



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 744

DATA: 20/10/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Salvi V.

MATERIA: Aerodinamica + Esercizi

Prof. Arina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# AERODINAMICA

## LA FORZA PORTANTE

## 1.4 Portata

Portata volumetrica  $dQ$  attraverso una superficie elementare  $ds$  di normale unitaria  $\vec{m}$  sulla quale le velocità  $\vec{V}$  formano un angolo  $\beta$  con  $\vec{m}$  è data da  $dQ = \vec{V} \cdot \vec{m} ds = V ds \cos \beta = V_n ds$  dove  $V_n$  componente di  $\vec{V}$  normale a  $ds$ .

Portata in massa  $dG = \rho \vec{V} \cdot \vec{m} ds = \rho V_n ds$ . Per superfici estese le portate dovranno essere calcolate con la sommatoria integrale.

Attraverso superfici solide non possono le portate e nulla perciò  $V_n = 0$ , sulle superfici solide può esserci la sola componente tangenziale  $V_t \neq 0$  perciò la CONDIZIONE DI TANGENZA  $V_n = 0$ .

## 1.5 Fluido Ideale

L'aria possiede proprietà legate all'agitazione molecolare, che sono viscosità e conducibilità termica. La viscosità produce l'effetto che due particelle di fluido contigue in fluido in moto, e separate da una superficie ideale  $dS$ , si scambiano non solo una forza di pressione normale alla superficie di separazione, ma anche una forza tangenziale rispetto a detta superficie, una specie di forze di attrito interno. Lo sforzo unitario  $\tau$ , cioè la forza tangenziale per unità di superficie, che si scambiano due particelle contigue è dato dalla legge di Newton  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$  dove  $\mu$  viscosità dinamica,  $u$  componente della velocità del fluido parallela al moto,  $y$  direzione perpendicolare al moto.  $\nu$  è anche una viscosità cinematica  $\nu = \mu / \rho$ . Poiché la viscosità dell'aria è molto piccola allora può essere trascurata e l'aria considerata fluido ideale. La conducibilità termica produce un flusso di calore dato dalla legge di Fourier:  $q = -K \text{ grad } T$  dove  $K$  coeff. conducibilità termica, assumibile come nullo per l'aria poiché molto piccola. Nella cinematica dei gas siccome  $\mu$  e  $K$  sono correlati allora se si assume nullo il primo si assume nullo anche il secondo.

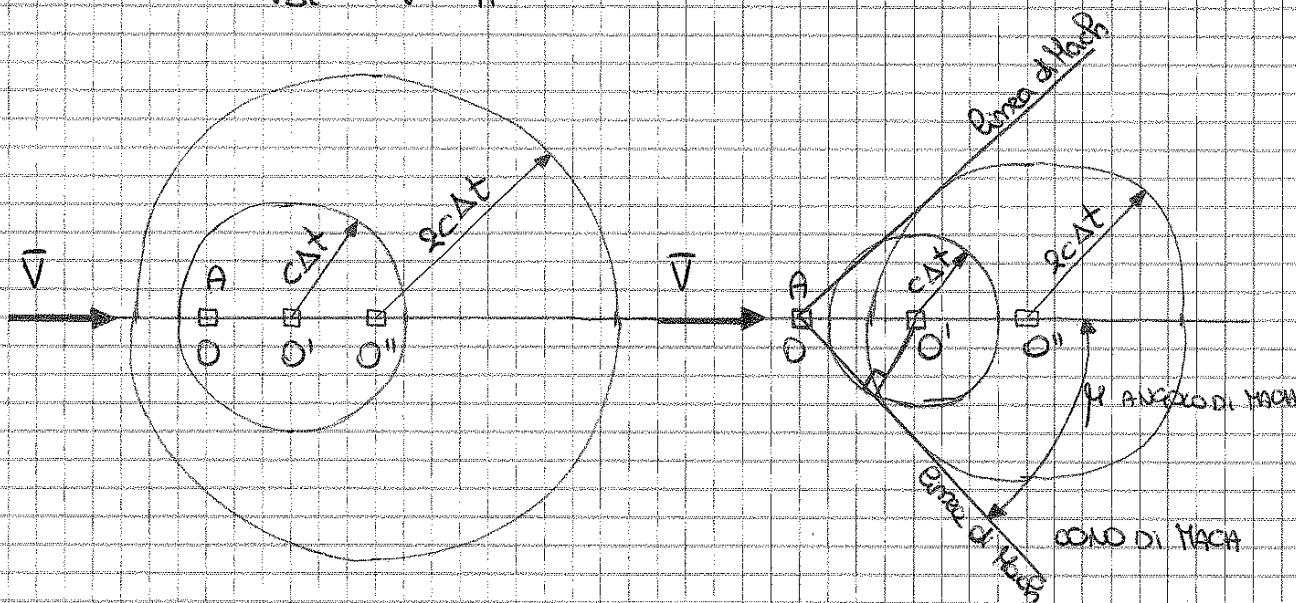
Un fluido per il quale  $\mu = 0$  e  $K = 0$  è indicato come FLUIDO IDEALE.

Le conseguenze di assumere l'aria come mezzo continuo ed omogeneo ed ideale:

- 1) L'aria a contatto con una superficie rigida non aderisce alla superficie ma scivola liberamente su di essa. Condizione di aderenza costituita da condizione di tangenza che se non fosse verificata si avrebbe portata attraverso la superficie rigida stessa e non è possibile.
- 2) Due filotti fluidi ~~contigue~~ contigui, anche se a temperature diverse, non possono scambiarsi calore così come il fluido non può scambiare calore con le pareti rigide con le quali viene a contatto. Ogni filotto fluido si comporta come un sistema adiabatico.



nel moto subsonico  $V < c$  la zona perturbata racchiama tutte sfere di raggio  $c\Delta t$  e  $2c\Delta t$  si estende progressivamente a tutto lo spazio, anche a monte del punto  $O$ , poiché la velocità di accrescimento del raggio delle sfere è maggiore della velocità con cui le sfere vengono trascinate a valle dalla corrente. Per moto supersonico invece la velocità di accrescimento del raggio delle sfere perturbate è minore della velocità con cui esse sono trascinate a valle dalla corrente, per cui tutta la zona perturbata è limitata alla parte di spazio a valle del punto  $O$  racchiama nel corso in sviluppo delle varie sfere perturbate (cono di Mach), con semiapertura pari a  $\sin \mu = \frac{c\Delta t}{V\Delta t} = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}$



**MOTI ROTAZIONALI E IRROTAZIONALI** Se  $\text{rot } \vec{V} = 0$  in tutti i punti del campo di moto allora moto irrotazionale, e per il teorema di Stokes, la circolazione del vettore velocità è nulla lungo qualsiasi linea chiusa del campo. In base al comportamento delle particelle si può distinguere tra moto irrotazionale se le particelle traslano e moto rotazionale se ruotano rigidamente oppure si deformano per rotolamento.

**MOTI ISENTROPICI ED OMOENTROPICI** entropia costante lungo ogni linea di corrente allora isentropico, se in tutto il campo di moto allora omoentropico.

**MOTI ISOENERGETICI ED OMOENERGETICI** come prima ma con l'energia.

## 24 Ass. D. Riferimento

	X	Y	Z
momento	ROLLO	BECCHEGGIO	IMBARDATA
forza	RESISTENZA	DEVIANZA	PURTANZA

## 3 Azioni Aerodinamiche sui profili Alari

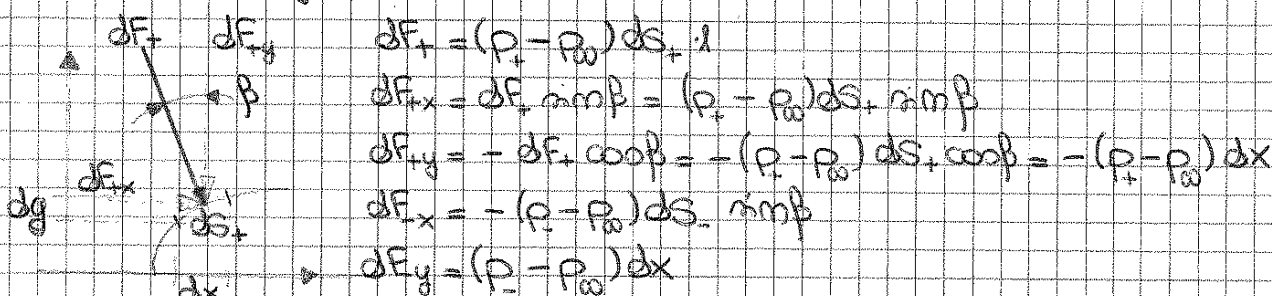
### 3.1 Portanza Resistenza E Momento

Consideriamo una porzione di profilo alare di spessore unitario nella direzione perpendicolare <sup>al piano</sup> del moto. Siamo (x, y) il piano del moto ( $w=0, v=0, z=0$ )

Supponiamo che ogni punto del profilo sia soggetto, anziché alla pressione assoluta del fluido, alla pressione relativa  $p-p_0$  indicata con  $\sigma$  superficie esterna del profilo e  $\vec{m}$  vettore normale ad essa e diretto verso l'esterno.

$$R = - \int_0^c (p - p_0) \vec{m} ds = - \int_0^c p \vec{m} ds + \int_0^c p_0 \vec{m} ds = - \int_0^c p \vec{m} ds$$

Un corpo soggetto alla sua superficie esterna ad una pressione costante non è soggetto ad alcuna forza risultante.



Averrà indicato con  $R$  la forza risultante delle pressioni, integrando su tutta la corda otterremo:

$$R_x = \int_0^c dF_{+x} + \int_0^c dF_{-x}$$

$$R_y = \int_0^c dF_{+y} + \int_0^c dF_{-y} = \int_0^c [(p_- - p_0) - (p_+ - p_0)] dx$$

In generale  $\beta$  molto piccolo perciò  $\sin \beta \ll \cos \beta$  quindi  $|dF_x| \ll |dF_y|$  perciò

$R_x \ll R_y$ . Scomponendo  $R_x$  ed  $R_y$  lungo le componenti della velocità  $v_0$  e  $l_0$  su

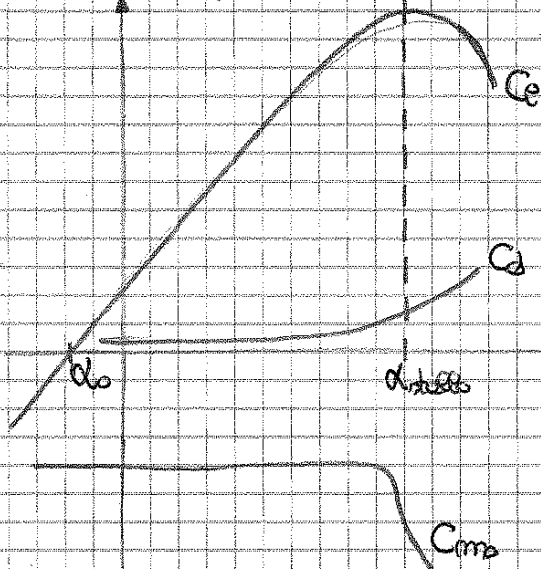
perpendicolare otterremo rispettivamente: **RESISTENZA**  $D = R_y \sin \alpha + R_x \cos \alpha$

**PURTANZA**  $L = R_y \cos \alpha - R_x \sin \alpha$  con  $\alpha$  molto piccolo  $\sin \alpha \ll \cos \alpha$

perciò  $D \ll L = R_y \cos \alpha$  con  $\cos \alpha \approx 1$  ovvero  $L = R_y$

Per fluido ideale non viscoso  $D=0 \Rightarrow$  PARADOSSO DI D'ALEMBERT impossibile alla ipotesi che l'aria può essere considerata fluido ideale, ipotesi che purtutto non è accettabile per lo studio della resistenza in un profilo alare. Non sappiamo però che  $L$  sia applicata perciò della meccanica in che la risultante di un sistema piano

Per fluido reale coeff. di portanza e di momento non dipendono fortemente da  $Re$ , mentre quello di resistenza sì. Per fluido ideale, non viscoso, il  $Re$  perde completamente il significato e tutti i coeff. non dipendono da  $Re$ .  
 La dipendenza dal  $M$  in entrambi i casi è trascurabile se  $M$  molto piccolo per i quali regge l'ipotesi di incompressibilità, mentre per  $M$  elevati si usano i criteri dei fluidi comprimibili.



$\alpha_{st}$  INCIDENZA DI STALLO  
 $\alpha_0$  INCIDENZA DI PORTANZA NULLA  
 pendenza della curva dell'  $C_l$  cioè  $\frac{dC_l}{d\alpha}$   
 ovvero  $C_l = C_l'(\alpha - \alpha_0)$  COEFF.  
 ANCIOLARE DI PORTANZA

### 33 Coefficiente Di Pressione

$C_p = \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_0^2}$  che a parità di ~~portanza~~  $Re$  e  $M$ , i coeff. di pressione in punti corrispondenti di profili diversi ma geometricamente simili e invertevoli con la stessa incidenza risultano uguali. Dipendenza o indipendenza da  $Re$  ed  $M$  come gli altri coeff.

di capacità infinita, in cui  $V=0$  ovunque, la pressione del fluido è coincidente con quella di arresto.

Un fluido in moto può convertire la sua pressione dinamica in pressione statica per muoversi verso zone di pressione maggiore.

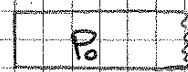
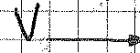
L'eq di Bernoulli fra un punto generico e la corrente indisturbata da

$P - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho (V_{\infty}^2 - V^2)$  da cui il coeff di pressione  
 $C_p = (P - P_{\infty}) / (\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2) = \left(1 - \frac{V}{V_{\infty}}\right)^2$  validi SOLO per fluidi incompressibili perché ottenute con Bernoulli.

#### 44 Misura Delle Pressioni



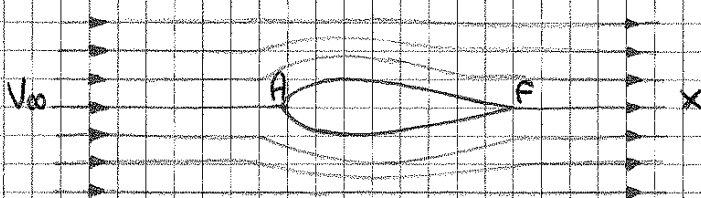
AREEA DI PRESSIONE STATICA



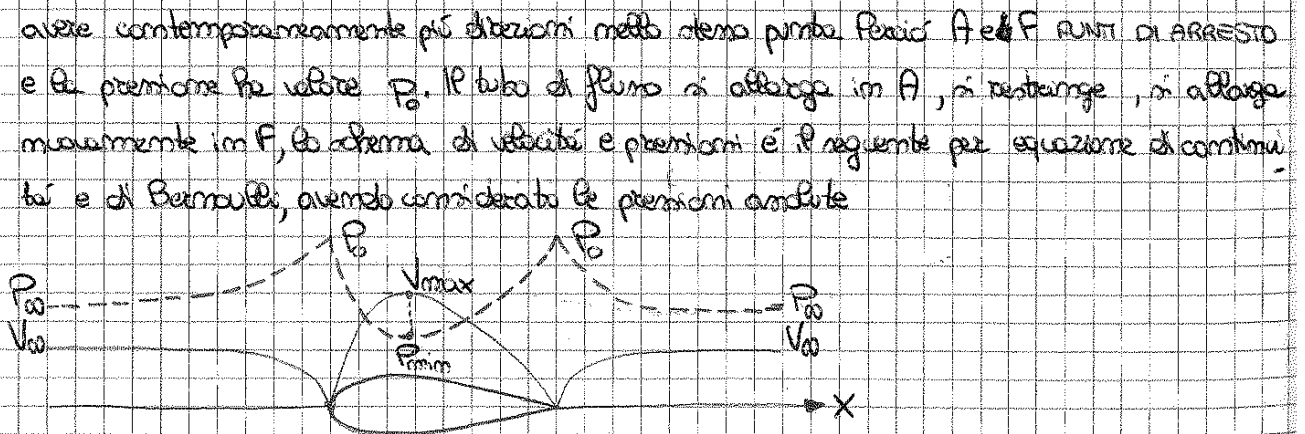
AREEA DI PRESSIONE D'ARRESTO

TUBO DI PITOT strumento che misura contemporaneamente in un punto del campo di moto  $P$  e  $P_0$  per poter calcolare in quel punto la velocità  $V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho}}$  dal teorema di Bernoulli.

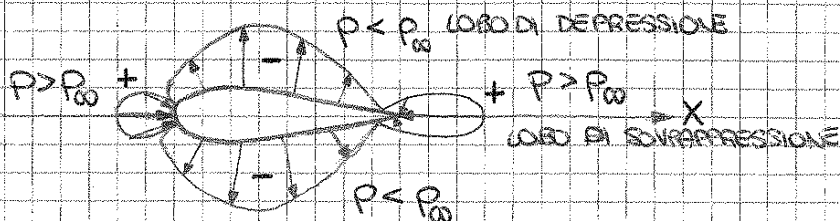
#### 45 Velocità E Pressioni Attorno Ad Un Profilo Alare



In A e in F occorre vi sono le più basse di corrente per rispettare la condizione di tangenza occorre che la velocità sia 0, non potendo avere contemporaneamente più direzioni nello stesso punto. Per A e F PUNTI DI ARRESTO e la pressione ha valore  $P_0$ . Il tubo di flusso si allarga in A, si restringe, si allarga nuovamente in F, lo schema di velocità e pressioni è il seguente per equazione di continuità e di Bernoulli, avendo considerato le pressioni assolute



Dato la simmetria del campo rispetto all'asse x sono evidentemente nulle L e D.

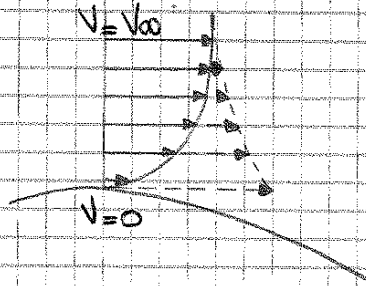




velocità e i vortici di vicia sono avvertiti. I vortici di vicia sono responsabili nell'ala, anche per fluido ideale, della RESISTENZA INDOTTA, avvertite per i profili bidimensionali.

## 4.7 Lo Strato Limite

Ipotesi: fluido reale, impongo CONDIZIONE DI ADERENZA (le particelle fluide a contatto con la parete rigida non possono avere velocità relativa alla parete

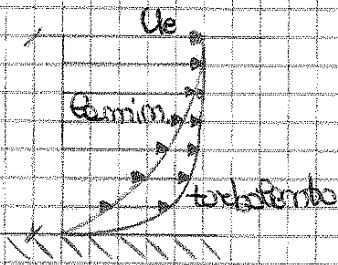


distribuzione velocità fluido reale  
distribuzione velocità fluido ideale

Lo STRATO LIMITE si estende fra la parete  $y=0$  ed il confine esterno  $y=\delta$  assunto per convenzione che la velocità è pari al 99% del valore che avrebbe per

fluido ideale  $u_e = 0,99 u_{\infty}$ . All'esterno dello strato limite accetta l'ipotesi di fluido ideale. Spazio tangenziale  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

Nello strato limite LAMINARE le interazioni che danno origine agli sforzi di attrito e alle viscosità sono imputabili all'agitazione molecolare, che porta una percentuale di molecole a penetrare negli strati adiacenti. In questo TURBOLENTO si ha un'agitazione caotica, non solo di piccole molecole, ma di grappoli che penetrano e si mescolano con le zone più lontane, con sforzi di attrito maggiori che nel caso laminare.



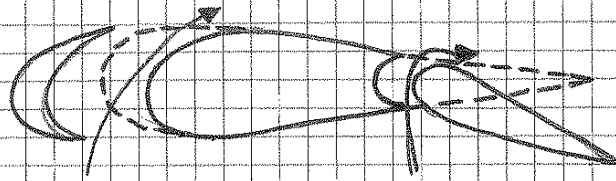
Visto che le particelle vengono deformate poiché hanno una velocità minima alla base e una massima alla sommità, si trovano edotti ad un moto rotazionale e pertanto il Teo Bernoulli non è applicabile parimenti da una linea di costante all'altra, trasversalmente

allo strato limite.

Sostitendo al corpo vero il corpo virtuale costituito dal corpo vero ricoperto dal suo strato limite, si ottiene subito anche la distribuzione di velocità e pressione ammettendo l'ipotesi che valga per fluido ideale e fluido reale. Lo spessore  $\delta$  dello strato limite cresce con il momento a partire dal bordo d'attacco del corpo vero il bordo di fuga e se turbolento si ingrossa più rapidamente di quello laminare.

Sulle misure dello strato limite influiscono:  $Re = V_{\infty} x / \nu$  con  $x$  ascissa assiale (misurata lungo il corpo a partire dal bordo d'attacco), il segno di  $\partial p_e / \partial x$  lungo il confine esterno, la rugosità della superficie, le qualità della corrente iniettata che potrebbe già contenere germi di turbolenza. TRANSIZIONE passaggio da laminare a turbolento. Per  $Re$  molto piccoli il flusso è praticamente tutto laminare. Per corpi lisci la transizione scivola per un certo  $Re$  ma può essere ritardata  $\partial p_e / \partial x < 0$

Il fenomeno della spinta è dato anche da attrazione esterno verso il basso ~~oppo~~  
 posto al bordo d'attacco o di fuga dello IPERSOSTENTATORE



## 5 Alcuni importanti Teoremi

**GRADIENTE**  $\nabla f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$   
 da scalare a vettore che ci dà direzione e verso in cui muoverci per avere il massimo valore di  $f$  ds e questo vale:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\max} = |\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

**DIVERGENZA**  $\nabla \cdot \mathbf{q} = \text{div } \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$   
 da vettore a scalare che ci dà il rapporto fra flusso di quel vettore uscente da un volume infinitesimo preso nell'intorno di un punto P ed il volume stesso o il flusso uscente per unità di volume

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho \text{div } \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \text{grad } \rho$$

**ROTORE**  $\nabla \times \mathbf{q} = \text{rot } \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$

da vettore a vettore che ci dà informazioni sul campo di moto, se  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$  moto irrotazionale, altrimenti rotazionale. Nel primo caso esiste sicuramente una funzione  $\phi$  t.c. in ogni punto del campo il vettore  $\mathbf{q}$  può essere ottenuto dalla relazione:  
 $\mathbf{q} = \text{grad } \phi$  per cui si ha  $\text{rot grad } \phi = 0$

**TEOREMA GRADIENTE**  $\int_{\sigma} f \cdot \mathbf{m} \, ds = \int_{\tau} \text{grad } f \, d\tau$

**TEOREMA DIVERGENZA**  $\int_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{m} \, ds = \int_{\tau} \text{div } \mathbf{q} \, d\tau$

**TEOREMA ROTORE O DI STOKES**  $\int_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{l} = \int_{\tau} \text{rot } \mathbf{q} \cdot \mathbf{m} \, ds$

Assumendo che il gas si comporta come perfetto fino alla 0 assoluta, quando  $T=0$  la velocità viene raggiunta il suo massimo valore VELOCITÀ LIMITE  $V_e$

$$V_e^2 = \frac{2C_0^2}{(\kappa-1)} \quad V_e = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} V_{cr}$$

dove con  $V_{cr}$  si indica la velocità per cui  $V=c$  detta VELOCITÀ CRITICA

Per aria  $V_e = \sqrt{5} C_0 = \sqrt{6} V_{cr}$

$$\left(\frac{V}{V_e}\right)^2 = \frac{(\kappa-1)M^2}{2+(\kappa-1)M^2} \quad \left(\frac{V}{V_{cr}}\right)^2 = \frac{(\kappa+1)M^2}{2+(\kappa-1)M^2}$$

EQUAZIONE ENTROPIA  $T \text{grad} S = \frac{\partial V}{\partial t} + \text{grad} \left( P + \frac{1}{2} V^2 \right) + \text{rot} V \times V$

TEOREMA  
CROCCO

Per fluidi ideali e per tutti i moti permanenti che hanno origine dalla quiete o da condizioni uniformi, l'entropia  $S$  è costante in tutto il campo di moto.

Relazioni isentropiche:

$$T \nu^{\kappa-1} = \frac{T}{\rho^{\kappa-1}} = \text{cost.} = \frac{T_0}{\rho_0^{\kappa-1}}$$

$$p \nu^\kappa = \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{cost.}$$

$$\frac{T}{\rho^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \text{cost.}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

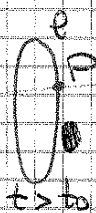
$$T_0 = T \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)$$

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\kappa-1}}$$

### 6.6 Teorema di Lagrange - Thomson



$$x_0 = x_0(s_0) \quad y_0 = y_0(s_0) \quad z_0 = z_0(s_0)$$

$$x = x(s_0, t) \quad y = y(s_0, t) \quad z = z(s_0, t)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{s_0} = u \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{s_0} = v \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{s_0} = w$$

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{t} \, dl \quad \rightarrow \quad \frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_0} \, ds_0 = - \oint_C \frac{dp}{\rho}$$

Se  $p = \text{cost}$  oppure esiste una funzione  $Q(p)$  funzione della sola  $p$  t.c.

$dp/p = dQ(p)$  allora  $\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_C dQ(p) = 0$  (differenziale esatto calcolato lungo una linea chiusa).

Per fluidi incompressibili con  $p = \text{cost}$  o per correnti isentropiche risulta quindi sempre  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ ,  $\Gamma = \text{costante}$  per ogni linea fluida  $l$ .

Enunciato: in un campo di moto t.c.  $p = \text{cost}$  o funzione della sola  $p$  come  $p = p(P)$

la circolazione della velocità lungo una linea fluida è costante, comunque ed ovunque si apriti o si deformi ~~la linea~~ ~~il fluido~~ ~~il sistema~~.

Ipotesi: fluido ideale e incompressibile.



Applicando  $\phi$  non dipende dal percorso deve essere  $\Gamma = 0$  lungo qualsiasi linea parametrica per  $O$  e per  $P$ , e per il teorema del rot  $\nabla$  sarà necessariamente nulla,  $\text{rot } \vec{V} = 0$ .

$\phi$  non dipende dal percorso perché  $\text{rot } \vec{V} = 0$ .

$\phi_p = \text{cost} =$  LINEE EQUIPOTENZIALE massimali al vettore velocità

Convenzioni segno:  $V_x$  positiva se  $P_x$  stesso verso del percorso da  $O$  a  $P$ , altrimenti negativa.

$$d\phi = u dx + v dy \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{COMPONENTI VELOCITÀ}$$

$$\vec{V} = \text{grad } \phi$$

Funzione  $\phi$  estendibile a campi di moto tridimensionale ed irrotazionale.

Sostituendo come prima ottengo  $\nabla^2 \phi = 0$  EQ. LAPLACE.

Per qualsiasi coppia di punti  $(R, S)$  nel percorso  $\gamma$  con  $\phi = \text{cost}$  si ha  $\int_R^S V_e d\ell = 0$

Sulle linee equipotenziali la velocità è massima alle linee stesse.

Le due famiglie  $\phi = \text{cost}$  e  $\psi = \text{cost}$  costituiscono due famiglie di linee ortogonali.

quindi  $\phi$  e  $\psi$  dette FUNZIONI ARMONICHE ASSOCIATE

## 8 Campi Semplici Piani - Teorema Kutta-Joukowski

Ipotesi: fluido incompressibile, moto bidimensionale, ed irrotazionale

### 8.1 Corrente Uniforme

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad \text{rot } \vec{V} = 0$$

$$\psi_p = -vx + uy \quad \phi_p = ux + vy$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = u \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = v$$

### 8.2 Sorgente E Pozzo

$$Q = 2\pi r V$$

$$\psi_p = \frac{Q}{2\pi} (2\pi + \theta)$$

$$\phi_p = \frac{Q}{2\pi} \frac{\rho_m r}{\rho}$$

$$V = \frac{Q}{2\pi r} \quad V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r} \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

### 8.3 Vortice

$$\Gamma = 2\pi r \omega$$

$$V_r = V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$\psi_p = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\rho_m r}{\rho}$$

$$\phi_p = \frac{\Gamma}{2\pi} (2m\pi + \theta)$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

## 9 Potenziale Complesso

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = r e^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan(y/x)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad \text{POTENZIALE COMPLESSO}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -v$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\phi + i\psi) = u - iv$$

$$\int_P \frac{dW}{dz} dz = \Pi + iQ$$

## 10 Trasformazioni Conformi

### 10.1 Proprietà Generali

Piani complessi  $z = x + iy$  PIANO PRINCIPALE,  $\zeta = \xi + i\eta$  PIANO TRASFORMATO

Scopo: studiare il campo di moto attorno ad un profilo bidimensionale qualsiasi partendo dal campo di moto già noto attorno ad un cilindro circolare.

Supponiamo corrispondenza tra  $z$  e  $\zeta$  con funzione  $\zeta = f(z)$  (ogni  $P$  di  $z$  è associata a un  $P^*$  di  $\zeta$ ) FUNZIONE DI TRASFORMAZIONE, ad una linea chiusa su  $z$  corrisponde una linea chiusa su  $\zeta$ . Le TRASFORMAZIONI CONFORMI conservano gli angoli sotto i quali linee corrispondenti si tagliano su i due piani in punti corrispondenti.

$$d\zeta = f'(z) dz$$

$$|d\zeta| = |f'(z)| \cdot |dz|$$

$\arg(d\zeta) = \arg[f'(z)] + \arg(dz)$  (i vettori elementari di  $\zeta$  vengono ruotati dello angolo costante  $\arg[f'(z)]$  rispetto alla direzione dei vettori elementari  $dz$ ).

Condizione di conformità:  $\exists f'(z)$  e sia  $f'(z) \neq 0, \infty \Rightarrow f(z)$  analitica. CONDIZIONE CONFORMITÀ; dove  $f'(z) = 0, \infty$  sono detti PUNTI CRITICI e la trasformazione non è conforme ed altera gli angoli come  $\beta^* = (1+m)\beta$  con  $m$  zero di ordine  $m$  nel punto di non conformità. Per trasformare un cerchio in un profilo alare occorre che almeno un punto sia critico sul cerchio nel quale  $f'(z) = 0$ , al fine di ottenere sul profilo il bordo di fuga appiattito.

Si può ammettere che tale processo avvenga con il distacco di un solo vortice che dia subito una circolazione  $\Gamma$  attorno al profilo, capace di spostare in una volta sola il punto di arresto posteriore fino a coincidere con il bordo di fuga. VORTICE INIZIALE.

## 10.6 Condizione D. Nutta

Il campo di moto risultante è quello ottenuto per sovrapposizione di doppietta, corrente uniforme e vortice. Eq. di Laplace e condizioni al contorno soddisfatte per ogni  $\Gamma$ . L'intensità  $\Gamma$  deve essere tale da spostare sul cerchio il punto P fino a coincidere con B corrispondente al  $B^*$  del profilo. In B deve essere  $f'(z) = 0$  per cui per non ottenere  $V_B^* = \infty$  deve essere  $V_B = 0$ , condizione necessaria e sufficiente che deve essere soddisfatta affinché al bordo di fuga di un profilo la corrente sia regolare, detta CONDIZIONE DI NUTTA. Nel caso di trasformazioni conformi essa consiste nell'imporre B punto di arresto.

$V_B = 0$  non implica  $V_B^* = 0$ , ma solo che  $V_{B^*} \neq \infty$ .

Per profili di Joukowski e per profili senza sperone il bordo di fuga non è di arresto perciò la condizione di Nutta è ~~la~~ l'imposizione che le due correnti che hanno cambiato senso e vertice si ricongiungano al bordo di fuga con la stessa velocità, in direzione e modulo (ovvero stessa pressione).

## 10.7 Trasformazione D. Nutta - Joukowski

Trasformazione conforme. Può trasformare un cerchio del piano  $z$  in diversi profili, simmetrici o asimmetrici, con o senza sperone, compresi la lamina piana; per contro manca la possibilità di variare la forma del profilo al di fuori della famiglia a cui dà origine, nel senso che il massimo incurvamento della linea media si verifica sempre al 50% della corda e il massimo spessore al 25%. Infine i profili di Joukowski hanno il bordo di fuga curvato, senza dorso e ventre sono tangenti fra loro al bordo di fuga formando profili con sottili e deboli al bordo di fuga da verificare la realizzazione pratica.

Consideriamo un cerchio nel piano  $z$  di centro  $C$  e raggio  $a$ .  $C$  contiene l'origine degli assi ed applichiamo a tutti i punti la TRASFORMAZIONE DI NUTTA-JOUKOWSKI 
$$S = z + \frac{b^2}{z}$$
 e per avere il bordo di fuga appuntito è sufficiente imporre  $b$  come distanza fra origine degli assi ed il punto  $B$ :  $b = |z_B|$ . In forma esponenziale  $S = re^{i\theta} + \frac{b^2}{r} e^{-i\theta}$  cioè somma vettoriale di due vettori di modulo  $r$  e  $b^2/r$  che formano con l'asse  $x$  due vettori  $\theta$  e  $-\theta$ . Sovrapponendo i due piani si può procedere alla costruzione grafica del profilo. Il vettore  $(P^* - O) = S$  si ottiene sommando i vettori  $(P - O) = z$  e  $(Q - O) = b^2/z$ . Ripetendo la costruzione è possibile trasformare l'intero cerchio in un profilo.

$$C_e = 2\pi \frac{4a}{e} \sin(\alpha + \beta) = 2\pi(\alpha + \beta) \text{ per } \alpha, \beta \text{ piccoli}$$

$$e = 4b = 4a$$

$$C_e' = 2\pi$$

$$\alpha_0 = -\beta$$

$$\tan \beta = m/b$$

$$m = a \sin \beta$$

$$z = a \beta \sin \theta + a$$

$$V = 2V_0 [(1 + \beta \sin \theta) \sin \theta + \alpha(1 + \cos \theta)]$$

$$b = a \cos \beta$$

$$|f'(z)| = \frac{2 \sin \theta}{(1 + \beta \sin \theta)}$$

$\alpha, \beta = 0$  (eccentricità e l'angolo di rotazione sul bordo d'attacco)

$$V^* = V_0 \left( 1 + 2\beta \sin \theta + \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

dove  $2\beta \sin \theta$  imbracciamento cerchio

### PROFLO GENERICO DI JUKOWSKI

$$\xi = x \left( 1 + \frac{b^2}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\eta = y \left( 1 - \frac{b^2}{x^2 + y^2} \right)$$

$$x = x_c + a \cos \theta' = b e + \frac{b(1+e)}{\cos \beta} \cos \theta'$$

$$y = y_c + a \sin \theta' = b(1+e) \tan \beta + \frac{b(1+e)}{\cos \beta} \sin \theta' = \frac{b(1+e)}{\cos \beta} (\sin \beta + \sin \theta')$$

$$0 \leq \theta' \leq 2\pi \quad e \ll 1 \text{ (eccentricità)} \quad \beta \ll 1$$

$$\Gamma = 4\pi a V_0 \sin(\alpha + \beta)$$

$$C_e = 2\pi \frac{4a}{e} \sin(\alpha + \beta) = 2\pi(\alpha + \beta) \text{ per } \alpha, \beta \text{ piccoli}$$

$$e \approx 4b \approx 4a$$

$$\alpha_0 = -\beta$$

$$C_e' = 2\pi$$

$$V = 2V_0 [\sin(\theta' + \alpha) + \alpha \sin(\alpha + \beta)]$$

$$|f'(z)| = \left| \left[ 1 - \frac{b^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] + i \left[ \frac{2b^2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right|$$

$$V^* = \frac{V}{|f'(z)|}$$

Per ~~il~~ PROFLO SIMMETRICO avremo  $y_c = 0$  ed una  $x_c \neq 0$ .

Per la trasformazione inversa notiamo che ad ogni valore di  $z$  corrispondono due valori di  $z'$  che implica che la trasformazione di Kutta-Joukowski non è biunivoca: oltre alla soluzione banale  $z_2 = z_1$  ho  $z_2 = \frac{b^2}{z_1}$



### M.4 Equazione Di Tangenza E Coefficiente Di Pressione

EQUAZIONE DI TANGENZA  $\frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{u'}{V_{\infty}}$  per profili sottili

COEFF. PRESSIONE  $C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_{\infty}}\right)^2 = -\frac{2u'}{V_{\infty}}$

Il coeff. di pressione in ogni punto P del campo di moto attorno ad un profilo sottile si può ottenere sommando i tre coefficienti di pressione causati nello stesso punto P dai tre profili elementari in cui si può scomporre il profilo in esame ovvero  $C_p = C_{p1} + C_{p2} + C_{p3}$  vale a dire sovrapposizione effetti.

$u'$  influenza molto alla direzione di  $V$ , mentre  $u'$  influenza molto al modulo, perciò essenzialmente tra destra e sinistra:  $V_+(x) - V_-(x) = u'_+ - u'_-$

### M.5 Scelta Distribuzione Di Singularità

Le distribuzioni devono soddisfare le stesse condizioni all'infinito imposte dai profili, cioè che  $V = V_{\infty} + u'$  in tutti i punti dei tre profili sia tangente ai profili stessi.

~~CONDIZIONE~~

LAMINA PIANA  $\frac{dy_+}{dx} = \frac{dy_-}{dx} \Rightarrow$  distribuzione di vortici  $\gamma(x')$  lungo la corda della lamina.

LAMINA CURVA  $\frac{dy_+}{dx} = \frac{dy_-}{dx}$  con  $\alpha = 0 \Rightarrow$  distribuzione di vortici  $\gamma_2(x')$  impara con la condizione di tangenza non in P ma alla sua proiezione sull'asse x.

PROFILO SIMMETRICO  $\frac{dy_+}{dx} = -\frac{dy_-}{dx}$  con  $\alpha = 0 \Rightarrow$  corda tang  $\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{V_{\infty}}$ , distribuzione di vortici negativi sulla corda del profilo, corda tang alla proiezione di P su  $x$ .

Il principio di sovrapposizione degli effetti è applicabile a coeff. di pressione, portanza e momento aerodinamico.

### M.6 Profilo Simmetrico Invertito Senza Incidenza

$$\frac{dy_-(x)}{dx} = -\frac{dy_+(x)}{dx} = -\frac{u'_+}{V_{\infty}} \quad \text{con } u'_+ = q(x)/2$$

$$q(x) = q(x) = 2V_{\infty} \frac{dy_+}{dx}$$

$$u'_+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^e \frac{q(x') dx'}{(x-x')}$$

$C_{p+} = C_{p-} = -\frac{2u'_+}{V_{\infty}}$  simmetrico rispetto alla corda del profilo

Sono nulli portanza e momento forze. Si deduce che dove  $\frac{dy_+}{dx} > 0$  si ha  $q(x) > 0$  perciò finché la pendenza del profilo aumenta si hanno vortici, quando la pendenza diminuisce si hanno pozzi.

$$\int_0^e q(x') dx' = 0$$

### 11.9 Profilo Sottile con Alettone

$$\alpha_{id} = \frac{\gamma D_c}{\pi} - \delta \quad C = \text{coefficiente alettone}$$

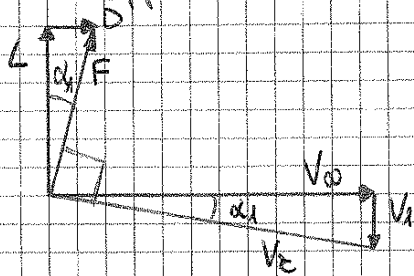
$$A_1 = \frac{2\gamma}{\pi} \sin \theta_c \quad A_2 = \frac{\gamma}{\pi} \sin(2\theta_c)$$

$$\alpha_o = \frac{\gamma}{\pi} (+\theta_c - \sin \theta_c) - \delta$$

$$C_e = \frac{2\gamma \alpha}{\pi} + \frac{2\gamma \gamma}{\pi} \left(1 - \frac{\theta_c - \sin \theta_c}{\pi}\right)$$

$$C_{mo} = -\frac{\pi}{4} [2 \sin \theta_c - \sin(2\theta_c)]$$

### 11.10 Sovrapposizione di Correnti Uniformi



Se un profilo, orientato  $\Gamma$  in verso orario, è immerso in oltre che delle correnti indisturbate  $V_0$  diretta lungo l'axe coincidente con la direzione della corda, anche da una corrente con velocità  $V_1$  di direzione perpendicolare alla  $V_0$  e rivolta contro il dorso del profilo, alle portance  $L = \rho V_0 \Gamma$  data da Kutta - Joukowski è associata una resistenza  $D = \rho V_1 \Gamma$ ,  $\alpha_1$  è deviazione del vettore velocità risultante rispetto alla  $V_0$ . È chiaro che  $L = F \cos \alpha_1$ ,  $D = F \sin \alpha_1 = L \tan \alpha_1$

### 11.11 Coefficiente Pressione Su Lamina Curva

Siccome  $C_{p-} = -C_{p+} = + \frac{2u^2}{V_0^2} = \frac{\gamma^2}{V_0^2}$  calcoliamolo solo sul dorso, poi cambiamo segno.

$$C_{p+}(\theta) = - \frac{2 \sin^2 \theta}{\pi} \int_0^\pi \frac{y'(\theta') - \alpha_{id}}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = - \frac{2 \sin^2 \theta}{\pi} \int_0^\pi \frac{y'(\theta') - y'(\theta)}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta'$$

Per  $\theta = \pi$ , 0 si ha  $C_p = 0$ , che significa che su un profilo senza gap è immerso alla sua incidenza ideale, la velocità su dorso e ventre, sia al bordo di attacco, sia al bordo di fuga, è pari a  $V_0$ .

### 12.3 Profili Portanti

Distribuzioni di velocità,  $v_f$  costante su ogni pannello, con condizione nulla al bordo di fuga. La numerazione inizia dal bordo di fuga  $F$  e procede in verso orario.

In ogni punto il pannello produce una velocità aggiuntiva  $\pm v_f/2$ , affinché  $F$  sia punto di arresto occorre che  $V \pm v_f/2 = 0 \Rightarrow v_f = 0$

Si occorre in  $F$  si incontrano  $v_1 = v_f$  e  $v_{nm}$  dell'ultimo pannello, allora deve essere  $v_f = v_1 + v_{nm} = 0 \Rightarrow v_1 = -v_{nm}$  CONDIZIONE VITA PER PANNELLI

Per avere migliore aderenza sul pannello si vuole una distribuzione  $v$  variabile lungo il pannello secondo una legge lineare, con condizione che  $v$  non varia al passare da un pannello all'altro. Per approssimare in modo migliore occorre infilare i pannelli al bordo di fuga e di attacco.

### 13 Sorgenti e Doppie Nello Spazio

Ipotesi: fluido incomprimibile, moto permanente, irrotazionale, moto tridimensionale.

Eq. Laplace  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$  (lineare)

Per moti tridimensionali non sempre esiste la funzione di corrente.

CORRENTE UNIFORME  $\phi = Ux + Vy + wZ$   
 $\phi = V_0 x$  (per  $V_0$  parallela ad  $x$ )

SORGENTE punto nelle origini degli assi,  $Q$  m<sup>3</sup>/s,  $V = V_r$ , linee di corrente sono le  
 POZZO semisfere uscenti da  $O$ , superfici equipotenziali sono sfere di centro  $O$  concentriche

$Q = 4\pi r^2 V_r$   $V_r = Q / (4\pi r^2)$  ( $> 0$  sorgenti,  $< 0$  pozzi)  
 $\phi = -\frac{Q}{4\pi r}$  (se sorgente posta in  $P_0$  e min in  $O$  allora  $r = P_0 - O$ )

DOPPIETA  $\overline{SP} = r_1$ ,  $\overline{OS} = c$ ,  $\overline{OP} = r$   
 $r_1^2 = r^2 + c^2 - 2(P-O)(S-O)$   
 $P-O = r \left( \frac{x}{r} \bar{i} + \frac{y}{r} \bar{j} + \frac{z}{r} \bar{k} \right)$   $S-O = c(\alpha \bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k})$   
 $\phi = -\frac{Q}{4\pi r} \frac{c}{r} = -\frac{Q}{4\pi r^2} c (\alpha x + \beta y + \gamma z)$

Per  $Q, c$   
 $c \rightarrow 0, Q \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = -\frac{M}{4\pi r^3} (\alpha x + \beta y + \gamma z)$   
 $\phi(x, y, z) = -\frac{M}{4\pi} \frac{[\alpha(x-x') + \beta(y-y') + \gamma(z-z')]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$

DOPPIETA E CORRENTE UNIFORME  $\phi = -V_0 x - \frac{Mx}{4\pi r^3}$  se sull'asse, altrimenti se c'è un angolo  $\theta$   
 $\phi = -V_0 z \cos \theta - \frac{M \cos \theta}{4\pi r^2}$

### Teoremi di Helmholtz sui vortici

**PRIMO TEOREMA** Un moto è rotazionale se le particelle fluide si muovono di moto traslatorio; è rotazionale se le particelle fluide ruotano rigidamente o hanno un moto di accorciamento.

**SECONDO TEOREMA** L'intensità  $\Gamma$  di un tubo vorticoso è uguale alla circolazione della velocità calcolata sul contorno di una qualunque sezione del tubo stesso ed è costante (conseguenza del teorema di Stokes e irrotationalità di rot V).

**TERZO TEOREMA** Una superficie vorticoso totalmente immersa nel fluido e che si muove con il fluido è anche superficie fluide, cioè costituita sempre dalle stesse particelle.

**QUARTO TEOREMA** L'intensità di un tubo vorticoso è costante nel tempo (per il teorema di Lagrange-Thomson  $\Gamma = \text{cost}$  perciò anche l'intensità è cost).

### 14.4 Legge di Biot-Savart

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \sin\theta d\theta ; dV = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \sin\theta ds ; d\vec{V} = \frac{\Gamma \times \vec{R}}{4\pi R^3} ds$$

forme diverse ma identifichiamo la velocità elementare dovuta ad un filletto vorticoso di intensità  $\Gamma$  e lunghezza  $ds$ , se questo potesse esistere con un tubo, in contrasto con il secondo teorema di Helmholtz.

**VORTICE AD ANELLO CIRCOLARE**  $\theta = \pi/2$   $ds = R d\theta$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{4\pi R^2} R d\theta = \frac{\Gamma}{2R}$$

**VORTICE RETTILINEO DI LUNGHEZZA FINITA**  $\alpha = \frac{\pi}{2}$   $\beta = 0$   $V = \Gamma/4\pi R$

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad V = \Gamma/2\pi R$$

$$\tan \alpha = r/l \quad (\text{in P}) \quad V = 0,995 \Gamma/2\pi R$$

Ogni elemento  $ds$  di un filletto vorticoso induce in punti infinitamente vicini o su se stesso la stessa velocità di un filletto vorticoso rettilineo di lunghezza infinita, il vortice ad anello, che si sviluppa tutto vicino al punto centrale dell'anello, dà una velocità  $\pi$  volte maggiore di quella del vortice rettilineo indefinito di uguale intensità passante per alla stessa distanza.

### 14.5 Superfici Vorticose

Superficie vorticoso in moto permanente che per il terzo teorema di Helmholtz si mantiene perciò vorticoso. Supponiamola anche superficie di corrente, tangente in ogni punto al vettore velocità. I filletti vorticosi non abbiano andamento rettilineo, ma qualsiasi e a questo punto il valore del raggio della componente della velocità normale al filletto è sempre legato al valore noto dell'intensità del filletto vorticoso in quel punto, indipendentemente da percorso e condizioni iniziali e finali. Il raggio di curvatura è dato da  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \alpha \vec{v} \times \vec{v} / (s) \vec{h}$  che razionalmente è equivalente per



anche superficie di corrente, e si ha un salto di pressione  $\Delta p = \frac{2\delta y}{V_{\infty}} = -\frac{2\Delta u}{V_{\infty}}$  dovuto all'applicazione della teoria delle piccole perturbazioni. La circolazione  $\Gamma$  lungo una linea chiusa che contenga l'ala sul piano parallelo ad  $(x, z)$  vale:

$$\Gamma = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \gamma dy \quad \text{dove } x_1(y) \text{ eq bordo d'attacco, } x_2(y) \text{ eq bordo di fuga.}$$

Si come per il teorema di Stokes la circolazione lungo  $\Gamma$  è nulla, occorre che vi siano zone di non aderenza dove la superficie vorticoso esce dall'ala, si manifesta vorticoso fluido senza salti di pressione tra faccia negativa e positiva, e per l'eq. di tangenza su una superficie vorticoso, i filletti vorticoso devono essere paralleli al vettore  $\vec{U}_{\infty}$ , coincidente circa con  $V_{\infty}$  perché  $V'$  piccolo. Quindi deve esserci parallelismo tra i filletti vorticoso e l'asse  $x$ ; essendo tangente in ogni punto al vettore velocità, la superficie vorticoso fluido non è anche superficie di corrente.

**VORTICI ADERENTI** su  $S$ , VORTICI DI SUSA sulla superficie vorticoso fluido che costituisce la scia (o vortici liberi) che si chiudono all'infinito a valle sul vortice iniziale per rispettare il II teorema di Helmholtz.

La componente  $\gamma_x$  essendo funzione della sola  $x$  varia da un filletto fluido all'altro, ma non lungo un filletto; è la componente dei vortici di scia.

La portanza  $L = \rho V_{\infty} \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y) dy$

Alle estremità alari è sempre vero che  $\Gamma(+b/2) = \Gamma(-b/2) = 0$

## 15.2 Schema di Prandtl

Modello tridimensionale

Supponiamo un'ala di grande allungamento  $\lambda$  e piccolo angolo di freccia  $\Lambda$  (sono accettabili  $\lambda \geq 10$ ,  $\Lambda \leq 5^\circ$ ). In questo caso nel calcolo delle componenti  $w'$  della  $V'$  occorre tener conto anche dei vortici di scia che nel modello bidimensionale sono assenti. Al fine del calcolo della portanza ci serve solo sapere la circolazione in ogni sezione del profilo alare  $\Gamma(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \gamma dy$ .

Per cui nello schema di Prandtl si suppone di impacchettare tutti i vortici aderenti alla superficie portante in un unico vortice parallelo all'asse  $y$ , di intensità  $\Gamma(y)$  variabile lungo  $y$  e posto sul segmento che contiene i fochi, cioè sulla linea dei quarti ombreggiati. La superficie portante è ridotta ad un segmento portante che si estende da  $+b/2$  a  $-b/2$ ; tutti i vortici di scia risultano entranti o uscenti da questo segmento e tutti i possibili punti della superficie alare vengono a trovarsi su questo segmento. Si tratta di calcolare la velocità indotta dai vortici di scia su questo segmento. I vortici di scia sono dei vortici semidefiniti, tutti entranti o uscenti dal segmento portante, tutti i punti di tale segmento sono sulla normale ai vortici di scia semi-definiti come se per la loro origine. La velocità si calcola con la legge di

### 15.3 Distribuzione Ellittica di Portanza

$\Gamma(y)$  simmetrica rispetto alla mezzocorda dell'ala e nulla all'estremità, e  $\Gamma(y)$  è ellittica allora è ellittica anche la distribuzione della portanza

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}} \quad L = \frac{1}{4} \rho V_{\infty} \pi \Gamma_0 b$$

cambio di variabili  $y = \frac{b}{2} \cos \theta \quad y' = \frac{b}{2} \sin \theta$

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{b^2 \cos^2 \theta / 4}{b^2 / 4}} = \Gamma_0 \sin \theta \quad d\Gamma = \Gamma_0 \cos \theta' d\theta'$$

$$\alpha_i = \frac{\Gamma_0}{2\pi b V_{\infty}} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} = \frac{\Gamma}{2b V_{\infty}} = \frac{C_l}{\pi \lambda} \quad D_i = \alpha_i L \quad (\text{su tutta l'ala})$$

L'ala con distribuzione ellittica di portanza ha incidenza indotta costante lungo tutta l'apertura alare

$$C_{Di} = \alpha_i C_l = \frac{C_l^2}{\pi \lambda} \quad C_L = \frac{\pi \Gamma_0 b}{2 V_{\infty}} = \frac{\pi \lambda \Gamma_0}{2 b V_{\infty}}$$

AP conoscere della portanza cresce la resistenza indotta!

ALA ELLITTICA  $\Gamma(y) = \pi V_{\infty} K(\eta) [\alpha_a - \alpha_i]$

$$\alpha_i = \frac{C_l}{\pi \lambda}$$

$$L = \rho V_{\infty}^2 \pi K(\alpha_a - \frac{C_l}{\pi \lambda}) S$$

$$C_L = \frac{2\pi K \alpha_a}{1 + 2K/\lambda} = \frac{2\pi K (\alpha_a - \frac{C_l}{\pi \lambda})}{1 + 2K/\lambda} = \frac{C_e}{1 + 2K/\lambda} \quad C_e' = 2K\pi$$

$$C_L' = \frac{2\pi K}{1 + 2K/\lambda} = \frac{C_e'}{1 + 2K/\lambda} = \frac{C_e'}{1 + C_e'/\lambda \pi}$$

### 15.4 Distribuzione Qualsiasi di Portanza

$$L = -\rho V_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} V_{\infty} b g(\theta) \frac{1}{2} b \sin \theta d\theta$$

$$g(\theta) = \frac{\Gamma_0}{V_{\infty} b} \sin \theta$$

$$C_L = \lambda \alpha_a \frac{\pi}{2}$$

$$C_{Di} = \frac{C_l^2}{\pi \lambda}$$

$$D_i = -\rho V_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} V_{\infty} b g(\theta) \alpha_i(\theta) \frac{1}{2} b \sin \theta d\theta$$

$$\alpha_i(\theta) = -\frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{\infty} b dg(\theta')}{\frac{1}{2} b (\cos \theta' - \cos \theta)}$$

$e = \text{fattore di Oswald}$

L'ala con distribuzione ellittica di portanza è l'ala che presenta il minor coefficiente di resistenza indotta, a parità di coefficiente di portanza e di allungamento. Per questo motivo si cerca di realizzare nelle ali una distribuzione di portanza il più possibile prossima a quella ellittica, con restringimento e sovrappiombamento delle semiali, dal momento che la realizzazione di un'ala ellittica in planata presenta difficoltà di carattere costruttivo  $e = 1$  per ale con distribuzione ellittica,  $e < 1$  per tutte le altre distribuzioni.

Se  $C_{D0}$  coeff. di resistenza per fluido reale dovuto alle tracce limite in condizioni di portanza nulla dell'ala si può scrivere  $C_D = C_{D0} + C_{Di} = C_{D0} + \frac{C_l^2}{\pi \lambda}$  che è EQ. POLARE DELL'ALA.

In questo modo la velocità ~~è~~ indotta ~~in~~ in un punto della retta di controllo è somma delle velocità dovute sia ai vortici di serie sia ai vortici impaccati nella linea dei fuochi anteriori.

$W_i'(x, y) = -V_0 \alpha_a(y)$  soddisfa invece per le ali a freccia l'eq. di Prandtl, infatti per  $\Lambda = 0$  e  $x=0$  è proprio l'eq. di Prandtl.

### 15.8 Schema di Jones

$\lambda$  piccolissimo,  $\Lambda$  qualsiasi

Conoscendo la pendenza  $\delta(x_2, y)$  che l'ala ha al bordo di fuga, si ottiene l'eq. di tangenza al bordo di fuga  $w_i'(x_2, y) = w_{i0}'(y) = -V_0 \delta(x_2, y)$  e dunque la velocità indotta. Si ricava  $g(\theta)$  quindi  $\Gamma(\theta)$  quindi  $L$  e  $D_i$ .

Si come sono le sezioni di vortici vicini ad una data sezione quelle che danno il maggior contributo alla velocità indotta, si può ammettere che i vortici che attraversano ogni sezione ad  $x = cost$ , si estendano oltre che all'infinito a valle, anche all'infinito a monte.

Ogni  $x = cost$  viene attraversata da un fascio di vortici di lunghezza infinita.

Ogni vortice estende due polari infiniti per attraversare l'ala, ma è un tratto talmente piccolo e abbastanza lontano da  $x = cost$  da poter essere trascurato.

Per un'ala triangolare non svergolata ed imventata con  $\alpha_a$  ottenuto  $C_L = \frac{\pi \lambda \alpha_a}{2}$

### 15.9 Fuoco e momento focale di un'ala

Per un'ala simmetrica e imventata simmetricamente, il contributo della parte superiore alla resistenza indotta ed al momento delle due semiali è lo stesso. Studiamo allora la semiale  $y > 0$  poi moltiplichiamo per 2.

Avendo indicato con  $F$  il fuoco dell'intera ala posto sull'asse di simmetria ( $x_F$ ), può indicare tutte le forze e i momenti agenti sull'ala alla potenza  $L$  applicata nel fuoco  $F$  ed al momento focale  $M_0$ .

$C_H P_0 = C_{H0} P_0 - C_L x_F$  che in condizioni di portanza nulla è  $C_H P_0 = C_{H0} P_0$

$$* x_F = \frac{2 \int_0^{b/2} c_m(y) e(y) x dy}{C_L} = \frac{\int_0^{b/2} c_m(y) e(y) x dy}{\int_0^{b/2} c_m(y) e(y) dy}$$

$$* C_{H0} = \frac{2}{S_0} \left( \int_0^{b/2} c_m(y) e^2(y) dy - \int_0^{b/2} c_m(y) e(y) x dy \right)$$

ALA NON SVERGOLATA  $c_{e0} = 0 \Rightarrow C_{H0} = \frac{2}{S_0} \int_0^{b/2} c_m(y) e^2(y) dy = \frac{2}{S_0} \bar{c}_m \int_0^{b/2} e^2(y) dy$

Se ala non svergolata

allora  $e = e_0$

Se ala dritta  $\Lambda = 0$ , allora

$C_{H0} = C_H$  ed  $x_F = 0$ , cioè

il fuoco dell'ala si trova

sulla retta dei fuochi dei

profili alari.

Se non il  $\bar{c}_m$  (medio) allora devo usare la corda media arit.

$$P_0 = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} e^2(y) dy = \frac{\int_0^{b/2} e^2(y) dy}{\int_0^{b/2} e(y) dy}$$

LINEA DEI FUOCHI RETTILINEA come \* ma la  $x = y \tan \Lambda$  con  $\tan \Lambda = cost$

## 16 Equazioni generali per fluido compressibile

$M$  può assumere qualsiasi valore

La velocità del suono  $c$  non dipende dalla geometria del campo di moto, ma dallo stato fisico del gas.

### 16.1 Velocità del suono

Nel caso di onda piana in propagazione secondo  $x$  axe, con velocità  $c$ , in moto permanente, unidimensionale nella direzione di  $x$ .

Inoltre se la perturbazione è piccola, le variazioni sono piccole e le trasformazioni subite dal gas sono piccole e reversibili, saranno anche isentropiche poiché il sistema è adiabatico. L'eq. di continuità per unità di superficie d'onda attraversata dal fluido si scrive allora  $\rho V = (\rho + d\rho)(V + dV) = \rho V + \rho dV + V d\rho + d\rho dV$  che trascurando gli

infinitesimi di ordine superiore diventa  $\rho dV + V d\rho = 0$  L'eq. della quantità di moto

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) = V \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{oppure} \quad -\frac{dp}{\rho} = V dV \quad \text{ricomponendo} \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{dV}{V dp}$$

ed ottengo  $\frac{dp}{V dp} = V dV \Rightarrow V^2 = \frac{dp}{d\rho}$  calcolata ad entropia costante per di transf. isentropiche. Siccome il moto avviene alla velocità del suono  $c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)}$

Per gas perfetto e transf. isentropiche  $p/\rho^\gamma = \text{cost} = A \Rightarrow dp/d\rho = A \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma p/\rho$

Siccome per la legge dei gas perfetti  $p/\rho = R^* T$  allora

$$c = \sqrt{\gamma R^* T}$$

### 16.2 Equazione Continuità per moto unidimensionale

In un condotto con  $A$  variabile, portata della massa  $\rho V A = \text{cost.}$

$$d(\rho V A) = d(\rho V + \rho V A) = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$-\frac{d\rho}{\rho} = V dV \Rightarrow -\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\rho}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -c^2 \frac{d\rho}{\rho} = V dV$$

$$-\frac{V dV}{c^2} + \frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A} \quad \text{ponendo} \quad M^2 = V^2/c^2$$

$$\frac{dV}{V} (1 - M^2) = -\frac{dA}{A} \Rightarrow \text{Se } A \text{ cresce } V \text{ diminuisce e viceversa per moti subsonici}$$

ma PER MOTI SUPERSONICI SE  $A$  CRESCE ANCHE  $V$  CRESCE E VICEVERSA

Per diventare da subsonico a supersonico si passa per  $M=1$  a cui corrisponde la minima sezione del condotto detta AREA CRITICA

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = -M^2 \frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{d(\rho V)}{\rho V} = (1 - M^2) \frac{dV}{V}$$

per cui, per essere costante la portata in massa, la sezione deve avere un minimo per  $M=1$ . Per valori diversi  $\rho V A = \rho_\infty V_\infty A_\infty$  con  $V_\infty = C_\infty$  ed  $M_\infty = 1$ .

$$\frac{A_\infty}{A} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{V}{V_\infty} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{M_\infty}{C_\infty} = \frac{\rho}{\rho_\infty} M \sqrt{\frac{T}{T_\infty}}$$



## 17 Moti subsonici di un fluido compressibile

Correnti omogenee soggette a piccole perturbazioni per le quali l'eq. del potenziale mette forma linearizzata. Poiché il moto è subsonico, sono ipotizzate per le velocità che  $M_{\infty}$  non scappa prossimo a 1 e che  $V' \ll V_{\infty}$ , cioè  $M_{\infty} < 1$ .

### 17.1 Profili sottili in fluido compressibile

Ipotesi: moto bidimensionale di un profilo sottile (piccolo  $\alpha$ , piccolo incurvamento) immerso in fluido compressibile a  $V_{\infty}$  corrispondente  $M_{\infty} < 1$ .

Indicando con  $A = 1/B = 1/\sqrt{1-M_{\infty}^2}$  poiché  $B^2 = 1-M_{\infty}^2$  allora usando il pedice c per compressibile e i per incomprimibile ottengo il coeff. di pressione:

$$C_{pc} = A C_{pi} = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \quad \text{CORREZIONE DI PRANDTL-GLAUERT}$$

Calcola il coeff. di pressione su un profilo sottile immerso in una corrente di fluido compressibile, semplicemente correggendo i valori che si avrebbero per fluido incomprimibile.

Le formule per  $\alpha$  sono valide se  $M_{\infty} \neq 1$  oppure se  $M_{\infty,cc} < M_{\infty}$ .

Formula più corretta è quella di MATHAN-TSIEN  $C_{pc} = \frac{C_{pi}}{\frac{B + C_{pi}}{2} \frac{M_{\infty}}{1+B}}$  che per  $C_{pi} \ll 1$  si riduce alla correzione Prandtl-Glauert. Con Prandtl-Glauert

il coeff. di portanza diventa:

$$C_c = \int_0^e \Delta C_{pc} \frac{dx}{e} = \frac{1}{B} \int_0^e \Delta C_{pi} \frac{dx}{e} = \frac{C_{ci}}{B}$$

### 17.2 Numero di Mach critico

Se una corrente subsonica di velocità indisturbata  $V_{\infty}$  investe un profilo alare con  $M_{\infty} < 1$ , vi sono sicuramente dei punti del profilo nei quali la velocità  $V$  è maggiore di  $V_{\infty}$  e quindi  $M > M_{\infty}$ . Se facciamo crescere  $V_{\infty}$  e  $M_{\infty}$ , quei punti prima considerati crescono  $V$  e  $M$ , finché nel punto di minima pressione del profilo e quindi di massima velocità si raggiunge la condizione  $M = 1$ . Il valore di Mach  $M_{\infty}$  della corrente indisturbata al quale corrisponde  $M = 1$  anche in un solo punto del profilo viene detto numero di Mach critico della corrente indisturbata,  $M_{\infty,cc}$ . Se  $M_{\infty}$  aumenta ancora  $\rightarrow$  il valore di  $M_{\infty,cc}$  anche su tutto il profilo si ha un aumento della velocità e quindi il sonoro (massimalmente al dorso) mette quelli  $V$  è supersonica.

Se in qualche punto del profilo la corrente diventa supersonica, quando deve ricompattarsi lo fa con un'onda d'urto, attraverso la quale si ha un aumento di pressione forte e improvviso che può provocare il distacco immediato, o molto anticipato, dello strato limite, in certe del profilo dove questo è molto spesso. Si genera una scia di depressione molto più larga del caso subsonico se lo strato limite si separa in certe più prossime al bordo di fuga e quindi un forte aumento della resistenza al scivolo. Il distacco dello strato limite immediatamente a valle di un'onda d'urto è detto stallo d'urto.

ALA DI PICCOLISSIMO ALLUNGAMENTO Per un'ala triangolare non svergolata

$$C_i^* = \frac{\pi}{2} \lambda^* \alpha_0 = \frac{\pi}{2} B \lambda \alpha_0 \rightarrow C_{lc} = \frac{1}{B} C_i^* = \frac{\pi}{2} \lambda \alpha_0 \quad (\text{invariata dalle incomprimibilità})$$

$$C_{Dlc} = \frac{C_{Di}^*}{B} = \frac{C_{lc}^2}{\pi \lambda} \quad (\text{invariata dalle incomprimibilità})$$

## 18 Linee caratteristiche

### 18.1 Definizione

Ipotesi: moto bi-dimensionale ed irrotazionale di fluido comprimibile

Chiamo S linea nota di equazione  $y=y(x)$  con  $m$ = tangente curva, P un punto della curva in cui sia possibile calcolare la velocità in P' fuori della linea ma infinitamente vicino a P. Data la matrice  $D = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ H & 2K & L \end{vmatrix} = L - 2Km + Hm^2$ , si determina

si ammette se la retta tangente alla linea S nel punto P, attorno al quale si vogliono sviluppare in serie le componenti della velocità, ha una pendenza  $m$  t.c. si ammette il  $|D|$ . Se accade si dice che S ha direzione caratteristica in P. Se S ha direzione caratteristica in tutti i suoi punti allora S è una linea caratteristica. Per conoscere la velocità di P non si permette di conoscere P', poiché si potrebbe essere sede di discontinuità.

Per trovare le direzioni caratteristiche  $Hm^2 - 2Km + L = 0 \rightarrow m = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - HL}}{H} \Rightarrow$  che, una o nessuna direzione caratteristica a seconda che  $K^2 - HL$  sia  $> 0, = 0, < 0$ .

Per ipersonico  $K > 0$  due direzioni reali distinte e l'eq potenziale è di tipo iperbolico, se sonico  $K < 0$  una sola soluzione e il potenziale è di tipo parabolico, se subsonico  $K < 0$  nessuna direzione e l'eq potenziale è di tipo ellittico.

### 18.2 Piccole Perturbazioni in una corrente supersonica

Ipotesi: corrente ipersonica uniforme  $V_{\infty}$  in O cui sia una perturbazione con piccoli da non modificare di molto né  $V_{\infty}$  né  $C_{00}$ . La perturbazione nota in O si propaga per onde sferiche aventi  $C_{00}$  e velocità di  $V_{\infty}$ . La curva perturbata è insieme al corpo di apertura  $C = C_{00}t$  con il centro che ha tangente di  $S = V_{\infty}t$ . La semiperfora data da  $m = \frac{1}{M_{\infty}}$ . Tutti i corni di Mach vengono innalzati da due superfici piane che costituiscono le onde piane che di piccole perturbazioni o onde semplici. L'intersezione di queste con il piano del moto sono dette linee di Mach o linee di onda semplice.

La corrente attraversando un'onda semplice si può perturbare perciò per trasformazioni che sono considerate infinitesime quindi reversibili ed isentropiche nel caso di fluido ideale privo di fenomeni di viscosità. Nello studio delle piccole perturbazioni in una corrente supersonica il moto resta sempre irrotazionale (grandezze d'ordine contorni) sia per compressione sia per espansione. L'eq del potenziale linearizzato è

$$(M_{\infty}^2 - 1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \text{ ma è più semplice utilizzare il METODO DELLE CARATTERISTICHE}$$

Con  $\delta$  generico punto a valle della linea di Mach uscente da O, si può affermare che quando una parete piana fa una deviazione e dopo la deviazione rimane ancora piana, la linea di Mach uscente da O di deviazione della parete ripara il campo di moto in due campi di moti uniformi: quello indisturbato a monte di velocità  $V_{\infty}$  e quello perturbato a valle di velocità costante  $V_{\infty}$  (ad esempio). Tutte le linee di corrente nell'attraversare la linea di Mach, deviano verso il basso dello stesso angolo  $\delta$  della parete.

Poiché  $V_{\infty} > V_0$  il numero di Mach è aumentato e la pressione, a parità di pressione di arresto, è diminuita: la corrente fa subito un'espansione (isentropica).

$$V = V_0 \frac{\cos \beta_0}{\cos(\beta_0 \pm \delta)}$$

$V_{\infty} > V_0$   
 $P < P_0$        $+ \delta$       compressione isentropica       $- \delta \Rightarrow V_{\infty} < V_0$   
 $P > P_0$

Sia che si espanda che si comprima, se la parete si curva piana anche dopo la deviazione, la corrente perturbata è ancora sempre una corrente uniforme.

Le condizioni della corrente in un dato punto del campo di moto non dipendono dalla storia precedente, ci permette di distinguere subito se in un dato punto del campo la corrente fa subito, rispetto a  $\infty$ , una compressione o un'espansione.

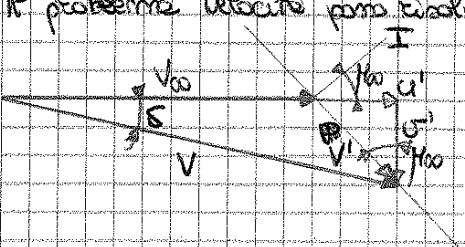
### 19.2 Parete piana che si incurva

Parete che prima è piana, dopo O continua a curvare. Tutte le linee di Mach della I famiglia uscenti a valle di O sono linee di Mach perché la deviazione è continua.

Lungo le linee della I famiglia la velocità è costante, così come  $M$  e quindi anche le grandezze statiche.

### 19.3 Coefficiente di pressione

Per piccole variazioni di  $V$  ed  $M$ , la massa volumica è circa pari a  $\rho_0$  in tutto il campo quindi si può applicare  $C_p = -2u/V_{\infty}$  ricavata con Bernoulli. Siccome  $C_p = (p - p_0) / (\frac{1}{2} \rho_0 V_{\infty}^2)$  con denominatore sempre  $> 0$  allora se  $p < p_0 \Rightarrow C_p < 0$  espansione, se  $p > p_0$  allora  $\Rightarrow C_p > 0$  compressione. Esaminando una parete piana con piccolo  $\delta$  di deviazione il problema velocità può risolversi graficamente.



$$|u'| = |V'| \tan \beta_0$$

$$|V'| = |V_{\infty} + u'| \tan \beta_0$$

Siccome  $u' \ll V_{\infty}$  e  $\delta \ll 1$  per la parete  $|V'| \approx |V_{\infty} \delta|$

$$|u'| = |V_{\infty} \delta| \tan \beta_0 = |V_{\infty} \delta| \frac{1/M_0}{\sqrt{1 - 1/M_0^2}} = \frac{|V_{\infty} \delta|}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$$

$$\beta = \sqrt{M_0^2 - 1} \text{ allora } |C_p| = \frac{2|u'|}{V_{\infty}} = \frac{2\delta}{\beta}$$

### 19.4 Profili sottili supersonici

I potenti profili sottili con piccoli  $\delta$  con  $P_0$  perturbazioni piccole e può usare la teoria linearizzata del potenziale. piccole perturbazioni  $\Rightarrow$  piccoli  $\delta \Rightarrow$  profili con bordi



## 90 Espansioni supersoniche in teoria esatta

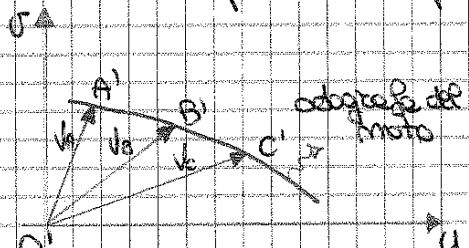
Ipotesi: ma perturbazioni piccole, ma teoria linearizzata nel campo di moto, ma nella intorno del punto, perché ma di punti multipli; di direzione e linee caratteristiche non costanti e formano con  $V$   $P$   $\mu$  angolo variabile da punto a punto viene applicata la TEORIA ESATTA (moto irrotazionale ed omocentrico) (2 dimensioni).

### 90.1 Espansioni e compressioni in corrente supersonica

Le espansioni supersoniche sono sempre isentropiche perché avvengono attraverso infiniti onde elementari, che producono trasformazioni reversibili e isentropiche per fluido adiabatico; le compressioni sono isentropiche finché non si verifica l'impacchettamento delle onde semplici in un'onda d'urto ( $V$  diminuisce e cambia direzione,  $\mu$  diminuisce e  $\mu$  aumenta). Attraversando un'onda d'urto l'entropia non è costante.

### 90.2 Piano odografico e odografo del moto

PIANO ODORAFICO: piano  $uv$  quale si ripetono in angoli e ordinate le componenti  $u$  e  $v$  del vettore di una particella fluide in moto permanentemente nel piano fisico  $(x, y)$ , senza alcun riferimento alla posizione realmente occupata. Presi tre punti  $A, B, C$  del piano fisico con  $V_A, V_B, V_C$  ho tre punti  $A', B', C'$  del piano odografico  $O'A', O'B', O'C'$  corrispondono rispettivamente a  $V_A, V_B, V_C$ . La linea passante per  $A', B', C'$  è detta ODOGRAFO DEL MOTO. Qualsiasi evoluzione vorticosa di corrente supersonica nel piano fisico, l'estremo del vettore velocità percorre sul piano odografico sempre la stessa curva.



$$\theta = \pm \left[ \arctan \left( \frac{\mu+1}{\mu-1} \sqrt{\frac{V^2 - V_{crit}^2}{V_B^2 - V^2}} \right) - \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{V^2 - V_{crit}^2}{V_B^2 - V^2}} \right) \right] + \text{cost.}$$

per ciascuna delle due famiglie si sono infinite odogre che si ottengono una dall'altra per rotazione rigida attorno all'origine degli assi  $(u, v)$ .

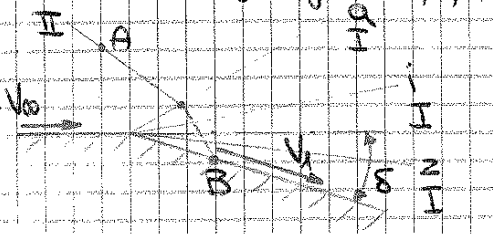
Perché le odogre sono legate alle linee caratteristiche del piano fisico e queste ultime esistono solo per correnti supersoniche, sul piano odografico le curve odografiche sono tutte contenute nella corona circolare compresa tra i cerchi di raggio  $V_{crit}$  e  $V_e$ .

La rappresentazione grafica di  $\theta$  sono dette epicycloidi.

### 90.3 Espansione di Prandtl-Weier

di velocità  $V_0$

Studio espansione di una corrente supersonica  $V_0$  su una parete piana che subisce una deviazione dell'angolo  $\delta$  in  $O$ , sufficientemente grande da non ammettere l'utilizzo della teoria linearizzata. Da  $O$  si partono infinite onde di espansione elementari coincidenti con le linee I famiglia  $(a, i, z)$ . Partendo da un qualunque punto  $A$  del campo di moto im-



bito, seguendo II famiglia, si arriva ad un punto  $B$  del nuovo campo uniforme con  $V_B = V_1$ . All'interno del fascio delle linee I famiglia (tra  $a$  e  $z$ ) le linee delle II famiglia non hanno andamento rettilineo però



# 21 Onde d'urto

Di spessore tecnico molto

## 21.1 Urto retto

Ipotesi: onda piana di discontinuità fissa e traslata  $L$  a se stessa in un fluido compressibile in quiete. Per rendere permanente il moto fino agli assi dell'onda, prescindo l'onda è ferma e viene investita dal fluido a monte con velocità  $V_1$  perpendicolare all'onda. A monte, 2 stati

Attraverso l'onda d'urto si conservano costante temperatura  $T_0$ , velocità di massa  $V_0$  e velocità critica  $V_{0c}$ .

$V_1$  forma con l'onda un angolo retto.  $V_1 V_2 = V_0^2$  RELAZIONE FONDAMENTALE per urto retto. Ammette due possibilità:  $V_1 < V_{0c}$  e  $V_2 > V_{0c}$  (niccome per  $V_{0c}$  corrisponde  $M=1$ ),  $V_1 > V_{0c}$  e  $V_2 < V_{0c}$  con 1 supersonica e 2 subsonica.

La seconda ipotesi è la sola possibile poiché alla compressione è collegata una diminuzione di velocità, aumento di pressione e aumento di entropia  $\Rightarrow V_1$  deve essere obbligatoriamente supersonica! poiché un'onda d'urto si propaga più velocemente della velocità del suono.

$$\frac{c^2}{\kappa-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{V_{0c}^2}{2} \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{(\kappa+1)M_1^2}{2 + (\kappa-1)M_1^2} > 1 \text{ sempre}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)}{(\kappa+1)} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_1^2 - 1) \quad (\text{funzione crescente di } M_1)$$

$\Rightarrow$  urto tanto più forte quanto più forte è  $P_2$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left[ 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\kappa-1)M_1^2}{(\kappa+1)M_1^2}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{\Delta C_p} = \ln \left[ \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\kappa \right]$$

Se  $M_1 < 1 \Rightarrow S_2 < S_1 \Rightarrow$  INACCETTABILE per sistema adiabatico

Se  $M_1 > 1 \Rightarrow OK$

$P_{02} < P_{01}$  ( $T_0$  costante)  $\Rightarrow$  nell'urto si ha dissipazione di calore, in forma irreversibile, di una parte dell'energia meccanica della corrente. Per la legge gas perfetti

$$P_{02} < P_{01}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = e^{-\frac{S_2 - S_1}{C_p(\kappa-1)}}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2}{P_1} \left[ \frac{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2 \right)^{\kappa/(\kappa-1)}}{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 \right)^{\kappa/(\kappa-1)}} \right]$$

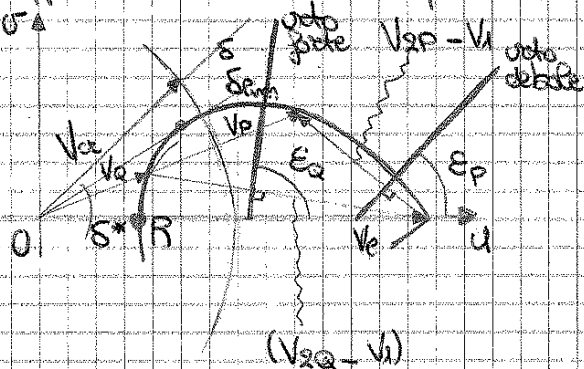
$$M_2^2 = \frac{2 + (\kappa-1)M_1^2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)}$$

## 21.6 Polare d'urto

Curva del piano ortografico nella quale si deve trovare <sup>parzialmente</sup> l'estremo del vettore  $V_2$  a valle di un'onda d'urto piano.  $U_2^2 = (V_1 - u_2)^2 \Rightarrow \frac{V_1 u_2 - V_2^2}{u_2} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{u_2}$  eq. della polare d'urto (simmetrica rispetto all'asse  $u$  (quindi  $x$ ) parallela alla velocità  $V_1$  a monte dell'urto).

Il diagramma ottenuto è un arco con un modo per  $u_2 = V_1$  e un asintoto verticale per  $u_2 = V_1 [2/(k+1) + (V_{cr}/V_1)^2]$ , geometricamente è uno STROFOIDE.

$V_1$  inclinato di  $\delta$  rispetto a  $V_1$ . I due rami che tendono all'infinito si possono considerare in quanto rappresentano condizioni impossibili,  $E_Q > E_P$



Poiché in genere per un urto obliquo l'urto è debole la velocità a valle dell'urto obliquo è quasi sempre supersonica, nel caso di urto forte invece la velocità a valle dell'urto è sempre subsonica.

Per  $\delta = \delta_{sem}$  punti Q e P coincidono.

A seconda del valore di  $\delta$  avrete diverse condizioni.

$\delta = \delta^* \Rightarrow$  l'urto più debole per  $V_2 = V_{cr}$  (esattamente sonico)

$\delta < \delta^* \Rightarrow$  urto debole per  $V_2 > V_{cr}$  (supersonica), urto forte  $V_2 < V_{cr}$  (subsonica)

$\delta^* < \delta < \delta_{sem} \Rightarrow$  anche se si verifica l'urto più debole  $V_2 < V_{cr}$

Siccome solitamente  $\delta_{sem} - \delta^* = 0,5^\circ$  la velocità a valle di un urto obliquo debole è ancora ~~sub~~ supersonica. R rappresenta l'urto retto.

A variazione del rapporto  $V_1/V_{cr}$  cambia dimensione e forma dello strofoide. (per  $V_1 = V_{cr}$  è un arco, per  $V_1 = V_e$  è un cerchio).

$$(\delta_{sem})_{max} = \pm \arcsin \sqrt{1/(k^2-1)}$$

si ha per  $M_1 = \infty$  (strofoide è un cerchio).

Qualsiasi onda d'urto è più ripida delle linee caratteristiche della corrente indisturbata.

Le grandi perturbazioni si propagano a velocità maggiore di quella del suono.

Strofoide ed epicicloide sono tangenti e hanno stessa curvatura nell'origine, divergono molto lentamente l'una dall'altra allontanandosi dall'estremo di  $V_1$ .

## 21.8 Onde d'urto curve

Nel caso in cui  $\delta > \delta_{sem}$  si generano onde d'urto curve che in prossimità della parete a monte della deviazione è retta, ortogonale a  $V_1$ . A valle dell'onda d'urto in prossimità della parete si genera un campo di moto subsonico, con le linee di corrente che si possono immaginare e rispettare la condizione di tangenza. L'aumento di entropia è massimo a parete dove  $\delta = 90^\circ$  e va via diminuendo all'inclinazione dell'onda d'urto. Il campo di moto a valle della onda curva non è omotermodico: l'entropia dopo l'aumento variabile che si ha nel attraversare l'onda d'urto, si tiene costante lungo ogni linea di corrente, ma è variabile da una linea di corrente all'altra. Il campo di moto in questo caso è inetermodico e

# Teoremi di Crocco

## Programma

**FLUIDODINAMICA:** parte della meccanica relativa alla dinamica dei liquidi e dei gas, in genere assimilati a sistemi continui, a seconda dei casi, *compressibili o incompressibili, viscosi o non viscosi*.

L'incompressibilità esclude che vi possano essere in un fluido, sottoposto a pressione, variazioni di densità.

L'assenza di viscosità significa che non vi sono azioni tangenziali fra elementi fluidi a contatto.

In alcuni casi, per es. un'onda d'urto, si presentano discontinuità di determinate grandezze (velocità, pressione ecc.) nella trattazione del fenomeno (enciclopedia Treccani).

**AERODINAMICA:** parte della fluidodinamica che studia il moto relativo di un fluido intorno ad un corpo solido, al fine di determinare le forze e le coppie che agiscono sul corpo per effetto di tale moto. Lo studio aerodinamico riguarda quindi principalmente correnti esterne, anche se vi sarà modo di affrontare qualche tipo di corrente interna (per esempio il fusso in condotti). La conoscenza delle azioni aerodinamiche, fondamentali per la meccanica del volo, è essenziale per l'intero progetto del velivolo stesso.

### A) PARTE INTRODUTTIVA

- DEFINIZIONI

- Proprietà dei fluidi, definizioni di continuo. Fluido viscoso e fluido ideale. Classificazione dei moti fluidi. Compressibilità e moti incompressibili. Flussi laminari e turbolenti.

- Parametri adimensionali. Flussi attorno a corpi affusolati al variare dei parametri del moto.

- Forze e momenti agenti su profili alari ed ali e relativi coefficienti adimensionali.

- RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE ED ANALISI

- Campi scalari e vettoriali, Gradiente, divergenza, rotore. Teoremi di Green e Stokes.

- DESCRIZIONE DEL MOTO FLUIDO

- Descrizione lagrangiana ed euleriana. Moti stazionari e non stazionari. Linee di corrente, tubi di flusso. Derivata locale e lagrangiana.

## **Esercitazioni**

Applicazioni della teoria svolta a lezione verranno sviluppate durante le esercitazioni in forma di esercizi di calcolo. In particolare si eseguiranno calcoli di campi di moto nel caso di flusso bidimensionale stazionario inviscido: determinazione delle funzioni di corrente e potenziale per campi semplici e composti, calcolo delle pressioni attorno ad un cilindro circolare con o senza circuitazione, calcolo dell'incidenza ideale e dell'incidenza di portanza nulla per profili sottili. Flusso tridimensionale stazionario inviscido: calcolo delle caratteristiche di ala ad allungamento finito e confronto con l'ala ellittica. Fluido viscoso stazionario: moto laminare e turbolento in condotti e su lamina piana. Calcolo della polare di un profilo alare.

I calcoli si svolgeranno con l'ausilio di MATLAB e di codici di calcolo dedicati (XFOIL)

## **Bibliografia**

Testi di riferimento per il corso :

Appunti del corso forniti dai docenti.

R.Arina & F. Quori, Esercizi di Aerodinamica (seconda edizione), Levrotto & Bella, Torino 2003.

## **Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame**

È prevista una prova orale consistente in una serie di domande a cui il candidato dovrà rispondere per iscritto, senza l'ausilio di testi, appunti, ecc..., seguita da una prova scritta consistente nella risoluzione di problemi di calcolo, durante la quale è consentito l'impiego di testi, appunti e note del corso.

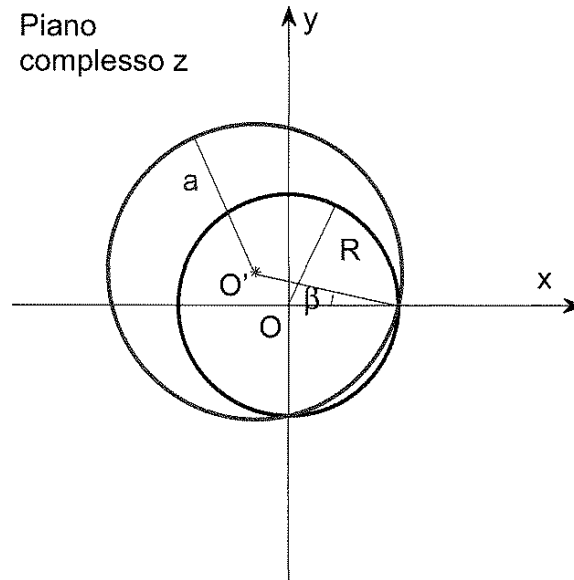


Figure 1: Circonferenza centrata in O di raggio R e circonferenza centrata in O' di raggio  $a = \sqrt{(R + \lambda)^2 + s_y^2}$ .

dove  $\rho$  è la densità del fluido.

Utilizziamo ora la trasformazione conforme di Kutta-Joukowski per passare dal piano principale  $z = x + iy$  al piano trasformato  $\zeta = \xi + i\eta$

$$f(z) = J = z + \frac{R^2}{z}, \quad (7)$$

Vediamo come si trasforma nel piano  $\zeta$  il dominio esterno ad un cerchio di raggio  $a$  e centro  $(s_x, s_y)$ .

- Se  $(s_x, s_y) = (0, 0)$ , il cerchio si trasforma nel segmento dell'asse x compreso tra  $-2R$  e  $2R$ , cioè una **lamina piana**;
- Se  $(s_x, s_y) = (x_c, 0)$ , il cerchio si trasforma in un **profilo alare simmetrico** rispetto a  $\xi$ ;

- Se  $(s_x, s_y) = (0, y_c)$ , il cerchio si trasforma in un **arco di cerchio** (segmento curvo);
- Se  $(s_x, s_y) = (x_c, y_c)$ , il cerchio si trasforma in un **profilo alare generico** (con curvatura).

In sintesi spostare il centro del cerchio lungo l'asse x significa incrementare lo spessore del profilo, mentre spostare il centro lungo l'asse y significa incrementare la curvatura.

Ricordiamo infine che la velocità complessa,  $V$ , nel piano principale può essere ottenuta come derivata totale (rispetto a  $z$ ) del potenziale complesso,  $W$ :

$$V = \frac{dW}{dz} = u - iv, \quad (8)$$

mentre nel piano trasformato la velocità complessa,  $V^*$ , ha la seguente espressione:

$$V^* = \frac{V}{df/dz} = u^* - iv^* \quad (9)$$

dove  $df/dz = f'(z) = 1 - R^2/z^2$  è la derivata totale (rispetto a  $z$ ) della trasformazione di Kutta-Joukowski, Eq. (7).

## LAMINA PIANA p.51e.

$$\text{corde } \ell = 0,8 \text{ m}$$

$$V_{\infty} = 20 \text{ m/s}$$

$$\text{acciaio standard } \rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

$$\alpha = 4^\circ$$

- $\Gamma$  attorno alla lamina
- $L$  portanza per unità di lunghezza
- posizione punto di arresto
- $C_{p+}$ ,  $C_{p-}$ ,  $\Delta C_p$ ,  $C_e$

Risoluzione.

$$\begin{cases} \xi = 2a \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \eta = 0 \end{cases}$$

$$a = \ell/4 = 0,8/4 = 0,2 \text{ m} = b$$

$$\text{a) } \Gamma = 4\pi a V_{\infty} \sin \alpha = 4\pi \cdot 0,2 \cdot 20 \cdot \sin 4^\circ = 3,5063 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\text{b) } L = \rho V_{\infty} \Gamma = 1,225 \cdot 20 \cdot 3,5063 = 85,9043 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

c) Il punto di arresto di  $P_0$  per  $V = 2V_{\infty} \sin(\alpha + \theta) + 2V_{\infty} \sin \alpha = 0$ , troviamo il  $\theta$  corrispondente:

$$\sin(\alpha + \theta) = -\sin \alpha \rightarrow \sin(4 + \theta) = -0,069756$$

$$\arcsin(-0,069756) = (4 + \theta) \rightarrow -4 = 4 + \theta \rightarrow \theta = -8^\circ = -2\alpha$$

Si ottiene il punto

$$\begin{cases} \xi = 2a \cos(-2\alpha) = 2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot \cos(-8) = 0,3961 \text{ m} \\ \eta = 0 \end{cases}$$

Corrisponde al punto  $A = (0,3961, 0)$  sul piano trasformato

$$\text{d) } C_p = 1 - \left(\frac{V^*}{V_{\infty}}\right)^2 \quad V^* = \frac{V}{|f'(z)|}$$

$$V^* = V_{\infty} \left( \cos \alpha + \sin \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad \text{con } V = 2V_{\infty} \sin \theta, \quad |f'(z)| = 2|\sin \theta|$$

con  $C_{p+}$  per  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $C_{p-}$  per  $-\pi \leq \theta \leq 0$

$$\Delta C_p = C_{p-} - C_{p+} = -2C_{p+} = 4\alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$C_e = 2\pi \sin \alpha = 2\pi \sin 4 = 0,4383$$



## ARCO CERCHIO p. 56 e.

corda  $\rho = 0,8 \text{ m}$

inaccamento relativo  $\beta = 3,75\%$

$\alpha = 4^\circ$

$V_\infty = 20 \text{ m/s}$

a)  $\Gamma$

b)  $L$  per unità di lunghezza

c)  $C_{p+}$ ,  $C_{p-}$

Risoluzione.

Uno valore esercizio precedente

a)  $\Gamma = 4\pi V_\infty \alpha \sin(\alpha + \beta) = 4\pi \cdot 0,20056 \cdot 20 \cdot \sin(4 + 4,28915) = 7,26700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b)  $L = \rho V_\infty \Gamma = 1,225 \cdot 20 \cdot 7,26700 = 178,0415 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

c)  $C_p = 1 - \left(\frac{V^*}{V_\infty}\right)^2$

$$V^* = V_\infty \left(1 + 2\beta \sin\theta + \alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

sono distribuiti sulla superficie alare. In realtà è di maggior interesse il calcolo della portanza secondo la relazione:

$$L = \rho v_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad \text{per cui bisogna conoscere } \Gamma(y) = \int_{x_{tr}(y)}^{x_{tr}(y)} \gamma x dx$$

Lo schema di Prandtl funziona con i vortici vengano "impacchettati" in un unico vortice parallelo all'asse  $y$  e posto sul segmento di quarti anteriore.

La superficie portante viene ridotta ad un segmento portante da cui i vortici di scia risultano entranti o uscenti.

I filotti vorticosi (inducano sul segmento portante una velocità discorde all'asse e in modo tale che la vorticosità risultante inverta il profilo con un'incidenza  $(\alpha - \alpha_i)$  dove  $\alpha_i$  è un'incidenza "indotta".

Sotto questa ipotesi l'intensità di  $\Gamma(y)$  è data dall'equazione integrale-differenziale di Prandtl:

$$\Gamma(y) = k(y) v_{\infty} l(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i(y)]$$

## RESISTENZE

La resistenza ("drag",  $D$ ) è un'azione agente su un corpo in movimento in un fluido che ha la direzione parallela a quella del moto. Solitamente alla resistenza viene associato un coefficiente adimensionale (detto appunto di resistenza) la cui relazione è  $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 S}$

S superficie di riferimento che, nel caso di pura resistenza d'attrito la superficie è bagnata.

Meccanicamente la portanza è dovuta principalmente alle forze di pressione esercitate normalmente al corpo, esistono diversi tipi di resistenza. Quella dovuta alle forze di pressione viene detta resistenza di scia; quella "indotta" è dovuta alle generazioni di una scia vorticosità portante, quella "interferenziale" che si genera fra due corpi vicini e infine quella "di base" dovuta al trascinamento delle code di un corpo aerodinamico.

# CIRCONFERENZA IN LAMINA PIANA p. 3-9. §.

$$V_{00} = \dots$$

$$\alpha = 9^\circ$$

anomale nei punti di arresto per rispettare condizione di <sup>Nulla</sup> tangenza e le coordinate adimensionali di tali punti?

Risoluzione

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \xi = 2a \cos \theta \end{cases}$$

$$V^* = V_{00} \left( \cos \alpha + \sin \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

Per la condizione di Nulla  $V^* = 0$ , ma siccome  $V_{00} \neq 0$  allora sarà 0 il termine

$$\cos \alpha + \sin \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 0$$

$$\sin \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = -\cos \alpha \rightarrow \sin \alpha + \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta = 0$$

$$(\sin \alpha + \sin \alpha \cos \theta)^2 = (-\cos \alpha \sin \theta)^2 \rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \alpha \cos \theta = \cos^2 \alpha \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \alpha \cos \theta - \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \theta) = 0$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \alpha \cos \theta - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \theta = 0$$

$$\cos^2 \theta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos \theta (2 \sin^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 0$$

$$\cos^2 \theta (1) + \cos \theta (0,048943) + (-0,951056) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

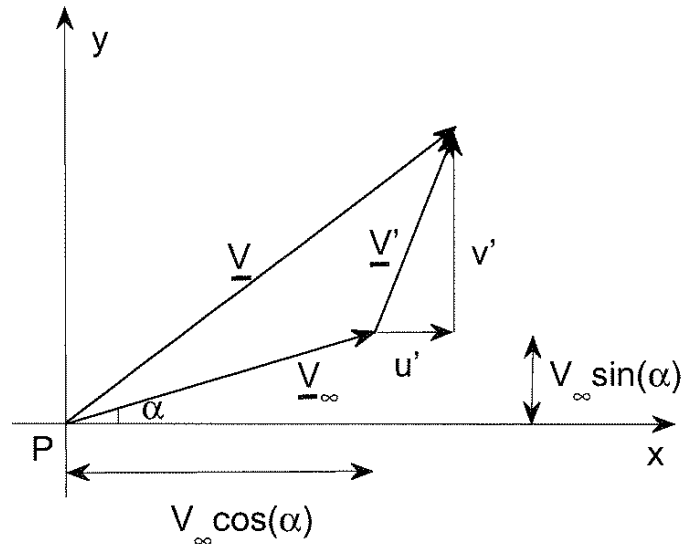
$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,048943 \pm \sqrt{(0,048943)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0,951056)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-0,048943 \pm 1,951055}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-0,999 \approx -1}{1} \Rightarrow \theta_1 = 180^\circ \\ \cos \theta_2 = \frac{0,951056}{1} \Rightarrow \theta_2 = 18^\circ \end{cases}$$

I due punti avranno coordinate pari a:

$$A^* = (-2a; 0) \text{ punto arresto posteriore}$$

$$B^* = (1,9021a; 0) \text{ punto arresto anteriore}$$



### Profilo ad arco di parabola

Consideriamo una lamina curva senza spessore, di corda  $l$ , con la forma di un arco di parabola, con concavità rivolta verso il basso e vertice in mezzzeria. L'inarcamento relativo è  $h = y_{max}/l = 3.75\%$ . Calcolare l'incidenza ideale  $\alpha_{id}$ , l'incidenza di portanza nulla  $\alpha_0$ , il coefficiente di portanza all'incidenza ideale  $C_{l,id}$  ed il coefficiente di momento focale  $C_{mo}$ . Trovare l'espressione di  $C_p(x)$  per incidenza  $\alpha = \alpha_{id}$ .

L'equazione della parabola è  $y = ax^2 + bx + c$  e  $2m = hl$ . La parabola passa per  $O = (0, 0)$ ,  $V = (l/2, hl)$  e  $A = (l, 0)$ , quindi:

$$y = 4h \left( x - \frac{x^2}{l} \right) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = 4h \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \quad (2)$$

Se ora utilizziamo il cambiamento di variabili (1), si ha:

$$x = \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) \quad \frac{dy}{dx} = 4h \cos\theta = y'(\theta) \quad (3)$$

Richiamiamo le relazioni della lamina curva con incidenza che ci servono:

$$\alpha_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 4h \cos\theta d\theta = 0 \quad (4)$$

Per quanto riguarda  $C_p(x)$ , essendo la lamina curva rappresentabile con una distribuzione di vortici, abbiamo  $C_{p+}(x) = -C_{p-}(x)$ :

$$C_{p+}(x) = -\frac{2u'_+(x)}{V_\infty} = -\frac{\gamma(x)}{V_\infty} \quad (11)$$

Usiamo la relazione (1) e si ha

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left( A_0 \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \sum_1^\infty A_n \sin(n\theta) \right) \quad (12)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) \cos(n\theta) d\theta = 4h \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta) \cos(n\theta) d\theta = 0, \quad n \geq 2 \quad (13)$$

Se  $\alpha = \alpha_{id} = 0$ ,  $A_0 = \alpha - \alpha_{id} = 0$ , quindi

$$C_{p+}(\theta) = -2A_1 \sin\theta = -8h \sin\theta = -0.3 \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \quad (14)$$

$$C_{p+}(\theta) = -0.3 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2}{l}x\right)^2} \quad (15)$$

Ricordando che  $C_{p+}(x) = -C_{p-}(x)$ , si ha  $\Delta C_p = C_{p-}(x) - C_{p+}(x) = -2C_{p+}(x)$ .  $C_{p+} = 0$  al bordo d'attacco ( $x = 0, \theta = 0$ ) e al bordo di fuga ( $x = l, \theta = \pi$ ). Possiamo anche vedere che per il coefficiente di portanza  $C_l$  per incidenza nulla ( $dx = l/2 \sin\theta d\theta$ ) si ha:

$$(C_l)_{\alpha=0} = \int_0^l \Delta C_p \frac{dx}{l} = \int_0^\pi 16h \sin\theta \frac{l}{2} \sin\theta \frac{1}{l} d\theta = 8h \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta = 4\pi h, \quad (16)$$

che ovviamente è la stessa espressione ottenuta in (8).

Osservazione.  $\alpha_{id} = 0$  come la lamina piana e l'arco di cerchio. Tutti i profili che hanno asse di mezzeria parallelo all'asse  $y$  hanno  $\alpha_{id} = 0$ .

### Profilo a triangolo isoscele

Calcolare il coefficiente di portanza  $C_l$  di un profilo a triangolo isoscele con angoli alla base di  $8^\circ$  e investito con incidenza  $\alpha = 3^\circ$ .

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) \cos\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}(\delta) \cos\theta d\theta + \int_{\pi/2}^\pi -\operatorname{tg}(\delta) \cos\theta d\theta \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}(\delta) \left( \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} \right) = 0.0895 \qquad (21)
 \end{aligned}$$

$$C_l = 2\pi \left( \alpha + \frac{A_1}{2} \right) = 0.61 \qquad (22)$$

Osservazione. Nelle integrazioni lungo la corda,  $\operatorname{tg}(\delta)$  cambia segno spostandosi dal bordo d'attacco ( $\theta = 0$ ) a quello di fuga ( $\theta = \pi$ ). Questo perchè l'angolo è  $\delta$  per il bordo d'attacco e  $-\delta$  per quello di fuga.

### Profilo con spessore ellittico e linea media parabolica

Calcolare il coefficiente di pressione  $C_p$  di un profilo ottenuto sovrapponendo alla linea media data dall'arco di parabola uno spessore ellittico.

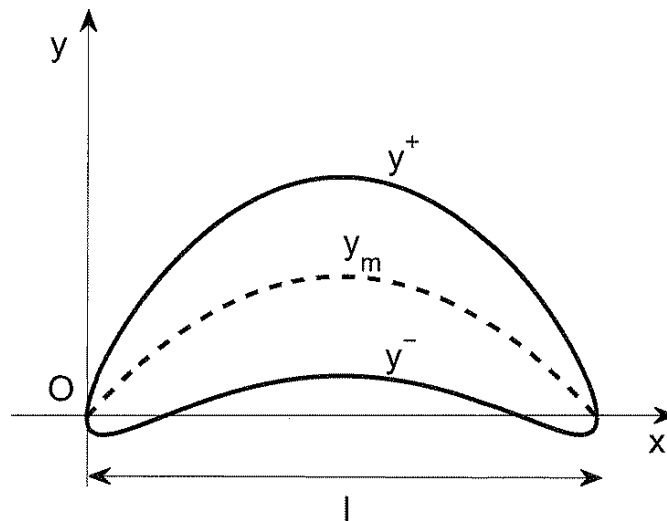


Figure 3: Profilo con spessore ellittico e linea media parabolica

$$\begin{aligned}
 C_p^+ &= C_p^- = -2 \frac{u'(x)}{V_\infty} = -\frac{1}{\pi V_\infty} \int_0^l \frac{q(x') dx'}{x-x'} = \\
 &= -\frac{1}{\pi V_\infty} \int_0^\pi \frac{q(\theta') l / 2 \sin \theta' d\theta'}{l/2(1-\cos\theta) - l/2(1-\cos\theta')} = -\frac{1}{\pi V_\infty} \int_0^\pi \frac{q(\theta') \sin \theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = \\
 &= -\frac{1}{\pi V_\infty} 2V_\infty \sqrt{2 \frac{\rho^2}{l^2}} \int_0^\pi \left( \frac{\cos \theta'}{\sin \theta'} \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} \right) d\theta' = -2 \sqrt{2 \frac{\rho^2}{l^2}} \quad (28)
 \end{aligned}$$

Il profilo simmetrico con spessore ellittico  $y_s$  dà luogo ad un  $C_p$  costante.

c) incidenza di potenza nulla  $\alpha_0$

$$\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dV}{dX} \cos \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{16} [3 \cos^3 \theta + 1,5 \cos^2 \theta - \cos \theta] \, d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{16} \left[ \int_0^{\pi} 3 \cos^3 \theta \, d\theta + \int_0^{\pi} 1,5 \cos^2 \theta \, d\theta + \int_0^{\pi} -\cos \theta \, d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[ 0 + 1,5 \frac{\pi}{2} + 0 \right] = + \frac{1,5}{16} = +0,09375 \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = 0,03125 - 0,09375/2 = -0,015625 \text{ rad} = -0,90^\circ$$

d) coeff. potenza all'incidenza ideale  $C_{e, \alpha_{id}}$

$\alpha_{id}$  per armonica curva senza apertura è pari ad  $\alpha$  pieno

$$C_{e, id} = 2\pi (\alpha - \alpha_0) = 2\pi \left( \alpha - \alpha_{id} + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \frac{A_1}{2} = \pi \cdot 0,09375 = 0,294524$$

e)  $C_{mo}$  coeff. momento focale

$$C_{mo} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dV}{dX} \cos(2\theta) \, d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{1}{16} \left[ \int_0^{\pi} 3 \cos^3(2\theta) \, d\theta + \int_0^{\pi} 1,5 \cos^2(2\theta) \, d\theta + \int_0^{\pi} \cos(2\theta) \, d\theta \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{16} \int_0^{\pi} (3 \cos^3 \theta + 1,5 \cos^2 \theta - \cos \theta) \cos(2\theta) \, d\theta = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[ \int_0^{\pi} 3 \cos^3 \theta \cos(2\theta) \, d\theta + \int_0^{\pi} 1,5 \cos^2 \theta \cos(2\theta) \, d\theta + \int_0^{\pi} \cos \theta \cos(2\theta) \, d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[ 3 \int_0^{\pi} (\cos^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \, d\theta + \int_0^{\pi} 1,5 (\cos^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) \, d\theta + \int_0^{\pi} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \, d\theta \right] \end{aligned}$$

ricorre  $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  applicando ad ottavo:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{6\pi}{8} + 3 \int_0^{\pi} -\cos^2 \theta \sin^2 \theta \, d\theta + 1,5 \int_0^{\pi} -\cos \theta \sin^2 \theta \, d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{6\pi}{8} + 3 \int_0^{\pi} -\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta + 1,5 \int_0^{\pi} -\cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{6\pi}{8} + 3 \frac{3\pi}{8} + 1,5 \cdot 0 \right] = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{6\pi}{8} + \frac{9\pi}{8} \right] = \frac{15\pi}{8\pi} = \frac{15}{8} = A_1 \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{6}{16\pi} \int_0^{\pi} (2 \cos^2 \theta - \cos^2 \theta) \, d\theta = \frac{6}{16\pi} \left( \frac{3}{4} \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{32} = A_1$$

$$C_{mo} = 0$$



## Ali ad allungamento finito

Per lo studio delle ali, supponiamo valide le ipotesi di applicabilità della teoria delle piccole perturbazioni: ogni sezione alare è intesa di piccolo inarcamento, sottile ed investita con piccola incidenza.

Consideriamo quindi l'ala come una superficie portante priva di spessore (Fig. 1) e rappresentiamo tale superficie con una distribuzione di filetti vorticosi.

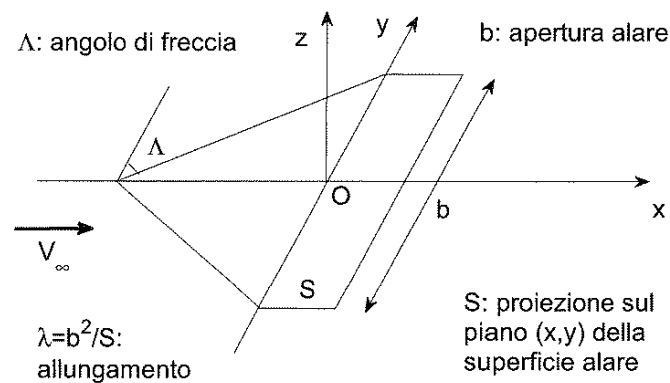


Figure 1: Ala finita ed assi di riferimento.

## Schema di Prandtl

Lo schema di Prandtl è valido per ali di grande allungamento,  $\lambda$ , e per piccoli angoli di freccia,  $\Lambda$ . Ogni sezione alare può essere vista come un profilo alare bidimensionale investito con un'incidenza  $\alpha - \alpha_i$ , cioè da una corrente parallela all'asse  $x$  di velocità  $V_{\infty}$  e incidenza  $\alpha$ , e una velocità  $w'_i(y)$ , piccola rispetto a  $V_{\infty}$  e diretta nel verso opposto all'asse  $z$  (Fig. 2).

Riportiamo ora l'equazione integro-differenziale di Prandtl:

$$\Gamma(y) = k(y)\pi V_{\infty} l(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i(y)], \quad (1)$$

che dà la circuitazione lungo l'apertura alare. Discutiamo brevemente i termini dell'equazione (1) e la loro dipendenza da  $y$ :

### Ala con pianta ellittica

In questo caso il coefficiente di portanza è:

$$C_L = \frac{2\pi k(\alpha - \alpha_0)}{1 + 2k/\lambda}. \quad (4)$$

Introduciamo  $C'_L$ :

$$C_L = C'_L(\alpha - \alpha_0), \quad (5)$$

dove

$$C'_L = \frac{2\pi k}{1 + 2k/\lambda} = \frac{c'_i}{1 + 2k/\lambda}, \quad (6)$$

è il coefficiente angolare di portanza per l'ala ellittica. Ricordando che il coefficiente di portanza del profilo è pari a:

$$c_i = 2k\pi(\alpha - \alpha_0), \quad (7)$$

si può notare che  $C_L$  (ala ellittica) è minore di  $c_i$  (profilo) e cresce con  $\lambda$ .

### Ala ellittica in pianta

Consideriamo un'ala ellittica in pianta con corda massima di mezzeria  $l_0 = 1.5$  m e apertura  $b = 10.4$  m. L'ala non è svergolata ed è a profilo costante con incidenza di portanza nulla  $\alpha_0 = -2.98^\circ$ . Il coefficiente angolare di portanza è  $c'_i = 6.12$ , mentre l'incidenza geometrica è  $\alpha = 6^\circ$ . Calcolare il coefficiente di portanza  $C_L$ , l'incidenza indotta  $\alpha_i$ , e il coefficiente di resistenza indotta,  $C_{Di}$ .

Utilizziamo la relazione (4) per il calcolo del  $C_L$ . Sappiamo che l'incidenza aerodinamica vale  $\alpha_a = \alpha - \alpha_0 = 8.98^\circ = 0.1567$  rad. Calcoliamo poi l'allungamento  $\lambda = b^2/S$ , ricordando che la superficie  $S$  dell'ellisse con semiassi pari a  $l_0/2$  e  $b/2$  è:

$$S = \pi \frac{l_0}{2} \frac{b}{2} = 12.25\text{m}^2, \quad (8)$$

quindi  $\lambda = 8.83$ .

$$\frac{|C_{L1} - C_{L2}|}{|C_{L1}|} \cdot 100 \cong 4\%, \quad (16)$$

$$\frac{|C_{Di1} - C_{Di2}|}{|C_{Di1}|} \cdot 100 \cong 14\%. \quad (17)$$

L'aumento dell'allungamento  $\lambda$  fa aumentare di poco (4%)  $C_L$ , invece fa diminuire in modo più consistente (14%)  $C_{Di}$ .

### Ala rettangolare con distribuzione ellittica di portanza

Consideriamo un'ala rettangolare (Fig. 3) con allungamento  $\lambda = 9.5$  e profilo costante ( $\alpha_0 = \text{cost}$ ) con incidenza di portanza nulla  $\alpha_0 = -1.45^\circ$  e coefficiente correttivo di  $c'_l$  pari a  $k = 0.95$ . Vogliamo trovare la legge di svergolamento geometrico che assicuri una distribuzione di portanza ellittica. Per  $C_L = 0.4$  e  $C_L = 0.6$  vogliamo poi determinare l'incidenza geometrica nel punto  $y = 0.6b/2$ .

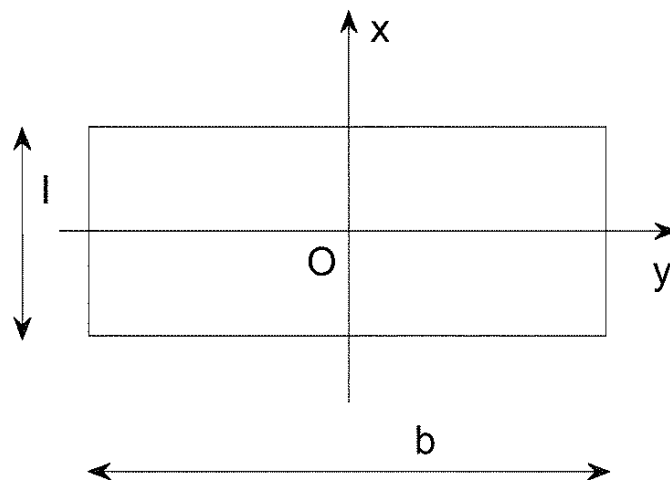


Figure 3: Ala rettangolare.

```

clear all
close all
b = 10;
lambda = 9.5;
alpha_0 = -1.45;
k = 0.95;
CL_0_4 = 0.4;
CL_0_6 = 0.6;
y = 0:0.01:b/2;
alpha_a_0_4 = CL_0_4/(pi*lambda)*(1 + ...
    2*lambda/(k*pi)*sqrt(1 - y.^2./(b^2/4)));
alpha_0_4 = alpha_a_0_4./pi.*180 + ...
    alpha_0*ones(1,length(y));
alpha_a_0_6 = CL_0_6/(pi*lambda)*(1 + ...
    2*lambda/(k*pi)*sqrt(1 - y.^2./(b^2/4)));
alpha_0_6 = alpha_a_0_6./pi.*180 + ...
    alpha_0*ones(1,length(y));

figure
plot(y,alpha_0_4,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(y,alpha_0_6,'r','LineWidth',2)
xlabel('y','FontSize',18)
ylabel('\alpha','FontSize',18,'Rotation',0)
legend('\alpha(y) C_L=0.4','\alpha(y) C_L=0.6')

```

- La differenza  $\Delta\alpha = \alpha(y)_{C_L=0.6} - \alpha(y)_{C_L=0.4}$  non è costante lungo l'apertura alare. Se dall'ala progettata per avere distribuzione ellittica con  $C_L = 0.4$  volessimo ottenere un  $C_L = 0.6$ , dovremmo aumentare l'incidenza di tutta l'ala, cioè aumentare ogni sezione di un  $\Delta\alpha$  costante. Questo farebbe perdere la distribuzione ellittica di portanza, perchè sappiamo che  $\Delta\alpha$  non è costante lungo  $y$ . Questo conferma il fatto che la distribuzione ellittica di portanza si può ottenere in due modi:
  - ala non svergolata ed ellittica in pianta → la distribuzione è ellittica a tutte le incidenze;
  - ala svergolata (pianta non ellittica) → la distribuzione è ellittica solo per una ben determinata incidenza dell'ala, cioè per un determinato  $C_L$ .

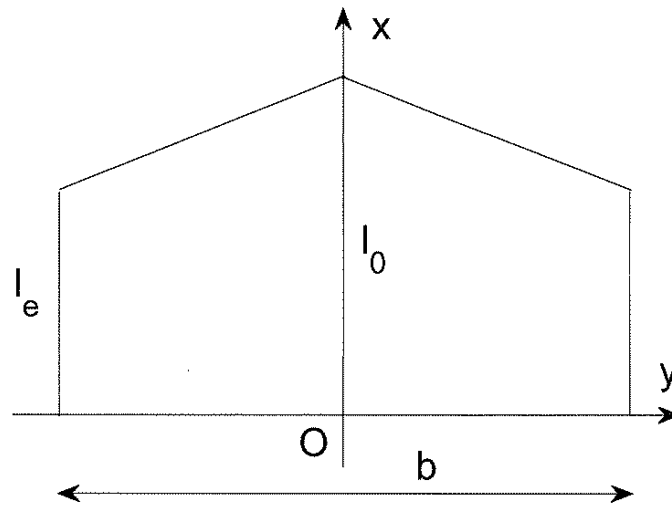


Figure 5: Ala trapezia.

$$\begin{cases} l(y) = Ay + B \\ y = 0, \text{ per } l = l_0 \\ y = b/2, \text{ per } l = 2/3l_0, \end{cases} \quad (23)$$

da cui si ha:

$$l(y) = l_0 \left( 1 - \frac{2y}{3b} \right). \quad (24)$$

La superficie alare è:

$$S = 2(l_0 + l_e) \frac{b}{2} \frac{1}{2} = \frac{5}{6} l_0 b. \quad (25)$$

Analogamente a quanto fatto per l'ala rettangolare, uguagliamo la distribuzione ellittica per la circuitazione all'equazione di Prandtl, ottenendo:

$$\alpha_a(y) = \frac{C_L}{\pi \lambda} + \frac{\Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}}{k\pi V_\infty l_0 \left( 1 - \frac{2y}{3b} \right)}. \quad (26)$$



## DISTRIBUZIONE PORTANZA NOTA p.3-12 f.

$$b = 11 \text{ m}$$

$$V_\infty = 55 \text{ m/s}$$

$$\Gamma(y) = 20 \left[ 1 - \left( \frac{y}{b/2} \right)^4 \right] \text{ m}^2/\text{s}$$

calcola  $\alpha_i$  in gradi ad  $y=0$ .

Risoluzione.

$$\alpha_i(y) = - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} dy'$$

Faccio la derivata di  ~~$\Gamma(y) = 20 \left[ 1 - \left( \frac{y}{b/2} \right)^4 \right]$~~

$$d\Gamma(y') = \frac{d}{dy'} \left[ 20 - 20 \frac{y'^4}{b^4/16} \right] = -20 \cdot 4 \frac{y'^3}{b^4/16} = -80 \frac{y'^3}{b^4/16}$$

~~$$\alpha_i(0) = + \frac{80}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y'^3}{(b/2)^4} dy' = \frac{80}{\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{1}{4} \frac{y'^4}{(b/2)^4} \right]_{-b/2}^{b/2} =$$~~
~~$$= \frac{80}{\pi V_\infty} \left[ \frac{1}{4} \frac{(b/2)^4}{(b/2)^4} + \frac{1}{4} \frac{(b/2)^4}{(b/2)^4} \right] = \frac{10}{\pi V_\infty} =$$~~

$$\alpha_i(0) = + \frac{80}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y'^3}{(b/2)^4} \frac{1}{y'} dy' = \frac{20}{\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{1}{3} \frac{y'^3}{(b/2)^4} \right]_{-b/2}^{b/2} =$$

$$= \frac{20}{\pi V_\infty} \frac{1}{3} \left[ \frac{(b/2)^3}{(b/2)^4} - \frac{(-b/2)^3}{(b/2)^4} \right] = \frac{20}{3} \frac{1}{\pi V_\infty} \left[ \frac{2}{(b/2)} \right] = \frac{40}{3} \frac{1}{\pi \cdot 55} \frac{1}{1/2} = 0,0140 \text{ rad}$$

$$= 0,803^\circ$$