NUMERO: 749

DATA: 30/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Antonellini

MATERIA: Geometria + Esercizi

Prof. Ferrarotti

GEOMETRIA

07/03/2013

LIBRI:

- Gatto (specifico sul nostro corso): Lezioni di Algebra lineare e Geometria per l'ingegneria,
- Cordovez, Chissà chi lo sa

noi usiamo le dispense
- Carlini; (ESCULAPIO) (TEST)
- BALDOVINI, LANZA (esercizi)
- 100 es.

ESERC

ESAME:

1 - Quiz (cartaceo) 16
2 - esercizi 2

2 h

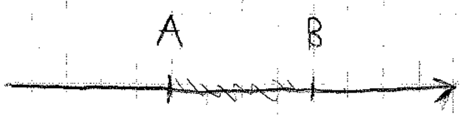
1 - 1,5 punti a quiz; bisogna fare almeno 8 quiz giusti

2 - 5 punti per esercizio

NO ORALE !!!

CALCOLO VETTORIALE

(RETTA) PIANO / SPAZIO
$\underbrace{\text{(RETTA)}}_{\text{ambiente base}}$



Vettori Applicati $\qquad \overrightarrow{AB}$: SEGMENTI ORIENTATI

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

Punto O (leggi 'o')

$\overrightarrow{OP}$ Insieme dei VETTORI APPLICATI in O

$\overrightarrow{OO} = \overline{O}$ Vettore nullo

P : PUNTO VARIABILE $P \neq O$

$\overrightarrow{OP} = \vec{v}$

UNITÀ di MISURA LINEARE

$|\overline{AB}|$

$|\overrightarrow{OP}| = |\vec{v}|$ <u>NORMA</u> o <u>MODULO</u> di $\vec{v}$

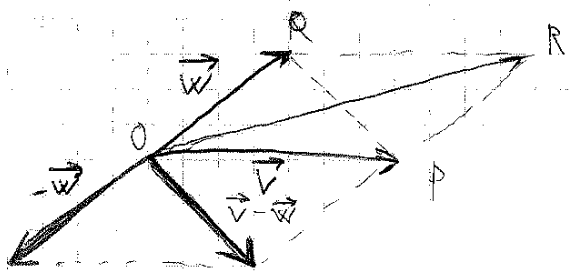
$|\overline{O}| = 0$

DIREZIONE = RETTA OP

VERSO : POS. o NEG. (di solito POS. verso Dx,
NEG. " Sx)

SOTTRAZIONE

$\vec{v} - \vec{w}$



Nel parallelogramma, la diagonale maggiore è la somma; la diagonale minore è la sottrazione

PROPRIETÀ della SOMMA

1) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ (COMMUTATIVA)

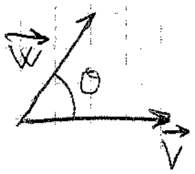
2) $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$ (ASSOCIATIVA)

3) Esiste $\overline{0}$ tale che: $\vec{v} + \overline{0} = \vec{v}$ per ogni $\vec{v}$

4) Per ogni $\vec{v}$ esiste $-\vec{v}$ tale che $\vec{v} + (-\vec{v}) = \overline{0}$

PRODOTTO SCALARE

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta(\vec{v}, \vec{w}) \qquad \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$



$0 \leq \theta(\vec{v}, \vec{w}) \leq \pi$

se $\vec{v}$ o $\vec{w} = 0 \implies \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

- $\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \iff 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

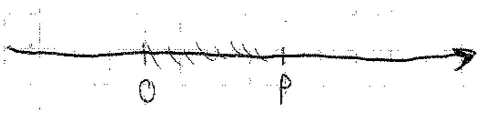
PROPRIETÀ

1) COMMUTATIVA: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
2) DISTRIBUTIVA: $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$
3) $(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w})$

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \geq 0}$$

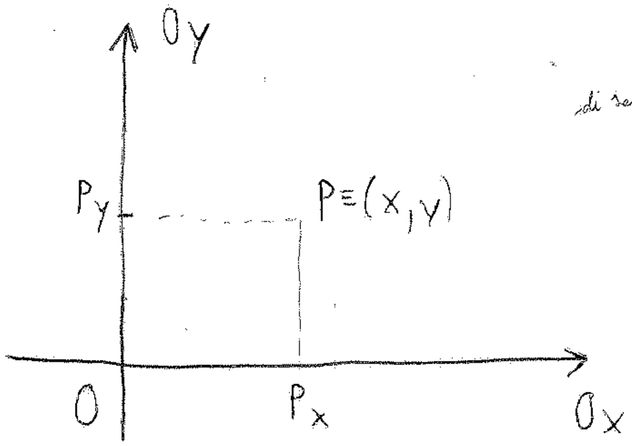
$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

COORDINATE



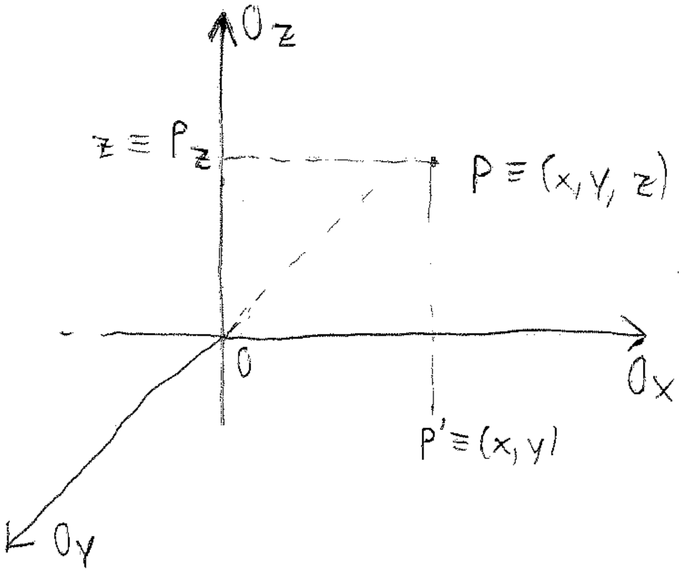
scelgo verso di percorrenza e unità di base

$$x = \begin{cases} |OP| & \text{se } P \text{ a Dx di } O \\ -|OP| & \text{se } P \text{ a Sx di } O \end{cases}$$



di solito stessa unità di misura

$\boxed{\text{SISTEMA } Oxy}$



$\overline{O} = (0,0,0)$

$\vec{V} = \vec{OP} = (x,y,z)$

$OP = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$$\vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\cdot\vec{k}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\cdot(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= xx' + yy' + zz'$$ (con tutte le operazioni del caso)

es) $\vec{v} \equiv (1, -1, 1)$

$\vec{w} \equiv (2, 1, 3)$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 + 1\cdot 3 = 2 - 1 + 3 = 4$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\cos\theta > 0} \Downarrow \boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2}}$$

$$\vec{v} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}$$

$$\vec{w} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{14}$$

$\vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$\vec{v} \wedge \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{u} + y'\vec{j} + z'k)$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k} =$$

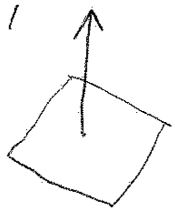
$$= (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

Non può NON essere nello spazio: consideriamo, ad es.

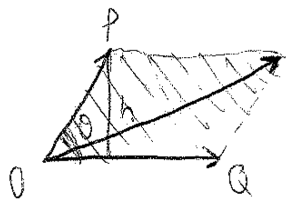
$(x, y, 0)$ e $(x', y', 0)$

quella forma si riduce a $(xy' - x'y)\vec{k}$,

cioè la componente su z



es)



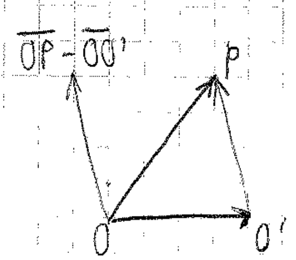
~~$\vec{v} = OQ$~~ $\vec{v} = OP$

$\vec{w} = OQ$

Area (H) $= |OQ| \cdot |OP| \cdot \sin\theta = |\vec{v} \wedge \vec{w}|$

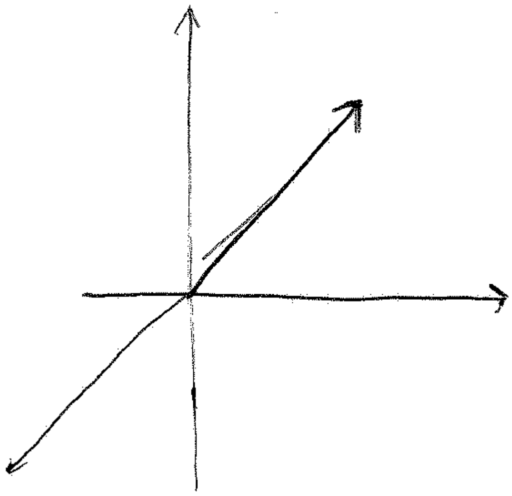
il modulo è uguale all'area del parallelogramma.

08/03/2013



$\overrightarrow{OP}$ "=" $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$

Oxyz



$$\cos\theta(\vec{v},\vec{i}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|} = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

$\vec{v} = (x, y, z)$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\vec{v} \cdot \vec{i} = x$

$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

corrisponde alla coordinata x normalizzata

$$n(\vec{v}) = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$$

$$\cos\theta(\vec{v},\vec{j}) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\theta(\vec{v},\vec{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

COSENI DIRETTORI

Se $P \in r$ esiste (unico) punto Q in r' tale che
$\overline{OP} = Q + P_1$

Ma $Q = t\overline{v}$ (retta passante per O) per un $t \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \underbrace{\overline{OP} = t\overline{v} + P_1}_{\text{formula parametrica della retta}}$$

(va bene anche nello spazio)

Andiamo a vederlo col supporto della Geometria analitica.

$\overline{v} = \overline{OP} \iff P \equiv (x, y, z) \Longrightarrow P = (x, y, z)$

Retta in forma PARAMETRICA:

$$\boxed{P(t) = tA + P_0}$$

A vettore direzione

P_0 punti "di passaggio"

oppure:

con $A = P_1 - P_0$

$$\boxed{P(t) = \underbrace{t(P_1 - P_0) + P_0}_{\text{PARAMETRIZZAZIONE di } r}}$$

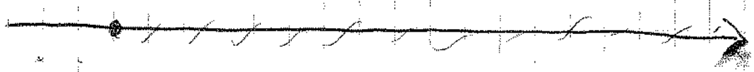
PARAMETRO

$t \in \mathbb{R}$

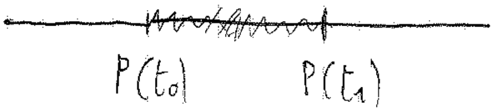
RETTA per 2 punti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 413

$t > 0$ o $t \geq t_0$ SEMIRETTO



$t_0 \leq t \leq t_1$ SEGMENTO



$0 \leq t \leq 1$ SEGMENTO $\overrightarrow{P_0 P_1}$

$r: \quad P(t) = At + P_0$

$r': \quad P'(t) = A't + P_1$

$r \parallel r' \iff A \parallel A'$

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

(r e r' possono essere anche coincidenti)

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

INTERSEZIONE tra 2 rette

$r \cap r' = ?$

$$\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = t - 4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

metodo sbagliato → soluz. giusta

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \\ x = -2t + 2 \\ y = t - 4 \end{cases} \rightarrow -t + 3 = t - 4 \qquad t = \frac{7}{2} \rightarrow \begin{matrix} x = 8 \\ x = -5 \end{matrix}$$

sono parallele e NON coincidono

Quando 3 punti sono <u>allineati</u> nello SPAZIO?

P_0, P_1, P_2 sono ALLINEATI se

$P_0, P_1, P_2 \in r$, RETTA

facciamo un ragionamento al contrario: (la dimostraz. c'è in entrambi i sensi perché c'è $\Leftrightarrow$)

r retta per P_0, P_1

$r: \quad P(t) = t\,(P_1 - P_0) + P_0$

$P_2 \in r \iff \exists\ \bar{t} : \quad P_2 = \bar{t}\,(P_1 - P_0) + P_0$

e dunque $P_2 = P(\bar{t})$

$\Rightarrow P_2 - P_0 = \bar{t}\,(P_1 - P_0)$

Quindi sono ALLINEATI $\iff P_1 - P_0 \parallel P_2 - P_0$

es) $P_0 = (1, 1, -2)$, $P_1 = (2, 0, -1)$, $P_2 = (1, 1, 1)$

$\{\underbrace{a_{ij}}_{\text{ELEMENTI di } A}\}$ — INSIEME di ELEMENTI = MATRICE

$[A]_{ij} = a_{ij}$ — elemento in posizione (i, j)

MATRICE $m \times n$

$A = B \iff [A]_{ij} = [B]_{ij}$ per ogni (i, j)

es)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 3 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}$$

$[A]_1$ — RIGA (di indice 1)

COLONNA

$[A]^2$

A ha m Righe, n COLONNE

i = indice di Riga

j = indice di Colonna

$[A]_i$: <u>Riga</u> di Indice i

$[A]^j$: <u>Colonna</u> di indice j

COLONNE e RIGHE sono particolari SOTTOMATRICI

$A \in M_n$ matrice quadrata

$\{[A]_{ii}\}$ $\underbrace{\text{DIAGONALE PRINCIPALE}}_{\text{solo nelle QUADRATE}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

OPERAZIONI tra MATRICI

1) OPERAZIONI LINEARI

1.1) SOMMA $A, B \in M_{m,n}$

$A + B \in M_{m,n}$ $\quad [A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$

devono avere gli stessi m e n

- PROPRIETÀ

S1) $A + B = B + A$

S2) $A + (B+C) = (A+B) + C$

S3) Se $O_{m,n}$ è la matrice $m \times n$ con tutti gli elementi $= 0$ (MATRICE NULLA)

$$A + O_{m,n} = A$$

S4) $A + (-A) = O_{m,n}$ dove

$-A$ è data da: $[-A]_{ij} = -[A]_{ij}$

es) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dots \end{bmatrix}$

2) PRODOTTO tra MATRICI (di ordini diversi)

o RIGHE × COLONNE

$A_{m \times n}$ $\quad B_{n \times p}$

(NON si può fare se il numero di colonne della prima NON è uguale al numero di righe della seconda)

(A, B) MOLTIPLICABILE

AB PRODOTTO $m \times p$

1° CASO:

$A \in M_{1,n}$ $\quad B \in M_{n,1}$

$A = [a_1 \dots a_n]$ $\quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

È una specie di PRODOTTO SCALARE

$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

il risultato è uno SCALARE, cioè una matrice 1×1

es) $[1 \ 1 \ 2 \ -3] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 - 1 + 4 + 0 = 3$

TRASPOSIZIONE

$A \in M_{m,n}$

es) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad \underbrace{{}^tA}_{\text{TRASPOSTA di } A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$[{}^tA]_{ij} = [A]_{ji}$

- PROPRIETÀ

1) ${}^t({}^tA) = A$

2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ e ${}^t(\alpha A) = \alpha\, {}^tA$

LINEARITÀ

3) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$

$M_{m,n} \longrightarrow M_{n,m}$

$A \longrightarrow {}^tA$

$I_n \qquad [I_n]^i$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}^te_1 = [1\ 0\ 0] \qquad {}^te_2 = [0\ 1\ 0] \qquad {}^te_3 = [0\ 0\ 1]$

trasposta

VETTORI CANONICI e_i $\qquad I_2 \qquad n = 2$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

PRODOTTO e MATRICI QUADRATE

$M_n \qquad A \cdot A = A^2$

Si parla di potenze di matrici solo quadrate

$$A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ volte}}$$

In generale $A \cdot A$ NON DEFINITE (se mai $A \cdot {}^t A$)

es)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 6+4 & 8 \\ 18+5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 23 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 2+12 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$$

NON è COMMUTATIVA

- $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$

Def: $A \in M_n$

A si dice INVERTIBILE

se esiste $B \in M_n$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$

insieme delle A ...

$GL_M = \{A \text{ invertibile } m \times n\}$

Se $A \in GL_M$, allora B tale che:

$AB = BA = I_n$ è unica

Dim: B_1, B_2

$$A B_1 = B_1 A = I_n$$

$$A B_2 = B_2 A = I_n$$

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 (A B_2) = (B_1 A) B_2 = I_n B_2 = B_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B_1 = B_2$$

B è UNICA e si dice INVERSA di A

es) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ è invertibile? NO: c'è lo 0 in posizione 2,2

$I_n = A \cdot B \qquad [AB]_{22} = [A]_2 \, [B]^2$

N.B.: Se una matrice ha una riga o colonna completamente NULLA, NON è INVERTIBILE

DETERMINANTE (~~mat~~ riguardo solo le matrici quadrate)

$A \in M_n \qquad \det A \; ; \; D(A) \; ; \; |A|$

- $n=1 \qquad A \in \mathbb{K} \qquad \det A = A$
- $n=2 \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb$
- $n=3$

es) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

spesso conviene scegliere quella con + zeri

det A = (scegli una riga della matrice)

$= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + (-3) \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -24$

calcolato con lo SVILUPPO di LAPLACE

SVILUPPO del Determinante di A rispetto alla RIGA i

DIM:

$A \in M_n \qquad \det A \neq 0$

A_{ij} sottomatrice ottenuta eliminando la riga $^i[A]_i$ e la colonna $[A]^j$

$$[B]_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det (A_{ji})}{\det A}$$

una sorta di trasposta, ~~è~~ priva della riga j e colonna i

vale: $AB = BA = I_n$

quindi $A \in GL_n$ e $B = A^{-1}$

E dunque: $\boxed{A \in GL_n \Longleftrightarrow \det A \neq 0}$ → NON è però la definizione

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = ad - bc \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ — Sempre valida

es)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 2 + 2 = 4$

Def: $A, B \in M_{m,n}$; A e B sono EQUIVALENTI per RIGHE ($A \sim B$) se B si ottiene da A con un numero finito di OE (operazioni elementari).

$A \sim B$: RELAZIONE di EQUIVALENZA

$A \sim A$ PROP. RIFLESSIVA

$A \sim B \Longrightarrow B \sim A$ " SIMMETRICA (le operazioni sono reversibili)

$A \sim B$, $B \sim C \Longrightarrow A \sim C$ PROP. TRANSITIVA

MATRICI a SCALA

$A \in M_{m,n}$ $\quad A \neq 0_{m,n}$

$\underbrace{[A]_i}_{\text{riga}} \underbrace{\neq 0_{1,n}}_{\text{non nulla}}$

$[A]_{i j(i)}$ PRIMO ELEMENTO non NULLO di $[A]_i$

es) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

$i = 1 \quad j(1) = 1$

$[A]_{1 j(1)} = 1$

$i = 2, \quad j(2) = 2$

$i = 3, \quad j(2) = 1$

Def: A a scala si dice RIDOTTA se i PIVOTS sono gli ~~unici~~ elementi $\neq 0$ nelle loro colonne

Ci si può arrivare con operazioni del 1° TIPO

es)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{SRN}$$

↓

MATRICE a SCALA RIDOTTA NORMALIZZATA

MATRICE SRN

TEOREMA di RIDUZIONE

T Sia $A \in M_{m,n}$, $A \neq 0_{m,n}$.
Allora A è equivalente per righe ad un'$\boxed{\text{unica}}$ MATRICE SRN

A_{SRN} si dice FORMA SRN di A

Oss.: $I_n \xrightarrow[\text{(operaz. elementare)}]{OE} E$ matrice elementare (matrice ottenuta da op. elem.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+2(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{n \times n}{A} \xmapsto{OE} A'$$

Vale $A' = EA$

Con MATRICE QUADRATA $A_{n \times n}$

$$A' = EA \implies \det A' = \det E \cdot \det A$$

OE $\quad I_n \xrightarrow{OE} E$

- OE 1° TIPO: $\det E = 1 \implies \det A' = \det A$
- OE 2° TIPO: $\det E = -1 \implies \det A' = -\det A$
- OE 3° TIPO:

Se $I \xrightarrow{\alpha \cdot (i)} E$ con $\alpha \neq 0$

$$\implies \det E = \alpha \implies \det A' = \alpha \cdot \det A$$

$$\boxed{\det(\alpha A) = \alpha^{n} \det A}$$

ordine della matrice

$$A_{SRN} = \begin{cases} \boxed{I_n, \text{ se } r(A)=n} \Rightarrow \text{in questo caso } A \text{ è invertibile} \\ \boxed{\text{almeno una riga nulla, se } r(A)<n} \end{cases}$$

$\Downarrow$

A <u>non</u> è invertibile

E dunque, i 2 criteri per stabilire l'invertibilità, sono:

- $A \in GL_n \iff \det A = 0$
- $A \in GL_n \iff r(A) = n$

Se $r(A) = n$

$(E_K E_{K-1} \dots E_1) A = I_n \Rightarrow A^{-1} = E_K \dots E_1$

$E_1 [A \mid I_n] =$

$[E_1 A \mid E_1]$

con $K = 3$

$$[\underbrace{E_3 E_2 E_1 A}_{\substack{= \\ A_{SRN} \\ (\text{se } r(A)=n)}} \mid E_3 E_2 E_1]$$

$\Downarrow$

$[I_n \mid A^{-1}]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 413

08/03/2013

Es. 1)

Siano $\vec{u} = ai + 2j + bK$

$\vec{v} = (1-b)i + bj + 2K$

$\vec{w} = bi + bj + 2K$

Trovare i valori di a e b per cui u + v e w hanno la stessa direzione

$\mathbb{R}^3$ → nello spazio

$\underbrace{ai + bj + cK}_{\text{VETTORE}} \Longleftrightarrow \underbrace{(a, b, c)}_{\text{PUNTO}}$

$\underbrace{\underbrace{i = (1,0,0)}\quad \underbrace{j = (0,1,0)} \quad \underbrace{K = (0,0,1)}}_{\text{NOTAZIONE CANONICA}}$

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad u + v = \lambda \vec{w}$

Sommiamo u e v: $(a-b+1,\ 2+b,\ b+2) = (\lambda b, \lambda b, 2\lambda)$

$$\begin{cases} a-b+1 = \lambda b \\ b+2 = \lambda b \\ b+2 = 2\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2+1 = 4 \Rightarrow a = 5 \\ b = 2 \\ 4 = 2\lambda \qquad \lambda = 2 \end{cases}$$

a) $|u+v|^2 = |u|^2 + \overbrace{2u \cdot v}^{\Rightarrow 0} + |v|^2$ (sono ortogonali x Hp)

$|u-v|^2 = |u|^2 \underbrace{- 2u \cdot v}_{\Rightarrow 0} + |v|^2$ (sono ortogonali x Hp)

sono uguali

$\Rightarrow |u+v|^2 = |u-v|^2$

$\Rightarrow |u+v| = |u-v|$

i quadrati sono uguali, lo sono anche loro, quindi è necess. e suff. (?)

b) $(u+v) \cdot (u-v) = 0$ (sono ortogonali)

$u \cdot u + uv - uv - v \cdot v = 0$

$|u|^2 - |v|^2 = 0$

$|u|^2 = |v|^2$

$|u| = |v|$

b) $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$

$$\cos\theta = \frac{\overset{(1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1)}{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$(i + j) \times (i + K)$$

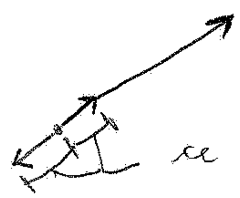
ogni volta che compare un termine dispari (colonna + riga), devo anteporre il −

$$(1,1,0) \times (1,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

Il versore corrispondente si trova così:

$\frac{v}{|v|}$; il suo modulo deve essere così:

$$\left|\frac{v}{|v|}\right| = \frac{|v|}{|v|} = 1 \qquad |v| = \sqrt{3}$$



ce ne sono 2

Risposta $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , -\frac{1}{\sqrt{3}} ; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 413

Es. 5)

Calcolare $|u \times v|$ sapendo che $|u| = 1$, $|v| = 2$ e $u \cdot v = 1$

$$u \cdot v = 1 = |u||v| \cdot \cos(u,v)$$

$$1 \cdot 2 \cos(u,v) = 1$$

$$\cos(u,v) = \frac{1}{2} \implies (u,v) = \frac{\pi}{3}$$

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin(u,v) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Esercizio per casa

Trovare tutti i vettori di norma 5 perpendicolari a $2i + j - 3K$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5 \qquad \vec{X} = (x, y, z)$$

$$\vec{X} \cdot \vec{v} = 0$$

$$2x + y - 3z = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4x^2 + 9z^2 - 12xyz + z^2 = 25 \\ y = -2x + 3z \end{cases}$$

$$5x^2 - 12xz + 10z^2 = 25$$

Es. 2

Nel piano xy $(z=0)$:

a) Trovare il punto P comune alle due rette:

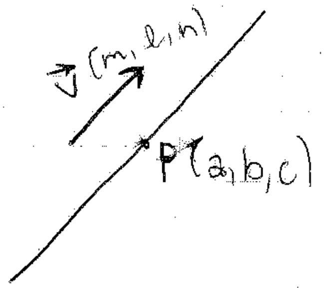
$x+2y=4$ e $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+2t \end{cases}$

b) Scrivere l'eq. della retta passante per P e parallela a $3x-y=7$

c) Scrivere l'eq. della retta passante per P e per il punto $(3,1,0)$

Forma parametrica di una retta:

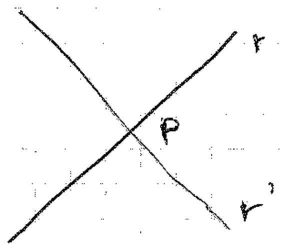
a)



$$\begin{cases} x=a+mt \\ y=b+lt \\ z=c+nt \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$r: \begin{cases} x+2y=4 \\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=4-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{con } y=t$$

$$r': \begin{cases} x=1-3t \\ y=2+2t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{direzione } r': \vec{w}=(-3,2,0)$$

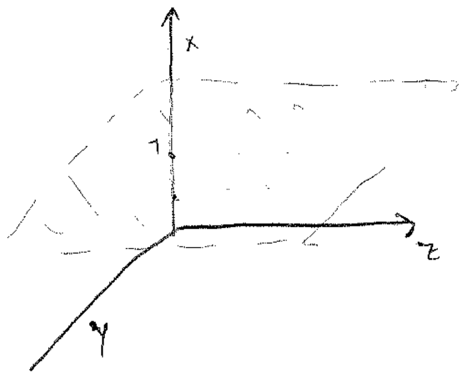


Es. 3

Verificare che le rette:

$$l: \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad m: \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

giacciono sullo stesso piano e sono perpendicolari

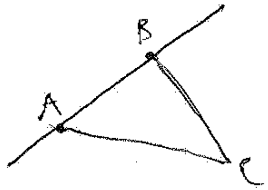


Prodotto scalare fra le direzioni

$$(0, -1, 1) \cdot (0, 1, 1) =$$
$$= 0 - 1 + 1 = 0$$

Es.

Dati i punti $A(2,2,2)$, $B(1,1,1)$, $C(1,0,-1)$.
Provare che i punti non sono allineati e determinare l'area del triangolo $\hat{ABC}$



$l = \overline{AB}$

$C \in l$? NO

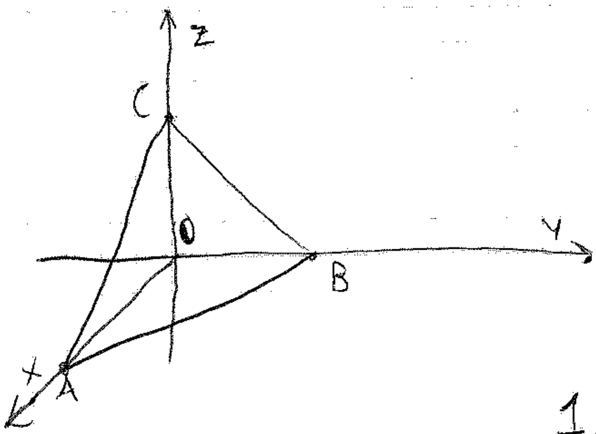
$$l = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} 1 = t \\ 0 = t \\ -1 = t \end{matrix}}$$

sono tutte contraddizioni

$C \notin l$

Es 4

Siano $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.
Determinare il volume del Tetraedro $OABC$



$$\text{Volume}_{OABC} = \frac{1}{6} \text{ Volume parallelepipedo generato dai vettori } \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$$

Prodotto misto.

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Prodotto misto $= 0 \Rightarrow$ complanarità

15/03/2013

MATRICI

PRODOTTO tra MATRICI

$$A_{m \times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n} \cdot l} = C_{m \times l}$$

$n = n$

es) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

3×3 $\qquad$ 3×2

$1 + 1 - 1 = 1$ $\qquad$ (1ª ~~colonna~~ riga, 1ª ~~riga~~ colonna: posiz. 1, 1)

$-1 + 0 - 1 = -2$ $\qquad$ (1ª " , 2ª " ; " 1, 2)

$2 + 1 + 0 = 3$ $\qquad$ (2ª " , 1ª " ; " 2, 1)

Se invece ~~pos~~ cerco di fare $B_{n \times \underline{l}} \cdot A_{\underline{m} \times n}$, non posso farlo

$l \neq m$

→ È commutativo se riesco a farlo?

es) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

2×2 $\qquad$ 2×2

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

In generale, se si può fare $B \cdot A$,

$$B \cdot A \neq A \cdot B$$

MATRICE IDENTITÀ

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_n^2 = I_n$$

ATTENZIONE: nei TEST spesso

→ Proviamo a trovare A tale che $A^2 = A$

$(A \neq I_n, A \neq O_n)$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Queste MATRICI sono dette IDEMPOTENTI

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ di IDEMPOTENZA

es) Trovare $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ tale che $A \neq 0$, $A^n = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICI QUADRATE

- A è SIMMETRICA $\iff {}^tA = A$
- A è ANTISIMMETRICA $\iff {}^tA = -A$

~~MATRICI QUADRATE~~

• SIMMETRICHE 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{12} = a_{21}$

$a_{13} = a_{31}$

$a_{23} = a_{32}$

$$\begin{pmatrix} a & \boxed{b} & \boxed{c} \\ \boxed{b} & d & \boxed{e} \\ \boxed{c} & \boxed{e} & f \end{pmatrix}$$

MATR. SIMM. a 6 PARAMETRI

insieme matrici simm.

$$\tilde{S} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Le MATRICI QUADRATE sono in generale a 9 PARAMETRI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 413

DIMOSTRIAMOLO

1) ${}^tB = B$, infatti

$${}^t\left[\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right] = \frac{1}{2}\,{}^t(A + {}^tA) = \frac{1}{2}\left({}^tA + {}^t({}^tA)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}({}^tA + A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$$

2) ${}^tC = -C$, infatti

$${}^t\left(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = \frac{1}{2}\,{}^t(A - {}^tA) = \frac{1}{2}\left({}^tA - {}^t({}^tA)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

es) 1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right]$$

Trovare B e C

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \quad [14]$$

3) $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 413

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}\cdot a_{21} + 2a_{11} = -1 \\ a_{11}\cdot a_{12} + a_{12}\cdot a_{22} + 2a_{12} = 0 \\ a_{21}\cdot a_{11} + a_{22}\cdot a_{21} + 2a_{21} = 0 \\ a_{21}\cdot a_{12} + a_{22}^2 + 2a_{22} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + b\cdot c + 2a = -1 \\ a\cdot b + b\cdot d + 2b = 0 \\ a\cdot c + c\cdot d + 2c = 0 \\ d^2 + \cancel{c}\, b\cdot c + 2d = -1 \end{cases}$$

$$ab + bd + 2b = ac + cd + 2c$$

$$a^2 + \cancel{bc} + 2a = d^2 + \cancel{bc} + 2d \qquad \cancel{\Rightarrow a = d}$$

$$a(a+2) = d(d+2)$$

$$a^2 + 2a - d^2 - 2d = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2d + d^2}}{1} = \pm(d+1) - 1 = \left\langle \begin{matrix} d \\ -d-2 \end{matrix} \right. \Rightarrow a = -d-2$$

$$a + 2 = -d$$

1

$$2bd + 2b = 2cd + 2c$$

$$bd + b = cd + c$$

$$b\,\cancel{(d+1)} = c\,\cancel{(d+1)}$$

2

$$-(d+2)b + b\cdot d + 2b = -(d+2)c + cd + 2c$$

$$b\underbrace{(\cancel{-d}\cancel{-2}\cancel{+d}\cancel{+2})}_{=0} = c\underbrace{(\cancel{-d}\cancel{-2}\cancel{+d}\cancel{+2})}_{=0}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^2 + \underbrace{2\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}}_{=} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + ba \\ ab + ab & b^2 + a^2 \end{pmatrix}}_{=} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a + b^2 = -1 \\ 2ab + b = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$$

18/03/2013

~~Gesti~~ RIDUZIONE

3 Gesti: OPERAZIONI ELEMENTARI

1) Scambio 2 righe (colonne)
2) Moltiplicare un'intera riga (colonna) con scalare $\neq 0$
3) una riga sommata ad un'altra moltiplicata x uno scalare (poi da sostituire alla prima riga considerata)

1) es)
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

A

$$\det A' = -\det A$$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 - 25 - 18 = -46$$

$$\det A' = (-1) \cdot (-5) - 3(-6-1) + 2(10) = 5 + 21 + 20 = 46$$

2) es)
$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A'' = -1(-25) - 3(-30-5) + 2(50-0) =$$
$$= 25 + 105 + 100 = 230$$

$$\det A'' = 5 \cdot \det A'$$

es)

$$\underset{4\times5}{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&3\\0&2&2&2&4\\0&-1&-1&0&1\\0&2&2&3&-1\end{pmatrix}\longrightarrow \quad \boxed{r(A)\leq \min(m,n)}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1&3\\0&1&1&1&2\\0&-1&-1&0&1\\0&2&2&3&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1&3\\0&1&1&1&2\\0&-1&-1&0&1\\0&0&0&1&-5\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1&3\\0&1&1&1&2\\0&0&0&1&3\\0&0&0&1&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&1&3\\0&1&1&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-5\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&1&2\\0&0&0&1&3\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&1&2\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow \text{FORMA RIDOTTA}$$

$r(A)=3$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

es) Sia $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&3&0\\2&0&0&a\end{pmatrix}$;

trovare $r(A)$ e $r({}^tA)$ al variare di $a\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&3&0\\0&-2a&0&a\end{pmatrix}$$

- Se $a=0$, avrà rango 2

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

- Se $a\neq0$

$$\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&3&0\\0&2&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&3&0\\0&0&-6&-1\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\qquad r(A)=3$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-3a&0\\0&1&3&0\\0&0&1&1/6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}a\\0&1&3&0\\0&0&1&1/6\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cancel{-5}\,-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 - x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + x_4 \end{cases}$$

$$S = \{(1-x_3,\ 1+x_4,\ x_3,\ x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\underbrace{(1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,1,0,1)}_{\text{Somma Vettoriale delle Quaterne}} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

∞^2 soluzioni

2: numero di variabili <u>libere</u>

(Continuo Ves 2)

$$\begin{cases} x - y - 4z + 2t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$x - y \cancel{-4z} + 2t = 0 \Longrightarrow x = y - 2t$$

$$S = \{(y-2t,\ y,\ 0,\ t) \mid y, t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{y(1,1,0,0) + t(-2,0,0,1) \mid y, t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \underbrace{\mathcal{L}}_{\substack{\text{Combinazione lineare} \\ \text{tra 2 vettori}}}((1,1,0,0), (-2,0,0,1)) \underset{\text{anche}}{=} [(1,1,0,0), (-2,0,0,1)]$$

Combinando linearmente i 2 vettori, otteniamo tutte le sol.

$$AX = B \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (A X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) X = A^{-1} \cdot B$$

$$I_{3\times 3} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Verifichiamo l'inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

es) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$\lambda_1 = i \qquad A - iI = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -i$

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad y = ix \qquad \begin{cases} -ix + y = 0 \\ \cancel{-x - iy = 0} \end{cases}$

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ -i & -i \end{pmatrix} \qquad N^{-1}AN = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

A DIAG. su $\mathbb{C}$ ma NON su $\mathbb{R}$

RUFFINI

λ RADICE di $p_A(t)$

$p_A(t) = (t-\lambda)^{m} q(t) \quad$ ~~q(t)~~ con $\quad q(\lambda) \neq 0$

m molteplicità di λ

$m_A(\lambda)$: MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di A es) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°) $p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 2 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$

$$(3-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} = (3-t)(t^2-2t-3) = \cancel{(3)(t)}$$

$$= (3-t)(t-3)(t+1) = -(t-3)^2(t+1)$$

$\lambda_1 = 3$: $m(3) = 2$

$\lambda_2 = -1$: $m(-1) = 1$

$A \in M_n$ $\quad \lambda$ AUTOVALORI di A

Sol $(A - \lambda I)X = 0$

è un SSV di $\mathbb{R}^n$ in forma implicita di dim

$$n - r(A - \lambda I) = d_A(\lambda)$$

$\Downarrow$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ

$$\text{Sol}((A\cancel{A} - \lambda I)X = 0) = \underbrace{V_A(\lambda)}_{\text{AUTOSPAZIO di } \lambda}$$

$\dim V_A(\lambda) = d_A(\lambda)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 413

PROP: Sia $A \in M_n$ e siano $X_1, \dots, X_k$ autovettori di A con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distinti ($\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$).

Allora $\{X_1, \dots, X_k\}$ è LIBERO. ~~se~~ $k \leq n$

Se $k = n$ allora $\{X_1, \dots, X_n\}$ è una base di $\mathbb{K}^n$ di autovettori per A.

COR: Se $A \in M_n$ ha n autovalori distinti, allora A è DIAG.

OSS: Se $A \in M_n$ ha un solo AUTOVALORE λ con $m_A(\lambda) = n$, allora A è DIAG. $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $A = \lambda I_n$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Esiste $N \in GL_n$ tale che:

$$N^{-1}AN = \lambda I \implies A = N \lambda I N^{-1} \implies A = \lambda N N^{-1} = \lambda I_n$$

OSS: 0 è AUTOVALORE di $A \iff$

$\iff \det(A - 0I) = 0 \iff A$ non è INVERTIBILE

$\det A = 0$

$V_A(0) = Sol(Ax = 0)$

es) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & K-3 \\ 1 & K & 1 \end{pmatrix} \quad K \in \mathbb{R}$

Studiare la diag. di A al variare di $K \in \mathbb{R}$

1) POLINOMIO CARATT. $p_A(t) = \det(A - tI_3) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 2 & 1-t & K-3 \\ 1 & K & 1-t \end{pmatrix} =$

$= (3-t)(t^2 - 2t + 1 - K(K-3))$

2) RADICI POLINOMIO

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 1 + \sqrt{K(K-3)}$

$\lambda_3 = 1 - \sqrt{K(K-3)}$

3) $0 < K < 3$

A NON è DIAG. su $\mathbb{R}$

A è DIAG. su $\mathbb{C}$ (3 AUTOVAL DISTINTI

4) • $K = 0$ A NON DIAG

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad m_A(1) = 2$

$d_A(1) = 3 - r(A - I)$

• $K=-1$ $\lambda_1=\lambda_2=3$ $m_A(3)=2$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A-3I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$d_A(3)=3-1=2=m_A(3)$ $r(A-3I)=1$

A è DIAG.

• $K=4$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A-3I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$r(A-3I)=2$

$d_A(3)=1$

A NON DIAG

6) $K<0 \vee K>3 \wedge K\neq -1,4$

A è DIAG su $\mathbb{R}$; 3 AUT. DISTINTI

$T: M_{nn} \to M_{nn}$

$T(A)={}^tA$

$\exists\ T(A)=\lambda A$? $T(A)=A$, ${}^tA=A$

è possibile solo con:

• $\lambda=1$; $T(A)=A$ SIMMETRICHE

• $\lambda=-1$; $T(A)=-A$ ANTISIMMETRICHE

MATRICI SIMMETRICHE REALI

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $\quad A\in M_n(\mathbb{R})$ $\quad {}^tA=A$

Matrici Sim. sono tutte diagonalizzabili

quindi esiste

$N\in GL_n(\mathbb{R})$ T.C. $N^{-1}AN=D$

PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}^n$

$X=(x_1 \dots x_n)$

$Y=(y_1 \dots y_n)$

$$X\cdot Y = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_n\end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

$$X\cdot Y = \underset{1\times n}{{}^tX}\cdot \underset{n\times 1}{Y}$$

$$|X| = \sqrt{X\cdot X} = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

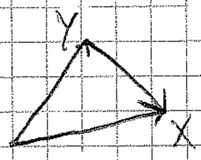
$\underbrace{X\cdot X \geq 0}$

$\Downarrow$

ha senso solo in $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$|X-Y|$ = distanza tra X e Y

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$



In particolare, base canonica

$\mathcal{C}_n = \{e_1 \dots e_n\}$ BASE ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$

$n=2$ $\quad (1,0) \quad (0,1)$

PROP: Se $\mathcal{B} = \{X_1 \dots X_n\}$ BASE ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$
e se $X \in \mathbb{R}^n$,
allora $X = \sum_{i=1}^{n} (X \cdot X_i) \cdot X_i$

$V = L(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ SSV

$X \neq 0$ BASE

$$\underbrace{\frac{1}{|X|} X} \qquad \underbrace{-\frac{1}{|X|} X}$$

sono i 2 versori che posso associare ai vettori; sono BASI ORTONORMALI

$\mathbb{R}^2 \quad (a,b) \neq (0,0) \qquad (b,-a) \perp (a,b) \rightarrow$ 2 BASI ORTONORMALI

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (a,b) \, , \, \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b,-a) \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (a,b) \, , \, \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-b,a) \right\}$$

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ SSV

$\dim U = 2$ — 1 non ci interessa
— 3 è già quella di $\mathbb{R}^3$

$U = Sol(AX = 0)$

$\dim U = n - r(A) = 3 - 1 = 2$

$U = Sol(ax + by + cz = 0)$

es. $x + y + z = 0$

$U = \{x + y + z = 0\}$ Cerco X_1, X_2 : $X_1 \perp X_2$
con X_1 e $X_2 \in U$

$X_1 = (1, -1, 0) \in U$

$X_2 = (x, y, z) \in U$ $X_2 \perp X_1$

$(x, y, z) \cdot X_1 = 0$

$$\begin{cases} x - y = 0 & x = y \\ x + y + z = 0 & 2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y \end{cases}$$

Pongo $x = 1 \Rightarrow$ $X_2 = (1, 1, -2)$

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} X_1, \frac{1}{\sqrt{6}} X_2 \right\}$ BASE ORTONORMALE

26/04/2013

$O(n)$

$\Downarrow$

MATRICI ORTOGONALI $n \times n$

$${}^tA \cdot A = I_n \qquad A \in GL_n \text{ e } A^{-1} = {}^tA$$

- PROPRIETÀ

1) $A, B \in O(n) \implies AB \in O(n)$

INFATTI $\; {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \implies$

$$\implies A \cdot B \in O(n)$$

2) $A \in O(n) \implies \det A = \pm 1$

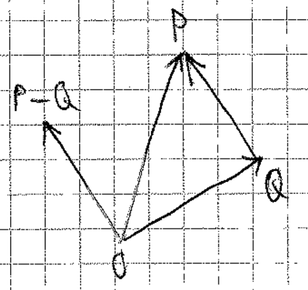
DIM: ${}^tA \cdot A = I_n \implies \det {}^tA \cdot A = 1$

$\implies \det {}^tA \cdot \det A = 1 \implies (\det A)^2 = 1$

3) Per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$ se $A \in O(n)$

Allora: $AX \cdot AY = X \cdot Y$

DIM: ${}^t(AX)AY = {}^tX\, {}^tA A Y = {}^tX I Y = {}^tX Y = XY$



$P \to (x_1, y_1, z_1)$

$Q \to (x_2, y_2, z_2)$

$$|P-Q| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

$$= \sqrt{(P-Q)(P-Q)}$$