- 1) Calcolare le reazioni vincolari, vedere l'isostaticità del sistema.
- 2) Tracciare il diagramma delle caratteristiche di sollecitazione.
- 3) Individuare le sezioni maggiormente sollecitate.
- 4) Calcolare le tensioni semplici per le sezioni prese in considerazione.
- 5) Individuare il punto maggiormente sollecitato.
- 6) Verificare la struttura nel punto maggiormente sollecitato, confrontando la tensione massima con quella ammissibile del materiale diviso il coefficiente di sicurezza richiesto ($\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_{RkS}}{\gamma}$)



$$D = 50 \text{ mm}$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$A = 1256 \text{ mm}^2$$

$$J_z = 266900 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = 24 \text{ MPa} \quad \sigma_F = \frac{M y}{J_z} = 75 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{4}{3} \frac{T}{A} = 2 \text{ MPa} \quad [\text{dove } T \text{ corrisponde al valore ricavato in 2}]$$

1) Il punto A, della sezione B, è il punto maggiormente sollecitato!

2) Equazione di verifica del progetto

Si come il materiale è duttile si considera il valore dello snervamento:

$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_s}{\delta}$ → Si deve ricavare il valore di tensione massima; notiamo facilmente dai grafici che lo sforzo normale e il momento flettente avranno gli stessi pedici xx. Saremo loro a dare il valore massimo: $75 + 24 = 99 \leq \frac{700}{2}$ Verificato!

trovare il momento d'inerzia rispetto all'asse 3; dobbiamo fare attenzione al fatto che i baricentri delle aree I e II sono spostati dal baricentro della sezione

$$I_3 = I_2^I + A^I (y_{II} - y_G)^2 + I_2^{II} + A^{II} (y_{II} - y_G)^2 =$$

$$= \frac{1}{12} s \cdot h^3 + (300) (35 - 51,67)^2 + \frac{1}{12} b \cdot s^3 + (500) (75 - 51,67)^2 =$$

$$= 756\,666 \text{ mm}^4$$

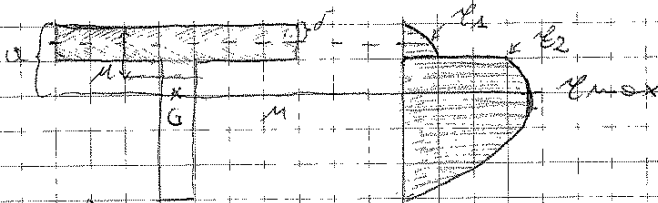
$$\sigma_{max} = \frac{M_3 (80 - 51,67)}{I_3} = 96 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_3 (+51,67)}{I_3} = -171 \text{ MPa}$$

[distanze prese rispetto al baricentro]

Toglio: $\sigma = \frac{I_y \cdot S_z}{b \cdot I_z}$

$$S_{z2} = \left(\frac{a-d}{2} \right) (b \cdot d)$$

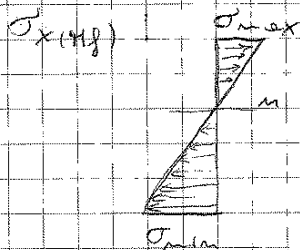


$$S_{z1} = s \cdot b \left(\frac{a-d}{2} \right) + (s \cdot r + s) (a-r)$$

$$\sigma_1 = 1,5 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 8 \text{ MPa} \quad \sigma_{max} = 9 \text{ MPa}$$

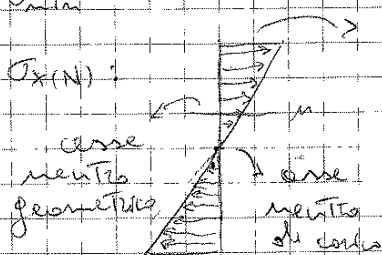
Per trovare il coefficiente di sicurezza dei massimi valori (positivi o negativi) ottenuti dalla tensione normale e da quella flettente, poiché orientate allo stesso modo.

Grafici



Notiamo che lo zero non si trova al centro proprio perché il baricentro è spostato verso l'area II

$$\sigma_x(M) + \sigma_x(N) > 96 \text{ MPa} + 11 \text{ MPa} = 106 \text{ MPa}$$



$$-171 \text{ MPa} + 12 \text{ MPa} = -159 \text{ MPa}$$

Coefficiente di

$$\text{Sicurezza: } s = \frac{300}{159} = 1,88$$

Queste semplificazioni sono state ricavate da un modello detto "Modello di Eulero-Bernoulli"

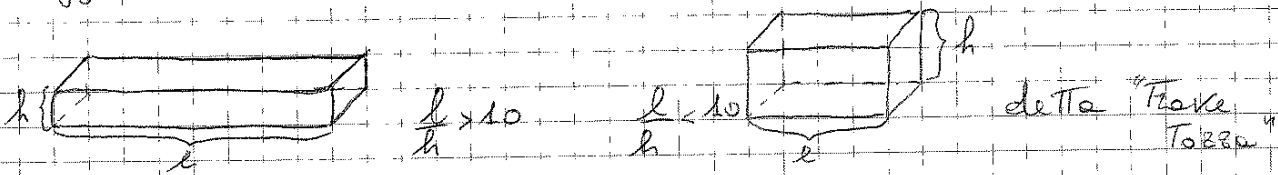
$\frac{dV}{dx} = 0$ → fisicamente vuol dire che la derivata prima della freccia di flessione è uguale alla curvatura

$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$ → la curvatura della trave è legata differenzialmente all'angolo della curvatura.

Da queste due considerazioni segue che:

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{1}{R} = \frac{M(x)}{EJ} \quad \text{Momento flettente}$$

Bisogna però tenere presente che il modello di Eulero-Bernoulli vale soltanto per le travi "snelle", cioè quelle travi dove il rapporto tra lunghezza e altezza è maggiore di 10



Equazioni differenziali della linea elastica

Dal modello di E-B si possono ricavare le equazioni per il calcolo della freccia e dell'angolo di curvatura:

$$EJ \int_0^x \frac{d^2 V(x)}{dx^2} dx = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

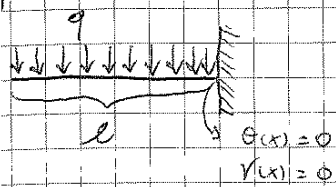
$$EJ \frac{dV(x)}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 \rightarrow EJ \theta(x)$$

Integro ancora una volta:

$$EJ \int_0^x \frac{dV(x)}{dx} dx = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2$$

Abbiamo così ricavato anche l'equazione per la freccia:

$$EJ V(x) = \int_0^x [EJ \theta(x)] dx + C_2$$



$$M_f(x) = -\frac{q l^2}{2} \text{ [valore massimo!]}$$

$$EJ\theta(x) = \int_0^x -\frac{q x^2}{2} dx + C_1 = -\frac{q x^3}{6} + C_1$$

$$EJv(x) = \int_0^x \left(-\frac{q x^3}{6} + C_1\right) dx + C_2 = -\frac{q x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

- Condizioni al contorno

$$\theta(l) = -\frac{q l^3}{6} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{q l^3}{6}$$

$$v(l) = -\frac{q l^4}{24} + \frac{q l^4}{6} + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = \frac{q l^4 - 4 q l^4}{24} = -\frac{q l^4}{8}$$

$$EJ\theta(x) = -\frac{q x^3}{6} + \frac{q l^3}{6}$$

$$EJv(x) = -\frac{q x^4}{24} + \frac{q l^3}{6} x - \frac{q l^4}{8}$$

- Valori massimi

$$v_{max}(x=0) = -\frac{q l^4}{8 EJ}$$

$$\theta_{max}(x=0) = \frac{q l^3}{6 EJ}$$

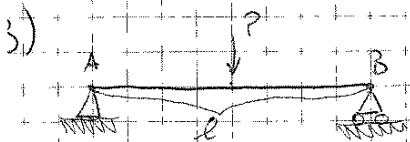
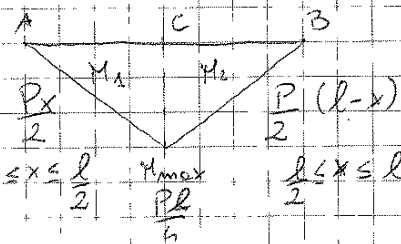


Grafico di Mf



Considero la Trave divisa in due:

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad \begin{matrix} M_1 \\ \frac{Pl}{4} \end{matrix} \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l$$

- Tratto AC: $EJ\theta(x) = \frac{Px^2}{4} + C_1$

$$EJv(x) = \frac{Px^3}{12} + C_1 x + C_2$$

- Tratto CB: $EJ\theta(x) = \frac{Pl}{2} x - \frac{Px^2}{4} + C_3$

$$EJv(x) = \frac{Pl}{4} x^2 - \frac{Px^3}{12} + C_3 x + C_4$$

Abbiamo 4 costanti e qui dovremo imporre le condizioni al contorno; notiamo però una cosa:

$$\left. \begin{matrix} A) v(x=0) = 0 \\ B) v(x=l) = 0 \end{matrix} \right\} \theta_{AC}(x=\frac{l}{2}) = \theta_{CB}(x=\frac{l}{2})$$

$$v_{AC}(x=\frac{l}{2}) = v_{CB}(x=\frac{l}{2})$$

Considereremo solo AC

Notiamo che in C si hanno condizioni di simmetria, geometrica e di carico!

$$EJ\theta(x) = \frac{Px^2}{4} + C_1 \quad EJv(x) = \frac{Px^3}{12} + C_1 x + C_2$$

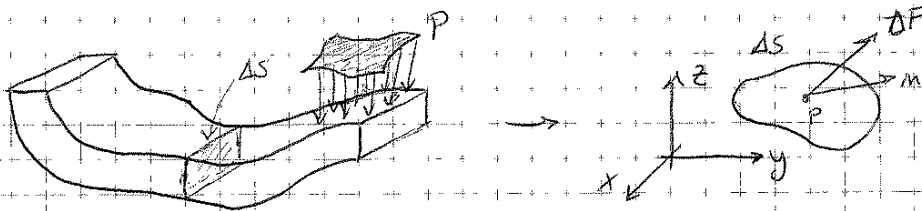
$$v(x=0) = C_2 = 0 \quad \theta(x=\frac{l}{2}) \Rightarrow C_1 = \frac{Pl^2}{16} \text{ [poiché si annulla e } \theta \text{ nullo]}$$

$$EJv(x) = \frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2 x}{16} \rightarrow v_{max}(x=\frac{l}{2}) = \frac{Pl^3}{48 EJ}$$

Meccanica del continuo

Un continuo è un corpo omogeneo che ha uguali proprietà in tutti i punti; si dice "isotropo" se queste proprietà sono uguali in tutte le direzioni nel punto, sarà "anisotropo" quando queste proprietà, invece, possono variare in funzione della direzione.

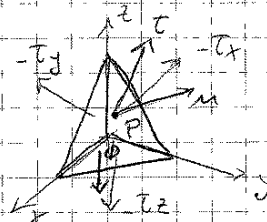
Definiamo lo stato di tensione (o stress) all'interno di una struttura omogenea qualsiasi, all'interno, secondo la teoria delle Favi.



La tensione dovuta al corpo P, nel punto P, considerando la generica sezione dS , vale: $\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF}{dS}$

Bisogna però ricordare che ogni tensione, per qualsiasi sezione, è accompagnata sempre dal vettore normale; si avrà quindi

- faccia x: t_x, m_x
- faccia y: t_y, m_y
- faccia z: t_z, m_z



ϕ è la forza dovuta al volume

Scriviamo l'equazione di equilibrio:

$$\{T\} dS - \{t_x\} dS_x - \{t_y\} dS_y - \{t_z\} dS_z + \{0\} dV = 0$$

Si come $dS_x = dS m_x$, $dS_y = dS m_y$, $dS_z = dS m_z$, si ha

$$\{T\} dS - \{t_x\} m_x dS - \{t_y\} m_y dS - \{t_z\} m_z dS = 0$$

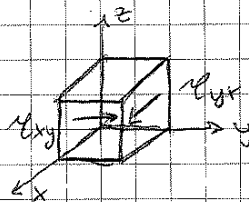
Abbiamo tolto dV poiché è di ordine superiore a dS .

Otteniamo il "Teorema di Cauchy".

$$\{T\} = \{t_x\} m_x + \{t_y\} m_y + \{t_z\} m_z$$

Esempio

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



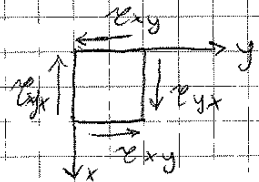
Nelle facce opposte avremo, come detto, le stesse tensioni, guardando dall'alto infatti:

Equazioni di equilibrio

$$x: \tau_{yx}(dx dz) - \tau_{yx}(dx dz) = 0$$

$$y: \tau_{xy}(dy dz) - \tau_{xy}(dy dz) = 0$$

$$z: (\tau_{yx} dx dz) dy - (\tau_{xy} dy dz) dx = 0$$



Guardando l'equazione per il momento notiamo:

$$\tau_{xy} dx dy dz - \tau_{yx} dx dy dz = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}!$$

"Gli elementi all'infuori della diagonale sono tutti simmetricamente uguali!"

Questa considerazione è importante e prende il nome di "principio di reciprocità di Maxwell":

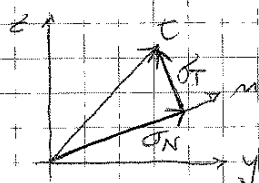
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Si avranno quindi solo 6 componenti indipendenti nella matrice del tensore e l'equazione di Cauchy può essere scritta come $\{t\} = [\sigma]\{u\}$

Componenti normale e tangenziale della tensione

Il vettore tensione, oltre alle componenti rispetto agli assi x, y e z , ha anche due componenti rispetto al vettore normale: σ_N tensione normale, σ_T tensione tangenziale

Tangenziale



$$\sigma_N = \{n\}^T [\sigma] \{n\}$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{t\}^T \cdot \{t\}$$

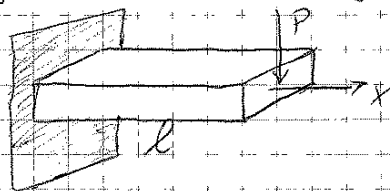
Una verifica veloce, per vedere se il risultato è giusto, può essere fatta sommando i valori sulla diagonale dei due tensori; se i conti sono stati fatti correttamente si otterrà lo stesso valore!

Prendendo come esempio l'esercizio precedente notiamo infatti: $I = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 200 + 150 + 120 = 470 \text{ MPa}$

$$I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 278 + 120 + 72 = 470 \text{ MPa}$$

Esercizio

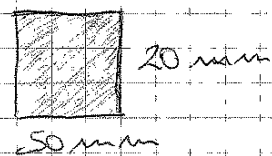
Calcolare nel punto maggiormente sollecitato il tensore delle tensioni, nel sistema di riferimento x, y, z .



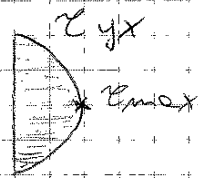
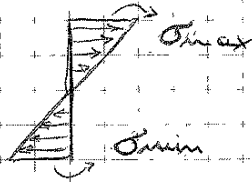
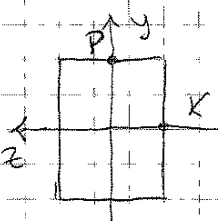
$$l = 0,5 \text{ m}$$

Sezione:

$$P = 1000 \text{ N}$$



$$T = P \quad \text{e} \quad M = P \cdot l$$



In P: $\sigma_{xx} \text{ max}$
 $\tau_{yx} = 0$

In K: $\sigma_{xx} = 0$
 $\tau_{yx} \text{ max}$

$$\sigma_{xx} \text{ max} = -\sigma_{xx} \text{ min} = \frac{6 P \cdot l}{b h^2} = \frac{6 \cdot 1000 \cdot 500}{50 \cdot 20^2} = 150 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{T}{b h} = \frac{3}{2} \frac{1000}{50 \cdot 20} = 1,5 \text{ MPa}$$

Dal momento che il valore del taglio è trascurabile rispetto a quello di σ_{max} (in generale è sempre così!) andremo a considerare nel tensore solo σ_{xx} .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = 150 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

In questo caso la tensione si dice "monodimensionale" poiché agisce su di un'unica direzione!

Cerchi di Mohr

Riprendendo le equazioni: $\sigma_N = \{n\}^T [\sigma] \{n\}$

$$\sigma_N^2 + \sigma_T^2 = \{t\}^T \{t\}$$

e risolvendo rispetto a n

otteniamo tre equazioni:

$$1) \mu_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$2) \mu_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$3) \mu_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_T^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Assumendo sempre che $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ si nota facilmente

che i denominatori determineranno i segni:

1 e 3 sono maggiori di zero, invece il secondo sarà negativo.

Se invece analizziamo i numeratori abbiamo

$$1) (\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2 \geq 0$$

$$2) (\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2 < 0$$

$$3) (\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_T^2 \geq 0$$

Sono circonferenze!

I raggi e i centri saranno:

$$C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

$$C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

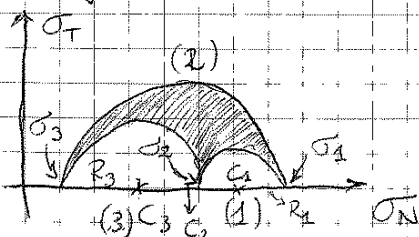
$$C_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

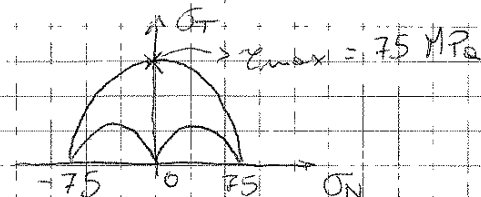
$$R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Graficamente si avrà:



Ad esempio, nell'esercizio precedente:

$$\sigma_1 = 75 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -75$$



4) Abbiamo 4 costanti (A, B, K, W) e quindi ci servono 4 condizioni di equilibrio; abbiamo allora:

$$AC: V(A) = B = 0 \quad (\xi = 0)$$

$$CB: V(B) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Cb^2}{2l} + \frac{Cb^3}{6l} \right) + Kb + W = 0 \quad (\Psi = b)$$

Since il punto C non è una cerniera interna ma è parte integrante della trave stessa, dovremo considerare in quel punto la continuità dei valori:

$$V(C)_\xi = V(C)_\psi \Leftrightarrow \frac{Cl \cdot 0^3}{6EI} + A \cdot 0 = W \quad (\xi = c, \Psi = 0)$$

$$\theta(C)_\xi = \theta(C)_\psi \Leftrightarrow \frac{C}{l} \cdot \frac{0^2}{2EI} + A = K \quad (\xi = c, \Psi = 0)$$

Forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ K \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Cl \cdot 0^3}{6EI} \\ \frac{Cb^2}{2EI} - \frac{Cb^3}{6EI} \\ \frac{C \cdot 0^2}{2EI} \end{pmatrix}$$

5) Risolvendo il calcolo matriciale ricaviamo i valori delle costanti:

$$A = -\frac{C}{6EI} \left(\frac{a^2 + 2ab - 2b^2}{l} \right)$$

$$K = \frac{C}{3EI} \left(\frac{(a-b)^2}{l} \right)$$

$$W = -\frac{C}{EI} \left(\frac{ab - ab}{b} \right)$$

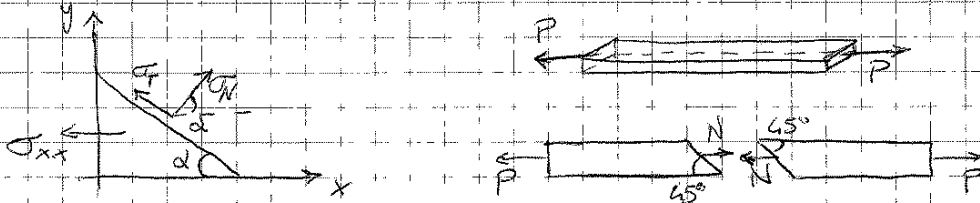
Ipotizzando che il momento C si trovi in mezza trave ($a = b$) avremo:

$$A = -\frac{Cl}{24EI} \quad K = \frac{Cl}{12EI} \quad W = 0$$

Fondamenti di Meccanica Strutturale, Appunti dal 1/12/11

-Esercizio su Trazione pura

Barra sollecitata da trazione pura, valutare la tensione tangenziale e normale rispetto ad una direzione inclinata di 45° rispetto all'asse x .



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \sigma_N = [M]^T [\sigma] \{M\}$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = [t]^T \cdot \{t\}$$

Siamo in presenza di una sola forza, quindi il tensore sarà formato da una sola componente

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad \text{con } \sigma_{xx} = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_N = \{M_x, M_y, M_z\} [\sigma] \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \sigma_{xx} M_x^2$$

$$\sigma_N = \sigma_{xx} (\cos 45^\circ)^2 = \frac{\sigma_{xx}}{2}$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{t_x, t_y, t_z\} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \sigma_{xx}^2 M_x^2$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \sigma_{xx}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\sigma_T^2 = \frac{\sigma_{xx}^2}{2} - \frac{\sigma_{xx}^2}{4} = \frac{\sigma_{xx}^2}{4}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sigma_{xx}^2}{4}} = \frac{\sigma_{xx}}{2}$$

$$\sigma_T = \sigma_N$$

Per ricavare le direzioni principali dobbiamo calcolare il determinante della seguente matrice:

$$\det [[\sigma] - \sigma_p] = \begin{vmatrix} -\sigma_p & 0 & 24 \\ 0 & -\sigma_p & 0 \\ 24 & 0 & 145 - \sigma_p \end{vmatrix} = 0$$

$$-\sigma_p [-\sigma_p (145 - \sigma_p) - 24^2] = 0$$

$$-\sigma_p [\sigma_p^2 - 145\sigma_p - 24^2] = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_p = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_p^2 - 145\sigma_p - 24^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \sigma_1 = 149 \text{ MPa} & \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -4 \text{ MPa} \end{matrix}$$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} 149 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

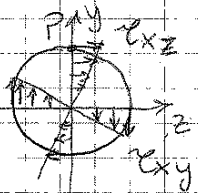
Nel calcolo appena concluso abbiamo trovato σ_1 , σ_2 e σ_3 , per verificare se i valori trovati sono giusti o meno possiamo applicare la prima equazione di invarianza ai tensori $[\sigma]$ e $[\sigma']$ e vedere se ritroviamo gli stessi valori:

$$I = \text{Tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 145 \text{ MPa}$$

$$I = \text{Tr}[\sigma'] = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 145 \text{ MPa}$$

Quindi il risultato ritrovato è giusto.

• Ricavare le direzioni principali



$$\tau_{MT} = \frac{M_T r}{J_p} = \frac{M_T \frac{D}{2}}{\frac{\pi D^4}{32}} = 30 \text{ MPa}$$

$$\det \begin{vmatrix} -\sigma_p & 0 & 30 \\ 0 & -\sigma_p & 0 \\ 30 & 0 & -\sigma_p \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\sigma_p (\sigma_p^2 - 30^2) = 0$$

$$\text{Da cui si ricava: } \begin{cases} \sigma_p = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_p^2 - (30)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \Rightarrow \sigma_1 = 30 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -30 \text{ MPa}$$

- Tensori deviatore o di distorsione

$$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_D]$$

$$[\sigma_D] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

Per questo tensore il primo invariante è nullo mentre il secondo vale:

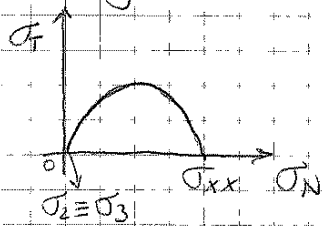
$$II' = 3\sigma_m - II = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{6}$$

- Calcolo dei cerchi di Mohr

• Per il primo esercizio (Trazione pura)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{xx} \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \end{array}$$

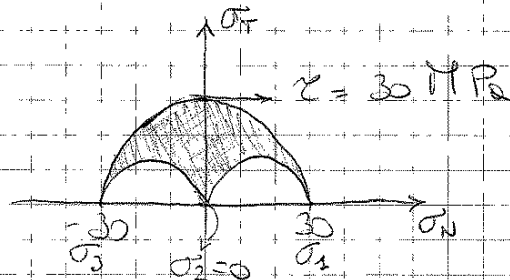
Segue che avremo, come grafico, un unico cerchio



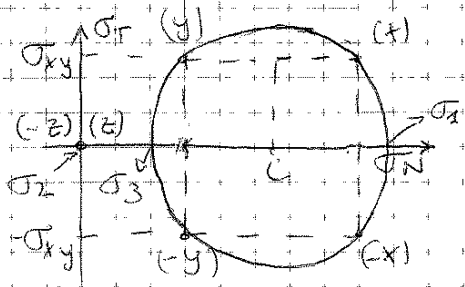
↑ I cerchi di σ_2 e σ_3 sono collasati in un punto, che in questo caso è l'origine

• Per la tensione pura

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} +30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \Rightarrow$$



indicando una delle nostre tensioni come se fosse principale si possono costruire graficamente i cerchi di Mohr, indicando graficamente tutti i valori e mostra disposizione, riusciremo a definire, senza matrici, i valori delle altre due tensioni principali.



Si ha:

$$\sigma_1 = C + R \quad \sigma_2 = C - R$$

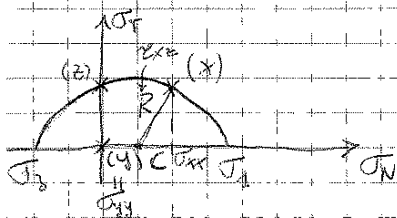
$$C = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \quad R = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}$$

Teoria delle travi, tensioni principali

Assumiamo l'asse x come asse della trave, in questo caso il tensore sarà semplificato maggiormente:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Risolvendo col metodo grafico il calcolo delle delle tensioni principali si ottiene che una tensione principale è sempre uguale a zero e le altre due si calcolano come nel caso piano.



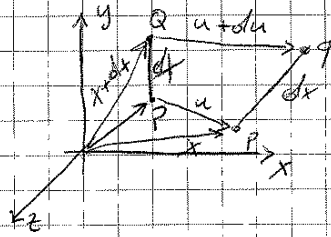
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \pm \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xz}^2})$$

Nel caso delle travi almeno una tensione principale esistente sempre nulla.

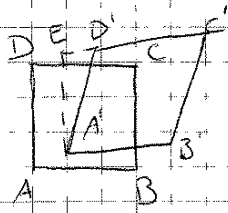
Spostamento elastico

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$



La misura della deformazione per dilatazione è data dall'allungamento relativo e dal generico spostamento

$$dx : e = \frac{|dx'| - |dx|}{|dx|}$$

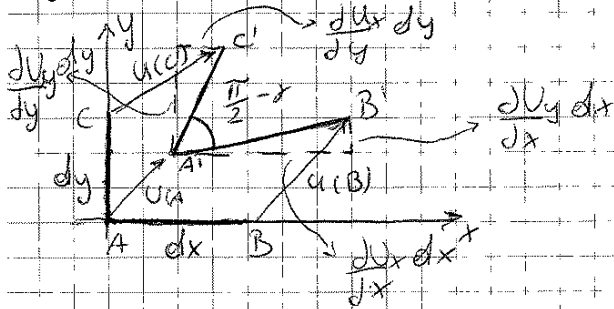


La misura della deformazione per distorsione, considerando un rettangolo (A, B, C, D) e il suo distorto (A', B', C', D')

$$\text{si ha il valore: } \frac{ED'}{EA} = \tan \alpha = \epsilon$$

Piccole deformazioni

Siccome si studieranno sempre piccoli spostamenti segue che le deformazioni saranno piccole, infinitesime; per questo potremo definire legami fondamentali, di tipo differenziale per le varie formule. Analizziamo il caso piano.



La distanza della configurazione deformata $(A'B')$ è:

$$dx'^2 = \left(dx + \frac{du_x}{dx} dx \right)^2 + \left(\frac{du_y}{dx} dx \right)^2$$

spostamenti

Svolgiamo i calcoli

$$dx'^2 = dx^2 + 2 \frac{du_x}{dx} dx^2 + \left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{du_y}{dx} \right)^2 dx^2$$

Possiamo escludere gli infinitesimi di ordine superiore e ottenere $dx'^2 = dx^2 \left(1 + 2 \frac{du_x}{dx} \right)$

Deformazioni e direzioni principali

Come nel caso delle tensioni di trazione, anche in questi casi è possibile determinare le direzioni principali per la deformazione. Esse sono quelle direzioni che non mutano durante la deformazione.

Si ha quindi: $[[E] - \lambda I]\{u\} = 0$ dove $\{u\}$ è il vettore dei coseni direttori. La soluzione si potrà avere solo se il determinante della matrice è nullo, cioè: $\det[[E] - \lambda I] = 0$

Si ottiene una equazione cubica: $\lambda^3 - I\lambda^2 + II\lambda - III = 0$

Importante è l'equazione del primo invariante:

$I = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z}$ che assume il significato di "dilatazione cubica".

* Leggi costitutive dei materiali

Le equazioni costitutive per un solido in campo lineare elastico legano tra loro il tensore delle tensioni e il tensore delle deformazioni secondo la legge di Hooke: $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$

Per un materiale isotropo e omogeneo 2 parametri elastici:

- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - $E =$ modulo di elasticità longitudinale

- $G =$ modulo di elasticità tangenziale

- $\nu =$ Modulo di Poisson

Si avrà allora un prodotto matriciale del tipo

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$$

$$\{\epsilon\} = [D] \{\sigma\}$$

dove $[E]$ è il "tensore di elasticità del materiale" e $D = E^{-1}$

Siccome i valori σ e σ' sono gli stessi, come anche E con E' , possiamo unire le equazioni 3 con 4 ottenendo:

$$E_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

Unendo invece la 4 con 3 otteniamo:

$$E_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Esercizio

Dato uno stato di tensione con:

$$I = 200 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 100 \text{ MPa} \quad E = 200 \text{ 000 MPa} \quad \nu = 0,3$$

Calcolare il tensore di deformazione

Siccome siamo nel caso di tensione piana, sappiamo che ci dovrà essere una direzione principale con righe e colonne tutte nulle; si sa che questa è σ_{zz}

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 100 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo si ricava dal fatto che

$$I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 200$$

Una sarà nulla e le altre

due di valore uguale.

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & E_{zz} \end{bmatrix}$$

$$E_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} + \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{1}{200 \text{ 000}} [100 + \nu 100] = 3,5 \times 10^{-4}$$

$$E_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})] = 3,5 \times 10^{-4}$$

$$E_{zz} = \frac{1}{E} [0 + 0,3(100 + 100)] = 3 \times 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{xy}}{E} \cdot 2(1 + \nu) = \frac{2,6 \cdot 100}{200 \text{ 000}} = 13 \times 10^{-4}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 3,5 \times 10^{-4} & 6,5 \times 10^{-4} & 0 \\ 6,5 \times 10^{-4} & 3,5 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \rightarrow$$

Stato piano di Tensione

Si assume l'asse z come perpendicolare al piano in esame: $\epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$. Quindi:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

con $\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

La relazione inversa sarà:

$$\{\sigma\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\epsilon\}$$

- Problema

Dato uno stato di deformazione piano:

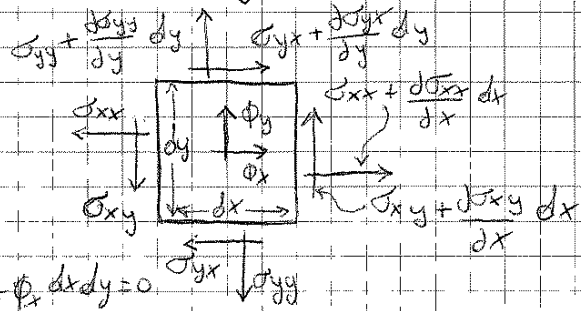
$\epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ con le altre componenti del tensore pari al 0,4%, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $E = 200000 \text{ MPa}$ e $\nu = 0,3$, calcolare il tensore delle tensioni e tracciare i cerchi di Mohr con il metodo grafico + Svolgimento:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & \frac{2}{3}E_{xy} & 0 \\ \frac{2}{3}E_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalle formule inverse dello stato piano di deformazione possiamo ricavare σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} e τ_{xy} !

Equazioni differenziali indefinite di equilibrio

Considerata un'area infinitesima dA nel piano $x-y$, di lati dx e dy , avremo i seguenti valori delle tensioni delle tensioni



Equilibrio per l'asse x :

$$\left(-\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{d\sigma_{xx}}{dx} dx\right) dy + \left(-\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{d\sigma_{yx}}{dy} dy\right) dx + \phi_x dx dy = 0$$

Equilibrio per l'asse y :

$$\left(-\sigma_{xy} + \sigma_{xy} + \frac{d\sigma_{xy}}{dx} dx\right) dy + \left(-\sigma_{yy} + \sigma_{yy} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} dy\right) dx + \phi_y dx dy = 0$$

Estendendo le due equazioni di equilibrio al caso tridimensionale, otteniamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\sigma_{yx}}{dy} + \frac{d\sigma_{zx}}{dz} + \phi_x &= 0 \\ \frac{d\sigma_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\sigma_{zy}}{dz} + \phi_y &= 0 \\ \frac{d\sigma_{xz}}{dx} + \frac{d\sigma_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_{zz}}{dz} + \phi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \sum_{i=1}^3 \frac{d\sigma_{ji}}{dx_i} + \phi_j = 0 \quad (j=1, 2, 3)$$

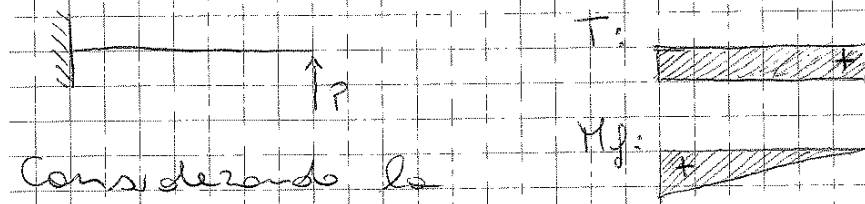
"L'equilibrio è garantito da un sistema di equazioni differenziali che prendono il nome di equazioni differenziali indefinite di equilibrio"

- Problema elastico 3D

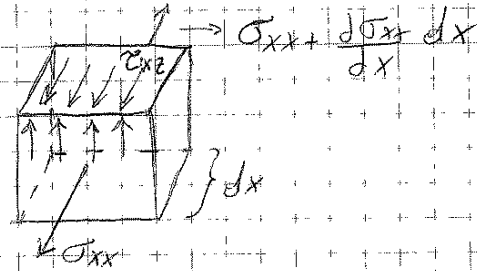
La soluzione di un problema elastico 3D richiede la conoscenza dello stato di tensione e deformazione in tutti i punti; per questo c'è il bisogno di soddisfare:

- Equilibrio (eq. differenziali indefinite)
- Congruenza (eq. in $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$)
- Leggi costitutive ($\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\}$; $\{\epsilon\} = [D]\{\sigma\}$)

Per ciò che riguarda τ_{xy} , cioè il taglio, si possono fare le seguenti considerazioni:



Considerando la sua sezione, su di essa si avranno diverse tensioni non nulle:



Tenendo conto del legame differenziale tra sforzo di taglio e momento flettente: $\frac{dMf}{dx} = T_y$

Si ottiene: $\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = \frac{T_y}{J_z} \cdot y$

Integrando otteniamo: $\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_{zcy}}{J_z \cdot b(y)}$

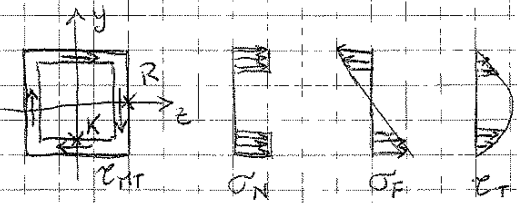
Considerando l'equazione diff. indefinita di equilibrio nella sezione del solido di Saint Venant

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\sigma_{yx}}{dy} + \frac{d\sigma_{zx}}{dz} = 0$$

Segue che: $\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} &= \frac{T_y}{J_z} y = f_1(y) \\ \frac{d\sigma_{yx}}{dy} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{T_y \cdot S_{zcy}}{J_z \cdot b(y)} \right) = f_2(y) \end{aligned} \right\} \tau_{zx} = (-f_1(y) - f_2(y)) z$

$\sigma_{zx} = \tau_{zx} = f(z) = \alpha z$

1) Nello sezione maggiormente sollecitata Tracciare l'andamento delle tensioni:



$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{10\ 000}{50^2 - 46^2} = 26\ \text{MPa}$$

$$\sigma_F = \frac{M}{J_z} y = \frac{500 \cdot 250\ \text{Nmm}}{\frac{1}{12} (50^4 - 46^4)} = 21\ \text{MPa}$$

$$\tau_{Tmax} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} = \frac{3}{2} \frac{500}{(50^2 - 46^2)} = 2\ \text{MPa}$$

$$\tau_{HT} = \frac{M_T}{2J_{zS}} = \frac{400\ 000\ \text{Nmm}}{2(48^2)(2\ \text{mm})} = 11\ \text{MPa}$$

5) Individuare il punto maggiormente sollecitato e scrivere il tensore per quel punto

Punto K

$$\sigma_{xx} = \sigma_N + \sigma_F = 47\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xz} = -\tau_{HT} = -11\ \text{MPa}$$

Punto R

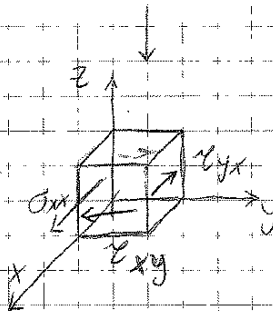
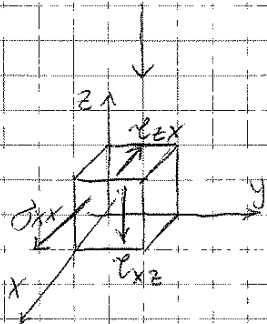
$$\sigma_{xx} = \sigma_N = 26\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = +\tau_{HT} = \tau_{Tmax} = -13\ \text{MPa}$$

Il meno è dovuto al fatto che la direzione delle tensioni ha verso opposto all'orientazione degli assi. Notiamo che, in valore assoluto, il punto maggiormente sollecitato è K!

$$[\sigma_K] = \begin{bmatrix} 47 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_R] = \begin{bmatrix} 26 & -13 & 0 \\ -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



* Criteri di cedimento statico

Il cedimento è definito come:

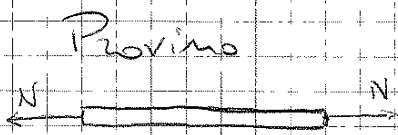
"Ogni cambiamento di dimensione, forma o proprietà del materiale di una struttura o suo componente che li rende inadeguati ad svolgere le funzioni per le quali erano stati progettati e costruiti."

Per controllare il cedimento o la rottura di un componente è necessario considerare:

- Il tipo di cedimento: deformazione elastica, plastica, frattura o modifica del materiale.
- I fattori influenzanti il cedimento: tipo di carico (statico, transitorio ecc), il tempo di carico, la temperatura, l'ambiente in cui si svolge.
- La localizzazione della rottura: interna o superficiale.

Analisi del cedimento

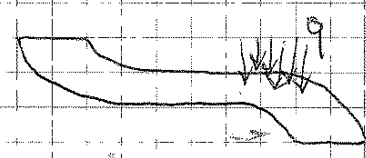
Si valuta lo stato di tensione su un provino da laboratorio in modo da determinare le proprietà del materiale. Poi si passa allo studio delle tensioni o delle componenti reali con la valutazione del Tenso_{re} delle tensioni, confrontandola col modello delle prove sul materiale.



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Monoassiale

Componente Reale



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Pluriassiale

Si avrà quindi cedimento se si verifica una delle seguenti ipotesi:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \geq \sigma_e \quad |\sigma_2 - \sigma_3| \geq \sigma_e \quad |\sigma_3 - \sigma_1| \geq \sigma_e$$

Notiamo che i valori assoluti non rappresentano altro che i diametri dei cerchi di Mohr.

3) Ipotesi di Von Mises: criterio dell'energia di distorsione.

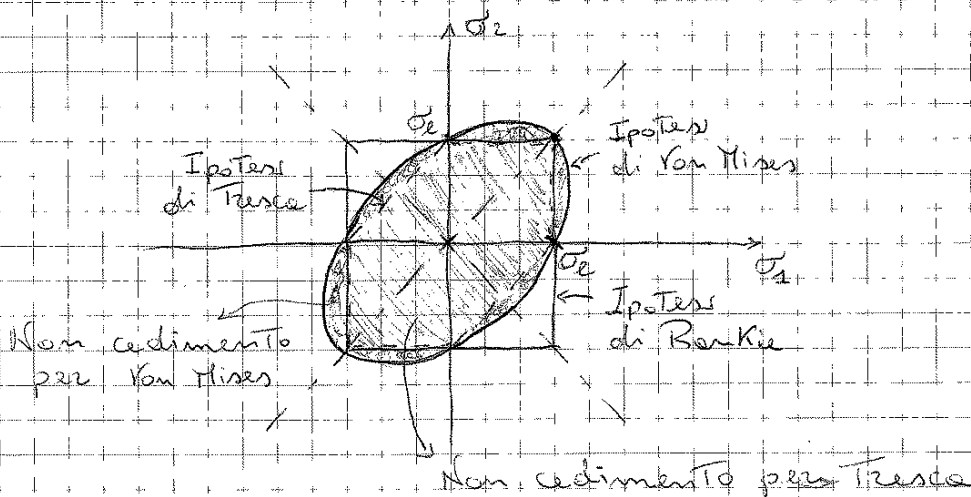
$$[D] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

"Si ha rottura se il valore dell'energia di distorsione raggiunge e supera l'energia di distorsione del provino che ha portato al cedimento."

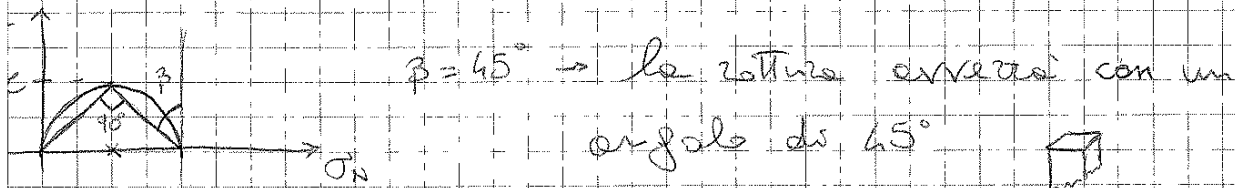
Si avrà cedimento se $U_d \geq U_{dlim}$, cioè:

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \geq \sigma_e$$

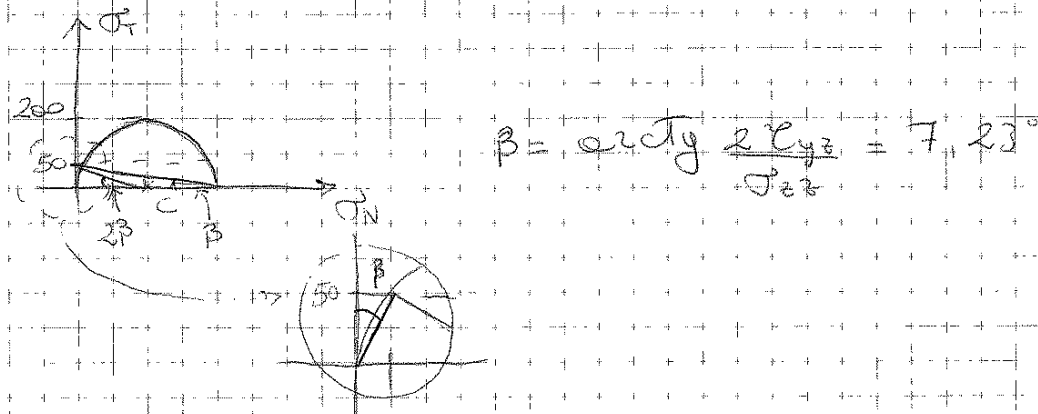
Rappresentazione grafica delle 3 ipotesi.



Per calcolare l'angolo di rotazione dovuta a ϵ_{max} consideriamo sempre il cerchio di Mohr



Cosa succede invece se $\nu = 50$?



Calcolo delle componenti del tensore delle deformazioni

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Dove

$E \approx 75 \text{ GPa}$ ν è il modulo di Poisson

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Energia di distorsione

L'energia totale può essere scritta come somma dell'energia volumica più quella di distorsione:

$$U_T = U_V + U_D$$

Da qui possiamo ricavare il valore dell'energia di distorsione

$$U_V = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (E_1 + E_2 + E_3) \right]$$

Sostituendo $E_i = \frac{1}{E} [\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)]$ per ogni E , si ottiene: $U_V = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$

E si può così ricavare che:

$$U_D = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

In generale, l'energia di distorsione può essere di due tipi:

$$U_{D \text{ piano}} = \frac{1+\nu}{6E} (2\sigma_x^2) \quad U_{D \text{ lim}} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_x^2$$

4) Ipotesi di Beltrami: criterio della energia di deformazione

"Si ha cedimento di una struttura o di un componente sollecitato da uno stato di tensione pluriassiale σ_i viene se la massima tensione tangenziale eguaglia o supera la tensione tangenziale limite in stato di tensione monoassiale".

Si avrà quindi cedimento se: $U_T \geq U_{D \text{ lim}}$

$$\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_1) \right] \geq \sigma_x^2$$

Avendo supposto $U_{T2} = \frac{1}{2E} \sigma_x^2$

Coefficiente di sicurezza γ

È un numero maggiore di 1 che viene indicato con γ e n

Utilizzando questo valore, per quanto riguarda il criterio di Tresca, sostituendo l'equazione per le tensioni principali: $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} \pm \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xy}^2})$ otteniamo la relazione:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \frac{\sigma_e}{\gamma}$$

Lo stesso procedimento può essere fatto per il criterio di Von Mises, ottenendo:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \frac{\sigma_e}{\gamma}$$

Più il valore del coefficiente è elevato più la struttura porterà con sé una "riserva"

Per i materiali duttili il coefficiente di sicurezza γ è dato da $\frac{\sigma_{td}}{\sigma_e}$; per i materiali fragili invece $\frac{\sigma_{td}}{\sigma_r}$ $\mu = \frac{\text{SOVRACCARICO PROGETTO}}{\text{CARICO DI PROGETTO}}$

Il suo valore (numerico) può dipendere da diversi fattori, tra cui i principali sono:

- livello di approssimazione del modello e dei calcoli effettuati.
- conoscenza delle condizioni operative di servizio del componente.
- livello di confidenza delle proprietà di resistenza del materiale.

Vacanze di Natale →