



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 745

DATA: 20/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: D'Angelo

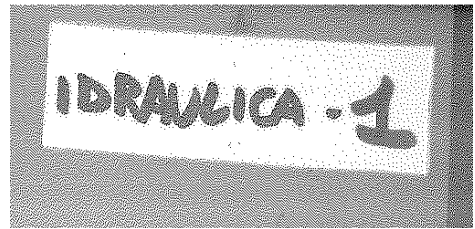
MATERIA: Idraulica

Prof. Revelli

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



DENSITÀ

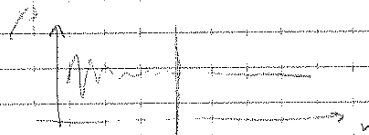
Idraulica fa parte di meccanica del continuo

fluido è fatto da particelle, se però considero un corpo continuo, quel su 1 scala molto + big di partic (invece, di maci sono nell'ordine del discreto)

⇒ fanno ancora concetti di velocità, accelerazione, densità,

Densità

↳ volume piccolo ⇒ precisione
 ↳ volume + big ⇒ inaffidabilità



⇒ dopo 1 scala non si considera + le singole partic (che posso entrare ed uscire dal liquido, fluido volume ρ), se del tutto

Scale su cui lavoriamo $m \gg \gg$ delle scale

⇒ Su quel corpo, le grandezze variano con continuità (dove ce ne sono)

⇒ può avere momenti notevoli

ad es, fmo + int def, e fmo + vettore velocità

si derivabile, ha elica

Ma ang → il vero con continuità



Densità: $\rho = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$

$\frac{kg}{m^3}$

→ $\rho = \rho(p, \theta)$ → fmo della pome T
 ↳ in legge dell'accelerazione di gravità g

Peso specifico $\gamma = \rho \cdot g$

$\frac{N}{m^3}$

$\rho = \rho(p, \theta)$ → equazione d' stato

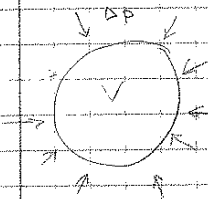
Per noi, γ non tiene conto della θ , ma lavoro a Tabella

⇒ idraulica dei fluidi freddi, trascura le variaz di θ

Effetto della pressione:

Come succede ad 1 fluido se applico pressione su 1 liquido, sulla superficie?

→ Applico, su un volume V di fluido, un Δp di pressione
 ⇒ diminuisce il volume di ΔV



$\Delta V = - \frac{V \cdot \Delta p}{E}$

dove E = cost. di proporz.
 modulo di elasticità a compressione cubica

Quindi se la velocità è molto più alta di quella c , l'acqua è quasi incompressibile.
 Le velocità di p diventano considerabili solo per velocità annulabili alla c .

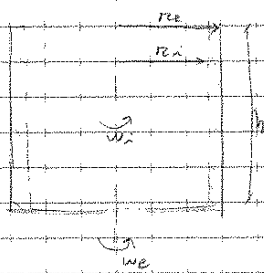
Per l'aria $\rightarrow c = 340 \xrightarrow{MAC} \text{m/s}$
 Per l'acqua $\rightarrow c = 1440 \text{ m/s}$ } per velocità molto inferiori a queste, compressibilità non entra in gioco

Nelle condotte, velocità non si va a 20 m/s, quindi si odono i rumori del tipo di un filo

VISCOSITÀ E TENSIONI - LEGGE DI NEWTON

Energia \leftarrow spostare il fluido e legata a qnt. del fluido e \leftarrow verso

Prado 2 cilindri, separati da 2 interfacce, in cui mette il fluido



Mette in rotazione con ω il cilindro EXT
 Dopo 2 poi, cilindro INT inizia a ruotare anche lui con ω_1

QAT che, a partire dalla intera EXT, ogni strato mette in movimento quello interno.

\Rightarrow Si trasmettono questo, e quindi azione e reazione nel senso opposto il 1° strato della del fluido e verso in senso

Il 1° strato e verso in senso opposto applicando 1 coppia, le derive dal momento dato dalla rotazione.

Cin Δ propaga qAT coppia lungo il raggio?
 (L'azione avviene in modo trasversale al moto)



Sarà la tensione tangenziale, anche la coppia e T_0 della direzione del momento.

\Rightarrow Ogni volta che mette in moto il fluido, nascono tensioni tangenziali.

Questo crea attrito \rightarrow freno dissipativo

\Rightarrow Sposta il fluido e lo mescola e serve questo attrito legato alle tensioni tangenziali.

\Rightarrow Mettere il fluido in movimento e il attrito sempre dissipativo, occorre sempre fornire energia.

- Fluidi di Caroté o pseudo plastici

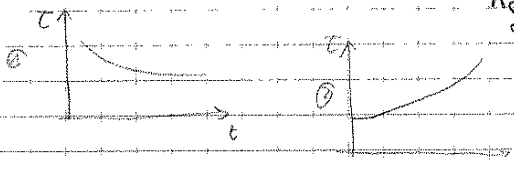
$$\tau = k \dot{\gamma}^n$$

$n > 1 \rightarrow$ dilatanti,
 $n < 1 \rightarrow$ pseudo plastici

Fluidi di Caroté

↳ solidi che si comportano in fluidi, esempio Trasformati, in caso di fango, fessure, etc

- Poi: fluidi TISSOTROPICI \rightarrow non vi è nessun legame fra τ e $\dot{\gamma}$,
 REOPETITIVI \rightarrow tra sforzi e deformazioni.
 Hanno invece 1 legame fra τ e τ_{app} cui si applica la $\dot{\gamma}$



Esempio di TISSOTROPICO \rightarrow ketchup,
 dopo 1 po' che lo agiti
 diventa il fluido o anche vernice

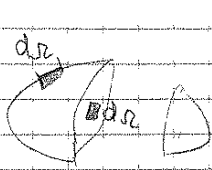
Fluidi reopetitivi \rightarrow cemento,
 diventa il cemento abitato

Equazioneologica dei fluidi newtoniani \rightarrow e' di tipo lineare

- Poi \rightarrow Fluidi ELASTO VISCOSI \rightarrow comporta sia liquido che solido,
 a 2° della grandezza

$$F(\tau, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots) = 0$$

equazioni difficili da risolvere



Prendo area dA , su S_{ext} o S_{int}
 E' su la sua normale \vec{n} , che si identifica
 con \vec{e}_n



Convenzione n in uscita, o
 $n > 0$ se entrante

\Rightarrow compressione > 0
 (che' acqua sottoposta + compressione
 ke trazione)

Su tale dA si trova
 una forza infinitesimale:

$d\vec{\pi} \rightarrow$ e' azione f.t. sul volume, circoscritto dA , dal fuori.

Sforzo $\rightarrow \vec{\phi}_n = \frac{d\vec{\pi}}{dA}$

perche' n indica e' orientaz di dA
 se direz dipende dalla direz' del f.zo $d\vec{\pi}$

Nota: ϕ sforzo, ϕ f.zo e'

$d\vec{\pi} = \vec{\phi}_n \cdot dA$

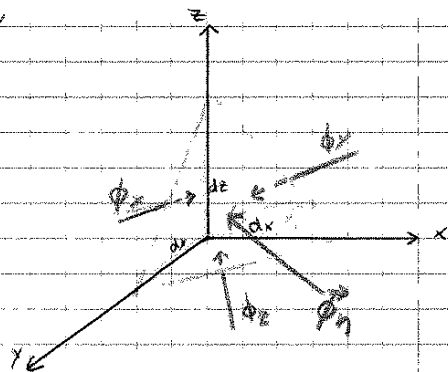
\Rightarrow Le forze su π e' su f.ze:

$\vec{\pi} = \int_{\pi} \vec{\phi}_n dA \rightarrow$ "Spinta"

Come varia $\vec{\phi}_n$ al variare di \vec{n} ?

Prendo il tetraedro elementare di Cauchy

Michela de' sforzo ci' su ogni
 faccia
 solo una normale, vale \vec{n}
 sulle altre 3 facce, le normali
 e' diversa con i nomi degli assi



Considero le spinte su π e' 4
 facce, e di tutte le spinte di
 nome

\hookrightarrow se m in equil.

\Rightarrow il tetraedro e' in equilibrio.

Ricorda: spinta = sforzo \cdot area:

$dA =$ area del triangolo
 + big

\Rightarrow le altre 3 aree m e'
 una proiezione sul piano

$-\vec{\phi}_x \cdot \cos \hat{n}_x \cdot dA$

$-\vec{\phi}_y \cdot \cos \hat{n}_y \cdot dA$

\rightarrow perché \hat{n}_x e' un angolo ottuso

$-\vec{\phi}_z \cdot \cos \hat{n}_z \cdot dA$

$\vec{\phi}_n \cdot dA$

Manca la f.ze di massa \rightarrow questa e' la, sopra de' un massicchio
 rispetto a quella di superficie, sarebbe con la massa:

$m = \rho \cdot dxdydz$

Volume

\rightarrow infinitesimo del 3° ordine, massicchio



STATO ISOTROPO

Se cambia il pto in esame, lo sforzo cambia, ma in modo continuo

si può dimostrare che E piani principali sui quali le T sono nulle

Traccia della matrice \rightarrow è costante

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_i = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{cost} \quad \rightarrow \text{uno degli elem. sulle diagonali}$$

Se so a priori che le T in esame sono nulle $\rightarrow T=0$

\Rightarrow al pto. considerato ke E STATO ISOTROPO

Vale dire che:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p = \frac{1}{3} \text{cost}$$

\Rightarrow Ci m. gli sforzi sono

\rightarrow TRACCIA

\Rightarrow in tal caso, lo stato tensionale del pto è definito da 1

solo var.:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}$$

\rightarrow dipende da un'unica la funzione $p = p(x, y, z)$

$p =$ pressione

$$\Rightarrow \vec{\phi} = p \cdot \vec{n}$$

Mi chiedo ora come avere le T nulle

isotropiche:

$$p = \text{cost}$$

Eq. azionologica $\rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dn}$

Quand'è che $T=0$?

$$\mu = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{du}{dn} = 0$$

• $\mu = 0 \Rightarrow$ fluido m. viscosità \rightarrow fluido perfetto

\Rightarrow onde se si sta muovendo, ke $T=0$

\Rightarrow si muove m. libero e di impozione, non riceve energia \times forza muovere

\rightarrow è 1 estrazione matematica

Nei strutture fluidi reali in base alle differenze del fluido perfetto, in base alle loro imperfezioni.

• $\frac{du}{dn} = 0 \Leftrightarrow v = \text{cost.}$

in particolare $\rightarrow v = 0$, fluido fermo

\Rightarrow un fluido fermo equivale ad 1 fluido perfetto

STATICA DEI FLUIDI

LEGGE DI STEVINO

VIGENERA 7-10-11

DEFINIZIONE DEL CARICO PIEZOMETRICO ED ANDAMENTO DELLE PRESSIONI

liquidi → fluidi fermi → STATICO

Tensore:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \rightarrow p = \text{pressione} \rightarrow p = p(x, y, z)$$

va definita nei vari pt dello spazio, ma non nel tempo essendo statica

Eq. de. governo statica

di 1 qualità, fluido fermo → $\rho \vec{F} = \text{grad } p$

q. de 1° ordine → basta 1 condiz. iniziale

Se $F =$ campo conservativo

⇒ esiste potenziale $\vec{F} = \text{grad } U$

Sostituendo ⇒ $\rho \text{grad } U = \text{grad } p$

⇒ le linee equipotenziali in un'linea volume costante, se fluido è incompressibile ($\rho = \text{cost}$)

$$\text{grad } U = \text{grad } \frac{p}{\rho}$$

⇒ $\frac{p}{\rho}$ è il potenziale del campo, se il fluido è incompressibile

In appross. ingegneristica:

tempo \vec{F} è campo gravitazionale, cioè:

$$\vec{F} = - \text{grad } gz$$

ricorda: aumenta verso alto, ma acc. di gravità è verso basso

$$\Rightarrow -\rho \text{grad } gz = \text{grad } p$$

Aggiungo h.p. di incompressibilità:

$$\Rightarrow \text{grad } \rho gz = \text{grad } \gamma z \rightarrow \text{dove } \gamma = \rho g \rightarrow \text{peso specifico}$$

$$\Rightarrow \text{grad } \gamma z + \text{grad } p = 0$$

$$\Rightarrow \text{grad } (\gamma z + p) = 0$$

$$\text{grad } \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \rightarrow \text{ecco soluz. dell'eq. 2}$$

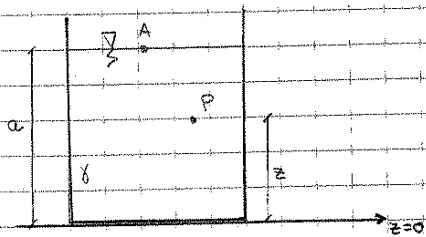
• $z =$ quota del pt rispetto al piano di riferimento $z=0$

↳ "quota geodetica"

• $\frac{p}{\gamma} =$ "altezza piezometrica"

PRESSIONE ASSOLUTA

ESERCIZIO



Recipiente di forma qualsiasi
Riempiuto di 2 fluidi con γ
Prendo punto $z=0$ come zero

Prendo pto A in entrambi di peso libero
del fluido.

$$p_A = p_{atm}$$

\Rightarrow pto A è contemporaneamente
in aria e in fluido a uguale

\Rightarrow deve avere stm p in qualunque modo se lo considero

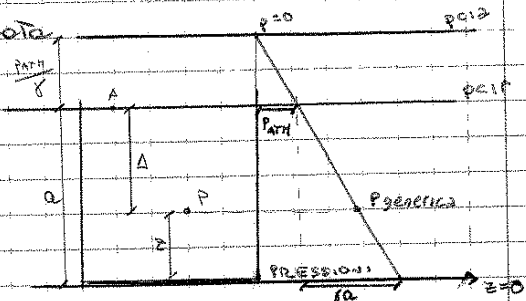
Ho quindi 2 pto a quota nota (a) e p nota

\Rightarrow in 2 pto generico a quota z :

$$p = p_{atm} + \gamma(a-z)$$

Se faccio diagramma delle pressioni

$$a \ z=0 \rightarrow p = p_{atm} + \gamma a$$



Per 2 qualsiasi, generico pto a quota z , la pressione sta su
quella rete obliqua

Se prendo 2 qualsiasi pto per trovare γ p dal grafico

Se il pto è sopra il peso libero, per sempre appartiene
alla rete liquida (astrazione matematica)

\Rightarrow faccio le conto, oppure alongo la rete delle pressioni
trovo la $p < p_{atm}$

Però serve di quota fino a quella in cui $p=0$

\hookrightarrow piano dei cerchi idrostatici assoluti (pca)

\hookrightarrow piano de e' l'ass dei pti in cui la pressione assoluta è pari a 0
Tale piano pto è senza fluido oppure ne è al di fuori
la quota e'

$$\hookrightarrow p=0 \Leftrightarrow p_{atm} + \gamma z_1 - \gamma z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{p_{atm}}{\gamma} + z_1$$

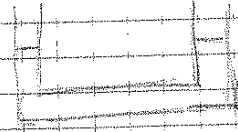
Nel mercurio: $z = 760 \text{ mm}$

\hookrightarrow proprio quel che usano x def 101m del mercurio

Tutte le pressioni unite finora erano assolute.

PRINCIPIO di VAS. comunicanti

si applica che $z + \frac{p}{\rho} = \text{cost}$



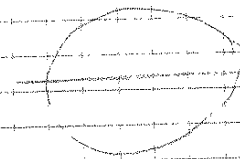
FLUIDI STRATIFICATI

Ho 1 sistema di liquido olio-acqua-benzina - -"
 Olio, sistemi a densità variabile

Se ho 2 fluidi, la superficie di separazione è sempre orizzontale

↳ si può dimostrare con un tubo:

Se superficie non è orizz. prendo 2 p.ti. su
 linee di separazione, a distanza h



Se applico le leggi, vedo che è impossibile che ciò accada

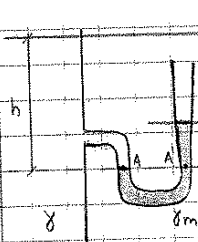
MANOMETRO SEMPLICE

In un tubo es. la 1° via da fare è trovare il p.c.t. con
 l'aria, e Δ mi determina il p. $p = \rho \Delta$

Si usa piezometro

Se: se nel serbatoio ho p. meno o più, e 1 colonna; se devo
 di 1 atm con p. nel serbatoio, se pelo libero 11 elso d. 10, 31 m,
 e 1 colonna

⇒ uso MANOMETRO semplice



Nel manometro, tutto fluido manometrico, di peso
 specifico γ_m , e tutto + pesante del fluido γ
 ed es. acqua e mercurio

Superficie di separazione deve essere netta, non deve
 oscillare o essere in movimento. Quindi γ e γ_m

$\Delta = \text{letture manometriche}$

Da esso posso ricavare altezza h a cui si trova il p.c.t.

Prendo p.to A', a quota = A

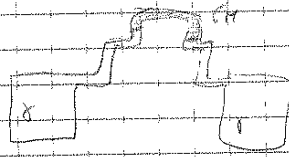
⇒ $p_A = p_{A'} = \gamma_m \Delta$
 ↳ affondamento del p.to A' rispetto al p.c.t. del fluido γ_m

Ho trovato p.c.t.

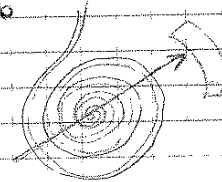
che è onde fluido γ

⇒ e ora, vale la legge, in tale fluido: $p_A = \gamma \cdot h \Rightarrow h = \Delta \frac{\gamma_m}{\gamma}$

Se pascio pncf

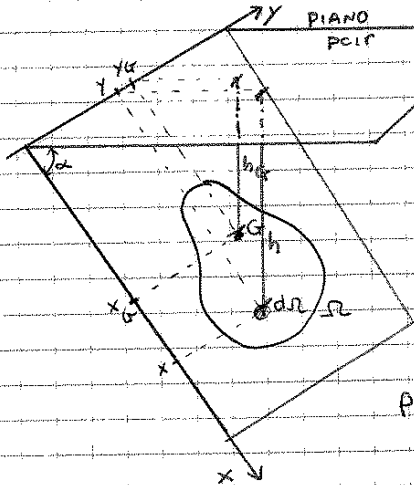


Manometro metallico → misura la p misurata vs. l'ha un tubo avvolto a spirale e riempito di fluido. Se p aumenta o diminuisce, spinge nelle pareti del fluido. Se p aumenta, il tubo si srotola. Poi, questa bobina indica la variaz di lunghezza.
 ↳ misura la p nel barometro
 ↳ misura in $\frac{kg \cdot peso}{cm^2}$



SPINTA SU SUPERFICI PIANE

Da generare la spinta, con scopriamo come fa il fluido grad. Va ad interagire in 2 modo (poteri, toni, ...) insieme da interazioni. Il contenitore in superficie piane.



Ha 2 piano. Su di esso c'è 1 superficie di area dA , acchiata al fluido. La spinta dF dA da parte del fluido?

pari → del fluido
 $d =$ egale di inclinazione del piano, pari e del piano della figura.
 intersezione tra i 2 piani.
 ↳ LINEA DI SPONDA

Prenzo \int dove $y =$ centro di massa
 dove $x =$ centro di inerzia

Baric di $dA \rightarrow G \rightarrow x_G, y_G$
 Piano su cui elemento dA , coordinate (x, y)
 $h =$ profondità di dA rispetto al piano.
 ↳ $h = x \sin \alpha$
 Per G
 ↳ $h_G = x_G \sin \alpha$

Quanto vale spinta elementare in un elemento?
 ↳ Spinta \times superficie

$$S_x = \int_{\Omega} x p d\Omega = \int_{\Omega} x h d\Omega =$$

$$= \gamma \int_{\Omega} x \cdot x \sin \alpha d\Omega =$$

$$= \gamma \sin \alpha \cdot \int_{\Omega} x^2 d\Omega \quad \begin{matrix} \text{momento d'inerzia della superficie} \\ \text{fatto rispetto alla linea di spede} \end{matrix}$$

$$= \gamma \sin \alpha I_x$$

$$\Rightarrow I_x = \int_{\Omega} x^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\gamma \sin \alpha I_x}{S} = \frac{\gamma \sin \alpha I_x}{\gamma h \sin \alpha R} =$$

$$= \frac{\sin \alpha I_x}{x \sin \alpha R} \rightarrow \text{è parte del più non dipende dall'inclinazione del piano}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{I_x}{M}$$

$\rightarrow M =$ momento statico della superficie $f.r.c.$ rispetto alla linea di spede

Per trovare l'altra coordinata, devo fare momento di S rispetto a x :

$$S_y = \int_{\Omega} y p d\Omega = \int_{\Omega} y h d\Omega =$$

$$= \gamma \int_{\Omega} xy \sin \alpha d\Omega = \gamma \sin \alpha I_{xy}$$

\Rightarrow momento centrifugo della superficie fatto rispetto alle coppie di assi correlati

$$\Rightarrow \eta = \frac{\gamma \sin \alpha I_{xy}}{\gamma h \sin \alpha R} =$$

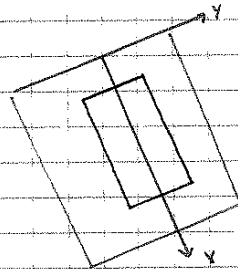
$$= \frac{\sin \alpha I_{xy}}{x \sin \alpha R} \Rightarrow \eta = \frac{I_{xy}}{M}$$

$$\hookrightarrow I_{xy} = \int_{\Omega} xy d\Omega$$

SUPERFICI SIMMETRICHE - RETTANGOLARI

Alcune considerazioni:

- Superficie con 1 asse di simmetria (ad es. $\sigma = 1$ rettangolo) che coincide con uno dei suoi assi principali $\Rightarrow I_{xy} = 0 \Rightarrow \eta = 0$



Ma, vedremo sempre superficie simmetriche

Poli:

$$\xi = \frac{I_y}{M} \rightarrow \text{per le tes di trasposizione dei momenti (Muygeni)}$$

$$= \frac{I_{oy} + x_c^2 A}{M}$$

$$= \frac{I_{oy}}{M} + \frac{x_c^2 A}{M}$$

$I_{oy} =$ non d'inerzia della superficie, fatto risp ad 1 asse baricentrico e // alla linea di spede

$S \rightarrow$ somma di 3 spinte!

$$\begin{cases} S_x = \int_{S_x} p \, dA_x = \gamma h_{Gx} R_x \\ S_y = \int_{S_y} p \, dA_y = \gamma h_{Gy} R_y \\ S_z = \int_{S_z} p \, dA_z = \gamma h_{Gz} R_z \end{cases} \quad \text{dove } h_{Gx} = \text{altezza } \vec{e}_x \text{ di area proiettata}$$

↓
 Sui 3 piani di base x, y, z
 in 3° piano:

$h_{Gz} R_z =$ volume contenuto tra superficie e piani

$\Rightarrow S_z = \gamma W \Rightarrow$ peso totale

Ogni spinta e_i applicata nel proprio centro di spinta
 Poi, trovare \vec{S} con somma di vettori

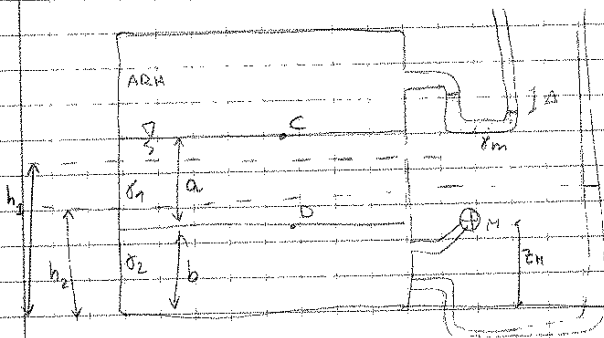
La legge di Stevino è valida con HP:

- fluidi in quiete
- fluidi incompressibili
 - ↳ $p = \text{cost}$, $\rho = \text{cost}$
- fluidi pesanti
 - ↳ soggetto a forza peso, $\rho > 0$ (ovvero non i gas, che hanno peso trascurabile)

Ma se h andrebbe all'infinito
 ⇒ si considerano dati:

GAS (ρ_{gas}) ⇒ $\rho_{\text{gas}} = \text{cost}$, ogni pto ha la stessa pressione

ES 1

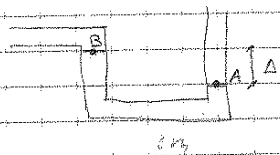


Recipiente, con 3 fluidi diversi
 3 strumenti collegati:
 - manometro
 - manometro metallico
 - piezometro

$\Rightarrow z = 0$

Legge di Stevino in alto. In ogni A, vol dire che l'aria non sia a $p = p_0$, in pratica coperto da $p = p_0 + \rho_m h_m$

Divisione da qui; il manometro ci serve la p allora in 1 pto



Prendo 2 pti di interfaccia, e li vedo con il manometro

Vale legge Stevino:

$$p_B = p_A + \rho_m (z_A - z_B)$$

Otengo $p_B < p_A$. So che $p_A = p_{\text{atm}} = 0$

Ora, lo stesso

1 premessa nota

Ma pto B è sulla mt, dove c'è $p = \text{cost}$ (e' il gas)

⇒ $p = p_B$ in tutto il recipiente

$$\Rightarrow p_B = -\rho_m \Delta = -2666 \text{ Pa}$$

Prendo 1 pto B su interfaccia tra aria ed A

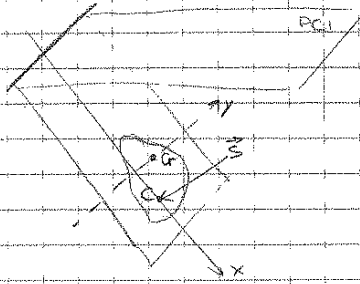
C è gas

$$\Rightarrow p_C = 2666 \text{ Pa}$$

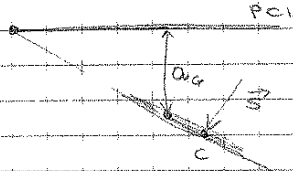
Ora, calcolo carica piez. di C, nota che $z_C = 0.7 \text{ m}$:

$$h_1 = z_C + \frac{p_C}{\rho_1} = 1,728 \text{ m} \rightarrow \text{1 pto + base di superficie C - zero}$$

SPINTE, REGOLE GENERALI



Ho le PCI
Prendo 1 superficie A piano qualunque
Se prolungare piano, incontro le PCI
nel Cuoce di massa



$$S = p_c \cdot A = y \cdot a_c \cdot A$$

Prendo 1 assi di riferimento per C

Devo trovare x_c :

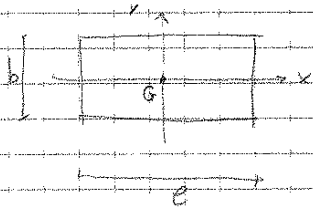
$$x_c = x_G + \frac{I_0}{A} \quad \text{con } I_0 = x_G \cdot A$$

Prendo 2 assi // e con dispende,
per G

$\Rightarrow I_0$ è il momento d'inerzia di
quella superficie, rispetto a quell'asse x

I_0 dipende solo dalla
geometria della superficie

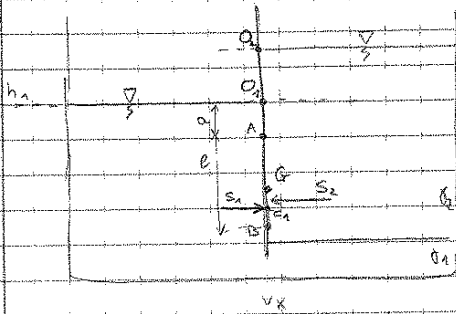
Ad es, per un rettangolo:



$$I_0 = \frac{be^3}{12}$$

Avremo a che fare sempre
con figure simmetriche
 $\Rightarrow C$ è sull'asse x
 \Rightarrow ci interesserà solo
calcolare la x_c

ES 5



2 parti comunicanti
 2 liquidi n e h e livelli \neq

Voglio trovare spinta e plesso
 dei 2 liquidi su A B
 ↓
 C'è la spinta da entrambi i lati

• Forza da fluido l , e su x , ci sarà spinta S_1 , nel centro C_1 .

$$S_1 = p_1 \cdot A = \gamma_1 \left(a + \frac{e}{2} \right) \cdot e^2 = 6960 \text{ N}$$

• Segno ora che delle x , con origine O_1 ; cerco centro di spinta per S_1 :

$$x_C = a + \frac{e}{2} = 0,7 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x_{C_1} = x_C + \frac{I_0}{M} = x_C + \frac{\frac{e^4}{12}}{x_C \cdot e^2} = 0,82 \text{ m}$$

• Ora, dato $Ax \rightarrow$ c'è il centro fluido, quindi cambia solo $e' h \rightarrow$ il peso libero di F_2

$$S_2 = p_2 \cdot A = \gamma_2 \cdot \left(b + a + \frac{e}{2} \right) \cdot e^2 = 8830 \text{ N}$$

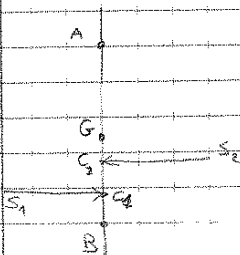
• Ora, per trovare il C_2 , devo fare riferim alle nuove origine degli assi O_2
 \rightarrow deve sempre G per C_1

$$x_C = b + a + \frac{e}{2} = 1 \text{ m}$$

\rightarrow devo riscrivere x_C riferendo del nuovo ass di ref.

$$\Rightarrow x_{C_2} = x_C + \frac{I_0}{M} = x_C + \frac{\frac{e^4}{12}}{x_C \cdot e^2} = 1,08 \text{ m}$$

Ora, visto che abbiamo le 2 spinte, dobbiamo esprimerle come agiscono e 2 spinte



Rinverire $\rightarrow R = S_2 - S_1 = 1870 \text{ N}$ ($\frac{32}{100}$)

Centro di spinta

\rightarrow prendo un pto di riferim \rightarrow ~~per~~ \rightarrow ho il centro

$$\uparrow G - S_1 \cdot G_{C_1} + S_2 \cdot G_{C_2} = R \cdot G_C$$

ovvero, R dà lo stesso momento delle somme delle 2 spinte con il peso \rightarrow C della risultante

$$\Rightarrow G_C = -0,06 \text{ m}$$

ES 2)

$$h_1 = z_A \rightarrow OK$$

$$b = \frac{\delta_m - \delta_1}{\delta_m} \cdot \Delta \rightarrow OK$$

$$\Rightarrow h_{1,OK} = h_1 + b$$

~~$$h_2 = z_B$$~~

~~$$p_2 = p_1 + \gamma (z_1 - z_2)$$~~

$$h_1 = z_B + \frac{p_B}{\gamma} \rightarrow p_B$$

$$p_1 = p_B + \gamma (z_B - z_A)$$

$$= \gamma (h_2 - z_A)$$

ES 4)

$$\circ h_1 = z_A + \frac{p_A}{\gamma}$$

$$\circ h_2 = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

$$\circ S = \frac{\delta_m - \delta}{\delta} \Delta$$

$$\Rightarrow h_1 - h_2 = S$$

$$\Rightarrow (z_A - z_B) + \frac{1}{\gamma} (p_A - p_B) = \Delta \frac{\delta_m - \delta}{\delta}$$

$$\Rightarrow \Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} = \Delta \frac{\delta_m - \delta}{\delta}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \Delta (\delta_m - \delta) - \Delta z \cdot \gamma =$$

$$= 0,15 \text{ m} \left(1600 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} - 9500 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right) - 0,50 \text{ m} \cdot 9500 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

Ovvero, se vole avere + pezzi piccoli pambule

Esempio: Spinta su una parete

Ad es: deve costruire, in 2 corpi d'acqua,

1 parete così

Deve resistere alla spinta dell'acqua

Mediando qui vede qll spinta,

Per applicare e' eq globale:

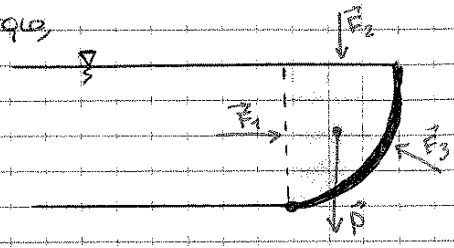
Scegl il volume così

6 Ho: $F_{res} P$

• 5 \vec{F}_c (2 sono in 3D, non le considero qui)

Per l'eq di eq statico:

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$



L'ingegnere del problema e' la spinta sulla superficie del muro

↳ ovvero: $-\vec{F}_3$, che \vec{F}_3 spinto dal contenitore nel volume,

ed è ora invece la spinta di acqua sul contenitore

Il che altre superfici in piane, facile

Di rete:

$$\vec{X} = -\vec{F}_3 = \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

diff. cosa resta il il calcolo del volume, non se lo molto bene
le frontiere e' facile

Qui:

$\vec{F}_2 = 0$, che qui e' alle parti (pale libere)

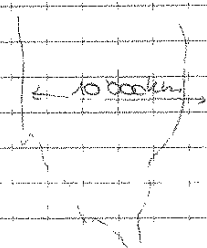
$$\Rightarrow \vec{X} = \vec{P} + \vec{F}_1 \rightarrow \text{easy, con parte orizz + vertic}$$

ES X, CASA



Voglio costruire il richiamo, e fare piano
dove c'è una parete in
Gibilterra
Calcola la spinta sul muro di
Gibilterra

ES X, CASA



Aereo, a 1000 km, in spinta di 100000 N
to dx

⇒ Calcola la spinta del mare sul
muro di Gibilterra

Se do un corpo infinitesimo di corpo sferico ad una rotazione, che succede?

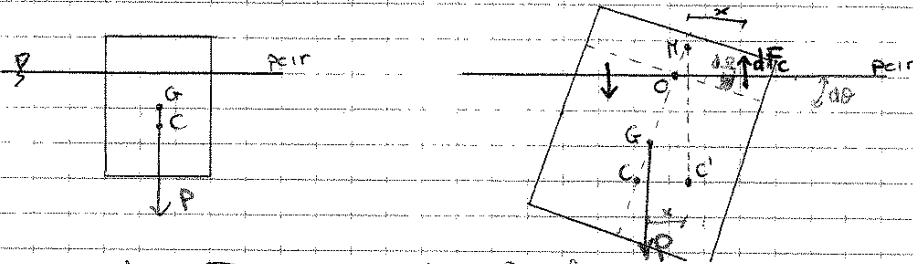
↓
 Qual'è indice di stabilità; ovvero x cui Torneo o punto?

Definisco il pcir

Scena di Jack Sparrow nel 3°

↓
 pisa di galleggiamento

C = centro di area → Domic del Vol. area
 → più di applicat. dell' spinta



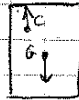
negro di rotazione corpo di dt infinitesimo attorno a un di rotazione (elettro).

Cambia re C, cioè è cambiato re V di area → C'

⇒ Spinta di archim e P non m + cambio

⇒ nasce il coppia

Se C' è sopra re baric, si crea il coppia sopra stabile, comunque ruoti in posto la nave in posiz di equil



Predo la verticale del new rete d'applicat di spinta
 Troie METACENTRO → M, ad essere in una linea

Se GM > 0 ⇒ è stabile

↓
 → cioè, re M è sopra al baricentro G

Se GM < 0 ⇒ equil instabile

↓
 → M è sotto baricentro

Chiamo tale condiz GM

Per piccole rotazioni, parte di corpo si immerge e parte emerge

⇒ 1 parte di corpo acquiesce spinto, l'altra è perde

Deve riduce qui volume queste 2 parti, de genera il coppia
 masto, e 2 F in senso opposto

Guardo da sopra x capire qui vol re W:

Predo l'area di re spie

Qual volume ora corp infinitimo, dato della

rotazione di dr rispetto ad O ⇒ rotazione di x



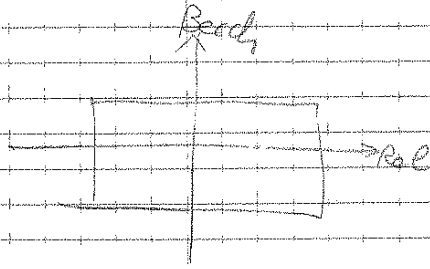
superficie di galleggiamento

Vol: $dV = x \, d\theta \, dr$

→ $x \, d\theta =$ arco di cui ruota

Equilibrio attorno axe di beccheggio

Non d'azzero e^+ + big rispetto ad I di rotol.



\Rightarrow $d_m e^+$ + grande, e^+ + difficile
 forte divergere < 0
 \Rightarrow stabile, equil + rollio, qst equil e forte

\Rightarrow Jack Sparrow può far ribaltare la nave
 Corpi su nave che rimbalza molto a forza forte, e
 prima far divergere $d_m < 0$, che richiama l'appe
 Pero - Spinta, che diventa instabile

macchi su nave \rightarrow ricorsi, che in spenti energia, e
 qst cambia I, che anche cebo

Si creano sforzi \rightarrow de compressao, Tiroo, fno deuoare
 \Rightarrow alla fine, effetto in defnoaz

Dimensione viene legata spaziale e defnoaz

\hookrightarrow ne para, con cinematica dove il esamone moto e de fnoaz

DEFINIZIONI: TIPI DI MOTO

Moto Vario

\hookrightarrow Il campo di velocità dipende sia da spazio che da tempo

Moto PERMANENTE

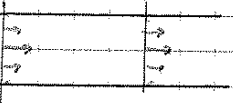
Non c'è dipendenza temporale
 (+ sempre di moto vario)

Moto UNIFORME

Non dipende né dal tempo né dalla posizione nella spazio
 È costante, sia velocità in ogni pt

\hookrightarrow situazione che, in problemi pratici, basta il parete \times creare i profili di velocità.

Moto UNIFORME IN MEDIA, IN SENSO SPAZIALE



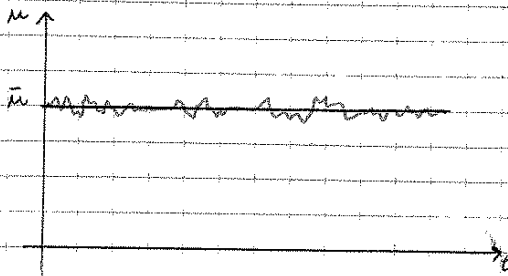
Tubo, area = cost, materiale = cost,
 però la stessa quantità di fluido
 prende alla sezione:

in un tubo di, Traverso v = a (staccato
 alle pareti), e più grande verso il
 centro.

Non è la nota un f 2° B definizione

Ma si prende 1 altra sezione, visto che è il cost in un aspetto che il
 profilo di velocità onde a volte si fa meno

\Rightarrow è inferiore al vero in 2 direzioni



\rightarrow velocità in dipro in realtà
 e^{cost}

\Rightarrow anche se ci in piccole variaz
 su piccola scala, però sostituire
 il velocità media (nel tempo)

Esempio di moto vario \rightarrow alluvioni

Rios, etc, problemi in dinamo inf

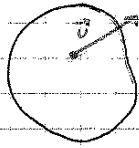
Moto permanente \rightarrow acqua, interseca

Difetti del Lagrangiano \rightarrow 3 eq x ∞ partic
 Ma ha ∞ parti celle
 \Rightarrow il problema vero è con ∞ eq. da risolvere
 Tre eq. possono essere anche risolte analiticamente

QNT approccio si usa il m. problemi molto specifici

2. Approccio Euleriano

Attenzione finita ad un punto preciso. Si considerano le partic. che
 passano attraverso quel punto
 P_0 , si sposta il dominio a quello
 e pto di osservazione.



Si riduce il problema indipendentemente
 dalle eq. del trascinamento

A quel pto, per conoscere il vettore
 velocità

Lo ad esso, per conoscere il Tg

Spostando man mano il pto di osservazione, si
 \leftarrow crea la linea di corrente

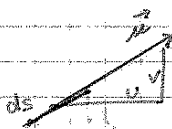
Linee che in luogo dei pti. de, $\text{stare} \times \text{stare}$, $m \parallel$ al \vec{v}

Trasformare e linee di corrente coincidono se il moto è permanente

\downarrow
 non coincidono nel moto vario, cioè al passo del tempo

\Rightarrow Moto alterno, guardando il pto, si chiede qual'è la traiettoria che
 la particella P avrebbe in quel momento

Com si scrivono eq. delle linee di corrente?



Partic. si sposta di ds , ed la velocità \vec{v}

Teorema di Talete:

$$\frac{dx}{v} = \frac{dy}{v} \left(= \frac{ds}{v} \right)$$

$\hookrightarrow m. 30$

Sono ∞^2 espressioni,
 quindi \rightarrow infinite di lagrange

Com può visualizzarle queste curve?

Una tecnologia usata è quella di bilanciare partic. e sensibili, fare foto
 foto consecutive a pochi istanti di distanza e vedere un'immagine
 "obscure"

Com si scrive con m. 2 rif. di tipo euleriano?

Le deve tener conto che, se cambia il pto di osservazione, cambia anche il
 spazio, oltre che il tempo

\hookrightarrow deve tener conto di 3 variabili: m, t , e osservare il pto del
 dominio

REGOLA DI DERIVAZIONE EULERIANA

⇒ Serve Regola di derivazione euleriana:

Punto 1 gli assi spaziali (x, y, z) sono naturali, associato ad 1 pto: $f(x, y, z, t)$

T
 $\vec{x}(x, y, z)$ T+ΔT
 $\vec{x}(x, y, z) + \Delta \vec{x}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ \vec{x} è generico pto. cui è associato f
 → e_i, e_j in T
 ΔE T+ΔT, il pto ha cambiato posiz ed
 acquisito le nuove coordinate

$$\begin{aligned} \vec{x} + \Delta \vec{x} &= (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = \\ &= (x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t) = \\ &= (x, y, z) + (u, v, w)\Delta t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\vec{x} + \Delta \vec{x}, t) = f(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, T + \Delta T) =$$

sviluppo in serie di Taylor

$$= f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial f}{\partial z} w\Delta t + o(\Delta t^2)$$

qui, abbiamo visto le deriv. parziali, proprio che ci m + variabili (invece, in Lagrange dove serve il tempo rispetto a cui derivare)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + \Delta \vec{x}, T + \Delta T) - f(\vec{x}, T)}{\Delta t} = \frac{Df}{Dt} \rightarrow \text{così, che deriv. fare conto su di tempo le di spazio}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} f \end{aligned}$$

parte totale è la parte convettiva, di trasporto, tiene conto delle variazioni nello spazio (partendo da 1 pto dell'evento) E la parte di tutti i resti problemi (nota ind p del tempo)

Se \vec{f} fosse vettoriale, e m + scalari: $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{D\vec{f}}{Dt} &= \frac{Df_x}{Dt} \vec{i} + \frac{Df_y}{Dt} \vec{j} + \frac{Df_z}{Dt} \vec{k} \rightarrow \text{derivate totali delle 3 scalari, ciascuna si comporta come f scalare} \\ &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} f_x \right) \vec{i} + \dots \end{aligned}$$

Accelerazione in un riferimento di tipo euleriano

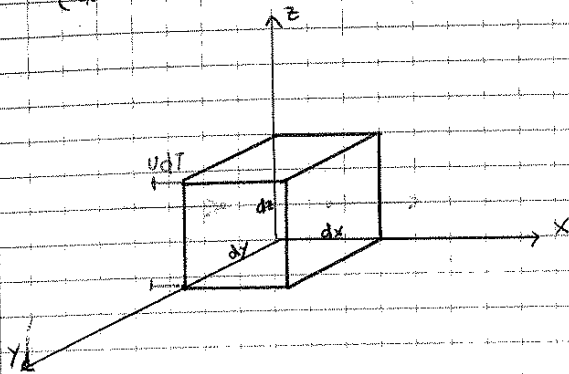
la grandezza vettoriale ke ci interessa di più è la velocità \vec{v}

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{a}$$

accelerazione vettoriale in riferimento di tipo euleriano

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ - FORMA INDEFINITA

È un modo di definire il principio di conservazione della massa (dato i unit: non uscente - non entrante - variazione di massa)



Cubetto di fluido (superficie di controllo)

Fluido $\rightarrow \rho$

\rightarrow massa

\Rightarrow con variaz di massa attraverso le pareti del cubetto.

Supporto di area q.e. numero d'ingressi - uscite

• Massa entrante attraverso la superficie

$$\rho \cdot v dt \cdot dy \cdot dz$$

spessore \times area

della faccia che sta entrando

• Massa uscente

però a massa entrante + ρv

variaz nel percorrere vs dx di spazio \rightarrow varia il ρv fra le 2 facce

$$\left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial x} dx \right) dt \cdot \frac{dy dz}{\text{area}}$$

\Rightarrow Differenze tra le 2 parti in e out: compimento attraverso le 2 facce, e variaz ρv eccetto di massa propria:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial x} dx dy dz dt$$

se si fanno le 2 attraverso le altre 2 facce, ottenesi

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial z} dx dy dz dt$$

Se sono queste 3 positive, allora l'eccesso di massa del cubetto

\Rightarrow compimento, del unit esp:

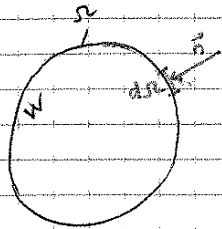
$$\left(\frac{\partial \rho v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho v}{\partial z} \right) dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

questo questo deve essere pari alla ^{variaz di} massa del cubetto nel tempo (ma il volume elementare resta q.e. invariato, cambia la massa)

Se out $>$ in \Rightarrow ρv variaz di massa e \neq diminuzione

EQVAZIONE DI CONTINUITA - GLOBALE

Vogliamo ora scrivere l'eq. di continuità globale, x un volume definito (primo, cioè volume finito)
Prendo il volume finito W , circondato da σ (fatto parti da con le zone σ)



Da un vettore velocità u che fa entrare della massa nel int

Massa entrante in dt : $\rho \cdot u \cdot dA \cdot dt = \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dA \cdot dt$

Tale massa potrà che esce uscite, in funzione del segno di \vec{u}

Completando, oltre a σ la superficie, i poss. di massa di parte del segno di \vec{u}

$$\int_{\sigma} \rho \cdot u_n \cdot dA \cdot dt = \frac{d}{dt} \int_W \rho \cdot dW \cdot dt$$

→ indica la quantità di massa che compeniva e entra/uscita del int

deve essere per ogni volume di massa del int nel tempo

$$\Rightarrow \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dW = \int_{\sigma} \rho \cdot u_n \cdot dA$$

→ eq. globale di continuità, per un fluido qualsiasi

Caso particolare: FLUIDO INCOMPRESSIBILE

$$\rho = \text{cost} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\sigma} \rho \cdot u_n \cdot dA = 0$$

partire elementare

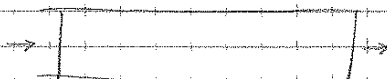
$$\rho \cdot \int_{\sigma} u_n \cdot dA = 0 \Rightarrow \int_{\sigma} dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\sigma} dA = 0$$

⇒ Se il fluido è incompressibile: entra = esce

Guardo il tubo di flusso

Ci son delle parti della superficie attraverso cui fluisce entra, altri esce; centri in incompressibile (no entra ne esce)



$$\sigma = \sigma_e \cup \sigma_u \cup \sigma_0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_e = \text{parte attraverso cui fluisce entra} \\ \sigma_u = \text{parte attraverso cui fluisce esce} \\ \sigma_0 = \text{non c'è flusso} \end{cases}$$

⇒ Dividendo e integrando

in 3 pezzi:

$$\int_{\sigma} \rho \cdot u_n \cdot dA = \int_{\sigma_e} \rho \cdot u_n \cdot dA + \int_{\sigma_u} \rho \cdot u_n \cdot dA + \int_{\sigma_0} \rho \cdot u_n \cdot dA$$

\downarrow Q_e \downarrow $-Q_u$ \downarrow NO FLUSSO

ESERCIZI MARTENI 18-10-11

METODI PER IL CALCOLO DELLE SPINTE SU SUPERFICIE DI FORMA

QUALSIASI - STATICA

Metodi + calcolo di spinte su superfici di forma qualsiasi.
 Statica → 2 metodi.

1. Equazione Globale dell'Equilibrio

↳ si applica quale un fluido in moto
 Preso il volume di fluido da opporre
 S'indica Σ forze = 0

pcir

Preso di Π , determina pcir
 Ho 2 superficie relative voglio opporre
 la spinta che agisce su di esse
 in forma compatta generale:



$\vec{G} + \vec{\Pi} = 0$
 applicando il 1° principio di equilibrio: deve essere delimitato da 3^{ra} superficie
 Ad es, sotto il piano che la chiude sopra
 Ora, applico equaz. → segno G
 Forze $\vec{\Pi}$ → agiscono sulle 2 superfici presenti

$\Rightarrow \vec{G} + \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_1 = 0$

per definizione, ma attenzione! Ho a 2^a de' cos. di
 mi devo ad osservare, potrei dover cambiare

Se fare così: → segni



→ se Equilibrio è il sopra
 ⇒ spinta di acqua sulla parete è:

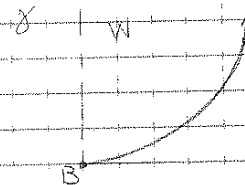
$\vec{S} = -\vec{\Pi}_0 = \vec{G} + \vec{\Pi}_1$

2. Metodo delle componenti

Calco separatamente comp orizz e vertic

pcir

Per comp orizz:
 proiettare la superficie su un piano
 verticale



• Comp orizz di S = forza che agisce
 su quel superficie piano
 Superficie piano ⇒ la si calcola ⇒ $S_0 = \rho g A_{0,31}$

• Per comp vertic:
 Prendo il volume compreso tra la superficie
 ed il piano del cerchio ⇒ W
 ⇒ Spinta verticale = peso del volume ⇒ $S_v = \gamma W$

Ora, per spinta verticale, prendo un W' che sia compreso tra le superficie ed il paio.
 Calcolo il volume, di nuovo in diff tra aree:

$$W' = H_2 (x_0 - x_1) + \frac{x_0^3 - x_1^3}{3} = 0,819 \text{ m}^3 \quad \rightarrow \text{il } W' \text{ mteoria mteoria a de}$$

$$S_v = \gamma_2 W' = 9631 \text{ N} \quad \text{il } W, \text{ na tanto mteoria il tra } x_1, x_0$$

Ora, bisogna unire le spinte dei 2 liquidi. \rightarrow basele come:

$$S_{acc} = S + S_v = 11'268 \text{ N}$$

$$S_{nev} = S_h + S_v = 12'464 \text{ N}$$

\rightarrow calcolo il modulo con pitagora

$$S_{acc} = \sqrt{S_{acc}^2 + S_{nev}^2} = 16'802 \text{ N}$$



Direzione:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{S_{nev}}{S_{acc}}\right) = 48^\circ$$

Per il pto di applicaz:

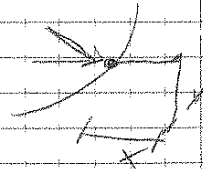
- calcolo momenti rispetto pto A (o pto qualunque) delle forze
- Ades: momento S_h , S_v , alle i centri di queste 2 componenti:

$$S_h \cdot z_0 + S_v \cdot z_0' = S_{acc} \cdot y$$

\rightarrow resto della risultate orizz

Ricerco y , ovvero la quota cui agisce S

- Idem per S_v , ma ora l'incina x del pto di applicaz

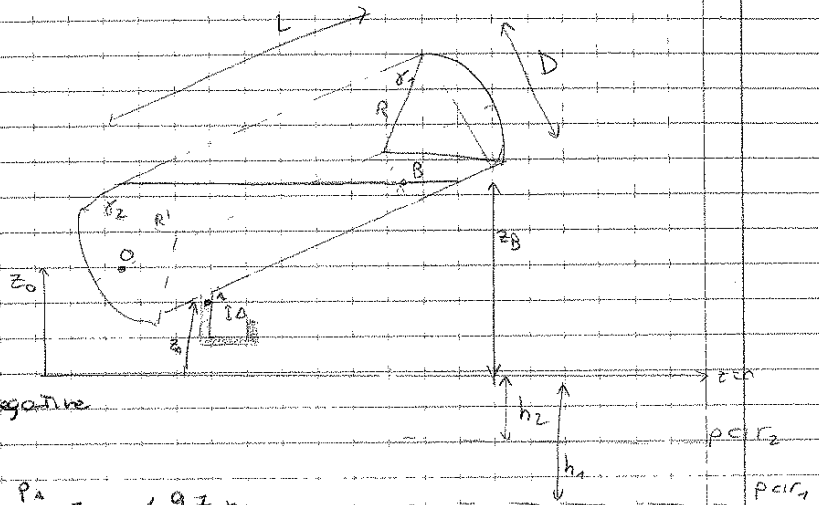


ES3)

- Manometro in base
 tubo x coltore
 pressione in A
 $z_A = \text{nota}$

Dato serbatoio
 con pressione < 0
 (si vede dal manometro)

$P_A = -\gamma_m \Delta$
 Δ = la ditta che in negativo



- Ora, cerco pressioni:

$h_2 = z_A + \frac{P_A}{\gamma_2} = -1,97 \text{ m}$

- Ora, prendo p in B all'interfaccia $\rightarrow z_B = \text{nota}$
 calcolo la pressione:

$P_B = \gamma_2 (h_2 - z_B)$

- \Rightarrow cerco il p in:

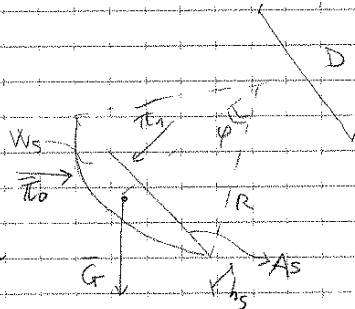
$h_1 = z_0 + \frac{P_B}{\gamma_1} = -3,5 \text{ m}$

qui, B sempre prova dei corredi
 \Rightarrow affondamento e negativo

\Rightarrow in tutto il serbatoio ha $p < 0$

- Prendo ora coltore di liquido 2
 risulta esser piatto retto di
 eq. di eq. xkei:

1. e quando chiudere le valvole in 1 piano
2. E prova a fare un paio, in vert. da dove prendere le valvole così, no le verticali bisecano la superficie \Rightarrow un valore



Chiedo:

- W_s = volume coltore
- h_s = altezza coltore
- A_s = superficie dietro la coltore

$\sin \varphi = \frac{D/2}{R} \Rightarrow \varphi = 32^\circ$

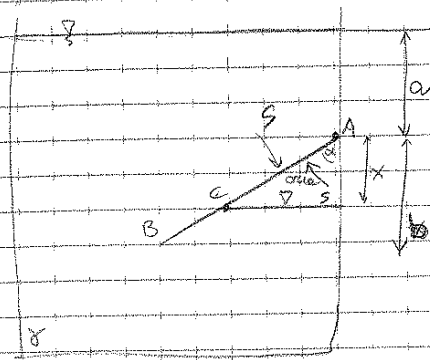
$h_s = R(1 - \cos \varphi)$

$W_s = \frac{\pi}{3} h_s^2 (3R - h_s) = 1,833 \text{ m}^3$

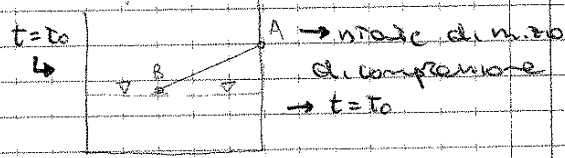
$A_s = \frac{\pi}{4} D^2 = 7 \text{ m}^2$

ES4)

pcir



Ragionare sul riempimento del recipiente, cioè fatto per arrivare a quella situazione.



ore: $p_{aria} = p_{atm}$
 $V_{aria} \rightarrow$ calcolabile

state finale: $t = t_1$

pressione costante $\Rightarrow p \cdot W = \text{cost}$

$p^* \rightarrow$ indice per aria

Vediamo dunque i volumi e trovare p :

$t = t_0 \Rightarrow W = W_0$

$t = t_1 \rightarrow$ Trovo p_{cir} , e pelo d'aria

\hookrightarrow pressione $p_c^* =$ pressione nell'aria (e su interfaccia)

Dopo ogni trovare p_c^*

Dopo affondamento $\Rightarrow p^* = p_c^* = \gamma(a+x) + p_{atm}$

le volere di $\alpha \rightarrow W = W_1 \rightarrow$ e funzione di x

Pero, da questi dati, ricavare l'equazione cui viene richiesta e $x \rightarrow$ trovare $x = 1,35m$

Provato x , sostituito in p_c^* , e Trovo quel valore

\hookrightarrow il pi di orologio $p^* = \text{cost}$

- Spinta sulla superficie AB, verso destra e fuori acqua.
- BC \rightarrow atm liquido in stesso pcir
 \hookrightarrow e' da π e 2 le parti, che sparsi man mano (non affondato)
 \Rightarrow spinta tot e' nulla
- CA \rightarrow e' dovuta da \pm lato da acqua, dall'altro da aria
 \hookrightarrow la forza e normale al cerchio di \pm parte
 la forza = $p^* = \text{cost}$ ovunque

$a = R \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{a}{R}$

GIOVEDÌ 20-10-11

CORRENTI GRADUALMENTE VARIATE

Eq. di continuità, forze definite; fluidi incompressibili

$\text{div } \vec{u} = 0 \rightarrow$ vincolo alle comp. del vettore velocità

Forza globale:

$Q_e = Q_u$

Valore \forall fluido incompressibile

Ma \rightarrow fluidi con acqua e/o ambiente:

scorrono in 1 modo unidirezionale, c'è sempre 1 direz. principale del momento nella realtà

Segue 1 corrente, 1 direzione preferenziale

\Rightarrow le traiettorie e le linee di corrente in un bilancio rettilinee e parallele

Se ci fossero variaz. di direz.,
che non in braccio

coe' del pto di vista ingegneristico, in rotazionale

Correnti gradualmente variate

\Rightarrow Se sono variaz. brusche, non posso dire che qee e' 1 corrente

Corso di sezione eq. di continuità = 1 corrente

Se corrente e' gradualmente variata

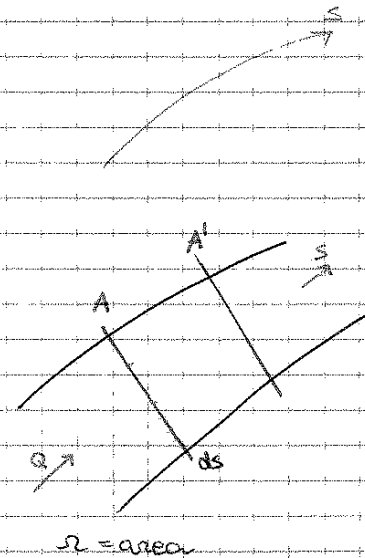
\Rightarrow \exists 1 direz. principale, 1 axes

Le varie grandezze in funzione di spazio e tempo così:

	rotazionale	$Q = Q(s, t)$
velocità		$v = v(s, t)$
longitudinale		$U = U(s, t)$

Prendo quella porzione di corrente, 2 sezioni distanti ds

nona in quel volume, tra A e A':
 $dn = \rho \cdot v \cdot ds$



Sfrutto l'eq. di continuità:

- nona entrante $\rightarrow \rho Q \cdot dt \rightarrow$ volume di controllo superficie AA' e tra qAT nona

- nona uscente $\rightarrow \left[\rho Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds \right] dt$
 \rightarrow per a nona entrante + Q variaz di nona che c'è stato; (negativa)

- parte 2 nona devono essere pari e variaz di nona del sistema

$\rightarrow - \left[\frac{\partial \rho Q}{\partial t} dt \right] ds \rightarrow$ negativo, esce + d. qui entra

DINAMICA DEI FLUIDI

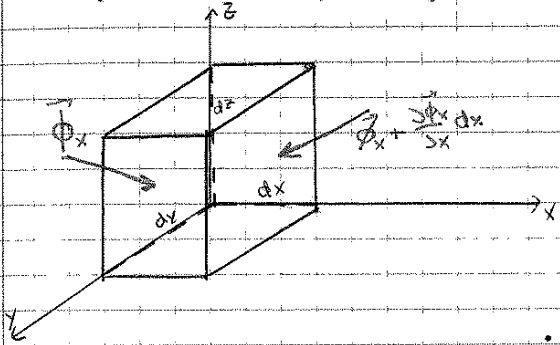
EQUAZIONE INDEFINITA GENERALE DELLA DINAMICA

Oltre a cinematica, legge a parti conosciute e notevoli e con note le forze

Rappresento tre volti di fluido e spazi - deformazioni

Abbiamo scrivere eq indefinita della dinamica del fluido

in forma generale, x & y fluido:



Prendo 1 cubetto

Massa m è $\rho dx dy dz$

Se fluido si muove

\Rightarrow non ha \pm acc

• R fermi di tipo euleriano, x quel pto e' acc e:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

• Per legge di Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$

\Rightarrow derivazione risultate di IT e F in massa,

e risultato in qnt eqvez

$$G.M. \begin{cases} F_{massa} \\ F_{superficie} \end{cases}$$

• $F_{massa} \rightarrow \vec{F} \cdot \rho dx dy dz$

• $F_{superficie} \rightarrow$ sono 6, che x & y faccia

Scrivo qll x direz x , per quelle z faccia

Forza = (spzto sulla faccia) \cdot (sua area)

$$\Rightarrow F = \vec{p}_x \cdot dy dz, \text{ sulla faccia a } dx$$

$$F = -\left(\vec{p}_x - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx\right) dy dz, \text{ sulla faccia a } dx, \text{ cambio re segno}$$

Le altre coppie di forze \sim
volere in modo analogo

Per Newton:

$$d\vec{R} = \vec{a} \cdot dm$$

$$\Rightarrow \rho \vec{F} dx dy dz + (\text{somma di tutte, ke xo si semplificano a coppie})$$

$$\Rightarrow \rho \vec{F} dx dy dz + \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \rho dx dy dz$$

$$\Rightarrow \rho \left(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt}\right) = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}$$

Tutti i problemi di fluidi sono in soluz di qnt eqvaz

Peccato ke le soluz no n'permibile

\rightarrow equazione della dinamica di un qualsiasi fluido, con qualsiasi campo di forze di massa e qualsiasi campo di moto

② Facciamo l'operazione prima, trasf. cilindrica

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} = \rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \vec{u} \frac{\partial \rho u}{\partial x} \Rightarrow \rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial (\rho u \vec{u})}{\partial x} - \vec{u} \frac{\partial \rho u}{\partial x}$$

Devo fare qst passaggio a tutti e 3 i termini, così ottengo a:

$$\Rightarrow \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} - \vec{u} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right)$$

$\text{div}(\rho \vec{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ → per Eq. della continuità

$$\Rightarrow \int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_V \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \underbrace{\left(\frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} \right)}_{\text{integrale tutto n.v.}} dV$$

Scegliamo qui il Teo. Green: $-\int_S \rho \vec{u} (u \cos \alpha_x + v \cos \alpha_y + w \cos \alpha_z) dS$

$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_n$ → componente normale del vettore \vec{u} alla dS

$$\Rightarrow = -\int_S \rho \vec{u} u_n dS$$

$$\Rightarrow \int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_V \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{u} u_n dS$$

e i quattro diventi in ogni pto del sistema

Se è noto e' permanente, qst

tenne e' nulla

⇒ motore la globale del fluido

questa solo facile.

le tenne @ si calcola al centro, flui di qnto' divoto in/out del sistema, e motore facile, x ng

e i quattro divoto x i velocità

⇒ e' 1 flui di qnto' divoto attraverso la superficie

No. F.D.

⇒ no attriti ⇒ no dissipazione ⇒ regioni conservative

Analizzare q.d. Eq. e' necessario e' così che rendere q.d. di primo

⇒ se le forze con dissipazione e' piccola, se no contribuisce e' trascurabile, e per approssimare fluido reale a fluido x fatto, xke' x una classe di problemi e' imperfezione del fluido e' trascurabile (ma non x la no. x parte ")

Eq. eulero, in forma globale:

$$\vec{F} + \vec{\pi}_i + \vec{P}_e - \vec{P}_o + \vec{I} = 0$$

TEOREMA DI BERNOULLI

1. For. vis, unica h_p fitt e de fluido e' fatto

Aggiungo h_p:

2. sono nel campo delle gravità
⇒ il fluido e' "pesante"

$$\Rightarrow \vec{F} = -\text{grad } gz \quad \begin{matrix} \uparrow z \\ \downarrow h_g \end{matrix}$$

3. fluido incompressibile

$$\Rightarrow \rho = \text{cost}$$

Allora

$$\rho \left(\vec{F} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \text{grad } p$$

$$\rho \text{ grad } gz + \text{grad } p = -\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad \text{ricorda: } \gamma = \rho g$$

$$\text{grad } (\gamma z + p) = -\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

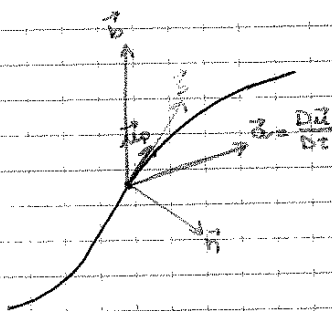
$$\text{grad } \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{\rho}{\gamma} \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{g} \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

↳ curva piezometrica come cost, e' parzialmente riferita alla accelerazione, cambiato di segno (acc. del sistema / acc. di gravità)

$$\Rightarrow \text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Dobbiamo risolvere → dove?

↳ lungo la traiettoria



Punto 1° tra due individua la quota e cresce il curv. piezom, e' la parte motica, facile

hvento una Terma Intrinseca

↳ Sisti. di ref. mobile lungo traiettoria:

- vettore normale \vec{n} alla traiettoria in P

- vettore tangente \vec{s}

- vettore binormale, nasce applicando $\text{rot } \vec{s}$ e \vec{n} e' \vec{b}

MARINATI 25-10-11

Area di Poiseuille:

$\rho \left(\bar{v} - \frac{Dv}{Dt} \right) = \text{grad } p \rightarrow \times \text{ fluido } \times \text{ foro } \rightarrow \text{ hp1}$

Aggiungo hp di fluidi incompressibili e tempo gravitazione, metodo di Poiseuille in sopra i due termini

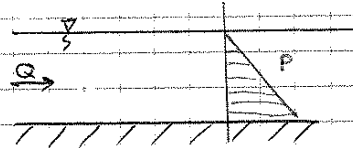
↓
Poiseuille è equaz nelle 3 direz dell'asse orizzontale

$\cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{1}{g} \frac{Dv_z}{Dt}$

$\cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{u^2}{gR} \rightarrow \text{se corrente in rotazione (corrente)} \Rightarrow \text{corrispett e' costante in direzione}$

$\cdot \frac{\partial}{\partial b} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = 0$
↓
distribuzione idrostatica di pressione

esempio
Corrente a pelo libero
↳ Poiseuille, in 1 direzione, 2 distribuz
idrostatica di pressione
↓



Tutto + la corrente carica, quindi + gli non è vero
⇒ vettore in verso la pressione lungo la curva
Non considereremo sempre due direz di pressione

Andiamo a equazione di queste:

$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{1}{g} \frac{Dv_z}{Dt} =$
 $= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + u \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$ non derivo il 2, che se deriva il u² mi viene
 $= -\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial z}$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t}$

CARICO TOTALE → H → $H = h + \frac{u^2}{2g}$
↳ Altezza [m] → ALTEZZA CINETICA

$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t}$

Faccio un hp: non in moto permanente (come delle hp del 2o Bernoulli)

$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow H = \text{cost} \rightarrow \text{costante}$
↳ per un fluido pesante, fermo, incompressibile, non viscoso

• $E_{cinetica} = \frac{1}{2} m v^2$

↓
 Per unità di peso: $\frac{E_{cin}}{mg} = \frac{v^2}{2g}$

• La forza → e' un E potenziale, conservativa

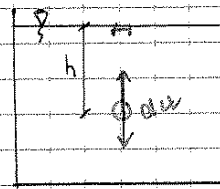
Supponi:

1) Prato 1 serbatoio d'acqua ferma
 Ci predo un W di fluido, affondato
 di h

Ke premere c'è in W? → $p = \gamma h$

Ke volume e' in equilibrio,

rispetto a 2 forze: - forze peso → γdW
 - spinta archimedeo



Prato elemento e lo porto fino al pelo libero, in 1 tempo qualunque
 Ke lavoro lo fatto e' spendibile?

↳ Ho spostato 1 unita' di volume nella un'altitudine fissa
 ⇒ lavoro nullo

↓
 Aumento di E potenziale grazie alla quota: → γdW

↳ Ma lavoro nullo

⇒ un'altitudine energia deve essere coperta

⇒ $\frac{p}{\gamma}$ e' il recupero di energia ke lo quota ke volume e'
 le fatto ke la sua quota e' anetata

↓
 $\frac{p}{\gamma} = \frac{\gamma h}{\gamma} = h$

↳ quello di cui lo recupero e' E potenziale (e quota z(1))

Completiamo nel sistema, e' E tot e' un'energia di sistema.

Aerea forma del Teo Bernoulli, (e' la forma originale di D'Alu)

↳ l'energia tot per un'altitudine di peso si conserva

l'energia, se il fluido si muove, puo' passare da potenza cinetica,
 se nel complesso si conserva

⇒ LCT e' derivazione dell'energia delle particelle, mentre si muove.

In 1 fluido reale c'è dissipazione

⇒ esse non puo' + esse costi

⇒ decresce, ma devo chiedere di qua e' inclinata quella linea
 (ricorda: LCT puo' se esse orizz o decrescere, MA' nel re,
 vorrebbe dire ke ce' energia dall'esterno, come 1 pompa)

Vediamo l'equaz.

- $P_B = 0$, $B = 10$ nel contratto

$\Rightarrow M_A^2 = 2g$, che è la base della luce, e visto che l'orbita è $h + \delta$, quel po' è praticamente fermo

$$\Rightarrow \frac{M_B^2}{2g} = z_A + z_B + \frac{P_A^2}{g} = h + \delta$$

$$\Rightarrow M_B = \sqrt{2g(h + \delta)}$$

Visto che $h \gg \delta$

$\Rightarrow \delta$ trascurabile

$$\Rightarrow M_B = \sqrt{2gh}$$

\rightarrow velocità Torricelliana, d. i. corpo che cade nel campo gravitaz.

Quanto vale portata attraverso sezione B?

\rightarrow la velocità $v = 10$ π più della sezione contratta, ed è pari alla velocità media

$$Q = v_c \cdot M_B$$

dove v_c è area della sez. contratta, ve no valore e' stato trovato x via sperimentale

$$\Rightarrow Q = c_c \cdot R \cdot \sqrt{2gh}$$

$\rightarrow c_c$ dipende dal tipo di luce, di solito ha valori $c_c \approx 0,64$

$\rightarrow c_v$ = coef. reso. recuperato dal fit k_{v1} + D'Avanzo & velocità, abbiamo fit 2 approssimazioni (a fluido perfetto e del δ)

Definisco: $m = c_c \cdot c_v$

$c_v \approx 0,98 \pm 0,02$

$$\Rightarrow Q = m \cdot R \cdot \sqrt{2gh}$$

\rightarrow coef. correttivo della velocità

Caso particolare: luce indefinitamente estesa

Se la luce avesse 1 estremità fissa, si avrebbe sempre ad 1 eq. del f. Q di est. tipo.

Unica cosa in cui è possibile calcolare c_c per via teorica:

la luce e' 1 fessura infinitamente estesa,

$$\Rightarrow c_c = \frac{\pi}{\pi + 2} \rightarrow \text{coef. di KIRKHOFF}$$

La def. della portata e' orbe, che non si ede esp. perche' usare 1 semplice lettura geometrica x misurare un flusso (che sarebbe molto complicato)

Sistemi di controllo della portata, si basano su qst.

Visto posto del sistema:

dato 1 serbatoio x far arrivare a dove aventore h (livello di acqua)

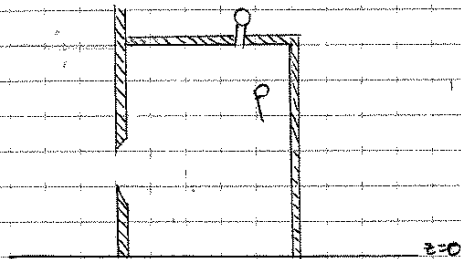
l'eqne vertic: $(p + \frac{\rho}{\gamma} dz) \Omega + \rho dz = p_2 + \underline{\rho dz}$ ← deriv. de gdm.

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} dz + \rho dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{cost}$$

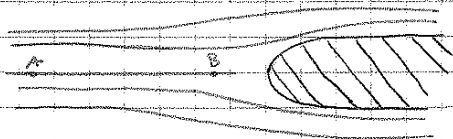
Tutti i pti di quella sezione sono la pm comune → sezione B
 I pti nel bordo sono $p=0$ → pda estera
 ⇒ tutti gli pti della sezione sono $p=0$

⇒ applico l. Bern ad 1 sezione trasversale, e ricavo la portata (con l'area comune)



→ agendo sulle p del sistema in cui fluido esce, varia la portata Q attraverso buco

TUBO DI PITO



→ unico sistema in grado di realizzare dinamica? auto

Se fluido è l'acqua, cioè il punto di ristagno → B

⇒ $p_B, v_B = 0$

↳ sopra e sotto il tubo A statiche in A

$$z_A = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

⇒ può misurare ma in funzione dell'angolo gradato, e la velocità del vettore che penetra nel fluido, o della corrente che misura il vettore

Il corretto piezom può essere misurato nel piezometro (punto di corrente univ. vortice) ↓

rete 2 piezom, 1 per A ed 1 per B

CORRENTE UNIVARIATA

Se corrente è gradualmente variata:

$$P = \gamma \int_{z_1}^{z_2} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) u \, dz =$$

$$= \gamma \int_{z_1}^{z_2} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) u \, dz + \gamma \int_{z_1}^{z_2} \frac{u^3}{2g} \, dz$$

Se corrente è gradualmente variata

$$\Rightarrow h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}, \text{ a tutta la sezione}$$

$$\Rightarrow = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int_{z_1}^{z_2} u \, dz + P_{\text{cin}} =$$

$$= \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + P_{\text{cin}}$$

→ P_{cin} potenza cinetica, dipende dalla distrib. di velocità all'interno della sezione.

In modo analogo al coef. di resistenza delle velocità di moto: mezzo α coefficiente di Coriolis → α → coeff. di resistenza delle potenze cinetiche

$$\alpha = \frac{\int_{z_1}^{z_2} \frac{u^3}{2g} \, dz}{\frac{U^3 R}{2g}}$$

↳ α - moto + vicino ad z qnt + il profilo di velocità - ampiezza ad z corrente.

Per molti flussi

o P_{cin} tutto questo:

$$P_{\text{cin}} = \gamma \int_{z_1}^{z_2} \frac{u^3}{2g} \, dz = \alpha \cdot \frac{U^3 R}{2g}$$

$$\Rightarrow P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \alpha \gamma \frac{U^3 R}{2g} Q =$$

$$= \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \alpha \frac{U^3 R}{2g} Q =$$

$$= \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2 R}{2g} \right) Q$$

↳ termine della velocità media

Se da $\dots \gamma = \text{cost}$

$Q = \text{cost}$

$$\Rightarrow (\dots) = \text{cost}$$

↳ curva totale della corrente

Qd: per 1 corrente, z è curva totale corrente (in T quella hp):

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2 R}{2g} = \text{cost} \rightarrow \text{Teo Bernoulli esteso ad 1 corrente}$$

Se questo α , non deve bastare in tutto α e in m. infinit. p. n, mi basta conoscere la U media

↳ Necessario lasciare α .

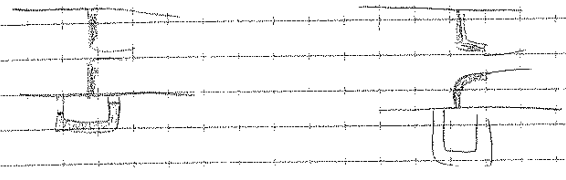
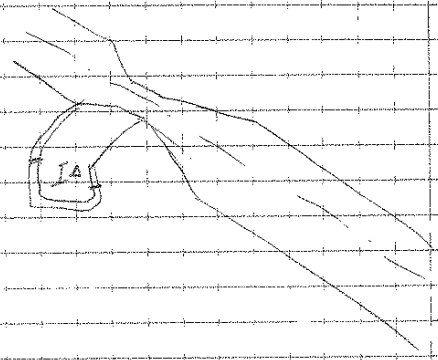
↳ $\alpha \approx 1$, + fluido e veloce + n avvicina

\Rightarrow in molti casi α trascurare

Dimensione di $(\alpha - 1) \approx 3(\beta - 1)$

Ma → senza rete di venturino e:
Stumento Ergo alcuni reti,
membrante

↓
Xovitate i bocagli e Digfoni



- Equazione integrale della statica dei fluidi $\rightarrow \rho \vec{F} = \text{grad } p$
- Contorno piezometrico $\rightarrow h = z + \frac{p}{\gamma}$
 - \rightarrow cost. in tutto il fluido
 - \rightarrow liquidi fermi incompressibili
 - $\hookrightarrow \gamma = \rho g \rightarrow$ peso specifico
 - $\hookrightarrow \frac{p}{\gamma} \rightarrow$ altezza piezometrica
 - $\hookrightarrow z \rightarrow$ quota geodetica (dal piano di riferimento $z=0$)
- Andamento delle pressioni $\rightarrow p_B = p_A + \gamma(z_A - z_B) \rightarrow p = p(z)$
- Isobare $\rightarrow p_A = p_B \Leftrightarrow z_A - z_B = 0$
 - diversa
- Pressione assoluta $\rightarrow p = p_{atm} + \gamma a$
 - $a =$ quota pelo libero
- p.c.i.a. = piano dei centri idrostatici assoluti $\rightarrow p=0$
 - \hookrightarrow quota $\rightarrow z = \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{z_A}{\gamma}$
- Pressione relativa $\rightarrow p^* = p - p_{atm} \Rightarrow p^* = \gamma \Delta$
 - $\hookrightarrow \Delta = a - z =$ affondamento rispetto al p.c.i.a.
- p.c.i.r. = piano dei centri idrostatici relativi \rightarrow sempre orizzontale (dato poi dato) $\rightarrow p^* = 0 =$ pelo libero
- Manometro semplice $\rightarrow h = \Delta \frac{\gamma_m}{\gamma}$
 - \hookrightarrow
 - $h =$ affondamento del p.c.i.m. in un braccio rispetto al p.c.i.r. del fluido γ
 - $\Delta =$ lettura
- Manometro differenziale $\rightarrow \delta = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma} A$, con $\gamma_m \gg \gamma$
 - $\hookrightarrow \delta =$ differenza di quota dei p.c.i.r. dei 2 rami
- Spinta su superfici piane $\rightarrow \vec{S} = \pm \rho g R \vec{n} \cdot (\pm \gamma h_c R \vec{n})$
 - $\hookrightarrow \vec{S} > 0 \Leftrightarrow$ emersione \Leftrightarrow domanda punti a pressione positiva (rispetto p.c.i.r.)
 - \hookrightarrow Centro di spinta $\rightarrow C = (\xi, \eta) \rightarrow \xi = \frac{I_y}{M}; \eta = \frac{I_{xy}}{M}$
 - $- M = \int_{\Omega} x y dz \rightarrow$ momento statico della superficie rispetto all'asse di spinta
 - $- I_y = \int_{\Omega} x^2 dz \rightarrow$ momento d'inerzia della superficie rispetto all'asse di spinta
 - $- I_{xy} = \int_{\Omega} x y dz \rightarrow$ momento centrifugo della superficie rispetto all'asse di spinta
- Centro di spinta su superfici rettangolari (Asse di simmetria = asse di massima pendenza)
 - $\hookrightarrow \eta = 0; \xi = x_G + \frac{I_{xy}}{M} \rightarrow \begin{cases} C \text{ sotto } G \Leftrightarrow \text{fluido in pressione} \\ C \text{ sopra } G \Leftrightarrow \text{fluido in depressione} \end{cases}$
 - $\hookrightarrow C = G \Leftrightarrow \xi = x_G \Leftrightarrow \frac{I_{xy}}{M} = 0 \Leftrightarrow$ piano $R \parallel$ p.c.i.r.
 - \hookrightarrow p.c.i.r. = base del rettangolo $\Rightarrow c$ affondato a $\frac{2}{3}$ del totale

TUBO DI FLUSSO

• Portata elementare $\rightarrow dQ = \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = v_n \, dA$

↳ Per superficie trasversale: $\vec{v} \perp \vec{n} \Rightarrow v = v_n \Rightarrow Q = \int_A v \, dA \quad \left\{ \frac{m^3}{s} \right\} = \left\{ \frac{Q}{s} \right\}$

• Velocità media $\rightarrow U = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A v \, dA$

• Equazione di continuità - forma indefinita

1. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho v}{\partial z} = 0$

3. $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$

2. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$

↳ Caso particolare \rightarrow fluido incompressibile $\rightarrow \rho = \text{cost} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$

• Equazione di continuità - forma globale

- Fluido qualsiasi $\rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = \int_A \rho v_n \, dA$

- Fluido incompressibile $\rightarrow \int_A \rho v_n \, dA = 0 \Leftrightarrow \int_A dQ = 0$

↳ $Q_e = Q_u \rightarrow Q_e = \int_{A_e} \rho v_n \, dA = \text{FLUSSO ENTRANTE}; Q_u = \int_{A_u} \rho v_n \, dA = \text{FLUSSO USCENTE}$

METODI PER IL CALCOLO DELLE SPINTE SU SUPERFICIE DI FORMA QUALUNQUE

1. Equazione globale dell'equilibrio $\rightarrow \vec{G} + \vec{\pi} = 0$, $\vec{G} = \text{peso}$, $\vec{\pi} = \text{di superficie}$ (entro)

↳ $\vec{S} = -\vec{\pi}_0 = \vec{G} + \vec{\pi}_1 (+\vec{\pi}_2 \dots)$ \rightarrow dato un volume, calcolando la spinta da una superficie che lo ^{contorno} \int_V

2. Metodo delle componenti

- Orizz $\rightarrow S_x = \rho g A_{11} B_1 \rightarrow A_{11} B_1 = \text{superficie paretata}$
 $\rightarrow \rho g = \text{pressione nella superficie paretata (proiettata su } x \text{)}$

- Vertic $\rightarrow S_z = \gamma W \rightarrow W = \text{volume compreso tra la superficie ed il piv}$

CORRENTI GRADUALI VARIATE

• Equazione di continuità $\rightarrow \frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho R}{\partial t} = 0$

↳ $s = \text{direzione principale delle correnti}$

• Per fluido incompressibile $\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$

• Per moto permanente $\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \Rightarrow Q = \text{cost}$

↳ per moto vario con $R = \text{cost}$ (pareti indeformabili)

• Fluido incompressibile: legge tra variazioni di area e velocità

$\rightarrow U \frac{dA}{ds} + A \frac{dU}{ds} = 0 \rightarrow$ per $R = \text{cost} \Rightarrow U = \text{cost}$

• $H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g}$ $\{m\} \rightarrow$ CARICO TOTALE = Energia per unità di peso
 $\hookrightarrow \frac{v^2}{2g} =$ altezza cinetica

• LCT = Linea dei Carichi Totali
 \hookrightarrow orizzontale x un fluido perfetto, pesante, incompressibile in moto permanente

APPLICAZIONI:

• Serbatoio, con forze a parete nulle sul fondo $\rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$
 $\hookrightarrow Q = m \cdot v \cdot \sqrt{2gh}$

dove $\sigma_c = c_c \cdot R =$ area della sezione contratta
 $c_c =$ coeff. di contrazione del tipo di orlo, $c_c \approx 0,61$

• $c_v \approx 0,98 \approx 0,99$ coeff. correttivo della velocità
 $\rightarrow m = c_v \cdot Q$

• $c_c = \frac{7}{\pi + 2} \rightarrow$ coeff. di Kirschhoff
 $\hookrightarrow c_c$ per fessure (definito esternamente)

ESTENSIONE DEL TEOR. BERNOULLI ALLE CORRENTE:

$P = \int_{\sigma} \rho H v dr = \text{cost}$ \rightarrow potenza cost. su tutte le sezioni trasversali della corrente

$dP = H \cdot \rho dQ$ \rightarrow (Energia x unità di peso) (potenza in peso)
 \rightarrow potenza elementare di un tubo di flusso elementare

$\hookrightarrow \rho dQ =$ portata in peso che passa attraverso la superficie nell'intervallo di tempo

• CORRENTE GRADUALMENTE VARIATA

$H = z + \frac{p}{\rho} + \alpha \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$ $\rightarrow v =$ velocità media della corrente

$\alpha = \frac{\int_{\sigma} v^3 d\sigma}{\int_{\sigma} v^2 d\sigma}$ \rightarrow coeff. di Coriolis, di riaggiuglio delle potenze cinetiche
 $\Rightarrow P_{cin} = \alpha \cdot \frac{\rho v^3}{2g} = \int_{\sigma} \frac{\rho v^3}{2g} d\sigma$

• Applicazione \rightarrow Venturimetro (portata del tubo in funzione di una lettura manometrica)

$\hookrightarrow Q = \frac{r_2 r_3}{\sqrt{r_2^2 - r_3^2}} \cdot \sqrt{2g \Delta h \frac{\rho_2 - \rho}{\rho}}$ $\Rightarrow Q = f(\sqrt{\Delta h})$, per $\alpha = 1$

PROZETTOLO

• $P = \rho Q H$ \rightarrow max energia da una corrente che cade per produrre
 $h_p =$ FLUIDO PERFETTO

$\hookrightarrow H =$ "solito"

$P = \{W\} \xrightarrow{\cdot 1000}$ $P \{kWh\}$
 (da J a kWh)

• $P = \eta \rho Q H$ \rightarrow potenza reale

$\hookrightarrow \eta = 0,7 \approx 0,8$, coeff. di rendimento (fluido reale, sistemi reali e loro perdite)

• **MOTO LAMINARE - FORMULAZIONE GENERALE**

$$U = \alpha \frac{\gamma^3}{\mu} R^2, \quad \alpha = \text{coeff. geometrico delle sezioni}$$

• **MOTO TURBOLENTO - ANALISI STATISTICA**

• Media d'insieme $\rightarrow \langle u(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t)$

Scarto rispetto alla media $\rightarrow u_i'(t) = u_i(t) - \langle u(t) \rangle$

Varianza $\rightarrow \langle u'(t)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i'(t))^2$

• **AGITAZIONE TURBOLENTO**

$$\gamma = \sqrt{\frac{\langle u'(t)^2 \rangle}{\langle u(t) \rangle^2}}$$

• **MEDIA TEMPORALE** $\rightarrow \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$

Scarto rispetto al valore medio $\rightarrow u'(t) = u(t) - \bar{u}$

Varianza Temporale $\rightarrow \bar{u}'^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (u'(t))^2 dt$

• **CONDIZIONI ERGONOMICHE** : $\langle \cdot \rangle = \bar{\cdot}$

1. Turbolenza stazionaria

2. Scala integrale del fenomeno e finita (coeff. di autocorrelazione integrabile)

- Covarianza $\rightarrow R_{xy} = \langle x(t_1) \cdot y(t_2) \rangle$

- Ritardo $\rightarrow \tau = t_2 - t_1$

• **COEFFICIENTE DI AUTOCORRELAZIONE** $\rightarrow \rho(\tau) = \frac{\langle x(0) \cdot x(\tau) \rangle}{\langle x^2 \rangle} = \frac{R_{xx}(\tau)}{\langle x^2 \rangle}$

• **SCALA INTEGRALE** $\rightarrow I = \int_0^\infty \rho(\tau) d\tau$

• **DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS** $\rightarrow u = \bar{u} + u'$ $\rightarrow \bar{u}' = 0$
componente di
agitazione turbolenta

• **EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES, PER MOTO TURBOLENTO:**

$$\text{div } \bar{u} = 0$$

• **EQUAZIONE DI REYNOLDS, O EQUAZIONI DEL MOTO MEDIO; INDEFINITA:**

$$\rho \bar{F} - \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \rho \langle \bar{u} \text{ grad } \bar{u} \rangle - \rho \langle u' \text{ grad } u' \rangle = \text{grad } \bar{p} - \mu \Delta_2 \bar{u}$$

- Tensore: $\langle u' \text{ grad } u' \rangle = \text{div} \begin{bmatrix} u'u' & u'v' & u'w' \\ u'v' & v'v' & v'w' \\ u'w' & u'v' & w'w' \end{bmatrix}$

- Turbolenza isotropa $\rightarrow \overline{u'v'} = 0$

- Turbolenza anisotropa $\rightarrow \overline{u'v'} \neq 0$

- Tensioni totali sul sistema $\rightarrow \bar{\tau}_x = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'}$

$$\bar{\sigma}_x = p - 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{u}'^2$$

• **MOTO TURBOLENTO IN TUBO SCABRO: FORMULE PRATICHE**

- PRANDTL-VON KARMAN $\rightarrow \frac{1}{\lambda} = -2 \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,71 D} \right)$

- COLEBROOK-WHITE $\rightarrow \frac{1}{\lambda} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3,71 D} \right)$

- DARCY $\rightarrow J = \beta \frac{Q^2}{D^5} \rightarrow \beta = 0,00164 + \frac{0,000042}{D} \text{ (ghena)}$

- DARCY MODIFICATA $\rightarrow J = \beta' \frac{Q^2}{D^{5,33}} \rightarrow \beta' = 0,00164$

- HAGEN-WILLIAMS $\rightarrow J = \frac{10,675 \cdot Q^{1,857}}{C^{1,852} \cdot D^{4,8704}} \rightarrow C = 100 \div 150$

- CHAZY $\rightarrow U = \lambda \sqrt{RJ}$

\hookrightarrow - Gaultier-Strickler $\rightarrow \lambda = k_s R^{1/6}$

- Bazin $\rightarrow \lambda = \frac{87}{1 + 2K} \sqrt{\frac{R}{D}}$

- Manning $\rightarrow \lambda = \frac{1}{n} R^{1/6}$

• **PERDITE DI CARICO CONCENTRATE**

$\Delta H = \xi \frac{U^2}{2g}$, coefficiente: $\Delta H = \xi \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}$

• **PERDITA DI CARICO PER BRUSCO ALLARGAMENTO (FORMULA DI BOEHA)**

$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$, $h_1 - h_2 = \frac{Q}{g} (U_2 - U_1) \Rightarrow h_2 > h_1$

• **PERDITE DI CARICO CONCENTRATE:**

- INBOCCO A SPIGOLO VIVO $\rightarrow \Delta H \sim 0,5 \frac{U^2}{2g}$

- INBOCCO A SPIGOLO RIENTRATO $\rightarrow \Delta H \sim 1 \frac{U^2}{2g}$

- INBOCCO BEN RACCORDATO $\rightarrow \Delta H \sim 0$

• **PERDITE DI CARICO, ESEMPIO DI CALCOLO**

$\Delta H = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + J_1 L_1 + \xi \frac{U_2^2}{2g} + J_2 L_2 + \alpha \frac{U_2^2}{2g}$



• **LUNGHE CONDOTTE**

$\frac{U^2}{2g} = 0,02 JL$, $L = nD$, $n = \frac{1}{0,02A}$

se $\lambda = 0,25 \Rightarrow n \cong 1000 \div 2000$

- PIEZOMETRICA \rightarrow LCFELCA

CORRENTI A POLO LIBERO

• IPOTESI DEL MODELLO DI DE SAINT VENANT

1. Modello monodimensionale, corrente
2. Corrente gradiente vortice \Rightarrow distribuzione idrostatica delle p
 \Rightarrow Si può definire $h = z + \frac{p}{\rho g} = \text{cost}$ su una sezione
3. Funzione velocità media $U(s,t) = \frac{Q(s,t)}{S(s,t)}$
 \Rightarrow Si può definire $H(s,t) = h + \frac{U^2}{2g}$
4. Piccole pendenze $\rightarrow 0 < \theta \leq 5 \pm 10^\circ$
 \Rightarrow confondiamo dx , $\begin{cases} y = \text{normale} \\ d = \text{ortogonale al fondo} \end{cases}$
 \Rightarrow Polo libero = LCP di tutta la sezione

5. Sezione fissa nel tempo

6. Moto turbolento

• DEFINIZIONI

- θ = inclinazione del fondo
- b = larghezza dell'alveo della superficie
- R = raggio, sezione
- $i_f = -\frac{dz_f}{ds} \sim \theta$ = pendenza del fondo
- y = battente idraulico
- $h = z_f + y$ = curva piezometrica
- LCP = PL

- $i_c = -\frac{dh}{ds}$ \rightarrow pendenza piezometrica

$J \neq i_f \neq i_c$

- LCT $\rightarrow H = z_f + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}$

- J = inclinazione dell'LCT

- E = energia specifica, o energia specifica $\rightarrow E = y + \frac{U^2}{2g}$

• 1° EQUAZIONE DI DE SAINT VENANT, continuità per una corrente

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

• SISTEMA DI DE SAINT VENANT

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 & \rightarrow \text{continuità} \\ \left[\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = -i_f \right] & \rightarrow \text{moto} \end{cases}$$

• CELERITÀ CON CUI SI MUOVONO LE PERTURBAZIONI IN ACQUA,

$c = \pm \sqrt{gh}$ → Formula di Lagrange

$\begin{cases} + = \text{dipende dal verso} \\ h = \text{altezza caratteristica} \end{cases}$

- CORRENTE LENTA → $U < |c|$ → governata da valle
- CORRENTE VELOCE → $U > |c|$ → governata da monte

• NUMERO DI FROUDE:

$F_r = \frac{U}{\sqrt{gh}} = \frac{U}{|c|}$

- $F_r = 1$ → MOTO CRITICO
- $F_r < 1$ → corrente lenta
- $F_r > 1$ → corrente veloce

• EQUAZ. DIFFERENZIALE DEI PROFILI IN MOTO PERMANENTE:

$\frac{dh}{ds} = \frac{ip - j}{dE/dh}$

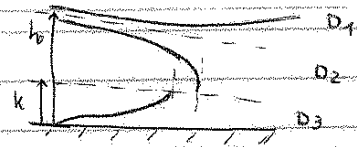
- $ip - j = 0$ ↔ moto uniforme ($h = h_0$)
- $dE/dh = 0$ ↔ condizioni critiche

PROFILI

• ALVEI A DEBOLE PENDENZA: $i < i_c \Rightarrow h_0 > k$

- $D_1 \rightarrow \begin{cases} h > h_0 \Rightarrow ip - j > 0 \\ h > k \Rightarrow \frac{dE}{dh} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dh}{ds} > 0$ PROFILO RITARDATO (ODIRIGURITO)



- $D_2 \rightarrow \begin{cases} h < h_0 \Rightarrow ip - j < 0 \\ h > k \Rightarrow \frac{dE}{dh} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dh}{ds} < 0$ PROFILO ACCELERATO

- $D_3 \rightarrow \begin{cases} h < h_0 \Rightarrow ip - j < 0 \\ h < k \Rightarrow \frac{dE}{dh} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dh}{ds} > 0$ CORRENTE VELOCE RITARDATA

• ALVEI A FORTE PENDENZA → $i > i_c \Rightarrow h_0 < k$

- $F_1 \rightarrow \begin{cases} h > h_0 \Rightarrow ip - j > 0 \\ h > k \Rightarrow \frac{dE}{dh} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dh}{ds} > 0$ CORRENTE LENTA DECELERATA

- $F_2 \rightarrow \begin{cases} h > h_0 \Rightarrow ip - j > 0 \\ h < k \Rightarrow \frac{dE}{dh} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dh}{ds} < 0$ CORRENTE VELOCE ACCELERATA



- $F_3 \rightarrow \begin{cases} h < h_0 \Rightarrow ip - j < 0 \\ h < k \Rightarrow \frac{dE}{dh} < 0 \end{cases}$

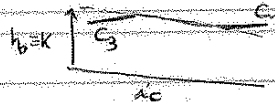
$\Rightarrow \frac{dh}{ds} > 0$ CORRENTE VELOCE RITARDATA

• ALVEI A PENDENZA CRITICA: $i = i_c \Rightarrow h_0 = k$

F_2 e $D_2 \rightarrow$ coincidono in $h_0 = k$

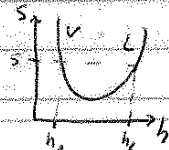
$D_1, F_1 \rightarrow C_1$, OVE

$D_3, F_3 \rightarrow C_3$, OVE



• RISALTO

- Condizione di criticità = punto di minimo della spinta: $h = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$



- Altezze coniugate → Toli per cui, in sezioni: $S_1 = S_2$

$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + 8F_{r1}^2} \right]$

- Diminuzione tra S_1 ed $S_2 \rightarrow \Delta E = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}$

MOTI A POTENZIALE

- FLUIDI IRROTazionali (fluidi perfetti, incompressibili)

$$\omega = \text{rot } \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \text{vorticità}$$

- CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÉ ESISTA IL POTENZIALE:

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{grad } \varphi$$

- COMPONENTI DELLA VELOCITÀ: $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

- EQUAZIONE FONDAMENTALE CHE GOVERNA IL POTENZIALE

$$\Delta_2 \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{funzione armonica})$$

- ESTENSIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2\rho} = \text{cost}$$

- FUNZIONE DI CORRENTE

- Caso piano $\Rightarrow \psi$ tale che:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

- Linee $\psi = \text{cost} \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{cost}} = \frac{v}{u} \equiv \text{Traiettoria}$

- hp irrotazionalità $\Rightarrow \Delta_2 \psi = 0$ (funzione armonica)

- CONDIZIONE DI IMPERMEABILITÀ

\hookrightarrow Su una parete Σ solo una componente $T_{\vec{n}}$ (e non \perp) della velocità

- PORTATA TRA DUE LINEE DI CORRENTE

NUMERI COMPLESSI

- Nota cartesiana $\rightarrow z = x + iy$ $i^2 = -1$

- Nota polare $\rightarrow z = r e^{i\theta} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$

- Nota goniometrica $\rightarrow z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

- Funzione di una variabile $z \rightarrow f(z) = \text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$

- Funzioni analitiche \rightarrow per cui valgono le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial x} \end{cases}$$

- POTENZIALE COMPLESSO DELLA VELOCITÀ

$$\begin{cases} \varphi = \text{Re}(f) \\ \psi = \text{Im}(f) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$$

- DERIVATA DI UNA FUNZIONE ANALITICA = CAMPO DI MOTO

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z} = u - iv \quad \begin{cases} u = \text{Re} \\ v = \text{Im} \end{cases}$$