NUMERO: 743

DATA: 20/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Sacchiero

MATERIA: Fisica I

Prof. Daghero

CINEMATICA

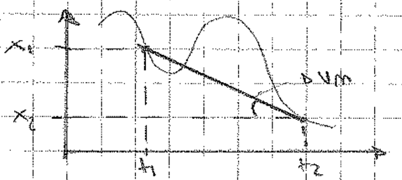
INTRODUZIONE

- TRAIETTORIA: il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento nello spazio
- VELOCITÀ MEDIA: è lo spazio percorso nel tempo impiegato
- VELOCITÀ ISTANTANEA: rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato $v = \frac{dx}{dt}$
  - → COORDINATE CARTESIANE $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
  - → COORDINATE INTRINSECHE $v = v_s \hat{u}_t$
  - → COORDINATE POLARI $\underbrace{\frac{d\rho}{dt}\hat{u}_r}_{\text{vel. radiale}} + \rho\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$ → vel. trasversa
- ACCELERAZIONE ISTANTANEA: rappresenta la rapidità di variazione temporale della velocità $a = \frac{dv}{dt}$
  - → COORDINATE INTRINSECHE $a = \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{u}_t}_{\text{acc. } t_g} + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$ → acc centripeta
  - → COORDINATE POLARI $a = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{u}_\theta$

MOTO RETTILINEO

Un corpo che si muove lungo una retta si muove di moto rettilineo

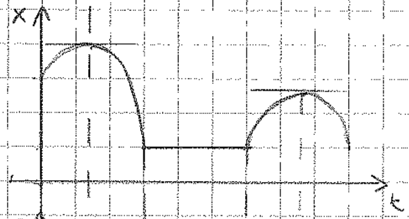
Siccome si svolge tutto in una direzione si può tracciare il diagramma orario di x in funzione di t



$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1) = [x(t_2) - x(t_1)]\,\hat{i}$$

$$v_m = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} = -\frac{|\Delta x|}{\Delta t}\hat{i}$$ → pendenza secante

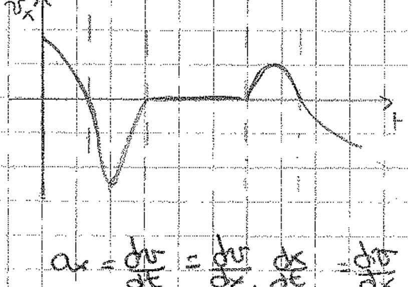
Attraverso il diagramma orario posso risalire alla legge oraria



$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v_x(t)dt \rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x\, dt}$$



$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x\, dt}$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \rightarrow a_x dx = v_x dv$$

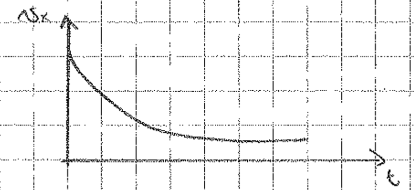
$$\int_{x_0}^{x} a\, dx = \int_{v(t_0)}^{v(t)} v_x\, dx \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}v_x^2 - \frac{1}{2}v_{x_0}^2 = \int_{x_0}^{x} a_x\, dx}$$

MOTO RETTILINEO ESPONENZIALMENTE SMORZATO

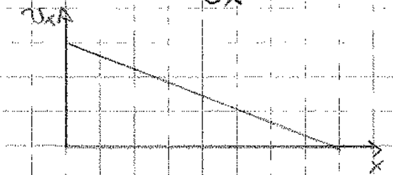
$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -bv_x \rightarrow$ se mi muovo nel verso giusto, man mano che la velocità aumenta diminuisce l'accelerazione

$$\frac{dv_x}{v_x} = -b\,dt \rightarrow \ln v_x \Big]_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} = -b(t-t_0)$$

$$\ln \frac{v_x(t)}{v_{x0}} = -b(t-t_0) \rightarrow \frac{v_x(t)}{v_x(0)} = e^{-b(t-t_0)} \rightarrow v_x(t) = v_{x0} \cdot e^{-b(t-t_0)}$$



$$\frac{dv_x}{dt} = -bv_x \rightarrow \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = -bv_x \; ; \; \frac{dv_x}{dx}\cancel{v_x} = -b\cancel{v_x} \rightarrow v_x - v_{x0} = -b(x-x_0)$$



$v_x = 0 \rightarrow x_{MAX}$ non è in funzione del tempo

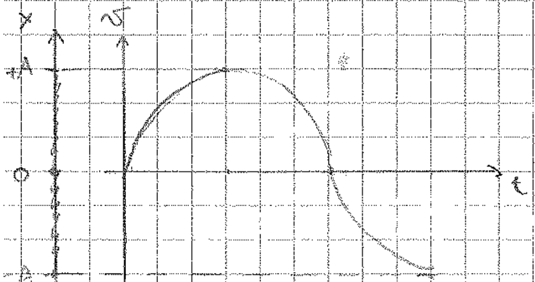
$$x_{MAX} = x_0 + \frac{v_{x0}}{b}$$

MOTO ARMONICO

$a = -\omega^2 x \qquad \frac{d^2x}{dt} = -\omega^2 x \; ; \; \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \rightarrow$ diff. lineare omogenea

$$\lambda = i\omega \quad \begin{cases} x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \rightarrow A+B=0 \rightarrow B=-A$$

$x(t) = A(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = 2iA\,\text{sen}(\omega t) = A'\,\text{sen}(\omega t) \rightarrow$ formule eulero



$\omega t \rightarrow \omega t + 2\pi$

$t \Rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega}$

PERIODO $T = \frac{2\pi}{\omega}$

FREQUENZA $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

MOTO CIRCOLARE

La traiettoria è una circonferenza. La velocità cambia costantemente in direzione, quindi l'accelerazione centripeta è costante

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \rightarrow \text{vel. angolare}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$s = s_0 + vt$

$\theta = \theta_0 + \omega t$

DINAMICA

LEGGI DI NEWTON

LEGGE: PRINCIPIO DI INERZIA

Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità finché non intervengano forze esterne a modificarne lo stato

LEGGE

L'interazione di un punto con l'ambiente circostante, espressa tramite una forza F, determina l'accelerazione del punto

$F = m \cdot a$ (m: massa inerziale, ovvero la resistenza a variare la sua velocità).

NB 1) è una legge sperimentale dedotta dall'analisi di un punto soggetto a forze
2) è valida solo se in sistemi di riferimento inerziali
3) è applicabile solo se la velocità del punto è molto minore alla velocità della luce

LEGGE: PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

Se un corpo A esercita una forza F_{AB} su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza F_{BA} sul corpo A.
Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto

QUANTITÀ DI MOTO E IMPULSO

Si definisce QUANTITÀ DI MOTO di un punto materiale $p = mv$

Se la massa è costante allora possiamo dire che

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La sommatoria delle forze applicate in un punto è uguale alla variazione della quantità di moto in un intervallo di tempo

Si definisce IMPULSO la variazione infinitesima della q.tà di moto provocata dall'azione di una forza in un intervallo di tempo

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = \Delta\vec{p}$$ → TEOREMA DELL'IMPULSO (versione integrale della seconda legge di Newton)

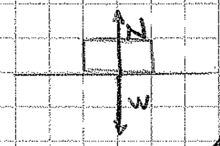
Quindi $\Delta v = \frac{F}{m}$

CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO: In assenza di forze esterne applicate la q.tà di moto si conserva (rimane costante)

FORZE NORMALI

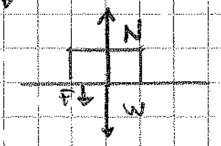
La componente della forza che una superficie esercita su un oggetto con cui è in contatto (principio di azione/reazione)

a) $\Sigma F = 0$ $\quad \vec{N} = -mg$



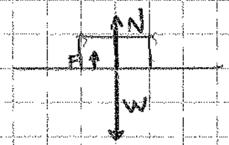
b) $\Sigma F = 0$ $\quad \vec{N} + \vec{\omega} + \vec{F} = 0$

$N = \omega + F$



c) $\Sigma F = 0$ $\quad \vec{N} + \vec{\omega} + \vec{F} = 0$

$N = \omega - F$



N è la responsabile della sensazione di peso; supponiamo di avere un corpo in un ascensore sopra la bilancia

a) l'ascensore è fermo $\rightarrow N + mg = 0 \quad N = \omega = mg$

b) l'ascensore inizia a salire $\rightarrow N + w = ma$

$N = m(g+a)$ → sens. pesantezza

c) l'ascensore inizia a scendere $\rightarrow N + W = ma$

$N = m(g-a)$ → sens. leggerezza

d) l'ascensore è in caduta libera $(a=g)$ $\rightarrow N + W = -ma$

$N = m(g-g) = 0$

FORZA DI ATTRITO RADENTE

Si nota sperimentalmente che un corpo sottoposto a una forza, appoggiato su un piano non entrerà in moto finché questa forza non eguaglierà la forza di attrito statico

$$f_s \leq \mu_s N$$

μ_s è il coefficiente di attrito statico e dipende dai materiali in contatto

NB! non dipende dall'area delle superfici in contatto

Quando la forza applicata al corpo supera il valore di f_s il corpo entra in movimento, ma a questo è opposta la forza di attrito dinamico

$$f_d = \mu_d N \quad \rightarrow \text{non dipende da } v!$$

Le forze di attrito sono FORZE DI COESIONE!

ESEMPIO

Un carrello sale lungo un piano inclinato ($\theta = 20°$) con accelerazione costante $a_1 = 2\ m/s^2$. Sul carrello si trova un corpo di massa $m = 0{,}25\ kg$, fissato a una parete del carrello da una molla di costante elastica $k = 12 N/m$.
Non ci sono attriti e il corpo non oscilla.
Calcolare di quanto è deformata la molla rispetto alla posizione di riposo e in che verso.
Ripetere il calcolo supponendo che lo stesso sistema scenda lungo il piano con accelerazione costante $a_2 = 5\ m/s^2$

a) $kx - mg\,\text{sen}\theta = ma \rightarrow x = \frac{m}{k}(g\,\text{sen}\theta + a) = 0{,}11\ m$

b) $kx + mg\,\text{sen}\theta = ma \rightarrow x = \frac{m}{k}(a - g\,\text{sen}\theta) = 0{,}034\ m$

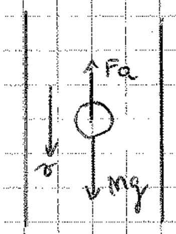
FORZA DI ATTRITO VISCOSO

È una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo

$$F = -bv$$

L'accelerazione risulta quindi essere $a = \frac{-bv}{m}$

Generalmente le f. di a.v. sono applicate da un fluido su un corpo che si muove in esso



$$F_a + w = ma$$

$$mg - mkv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \rightarrow \frac{dv}{g-kv} = dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{g-kv} = \int_0^t dt \rightarrow \ln\frac{g-kv}{g} = -kt \rightarrow v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

moto esponenzialmente smorzato

FORZA CENTRIPETA

È la componente della forza che agisce su un corpo che si muove su traiettoria curvilinea perpendicolare allo spostamento

$$F_N = m a_N = m v^2/r$$

Se la componente tangente alla traiettoria (che determina le variazioni di modulo della velocità) è nulla, l'unica accelerazione presente è quella centripeta.

TENSIONE

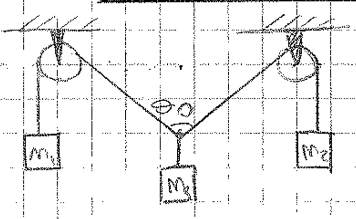
consideriamo una fune inestensibile di massa trascurabile

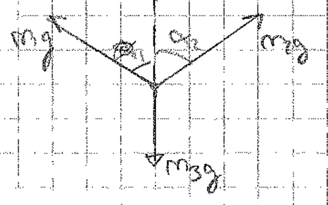
la fune è un vincolo che fornisce una forza centripeta (es fune con attaccato un sasso e fatta ruotare).

si chiama tensione T la forza che ogni segmento di fune esercita sul segmento adiacente → è di modulo costante in ogni segmento

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ se $m = 0$ $T_1 + T_2 = 0$ $T_1 = T_2 = T$

ESEMPIO: ESPERIENZA DI VARIGNON





Considerando il sistema a 3 masse, il punto 0 risulta essere in eq. se $m_3^2 = m_2^2 + m_1^2 + 2 m_1 m_2 \cos\theta$

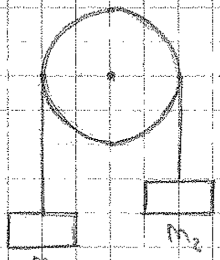
Dm nel punto 0 sono applicate le 3 tensioni dei fili di sostegno che valgono $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$

In equilibrio lungo y deve essere $\begin{cases} m_3 g = m_1 g \cos\alpha_1 + m_2 g \cos\alpha_2 \\ m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 = m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 \end{cases}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = \theta)$

lungo x deve essere

Dalla somma dei quadrati delle 2 eq. si ottiene $m_3^2 = m_2^2 + m_1^2 + 2 m_1 m_2 \cos\theta$

ESEMPIO: MACCHINA DI ATWOOD



La macchina è formata da due masse m_1, m_2 collegate da una fune che ruota attorno alla carrucola

Sia la fune che la carrucola hanno massa trascurabile e la fune non slitta attorno alla carrucola

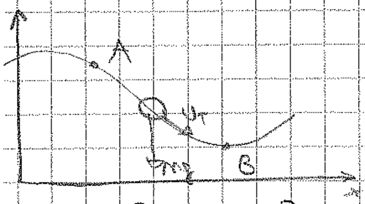
È evidente che il corpo con massa maggiore scenderà, mentre quello a massa minore salirà. Ma con quale accelerazione?

corpo m_1 → $\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ m_2 g - T = -m_2 a \end{cases}$

Sottraendo le due eq. risulta

$a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$ $T = \dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA PESO



Siccome il piano è bidimensionale, il lavoro va calcolato usando l'integrale

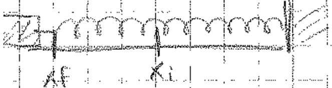
$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dz\,\hat{k}$

$m\vec{g} = -mg\,\hat{k}$

$$W_{AB} = \int_A^B m\vec{g}\,d\vec{r} = \int_A^B mg\,dr\cos\theta = -\int_{z_A}^{z_B} mg\,dz \Rightarrow W_{AB} = -mg\,(z_B - z_A)$$

Il lavoro dipende solamente dalle posizioni iniziali e finali

LAVORO DELLA FORZA ELASTICA



Il lavoro della forza elastica $F = -kx\hat{u}_x$ per uno spostamento lungo l'asse x vale

$$W = \int_A^B -kx\,u_x\,dx\,u_x = -k\int_A^B x\,dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\Delta E_p$$

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA $\frac{1}{2}kx^2$

LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO

$$W = \int_A^B \vec{f_s}\,d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d N\,\hat{u}_s\,d\vec{s} = -\mu_d N\int_A^B ds$$

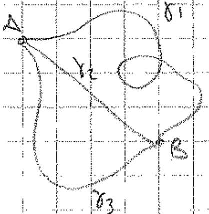
Il lavoro quindi non dipende dallo spostamento ma dalla forma della traiettoria

ORZE CONSERVATIVE

onsideriamo il lavoro compiuto da una forza esercitata su un corpo in movimen dal punto A al punto B

$$W_{AB} = \int_A^B F\,dr$$

n generale il lavoro dipende dal tragitto scelto per collegare A a B



$$W_{AB}^{\gamma_1} \neq W_{AB}^{\gamma_2} \neq W_{AB}^{\gamma_3}$$

invece in alcuni casi (es forza peso o forza elastica) il lavoro dipende solamente dal punto iniziale e finale, e non dal percorso scelto per unirli

al momento che U è una funzione di stato, deve essere in funzione delle coordinate
llora può essere espresso in forma differenziale

$$\partial U = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

omparando le precedenti due equazioni, otteniamo che

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\partial z \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

e si uniscono tutti i punti che hanno la stessa energia potenziale si ottengono
UPERFICI EQUIPOTENZIALI

er qualsiasi movimento su una superficie equipotenziale il lavoro di una forza conser
ativa è necessariamente nullo

↓

Consegue il fatto che la forza conservativa è necessariamente
perpendicolare alla superficie equipotenziale

alla definizione $\int_A^B F dr = U_A - U_B$ segue necessariamente che:

1) se $A \equiv B$ (percorso chiuso) $\oint F dr = U_A - U_A = 0$

2) possiamo solo calcolare la variazione di energia potenziale

ONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

ssumiamo che nel nostro sistema solo le forze conservative compiono lavoro.
n sistema di questo tipo è detto CONSERVATIVO.

n un sistema conservativo il lavoro compiuto dalle forze durante lo spostamento
a A a B è espresso da

1) $W_{AB} = E_{kB} - E_{kA}$ (teorema delle forze vive)
2) $W_{AB} = U_B - U_A$

ne segue che $U_B + E_{kB} = U_A + E_{kA}$

a quantità $E = U + E_k$ è chiamato ENERGIA MECCANICA del sistema

n un sistema conservativo l'energia meccanica si conserva

$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 - Ug_0$

$\Delta K = \frac{1}{2}m($

Consideriamo la derivata in funzione del tempo per entrambi i membri

$$\frac{dl_{o'}}{dt} = \underbrace{\frac{dr'}{dt} \wedge p}_{} + r' \wedge \frac{dp}{dt}$$

$$\bar{r}' = (\bar{r} - \bar{r}_0) \Rightarrow \frac{d\bar{r}'}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} - \underbrace{\frac{d\bar{r}_0}{dt}}_{=0} \Rightarrow \frac{d\bar{r}'}{dt} \wedge p = \frac{d\bar{r}}{dt} \wedge p = \vec{v} \wedge \vec{p} = 0$$

quindi $\frac{dl_{o'}}{dt} = r' \wedge \frac{dp}{dt} = r' \wedge F \Rightarrow \frac{dl_{o'}}{dt} = \bar{M}_o$

La derivata in funzione del tempo del momento angolare di un corpo è uguale al momento angolare della forza che agisce sulla particella

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Se $M_o = 0$ allora $\frac{dl_o}{dt} = 0 \rightarrow l_o$ è costante

Il momento angolare di un corpo in movimento si mantiene costante finché il momento angolare di una forza che agisce su un corpo è zero.

Ciò accade solamente quando la forza è nulla o è applicata parallelamente al braccio

Dal momento che il momento angolare è sempre perpendicolare al piano dove avviene lo spostamento, il fatto che l_o sia un vettore costante implica che il piano non cambia

Per le forze centrali l_o è sempre costante

La massa M crea un CAMPO nello spazio attorno indipendentemente dalla sua posizione o da quella della carica di prova e indipendentemente dalla presenza della carica di prova.

Il campo è una regione di spazio in ogni punto della quale è definita una quantità fisica.

CAMPO GRAVITAZIONALE $\vec{G} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\gamma \frac{M}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$

CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}(\vec{r}-\vec{r}')$

FLUSSO

Consideriamo il vettore $\vec{E}$ e una superficie di area S.
Chiamiamo $\vec{n}$ il vettore perpendicolare alla superficie del piano.
Chiameremo FLUSSO DI $\vec{E}$ attraverso la superficie S la quantità

$$\phi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot S\vec{n}$$

Notiamo che $\phi_S(\vec{E}) = \vec{E}\,\vec{n}S = E\,S\cos\theta = ES_\perp$

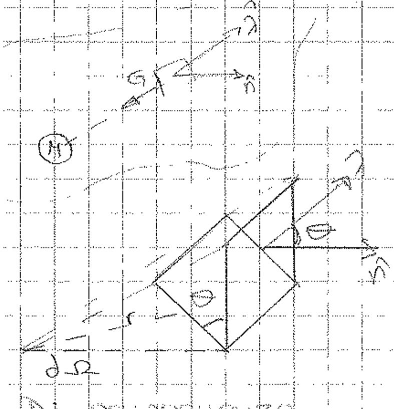
In genere il campo non è uniforme e le superfici non sono piane. In questo caso possiamo comunque esprimere il flusso infinitesimale attraverso una superficie infinitesima

$$d\phi_S = \vec{E}\,\vec{n}\,dS \rightarrow \phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\,\vec{n}\,dS$$

TEOREMA DI GAUSS mette in relazione il campo con la sua sorgente

Il flusso di un campo F attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla massa (o carica) totale racchiusa all'interno di essa.

Dim (campo gravitazionale)



$$d\phi_S(\vec{G}) = \vec{G}\,\hat{n}\,dS = -\gamma\frac{M}{r^2}\hat{\lambda}\,\hat{n}\,dS = -\gamma\frac{M}{r^2}\,dS\cos\theta$$

Ma $dS\cos\theta$ è l'elemento della superficie perpendicolare a G che è una porzione della sfera centrata in M con raggio r

$dS_{\perp} = r^2 d\Omega$ (dove $d\Omega$ è l'angolo solido infinitesimo)

Di conseguenza

$$d\phi_S(\vec{G}) = -\gamma\frac{M}{r^2}r^2 d\Omega = -\gamma M\,d\Omega$$

$$\phi_S(\vec{G}) = \int_S d\phi_S(\vec{G}) = -\gamma M\int_{4\pi} d\Omega \Rightarrow \phi_S(\vec{G}) = -4\pi\gamma M$$

Nel caso elettrostatico $\phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega} Q\,d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

ENERGIA POTENZIALE

La forza gravitazionale ed elettrostatica sono centrali, quindi conservative

$$W_{AB} = \int_{A\gamma_1}^{B} F\,dr = \int_{A\gamma_2}^{B} F\,dr \qquad \oint F\,dr = 0 \;\; \forall \gamma \qquad M(F) = 0$$

inoltre per le forze centrali $F(r)\,\hat{u}_r \rightarrow \nabla = \frac{d}{dr}\hat{u}_r$

$$W_{AB} = \int_A^B F\,dr = -\int_A^B dU = U_A - U_B$$

CASO GRAVITAZIONALE (uguale al caso elettrostatico)

$$\overline{F_G} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{\lambda} \rightarrow W_{AB} = \int_A^B -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{\lambda}\,d\bar{r} = -\gamma mM \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$W_{AB} = -\gamma mM \left| -\frac{1}{r} \right|_A^B = -\gamma \frac{Mm}{r_A} + \gamma \frac{mM}{r_B} = U_A - U_B$$

Di conseguenza $U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + C$

SCELTA DI C

1) $\boxed{U_g = 0}$ quando $r = R_T$ → distanze molto prossime

$$U_g(R) = -\gamma \frac{mM}{R} + C = 0 \rightarrow C = \gamma \frac{mM}{R}$$

$$U_g(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} + \gamma \frac{mM}{R} = \gamma mM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

Se $r = R + h$ dove suppongo che $h = o(R)$ allora avremo che

$$U_g(r) = \gamma mM \left(\frac{\cancel{R}+h-\cancel{R}}{R(R+h)}\right) = \gamma \frac{mM}{R^2} h = gmh \rightarrow \text{ovd}$$

2) $\boxed{C = 0}$ → notevoli distanze

$$U_g(r) = -\frac{\gamma mM}{r} = 0 \rightarrow \text{succede quando } r \rightarrow \infty$$

CASO ELETTROSTATICO $\quad U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$

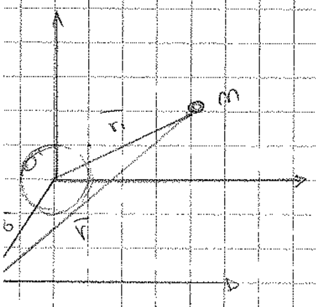
LEGGI DI KEPLERO

(3)

PRIMA LEGGE DI KEPLERO

Ogni pianeta si muove su orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

Dimostrazione



Chiamiamo O l'origine del sistema di riferimento inerziale e O' l'origine del sistema di riferimento solidale col sole

Chiamiamo m la massa di un sistema orbitante attorno al sole

Sia F la forza che esercita il Sole sul sistema

$$\text{rispetto a } O \rightarrow \begin{cases} F = m a_m \\ -F = M a_M \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_m = F/m \\ a_M = -F/M \end{cases}$$

L'accelerazione di m rispetto a M sarà quindi $a' = a - a_M = a_m - a_M$

$$= \frac{F}{m} - \left(-\frac{F}{M}\right) = F\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

Chiamiamo MASSA RIDOTTA del sistema $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$

quindi otteniamo che $a' = \frac{F}{\mu} \rightarrow F = \mu a'$

Lo spostamento relativo è formalmente identico a quello di un singolo oggetto di massa M, ma dall'espressione di F segue che

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{\lambda} = ma$$

Ora riprendiamo in considerazione l'espressione dell'accelerazione in coordinate cilindriche (è lecito perché il lavoro è conservativo e il lavoro avviene in un piano)

$$\bar{r} = r\hat{\lambda} \rightarrow \bar{v} = \frac{dr}{dt}\hat{\lambda} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\mu}$$

$$\rightarrow \bar{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\lambda} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\mu} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\mu} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\mu} + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2(-\hat{\lambda})$$

$$= \hat{\lambda}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \hat{\mu}\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

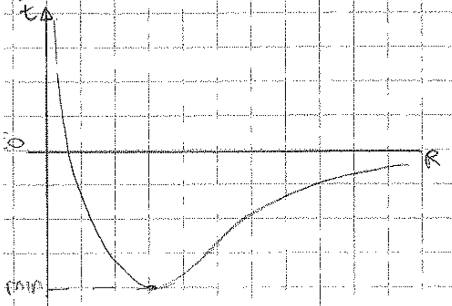
In questo caso (forza centrale) non c'è accelerazione lungo la direzione di $\hat{\mu}$, quindi

$$a' = \hat{\lambda}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \Rightarrow -\gamma\frac{mM}{r^2} = \mu\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$\boxed{E = \frac{L^2}{2M R^2 d^2}(\varepsilon^2 - 1) = \frac{\gamma m M}{2\varepsilon d}(\varepsilon^2 - 1)}$$

EQUAZIONE POLARE DI UN'ELLISSE

Le sezioni coniche rappresentano orbite possibili per i corpi celesti. Percorrere l'una o l'altra dipende solo dall'energia totale in funzione del raggio dell'oggetto



Un corpo che possiede energia pari a Emin descrive un'orbita mantenendosi sempre da una certa distanza dal sole
↓
CIRCONFERENZA

(Quando E < Emin i corpi collassano nel sole spiraleggiando)

Se un corpo possiede E compresa tra Emin e 0 le orbite sono ELLITTICHE, più l'energia si avvicina a 0 più sono eccentriche

$E < 0 \rightarrow \varepsilon^2 - 1 < 0 \; ; \; \varepsilon < 1$

Se l'energia è 0 → traiettorie PARABOLICA

Se l'energia è > 0 sono IPERBOLI

SECONDA LEGGE DI KEPLERO

La linea immaginaria che unisce il Sole ad un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali

Dim $L = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\| = m r^2 \omega = cost$

In un tempo infinitesimale dt il vettore che unisce Sole-pianeta percorre un'area pari a:

$dA = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge d\vec{r}\|$ ma $\|d\vec{r}\| = r\,d\theta$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m} = cost$

TERZA LEGGE DI KEPLERO

Il quadrato del periodo di rotazione di un pianeta è direttamente proporzionale al cubo della distanza dal Sole

$\Sigma F = ma \rightarrow \gamma \frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{r}$ $\quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$

$T = \frac{2\pi r}{v} \quad v = \frac{2\pi r}{T} \quad \gamma M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} \nearrow$

Quindi il momento angolare di un sistema è dato dalla massa totale moltiplicata per la velocità del centro di massa.
Questo significa che un sistema può essere trattato come un singolo corpo la cui massa M è concentrata nel centro di massa.

Se i corpi accelerano, anche il centro di massa lo farà

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i a_i$$

In accordo con la seconda legge di Newton, $ma = R$

$$\vec{R}_i = \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij} + \sum \vec{F}_i^{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum ma = \frac{1}{M}\sum R_i \to \sum \vec{F}^{ext} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

TEOREMA CARDINALE

La somma delle forze esterne a un sistema è uguale all'accelerazione del centro di massa per la massa totale

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum \vec{F}^{ext} \to \sum \vec{F}^{ext} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Se un sistema è isolato la somma delle forze esterne è uguale a 0, quindi P è costante → questo può valere anche per una sola delle componenti

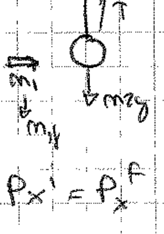
$$\sum F^{ext} \neq 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x^{ext} = 0 \to \frac{dP_x}{dt} = 0 \to P_x = cost \\ \sum F_y^{ext} \neq 0 \to \frac{dP_y}{dt} \neq 0 \to P_y \text{ non è costante} \end{cases}$$

ESEMPIO → PENDOLO BALISTICO

Immaginiamo un pendolo fermo con attaccata una massa m_2 di 2,5 kg. Un proiettile di massa $m_1 = 9{,}01$ kg colpisce m_2. L'altezza massima raggiunta dal pendolo è 0,65 m. Calcolare la velocità iniziale del proiettile

① PRIMA DELL'URTO



$$\sum F^{ext} = T + m_1 g + m_2 g = m_1 g$$

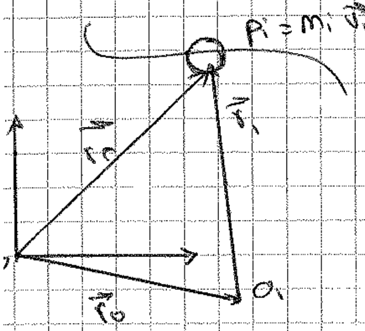
$$\sum F_x^{ext} = 0 \to P_x = cost$$

$$P_x^i \to m_1 v_0 + m_2 \cdot 0 = m_1 v_1$$

$$P_x^f \to (m_1+m_2) v_f$$

$$P_x^i = P_x^f \to v_f = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} v_{01}$$

MOMENTO ANGOLARE



Sia O l'origine di un sistema di riferimento inerziale e O' il centro di rotazione.

Consideriamo un corpo appartenente al sistema, per il quale possiamo scrivere

$\vec{L_{O'}} = \vec{r_i}' \wedge \vec{p_i}$

il momento angolare totale $L_{O'} = \Sigma L_{O'} = \Sigma r_i' \wedge p_i$

La sua derivata in funzione del tempo risulta

$$\frac{d}{dt}\vec{L_{O'}} = \Sigma \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{r_i}'}\wedge \vec{p_i} + \Sigma \vec{r_i}' \wedge \frac{d}{dt}\vec{p_i}$$

$$\frac{d}{dt} r_i' = \frac{d}{dt}(r_i - r_0) = v_i - v_0$$

($v_i \rightarrow$ velocità rispetto SRI
$v_0 \rightarrow$ velocità rispetto SR)

$$\frac{d}{dt}\vec{L_{O'}} = \Sigma (v_i - v_0) \wedge p_i + \Sigma \vec{r_i}' \wedge \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{p_i}}$$

$$\frac{d}{dt} p_i = R_i = \Sigma_{j \neq i} \overset{=0}{\vec{F_{ji}}} + \Sigma F^{ext}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L_{O'}} = \cancel{\Sigma v_i \wedge} p_i - v_0 \wedge p_i + \Sigma r_i' \wedge R_i^{EXT} + \Sigma r_i' \wedge R^{INT}$$

$$= -v_0 \wedge p_i + \Sigma \vec{r_i}' \wedge R^{INT} + \Sigma r_i' \wedge R^{EXT}$$

$$= -v_0 \wedge P + \underbrace{\Sigma r_i \wedge R^{INT}}_{=0} + \vec{M_0}^{EXT}$$

quindi $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\vec{L_{O'}} = -v_0 \wedge p + M_0^{EXT}$

Il termine $-v_0 \wedge p$ è nullo quando:

1) il polo non è in moto rispetto al sistema di riferimento ($v_0 = 0$)
2) il centro di massa non è in moto nel sistema di riferimento ($p = 0$)
3) il polo coincide col centro di massa
4) la velocità del centro di massa è parallela alla velocità del polo

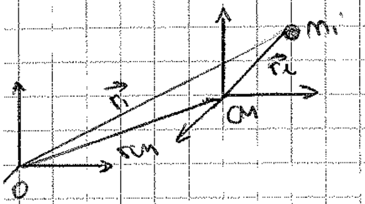
In tutti questi casi si può scrivere (sono i più comuni)

$$\frac{d}{dt} L = \vec{M_0}^{ext}$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

In alcuni casi è utile descrivere il moto di un sistema di corpi centrando il sistema di riferimento nel centro di massa SRCM

Supponiamo che gli assi si mantengano sempre paralleli (no rotazione) e che non sia solidale



$$\vec{r}' = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i$$
$$\vec{v}' = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$

La posizione del centro di massa e la sua velocità sono quindi

$$\bar{r}_{CM} = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i} = 0 \qquad \Sigma m_i \vec{r_i}' = 0$$

$$\bar{V}_{CM} = \frac{1}{M} \Sigma m_i V_i = 0 \qquad \Sigma m_i V_i = 0 \rightarrow P = 0$$ il momento angolare è sempre nullo!

Il teorema del momento angolare vale anche per il sistema di riferimento nel centro di massa anche se non deve essere necessariamente inerziale

Se il CM accelera devono essere incluse nel calcolo anche le forze apparenti

Per esempio per un corpo di massa m_i:

$$\Sigma F_i - m a_{CM} = m_i a_i$$

Calcolando il momento totale

$$\bar{M}'_{CM} = \Sigma_i r_i \wedge F_i - r_i' \wedge m a_{CM} = \Sigma r_i \wedge F^{ext} - \underbrace{\Sigma m r \wedge a_{CM}}_{0} = \bar{M}' = M_{CM}$$

Siccome il momento dovuto alle forze apparenti è nullo, il momento totale sarà uguale a quello calcolato in un sistema di riferimento inerziale

URTI

onsideriamo un sistema di due corpi puntiformi che si urtano tra loro.
e non ci sono forze esterne avremo

$$\Sigma F^{ext} = 0 \quad \frac{dP}{dt} = 0 \rightarrow P = cost$$

se anche ci fossero forze esterne, solitamente sono più deboli delle forze di contatto
uesto significa che, dal punto di vista delle particelle, la variazione della quantità di oto dipende principalmente dall'impulso dovuto alle forze interne

uindi possiamo continuare a dire che durante la collisione $P \approx cost$

uesto è vero se → la durata della collisione è molto breve
→ le forze esterne non sono forze di contatto

$$\vec{J}^{int} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{int}\, dt \gg \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{ext}\, dt = \vec{J}_{ext}$$

$\vec{P} = cost$ ne consegue che anche la velocità del centro di massa rimane costante,
uindi il moto del centro di massa non è toccato dalla collisione

$$\vec{P} = cost \Rightarrow v_{cm} = cost$$

erò la quantità di moto di ogni singolo corpo cambia:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} = \vec{P}_f \rightarrow \vec{P}_{1f} - \vec{P}_{1i} = \vec{P}_{2i} - \vec{P}_{2f} \rightarrow \Delta P_1 + \Delta P_2 = 0$$

$$\Delta P_1 = \int_i^f F_{21}\, dt = J_{21} \qquad \Delta P_2 = \int_i^f F_{12}\, dt = J_{12}$$

a, in accordo con la terza legge di Newton $F_{12} = F_{21}$ e quindi

$$\vec{P}_{2f} - \vec{P}_{2i} = \int_i^f \vec{F}_{12}\, dt = -\int_i^f \vec{F}_{21}\, dt = -(\vec{P}_{1f} - \vec{P}_{1i})$$

forze che agiscono durante la collisione sono FORZE INTERNE.
eneralmente non si sa se queste forze sono conservative o meno, quindi non sempre possibile utilizzare la conservazione dell'energia meccanica

al teorema di König per l'energia cinetica abbiamo che $E_k = E_{kcm} + E_k'$

al momento che l'urto non altera il centro di massa ne consegue che la sua energia cinetica è sempre CONSERVATIVA durante un urto, e ciò prova che le forze esterne sono nulle o comunque trascurabili

$$E_{kcm_i} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2_{cm_i} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2_{cm_f} = E_{k\,cm_f}$$

e supponiamo inoltre che l'urto sia così veloce che la posizione dei due orpi non cambi durante l'urto, anche l'energia potenziale del sistema non cambia

$$U_i = U_f$$

URTI PERFETTAMENTE ANELASTICI

olo la quantità di moto si conserva

$$\vec{P} = \vec{P'} \rightarrow P_x = P_x'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

n questo caso è sufficiente una sola equazione per descrivere l'urto, perchè c'è solo una velocità incognita

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} = v_{cm}$$

B siccome la quantità di moto è conservativa, lo è anche la velocità del centro di m

imostrazione che E_k non è conservativa

cegliamo il sistema di riferimento del centro di massa, in questo caso

$$\vec{P} = \vec{P'} = 0$$

rima dell'urto le due masse sono in moto con velocità opposte (la loro somma è 0)

$$\underset{m_1}{O} \xrightarrow{v_1} \qquad \xleftarrow{v_2} \underset{m_2}{O}$$

'energia cinetica quindi è $E_k = E_{k_1} + E_{k_2} = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2}$

opo l'urto il sistema è fermo (ovvero viaggia alla stessa velocità del centro i massa) quindi l'energia cinetica è 0.

URTI ANELASTICI

n generale un urto non è mai nè elastico, nè perfettamente anelastico.
n questi casi la quantità di moto dopo l'urto è minore in modulo di quella rima dell'urto

$$P_1' < P_1 \quad e \quad P_2' < P_2$$

i chiama coefficiente di restituzione il numero $e = \frac{P_1'}{P_1} = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{P_2'}{P_2} = \frac{v_2'}{v_2}$

l'energia cinetica dopo l'urto è:

$$E_k' = \frac{1}{2} m_1 \vec{v_1}'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v_2}'^2 = \frac{1}{2} e^2 m_1 \vec{v_1}^2 + \frac{1}{2} e^2 m_2 \vec{v_2}^2 = E_k \cdot e^2$$

a variazione relativa dell'energia cinetica è data da $\delta = \frac{E_k' - E_k}{E_k} = e^2 - 1$

Se l'urto è elastico $e = 1$ $\delta = 0$
se l'urto è completamente anelastico $e = 0$ $\delta = 1$

CORPO RIGIDO

si chiama corpo rigido un sistema di particelle le cui distanze delle une dalle altre sono fisse e non possono variare, oppure un corpo esteso di forma e dimensioni fisse e non comprimibile.

È un concetto idealizzato: i corpi reali sono elastici e non possono essere deformati da forze che agiscono su essi

Dal momento che le distanze relative sono fisse, l'unico movimento possibile nel sistema di riferimento del centro di massa è la rotazione attorno ad un asse

Invece il movimento del corpo rigido può essere considerato come la composizione di un moto di traslazione del cm e uno di rotazione di tutti i punti del corpo attorno a uno singolo.

MOTO DI UN CORPO RIGIDO

TRASLAZIONE

Tutti i punti descrivono la stessa traiettoria e la percorrono con la stessa velocità del centro di massa

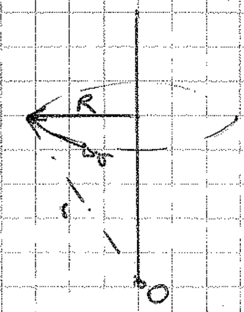
La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento al centro di massa

QUANTITÀ DI MOTO	$P = M v_{cm}$
ENERGIA CINETICA	$E_k = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$
RISULTANTE	$R = M a_{cm}$
MOMENTO ANGOLARE	$L = r_{cm} \wedge M v_{cm} = r_{cm} \wedge P$

ROTAZIONE

I punti descrivono traiettorie circolari il cui centro giace sullo stesso asse
ogni punto del corpo ha la stessa velocità angolare, ma quella tangenziale può essere diversa

$\vec{v} = \omega \wedge r \rightarrow |v| = \omega r \sin\theta = \omega R$



EQUAZIONE DINAMICA DI BASE DEL MOTO DI ROTAZIONE

$M = \frac{dL}{dt}$

CENTRO DI MASSA

La posizione del centro di massa è data da

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_V r\,dm = \frac{\int_V \rho r\,dV}{\int_V \rho\,dV}$$

Se il corpo è omogeneo ρ è costante, quindi

$$m = \int \rho\,dV = \rho V \rightarrow r_{cm} = \frac{\rho \int_V r\,dV}{\rho \int_V dV} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,dV$$

Scritto in componenti avremmo

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_V x\,dm = \frac{1}{m}\int_V \rho(x,y,z)\,x\,dx\,dy\,dz$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int_V y\,dm = \frac{1}{m}\int_V \rho(x,y,z)\,y\,dx\,dy\,dz$$

$$z_{cm} = \frac{1}{m}\int_V z\,dm = \frac{1}{m}\int_V \rho(x,y,z)\,z\,dx\,dy\,dz$$

In molti casi è più semplice e comodo valutare la posizione del baricentro per trovare quella del centro di massa

ESEMPIO

Calcolare il centro di massa di una sbarra lunga 15 cm la cui densità lineare è $\lambda = \lambda_0 x$. Sia λ_0 costante e x variabile tra 0 e L

$$m = \int_0^L \lambda\,dx = \lambda_0 \int_0^L x\,dx = \frac{1}{2}\lambda_0 L^2$$

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_0^L \lambda x\,dx = \frac{1}{m}\lambda_0 \int_0^L x^2\,dx = \frac{1}{2m}\lambda_0 \frac{L^3}{3} = \frac{2}{3}L = 10\,cm$$

ESEMPIO

Calcolare il centro di massa di un semianello omogeneo di densità λ e raggio R

$$r_{cm} = \frac{1}{m}\int r\,dm = \frac{\lambda \int r\,dL}{m}$$

$$m = \int \lambda\,dl = \lambda \int_0^{\pi R} dl = \pi \lambda R$$

$$\lambda \int r\,dl = \lambda \int r R\,d\theta = \lambda \int R^2 \hat{u}_r\,d\theta$$

$$= \lambda R^2 \left\{ \int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta\,\hat{\imath} + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\hat{\jmath} \right\}$$

$$= \lambda R^2 (0\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})$$

quindi $\vec{r}_{cm} = \frac{\lambda R^2}{\pi \lambda R}(0\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$

$x_{cm} = 0$

$y_{cm} = \frac{2}{\pi}R$

Nel caso più semplice in cui L è parallelo a ω

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad \text{quindi} \quad M = I\alpha$$

SECONDA EQUAZIONE DI NEWTON PER IL CORPO RIG.

EQUAZIONE DEL MOTO DI ROTAZIONE!

Possiamo ricavare la legge oraria

$$\alpha = \frac{M}{I} \Rightarrow \omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt \Rightarrow \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega t$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Se $M = 0$ allora $\alpha = 0$ e $\begin{cases} \omega = \omega_0 \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t \end{cases}$ → il moto è circolare uniforme

Se $M = \text{cost}$ allora $\alpha = \text{cost}$ e $\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$ → il moto è circolare uniformemente accelerato

Per quanto riguarda la componente del momento angolare che è perpendicolare all'asse di rotazione possiamo dire che

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i \rightarrow L_i = m_i v_i r_i$$

$$L_{i\perp} = m_i v_i \underbrace{r_i \cos\theta}_{h} = m_i \omega R_i h_i$$ → dipende dalla scelta del polo!

Allora la componente perpendicolare di L:

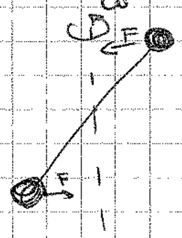
- dipende dalla scelta del polo
- ruota attorno l'asse con velocità angolare ω
- se ω è costante, il suo modulo è costante
- se ω non è costante, il suo modulo cambia di conseguenza

La componente del momento angolare negli assi di rotazione è ricondurre alle forze radiali:

Per mantenere un corpo asimmetrico in rotazione nella sua posizione, sono richieste forze centripete che agiscono sulle masse.
Questi momenti angolari non influenzano il moto perché sono dovuti a forze centripete

⇓

SE IL MOMENTO ANGOLARE NON È PARALLELO ALL'ASSE DI SIMMETRIA SERVONO DELLE FORZE ESTERNE PER MANTENERE IL CORPO IN POSIZIONE!!



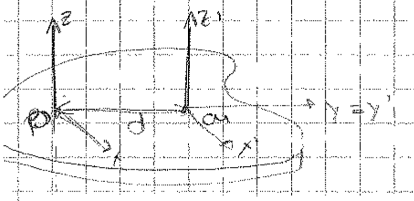
TEOREMA DI HUYGEN-STEINER

…n corpo non ha un solo momento di inerzia. Infatti ce ne sono infiniti, …erchè ci sono infiniti assi attorno a cui il corpo può ruotare.

…a il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un …sse che si trova a una distanza d dal centro di massa del corpo è dato da

$$I = I_{CM} + md^2$$

…imostrazione



Definiamo due sistemi di riferimento con l'asse z parallelo all'asse di rotazione.

Sia d la distanza tra O e O_{CM}

Un elemento di massa infinitesima dm è ad una distanza R da P $\quad R^2 = x^2 + y^2$

…i $\begin{cases} x = x' \\ y = y' + d \\ z = z' \end{cases}$ quindi

$R^2 = x'^2 + (y' + d)^2 = x'^2 + y'^2 + d^2 + 2y'd$, quindi

$I_P = \sum m_i R_i^2 = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + 2y_i' d + d^2) =$
$= \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + d^2 \sum m_i + 2d \sum m_i y_i' =$

$= \sum m_i R_i'^2 + Md^2 + 2Md\, y_{CM} \rightarrow I_P = I_{CM} + Md^2$

AFFINITÀ CON TEOREMA DI KÖNIG

L'energia cinetica del corpo nel sistema di riferimento inerziale è

$E_K = \frac{1}{2} I_O \omega^2$, applicandolo al teorema di Huygen-Steiner

$E_K = \frac{1}{2}(I_{CM} + Md^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{M}{2}(d\omega)^2$

…a $d\omega$ è la velocità del centro di massa rispetto all'origine, quindi

$$E_K = E_K' + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = E_K' + E_{K_{CM}}$$

ESEMPIO

Calcolare il momento di inerzia di un cilindro cavo sottile che ruota attorno ad un asse ortogonale all'asse del cilindro e passante per il centro. La massa del cilindro è m, il raggio R e la lunghezza d

Suddividiamo il cilindro in tanti anelli sottili di massa dm a distanza x dal l'asse di rotazione e con momento di inerzia

$$dI = \frac{1}{2} dm R^2 + dm\, x^2$$

$$I = \int dm R^2 + \int 2 dm x^2 = 2\pi R^3 \rho \int_0^{d/2} dx + 4\pi R \rho \int_0^{d/2} x^2 dx = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} m d^2$$

ROTAZIONE DI UN CORPO ATTORNO A UN ASSE MOBILE

Quando accade questo il corpo può essere considerato come una combinazione di rotazione e traslazione.

L'energia cinetica, in accordo col teorema di König, è data da:

$$E_k = \underbrace{E_k'}_{trasl} + \underbrace{E_{k_{cm}}}_{rotaz} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$$

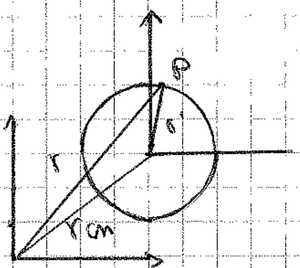
Dal punto di vista dinamico possiamo asserire

$$\Sigma F^{ex} = M a_{cm}$$
$$\Sigma M = I_{cm}\alpha$$

ROTAZIONE SENZA SCIVOLAMENTO

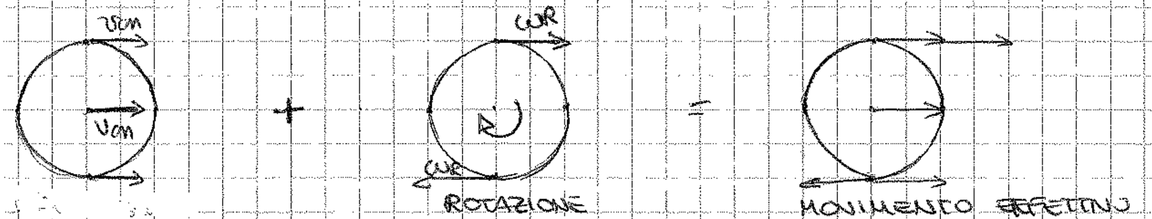
E_p

Nm



$$r = r_{cm} + r'$$
$$v = v_{cm} + v'$$

MA nel sistema di riferimento del centro di massa il corpo sta solo rotolando, quindi



Dal momento che il punto di contatto è fermo (non c'è scivolamento) la velocità deve essere zero.
Ne deriva che $v_{cm} = \omega R$
Ne consegue che, se il corpo sta accelerando, anche le sue accelerazioni sono collegate $a_{cm} = \alpha R$
Quindi in un corpo rigido, l'energia cinetica di rotazione e traslazione non sono indipendenti

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right) v_{cm}^2$$

ESEMPIO

Un cilindro omogeneo di massa M e raggio R sta rotolando su un piano inclinato di un angolo θ.
Calcolare la velocità del centro di massa quando raggiunge la base

$$E_i = E_{k_i} + U_i = Mg(h+R)$$
$$E_f = E_{k_f} + U_f = \frac{3}{4} M v_{cm}^2 + MgR$$
$$E_i = E_f \rightarrow \cancel{M}g(h+\cancel{R}) = \frac{3}{4}\cancel{M} v_{cm}^2 + \cancel{MgR} \rightarrow gh = \frac{3}{4} v_{cm}^2 \rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

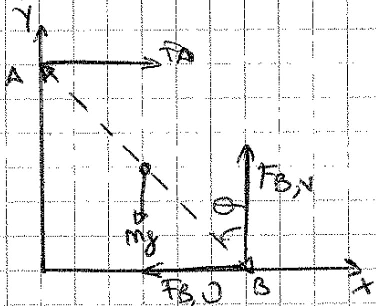
CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO

① $\Sigma F^{ext} = 0 \rightarrow P = mv = cost$ (il centro di massa è fermo o al più si muove con velocità costante)

② $\Sigma M^{ext} = 0 \rightarrow L = I\omega = cost$ (il sistema è fermo o ruota attorno a ciò con velocità angolare costante)

ESEMPIO → SCALA APPOGGIATA

Una scala di massa m e lunghezza ℓ, è appoggiata con un estremo A ad un muro verticale e con l'altro estremo al suolo. In A non c'è attrito, mentre in B c'è.
Determinare la reazione in B.



① CONDIZIONE $R = 0$

$x \rightarrow F_A = F_{B,O}$

$y \rightarrow mg = F_{B,V}$

② CONDIZIONE $M = 0$ (assumiamo B come polo)

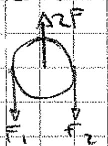
$$F_A \cdot \ell \cos\theta = mg \frac{\ell}{2} \sin\theta$$

$$F_A = F_{B,O} = \frac{1}{2} mg \, tg\, \theta$$

Quindi reazione in $B = \sqrt{F_{B,O}^2 + F_{B,V}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(mg)^2 tg^2\theta + (mg)^2} = mg\sqrt{1 + \frac{1}{4} tg^2\theta}$

ESEMPIO → EQUILIBRIO DI CARRUCOLE

Determinare la condizione di equilibrio di una carrucola, si trascurano le masse della carrucola e dei fili di sostegno.



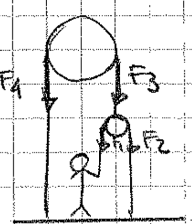
$F_1 = F_2$ x eq. rotazionale

$F = F_1 + F_2$ x eq. statico

ESEMPIO

Un uomo di peso P_1 si trova su una piattaforma di peso P_2. Utilizzando il sistema di carrucole come nel disegno, l'uomo sostiene la piattaforma. Determinare la forza F_3 che esercita sul filo e quella P_3 che esercita sulla piattaforma.

All'equilibrio abbiamo $F_1 = F_2$ e $F_3 = F_4 = 2F_1$



per l'uomo sulla piattaforma avremo che

$P_1 - F_1 + P_2 = F_2 + F_4 \rightarrow P_1 + P_2 = F_1 + F_2 + F_4 =$ forza esercitata dal soffitto

Quindi $F_1 = \dfrac{P_1 + P_2}{4}$

e $P_3 = P_1 - F_1 = \dfrac{3}{4} P_1 - \dfrac{1}{4} P_2$

LAVORO DELLE PRESSIONI

Consideriamo una forza $dF = pdS$ applicata ortogonalmente ad una superficie dS che di conseguenza si sposta di un tratto dh
Il lavoro infinitesimo vale

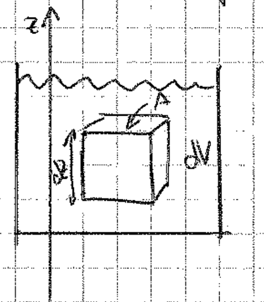
$$dW = dF\,dh = p\,dS\,dh = p\,dV$$

Quindi $W = \int p\,dV$

La variazione di energia cinetica associata sarà $dE_k = \frac{1}{2}(\rho dV)\left[v_2^2 - v_1^2\right]$

LEGGE DI STEVINO

Prendiamo in considerazione anche il peso del liquido
sia dV a riposo, chiameremo:



p la pressione sulla superficie superiore
$p+dp$ la pressione sulla superficie inferiore

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}(z+dz) + \vec{F}(z) + \vec{P} = 0 \quad \text{dove } P = \rho g dV = \rho g A dz$$

in componenti $\quad pA - (p+dp)A - \rho g A dz = 0$

$$dp = -\rho g dz \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \rightarrow dp = \rho g dz \rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \Rightarrow p_2 = p_1 - \rho g (z_2 - z_1)$$

La pressione cresce proporzionalmente alla profondità.

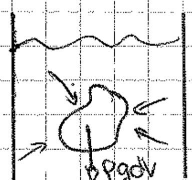
PRINCIPIO DI PASCAL

La pressione applicata a un liquido si trasmette inalterata ad ogni porzione di fluido e alle pareti che lo contengono

Questo significa che se premo sulla superficie libera di un fluido, questa pressione si trasmette agli strati inferiori aumentata della pressione esercitata dal peso degli strati superiori.

LEGGE DI ARCHIMEDE

Consideriamo un volume di fluido di qualsiasi forma non in moto.
Dalla seconda legge di Newton sappiamo che $\Sigma F = 0$
Decomponiamo le forze lungo gli assi



$x \rightarrow \Sigma F_{px} = 0$
$y \rightarrow \Sigma F_{py} - \rho V g = 0 \rightarrow \Sigma F_{py} = \rho V g$

Ora sostituiamo il volume di liquido con un corpo di uguale forma e volume: la pressione del liquido circostante non cambia, quindi

$$\Sigma F_{py} = \rho V g$$

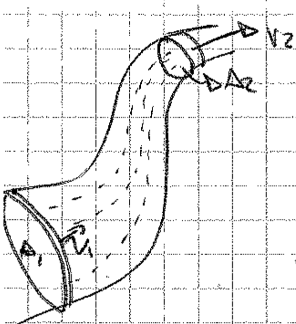
MOTO DI UN FLUIDO

Il moto di un fluido può essere molto complesso, però possiamo adottare degli accorgimenti che lo rendano più semplice, come la trattazione di un flusso laminare di un liquido ideale.

LIQUIDO IDEALE: è un fluido incomprimibile, di densità costante senza forze interne.

FLUSSO LAMINARE: la traiettoria di una singola particella di un fluido in movimento è chiamata LINEA DI FLUSSO.
Se tutte le traiettorie non cambiano nel tempo, il flusso viene detto laminare.
In un flusso laminare ogni elemento di un fluido che passa per un punto segue NECESSARIAMENTE un dato percorso.
È possibile quindi tracciare una "mappa".

TUBO DI FLUSSO: le linee di flusso che passano attraverso una data area formano un tubo chiamato TUBO DI FLUSSO



Consideriamo una porzione di un tubo di f. delimitata da due superfici normali di area A_1 e A_2.
Nessuna linea di flusso entra o esce dal tubo in queste sezioni.

Durante un piccolo intervallo di tempo dt, il fluido in A_1 si muove di una infinitesima distanza

$$ds_1 = v_1 dt$$

Quindi un cilindro di fluido di altezza ds_1 e volume $dV_1 = A_1 v_1 dt$ scorre nel tubo attraverso A_1.
Durante lo stesso intervallo un cilindro di volume $dV_2 = A_2 v_2 dt$ passa attraverso A_2.

Dal momento che il fluido è ideale e quindi incomprimibile le masse che passano da A_1 e A_2 nell'intervallo di tempo dt saranno

$$dm_1 = \rho A_1 v_1 dt \quad e \quad dm_2 = \rho A_2 v_2 dt$$

In un flusso laminare la quantità di massa presente nel tubo è costante

$$dm_1 = dm_2 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{COSTANTE} \rightarrow \text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ}$$

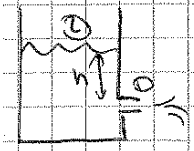
<u>la velocità aumenta al diminuire delle dimensioni della sezione del tubo</u>

Il termine Av è detto <u>portata</u>

Se il fluido non è ideale la $dm_1 = dm_2$ continua a essere vera, ma la densità non è più costante, quindi

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

APPLICAZIONE: VELOCITÀ DI EFFLUSSO



Il contenitore è aperto in cima.
Applichiamo il teorema di Bernoulli

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$p_1 = p_2 = p_{atm}$ $\quad v_1 = 0 \quad z_2 - z_1 = h$

$$\cancel{p_{atm}} + \cancel{\rho} g z_1 = \cancel{p_{atm}} + \cancel{\rho} g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

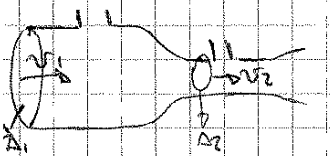
APPLICAZIONE: PRESSIONE IN UNA PIPA ORIZZONTALE

Se un fluido scorre attraverso una pipa orizzontale
1) Dall'equazione di continuità sappiamo che la velocità è maggiore dove la sezione è minore
2) Dall'equazione di Bernoulli ($z = cost$) sappiamo che la pressione è minore dove la velocità è maggiore.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost$$

Quindi la pressione è maggiore dove la sezione è maggiore

APPLICAZIONE: TUBO DI VENTURI

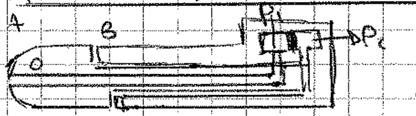


Il tubo di Venturi è usato per misurare la velocità del fluido in un tubo.
La pipa è orizzontale, per cui

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Ma dall'eq. di continuità sappiamo che $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$
Quindi $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left[\frac{A_1}{A_2} v_1\right]^2$

APPLICAZIONE: TUBO DI PITOT



Il tubo di Pitot è un misuratore di pressione che serve a misurare la velocità.

L'aria scorre orizzontalmente
Il teorema di Bernoulli può essere usato tra i punti A, B, e O, ma in O (punto di stagnamento) l'aria è ferma, quindi

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_1 \rightarrow p_1 - p_B = \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Le pressioni le conosciamo grazie a un manometro quindi possiamo calcolare la velocità v_B

TEMPERATURA E CALORE

SISTEMI TERMODINAMICI

termodinamica studia i bilanciamenti energetici di generali sistemi fisici, prendendo in considerazione anche le energie non meccaniche.

hiamiamo SISTEMA TERMODINAMICO qualsiasi insieme di oggetti che è conveniente trattare e fosse un corpo unico, e che ha la possibilità di scambiare energia con l'esterno.

hiamiamo AMBIENTE l'insieme di corpi o sistemi con cui il nostro sist può interagire
hiamiamo UNIVERSO l'insieme di sistema e ambiente

istemi possono essere
PERTI: possono scambiare materia e energia con l'ambiente
HIUSI: possono scambiare solo energia con l'ambiente
OLATI: non ci sono scambi con l'ambiente

EQUILIBRIO TERMODINAMICO

sistema termodinamico si dice in EQUILIBRIO quando i valori delle sue variabili di ato sono costanti.
ò comporta che:
- c'è un macroscopico equilibrio meccanico
- c'è un equilibrio termico (la temperatura è costante)
- non avvengono processi chimici, o se avvengono sono all'equilibrio

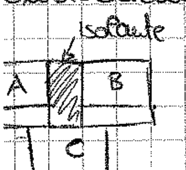
RETI ISOLANTI E CONDUCENTI

ppiamo di avere due sistemi isolati A e B entrambi all'equilibrio. Cosa accade se li mettiamo in contatto? Dipende dal muro di separazione

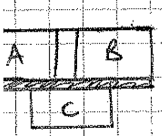
) Se la parete è ADIABATICA o ISOLANTE i due sistemi conservano il loro equilibrio
) Se la parete è DIATERMICA o CONDUCENTE i due sistemi trovano un nuovo eq. uguale nei due sistemi, ma diverso dall'iniziale

LA LEGGE ZERO DELLA TERMODINAMICA

onsideriamo tre sistemi A, B e C che all'inizio non sono in equilibrio



Mettiamo tutti i sistemi in un contenitore isolato, quindi separiamo A e B con una parete adiabatica, ma C è libero di interagire con A e B attraverso pareti conducenti.
Quando è raggiunto l'equilibrio sappiamo che A e B sono in eq. con C



Separiamo ora A e B con una parete conducente: non accade nulla

uesto significa che se inizialmente C è in equilibrio con A e B, a loro volta esti sono in equilibrio tra loro.

TERMOMETRI ELETTRICI

La maggior parte dei termometri elettrici si basa sulla variazione di un parametro, detto resistenza elettrica, dei metalli.
I migliori usano un filo di platino (Pt). — valore che sostanzialmente è sempre $\simeq \frac{1}{273}$
La resistenza varia secondo la formula $R = R_0 (1 + \alpha \Delta t)$
La temperatura di riferimento è quella del ghiaccio fondente

TERMOMETRI A DILATAZIONE

Si possono costruire termometri sfruttando la dilatazione dei solidi.
Sperimentalmente si trova la relazione che lega la lunghezza con la temperatura che è data da

$$l = l_0 (1 + \lambda \Delta t)$$

λ è molto piccolo ($\lambda \approx 10^{-5}$), quindi questi termometri servono per misurare grandi differenze di temperatura.

Per i liquidi la formula diventa $V = V_0 (1 + \lambda \Delta t)$
e si ha una dilatazione molto maggiore, perché il coefficiente di dilatazione è 3 volte quello di dilatazione lineare.
Liquidi termometrici più usati sono mercurio e alcol, l'acqua non può essere usata perché ha un coefficiente di dilatazione non lineare.

TERMOMETRI A SPETTRO DI EMISSIONE DEL CORPO NERO

La densità monocromatica è data dalla funzione $\varepsilon = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$
La misura della temperatura con questo termometro si esegue misurando la densità monocromatica di energia a diverse frequenze e ricavando l'equazione corrispondente alla curva che meglio approssima i dati sperimentali.

UNITÀ DI MISURA

SCALA KELVIN

La formula termodinamica è data da $T = \Theta(x) = Ax$

Abbiamo a questo punto fissare un parametro "fisso" per poi procedere a stabilire una scala termometrica.
Questo punto fisso è il PUNTO TRIPLO dell'acqua (punto in cui coesistono i 3 stati della materia alla pressione di 0,006 atm).

La temperatura in questo punto è stata fissata a 273,16 K

SCALA CELSIUS

Possiamo pensare la formula termodinamica data da $T = A + xB$
In questo caso abbiamo due punti fissi da stabilire, che sono stati scelti nel punto di fusione del ghiaccio $T_f = 0$ e nel punto di ebollizione dell'acqua $T_e = 100$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A + Bx_f \\ 100 = A + Bx_e \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A = -Bx_f \\ 100 = -Bx_f + Bx_e \end{array}$$

In questo caso avremo la scala centigrada, detta scala Celsius

GAS IDEALI

Il gas ideale ha le seguenti proprietà → le molecole si muovono caoticamente
→ le molecole non interagiscono tra loro e gli urti che sono elastici
→ il volume delle molecole è trascurabile

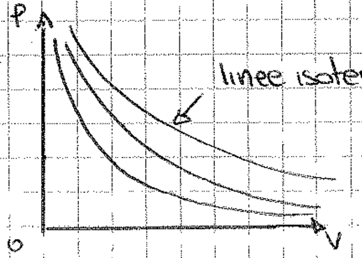
L'equilibrio di un gas ideale è descritto dalle tre variabili di stato: P, V, T

LEGGI DEI GAS IDEALI

• LEGGE DI BOYLE o ISOTERMA

Se un gas ideale sottosta a un processo isotermico pressione e volume sono inversamente proporzionali

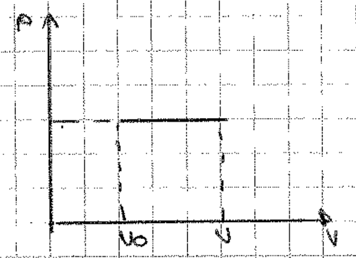
$PV = cost$ con $T = cost$



• PRIMA LEGGE DI GAY-LUSSAC o ISOBARA

Se un gas id. sottosta a un processo isobaro, volume e temperatura sono direttamente proporzionali

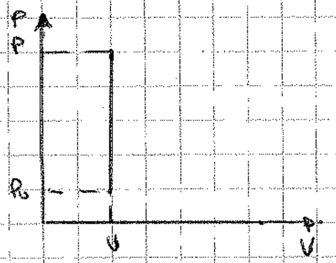
$V = kT$ oppure $V = V_0 (1 + \alpha t)$ con $\alpha \approx \frac{1}{273}$



• SECONDA LEGGE DI GAY-LUSSAC o ISOCORA

Se un gas id. sottosta a un processo isocoro, pressione e temperatura sono direttamente proporzionali

$P = kT$ oppure $P = P_0 (1 + \beta t)$ $\beta \approx \frac{1}{273}$



• LEGGE DI AVOGADRO

Un ugual volume di gas diversi, alle stesse condizioni di temperatura e pressione, contiene lo stesso numero di moli

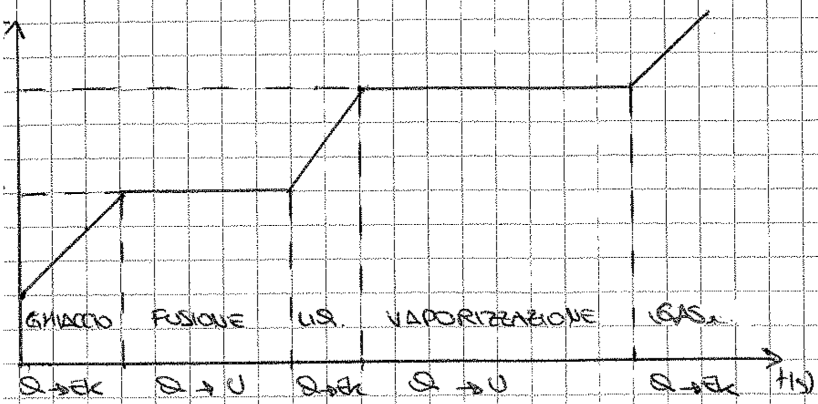
Conseguenza: una mole di gas occupa sempre un volume definito a determinate condizioni di temperatura e pressione
In condizioni standard occupa 22,414 L

• EQUAZIONE DI STATO

Unendo assieme queste leggi otteniamo l'equazione di stato dei gas perfetti

$PV = nRT$

PASSAGGI DI STATO



Usiamo il termine FASE o stato della materia per descrivere lo stato in cui si trova un materiale (SOLIDO/LIQUIDO/GAS)

Una transizione da una fase all'altra è chiamata passaggio di stato. Ad una data pressione il passaggio di stato avviene a una determinata temperatura e generalmente è accompagnato da un assorbimento o cessione di calore.

Nota che fornendo calore alla sostanza questa aumenta di temperatura fino a raggiungere la t. giusta per il cambiamento di stato, dopodiché, finché non avviene la transizione rimane a temperatura costante (il calore è tutto in energia potenziale)

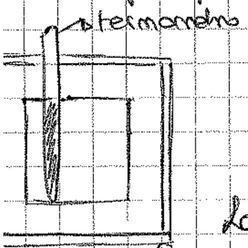
Il calore che va ceduto o tolto al sistema per fargli cambiare stato è dato da

$$Q = mL$$

L è detto calore latente e dipende dal materiale e dal tipo di transizione

CALORIMETRO

Calore specifico e capacità termica molare sono misurati dal calorimetro



Un calorimetro è composto da
- un contenitore diatermico contenente dell'acqua
- un termometro che misura la temperatura dell'acqua
- un contenitore isolante che impedisce gli scambi di calore

La temperatura iniziale del sistema è T_0, viene immerso il corpo di cui si vuole conoscere c ad una temperatura $T_1 \gg T_0$. Raggiunto l'equilibrio si misura la temperatura finale e dalla massa nota si calcola il calore specifico

ESEMPIO

Uno studente vuole raffreddare 0,25 kg di acqua inizialmente a 25°C aggiungendo ghiaccio alla temperatura di -20°C. Quanto ghiaccio deve aggiungere affinché il sistema sia a 0°C e tutto il ghiaccio sia sciolto?

Calore assorbito dal ghiaccio per passare da -20°C a 0°C $\quad Q_1 = m_g c_g (T_2 - T_1) = 20 m_g c_g$

Calore assorbito dal ghiaccio per fondersi $\quad Q_2 = m_g L$

Calore perso dall'acqua $\quad Q_3 = m_A c_A (T_2 - T_1) = -25\, m_A c_A$

$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \rightarrow m_g L + m_g c_g (T_2 - T_1) - m_A c_A (T_2 + T_1) = 0$

$c_A = 4186$

$c_g = 2,1 \cdot 10^{-3}$ $\quad \rightarrow \quad m_g = 0,069\ kg$

$L_g = 335 \cdot 10^3$

PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA,

PROCESSI TERMODINAMICI

un processo termodinamico è reversibile se:
1) qualsiasi punto intermedio è in una situazione di equilibrio
2) non ci sono forze dissipative
3) il processo può essere fermato e invertito semplicemente cambiando le condizioni esterne

un processo termodinamico è irreversibile se:
1) almeno un punto intermedio non è all'equilibrio
2) ci sono forze dissipative
3) non è possibile definire lo stato del sistema perchè almeno una delle variabili di stato è indefinita

processo reversibile si riconosce dal fatto che temperatura e pressione sono pressochè costanti e la variazione di volume avviene molto lentamente

LAVORO IN UN PROCESSO TERMODINAMICO

termine lavoro indica un qualsiasi scambio di energia che avviene tra sistema ambiente che non sia scambio di calore

se il sistema esercita forze sull'ambiente, si chiama lavoro compiuto dal sistema
analizziamo il lavoro meccanico compiuto direttamente dal sistema che può essere descritto dalle variabili di stato.

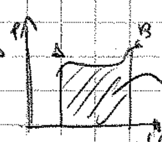
consideriamo il sistema in un contenitore che esercita delle forze sul muro (forze di pressione) supponiamo che le pareti siano mobili, quindi il sistema si sta espandendo. Il lavoro compiuto dalle forze di pressione durante lo spostamento infinitesimo è

$$dW = \int_S p\, dS\, \bar{n}\, d\bar{h} = p\int_S dS\, \bar{n}\, d\bar{h} \rightarrow dW = p\, dV$$

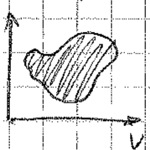
per un processo finito da A a B sarà $W = \int_{V_A}^{V_B} p\, dV$ può essere valutato se:
1) la pressione è uniforme e il processo è reversibile
2) la pressione esterna è nota

ogni caso se il volume non cambia il lavoro è costante

se il processo è reversibile, può essere disegnato nel piano, in tal caso l'interpretazione della formula del lavoro è immediata



→ il lavoro è uguale all'area!



Per un processo ciclico, il lavoro è l'area compresa dalla curva che descrive il processo

$W = \oint p\, dV$ → se inverto il verso di percorrenza è opposto

lavoro non è una variabile di stato!!!

...a, dall'equazione di stato dei gas perfetti sappiamo che $pV = nRT$

...uindi $pdV + Vdp = nRdT$

...uindi $c_p - c_v = R = 8{,}314$ → EQUAZIONE DI MAYER

...onseguenza: c_p dipende esclusivamente dalla temperatura

...l rapporto $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ però è sempre > 1 e vale:

→ GAS MONOATOMICI $c_v = \frac{3}{2}R$ $c_p = \frac{5}{2}R$

→ GAS DIATOMICI $c_v = \frac{5}{2}R$ $c_p = \frac{7}{2}R$

PROCESSI TERMODINAMICI CON GAS IDEALI

PROCESSO ADIABATICO

...l processo adiabatico è un processo che avviene senza scambi di calore con l'AB

$dU = \cancel{dQ} - dW$ → quindi il lavoro compiuto è $dW = -dU = -nc_v dT$

$W_{AB} = nc_v (T_A - T_B)$ ①

Ma dall'equazione di stato sappiamo che $pV = nRT$ → $T = \frac{pV}{nR}$

$W_{AB} = \cancel{n} c_v \frac{(p_A V_A - p_B V_B)}{\cancel{n} R} = \frac{c_v}{c_p - c_v}(p_A V_A - p_B V_B) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_A V_A - p_B V_B)$ ②

Se è un processo reversibile possiamo dire che $dW = pdV$

Quindi $dU = \cancel{dQ} - dW$ diventa $nc_v dT + pdV = 0$

$\cancel{n} c_v dT + \frac{\cancel{n}RT}{V} dV = 0$ → $(\gamma - 1)\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$

integrando ambo i membri otteniamo $\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$

$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$ ⇒ $TV^{(\gamma-1)} = \text{cost}$

$TV^{(\gamma-1)} = \text{cost}$

$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{cost}$ $\gamma = \frac{7}{5}$

$pV^{\gamma} = \text{cost}$

PROCESSO ISOTERMICO

...al momento che in un processo isotermico la temperatura non cambia

$dU = 0$ → $dQ = dW$

...l lavoro compiuto sarà

$W = \int_A^B pdV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

SECONDA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

ROCESSI CICLICI

processo termodinamico si dice ciclico quando la condizione iniziale coincide
i la condizione finale

ndi $U_A = U_B$

$\Delta U = 0 \Rightarrow W = Q$

: $W > 0$ il sistema compie lavoro positivo e assorbe dall'ambiente lo stesso quantitativo di calore (macchina termica)

e $W < 0$ il sistema subisce un lavoro e cede all'ambiente lo stesso quantitativo di calore (frigorifero)

SORGENTI DI CALORE

amiama SORGENTE DI CALORE un corpo o un sistema in grado di assorbire
edere calore senza variare la sua temperatura

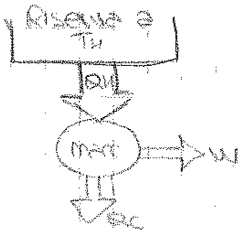
no S.C → sistemi con massa enorme (tot. infinita), come l'oceano
→ un sistema durante un cambiamento di fase
→ un termostato

cambio di calore tra una sorgente e un sistema è reversibile se la differenza
emperatura tra i due è infinitesima

di, una trasformazione non isoterma può essere considerata reversibile se e
se immaginiamo che il sistema sia in contatto ~~.....~~ in ogni momento con una differente sorgente con la
stessa temperatura

MACCHINE TERMICHE

hiama macchina termica un dispositivo che opera ciclicamente trasformando il calore in lavoro.



siamo rappresentare la trasformazione energetica
avviene in una macchina termica con un diagramma di flusso energetico

e Q_C rappresentano le quantità di calore assorbita
ilasciata durante un processo ($Q_H > 0$ e $Q_C < 0$)

alore assorbito durante il ciclo è $Q = Q_H - Q_C$

ndi il lavoro compiuto sarà uguale a $W = Q = Q_H - Q_C$

lmente (data la prima legge della T) ci si aspetterebbe di vedere trasfor
ato tutto il calore assorbito in lavoro ($Q_C = 0$).
realtà questo non avviene MAI

RENDIMENTO

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

calcoliamo il rendimento

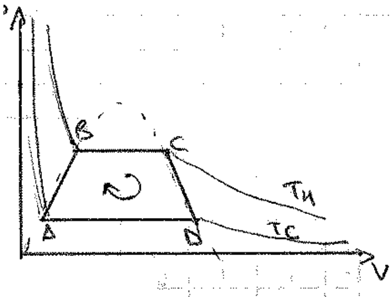
$\rightarrow Q_C = W_{AB} = nRT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_C \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$

$\int \frac{nRT}{V} dV$

$\rightarrow Q_H = W_{CD} = nRT_H \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nRT_H \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

quindi il rendimento è $\eta = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{\cancel{nRT_C \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}}{\cancel{nRT_C \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$

MACCHINA A VAPORE



MACCHINA FRIGORIFERA

possiamo pensare una macchina frigorifera come una macchina termica che lavora al contrario:
l'ambiente compie del lavoro su una macchina che preleva calore da una sorgente a temperatura minore e lo rilascia ad una sorgente a temperatura maggiore.
quindi Q_C è positivo e Q_H è negativo

$-Q_H + Q_C - W = 0 \quad Q_C = Q_H + W$

il rendimento di un frigorifero sarà quindi $\eta = \frac{Q_C}{W} = \frac{Q_C}{Q_H - Q_C} = \frac{Q_C}{Q_H} - 1$

TEOREMA DI CARNOT

essuna macchina termica che opera tra due sorgenti di calore può essere
efficiente della macchina di Carnot che opera tra le stesse due sorgenti

mostrazione

onsideriamo due macchine termiche, una irreversibile ε_i e una reversibile
arnot) ε_c
pponiamo per assurdo che $\eta_i > \eta_c$

ò significa che, se le due sorgenti assorbono la medesima quantità di calore, la
uantità scaricata nella sorgente a temperatura più bassa è maggiore nel
clo di Carnot

$Q_{ci} < Q_{cc}$ e quindi $W_i > W_c$

a supponiamo di invertire il ciclo di Carnot e trasformarlo in un frigorifero
combinarlo con la macchina irreversibile.

risulta una macchina che:
preleva dalla sorgente a temperatura minore una quantità di calore pari a
$Q_{cc} - Q_{ic}$
non ha scambi con la sorgente a temperatura maggiore $\to Q_{Hi} - Q_{Hc} = 0$
svolge un lavoro positivo pari a $W_i - W_c$

questa legge viola il secondo principio della termodinamica perché preleva
a q.tà di calore e la trasforma interamente in lavoro.

corollario

tte le macchine di Carnot che operano tra le stesse sorgenti di calore hanno
stesso rendimento, indipendentemente dalla sostanza usata

mostrazione

ettiamo il ragionamento di prima

iamo due macchine di Carnot, supponiamo per assurdo che $\eta_1 > \eta_2$
ertiamo il funzionamento della seconda macchina, otteniamo una
lazione del II PT quindi $\eta_1 \leq \eta_2$
stesso ragionamento vale anche per la prima macchina, quindi $\eta_1 \geq \eta_2$

E quindi $\eta_1 = \eta_2$

onseguenza!

$$\left.\begin{aligned} \eta &= 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right| = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} \\ \eta &= 1 - \frac{T_C}{T_H} \end{aligned}\right\} \to \cancel{1} + \frac{Q_C}{Q_H} = \cancel{1} - \frac{T_C}{T_H} \to \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_H}{T_H} = 0$$

una macchina non reversibile $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_H}{T_H} < 0$

FORMULARIO

[C]INEMATICA

[m]oto rettilineo
- $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v\,dt$
- $v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a\,dt$
- $\frac{1}{2} v_x^2 - \frac{1}{2} v_{x_0}^2 = \int_{x_0}^{x} a\,dx$

[m]oto rettilineo uniforme
- $x(t) - x(t_0) = v(t - t_0)$
- $v(t) - v(t_0) = 0$

[m]oto rettilineo uniformemente accelerato
- $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
- $v = v_0 + a(t - t_0)$
- $a = cost$

[c]aduta dei gravi
- tempo di caduta $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
- velocità di impatto $v = -\sqrt{2gh}$

[m]oto rettilineo esponenzialmente smorzato $a = -bv$

[m]oto armonico
- $a = -\omega^2 x$
- $x = A \, sen(\omega t + \varphi)$

[m]oto circolare
- $v_T = \omega R$
- $a_T = \alpha R^2 = \omega^2 R$

[m]oto parabolico
- gittata $\frac{2 v_0^2 \cos\theta \, sen\theta}{g}$
- altezza massima $\frac{v_0^2 sen^2\theta}{g}$
- tempo di volo $\frac{2 v_0 sen\theta}{g}$

[D]INAMICA

[q]uantità di moto $p = mv$

[i]mpulso $J = \Delta p$

[f]orza peso $P = mg$

[f]orza di attrito radente $f_s \leq \mu_s N$

forza elastica $F = -kx$

forza di attrito viscoso $F = -bv$

[f]orza centripeta $F = ma = m\frac{v^2}{R}$

[L]AVORO E ENERGIA

[l]avoro $W = \int_A^B F\,ds = F \Delta s \cdot \cos\theta$

potenza $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F v \cos\theta$

teorema delle forze vive $W = \Delta E_k$

lavoro compiuto dalla forza peso $W = -mg(z_B - z_A)$

[e]nergia potenziale elastica $U = \frac{1}{2} k x^2$

URTI

urti elastici $v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$; $v_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{(m_1 + m_2)}$

urti perfettamente anelastici $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} = v_{cm}$

coefficiente di restituzione $e = \frac{p_1'}{p_1} = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{p_2'}{p_2} = \frac{v_2'}{v_2}$

CORPO RIGIDO

momento di inerzia $I = \sum m_i R_i^2$

momento angolare $L = I\omega = mR^2 \frac{v}{R} = mRv$

momento esterno $M = I\alpha$

inerzia di un anello o guscio cilindrico $I = mR^2$

" di un disco o cilindro $I = \frac{1}{2} mR^2$

" sfera cava $I = \frac{2}{3} mR^2$

" sfera piena $I = \frac{2}{5} mR^2$

" asta o lastra nel centro $I = \frac{1}{12} md^2$

" asta o lastra all'estremo $I = \frac{1}{3} md^2$

energia cinetica $E_k = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$

teorema di Huygens-Steiner $I = I_{cm} + md^2$

condizioni di equilibrio $\rightarrow$ $\sum F^{ext} = 0 \rightarrow P = mv = cost$

$\sum M^{ext} = 0 \rightarrow L = I\omega = cost$

FLUIDODINAMICA

forza di attrito interno $F = \eta \, ds \, \frac{dv}{dm}$ x una sfera $6\pi\eta r v$

lavoro delle pressioni $W = \int p \, dV$

legge di Stevino $p_1 = p_2 + \rho g (z_2 - z_1)$

equazione di continuità $A \cdot v = portata = cost$

equazione di Bernoulli $p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = cost$

velocità di un fluido reale $v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$

numero di Reynolds $R_e = \frac{\rho v R}{\eta}$

ESEMPIO ESAME

Quale coppia di leggi orarie $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sotto elencate dà una traiettoria rettilinea?

Ⓐ $x = Ct^2$ $y = A' + C't^2$ (derivando vengono entrambe proporzionali al tempo)
B $x = Ct^2$ $y = A' + B't + C't^2$
C $x = Bt$ $y = A' + B't + C't^2$

La quantità di moto di un sistema di punti materiali si conserva se?

Ⓑ La risultante delle forze esterne è zero

Quale di queste affermazioni può essere dedotta dal II p. della termodinamica?

Ⓒ In una trasformazione ciclica il numero minimo di sorgenti con cui viene scambiato calore è 2

Alcuni scienziati sono alla ricerca di un pianeta sulla cui superficie l'accelerazione di gravità sia la stessa che sulla terra. Essi individuano 3 pianeti con caratteristiche interessanti. Quale di essi è quello giusto?

ⓐ - $m = 4m_T$ $r = 2r_T$
b - $\delta = \delta_T$
c - $m = 2m_T$ $r = 2r_T$

Partendo da uno stato A, un gas perfetto può raddoppiare di volume secondo un processo adiabatico, isotermo o isobaro. Cosa si può dire della temperatura del gas?

a - $\Delta T < 0$ per tutti i casi
ⓑ $\Delta T > 0$ per isobara, $\Delta T = 0$ x isoterma, $\Delta T < 0$ x adiabatica
c $\Delta T < 0$ x adiabatica e isobara, $\Delta T = 0$ x isoterma

Quanto vale il flusso di $\vec{E}$ per una carica $Q = 10^{-5}\,C$, attraverso una sfera di raggio $R = 1m$?

$$\Phi(E) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{10^{-5}\,C\,Nm^2}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,C^2} = \frac{1}{8{,}85} \cdot 10^7\,\frac{Nm^2}{C}$$

In quale condizioni il modello di gas perfetto descrive bene il comportamento del gas reale?

Per gas leggeri a basse pressioni e alte temperature

n moli di un gas monoatomico si trovano in un contenitore a pareti rigide, inizialmente alla pressione P_1 e alla temperatura T_1. Viene dimezzata la pressione. Cosa succede alla temperatura?

$\frac{P}{T} = k$ → quindi se P dimezza, anche T dimezza

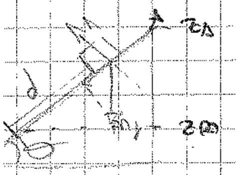
Nel moto oscillatorio armonico semplice, posizione e accelerazione sono legate da quale formula? $a = -\omega^2 x$

Un proiettile di massa m è sparato con velocità v in un blocco di legno di massa M appeso ad una corda. Dopo l'urto il proiettile resta conficcato nel blocco che si alza di un tratto h. Misurando l'altezza h si può ottenere la velocità del proiettile. Qual è la velocità del proiettile?

$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$ (vedi pp 27-28)

Un blocco di 2,00 kg viene rilasciato su un piano inclinato di 53,1° a 4,00 m da una molla con costante elastica 120 N/m che è fissata al fondo del piano. I coefficienti di attrito tra il blocco e il piano sono $\mu_s = 0{,}4$ e $\mu_d = 0{,}2$. La massa della molla è trascurabile. (83)

(a) Trovare l'accelerazione del blocco prima che giunga il contatto con la molla



asse x $\begin{cases} mg\sin\theta - f_k = ma \\ mg\cos\theta = N \end{cases}$
asse y

$mg\sin\theta - \mu_k N = ma$; $\cancel{m}g\sin\theta - \cancel{m}g\cos\theta \cdot \mu_k = \cancel{m}a$

$a = g(\sin\theta - \cos\theta\,\mu_k) = 9{,}8\ m/s^2\ (\sin 53{,}1° - \cos 53{,}1° \cdot 0{,}2) = 6{,}6\ m/s^2$

(b) calcolare la quantità di moto del blocco subito prima che tocchi la molla

$P = mv \rightarrow P = 2{,}00\ kg \cdot 4\ m/s = 8{,}00\ kg\cdot m/s$

$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\underset{0}{v_0^2} = \int_0^4 a\,dx$; $\frac{1}{2}v^2 = \frac{a^2}{\cancel{2}}\Big]_0^4$; $v^2 = 16$; $v = 4\ m/s$

(c) usando considerazioni energetiche si calcoli la massima compressione della molla

Siccome il sistema non è conservativo, sappiamo che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro della forza di attrito

$E_m^A = E_p = mg z_A$
dovute alla gravità al corpo

$E_m^B = E_p + E_p = mg z_B + \frac{1}{2}kx^2$
del corpo, della molla

$L = -f_d(d+x)$

Quindi $\Rightarrow$ $mg z_B + \frac{1}{2}kx^2 - mg z_A = -f_d(d+x) = -\mu_d\, mg\cos\theta\,(d+x)$

$\frac{1}{2}kx^2 + mg(z_B - z_A) = -\mu_d\, mg\cos\theta\,(d+x)$

$\frac{1}{2}kx^2 - mg\,(d+x)\sin\theta + \mu_d\, mg\cos\theta\,(d+x) = 0$

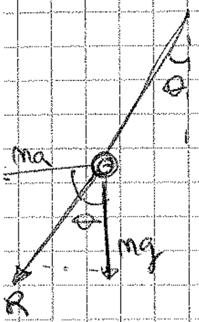
$\frac{1}{2}kx^2 - mg(d+x)(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 0$

$\frac{1}{2}kx^2 - mg(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)d - mg(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)x = 0$

$\frac{1}{2}kx^2 - max - mad = 0$

$x_{1,2} = \frac{ma \pm \sqrt{m^2a^2 - 2kadm}}{k} = 0{,}37\ m$

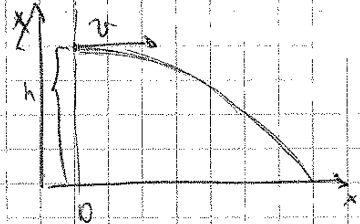
Un automobilista tifoso di calcio ha appeso una piccola sfera di plastica raffigurante un pallone allo specchietto. Quando l'auto accelera, il filo si inclina di un angolo θ. Trovare la relazione tra θ e a



$$\begin{cases} R = mg \cdot \ \ \theta \\ R = ma \cdot \ \ \theta \end{cases} \rightarrow \cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}g\,\text{sen}\theta$$

$$tg\theta = \frac{\ }{\ }$$

Un pallone viene lanciato dalla sommità di una torre, ad una quota h rispetto al suolo, con una velocità orizzontale di modulo v. A che distanza toccherà terra



asse x → asse y →
$$\begin{cases} x = x_0 + vt \\ y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = vt \rightarrow t = x/v \\ 0 = h - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{v^2} = 2h \rightarrow x = +\sqrt{\frac{2h}{g}v^2} = +v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

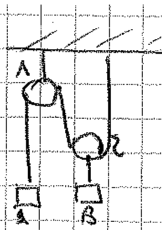
Uomo di massa m viaggia a velocità V su una bici, il telaio ha massa m', le ruote hanno massa M.
calcolare l'Ek

$$Ek = \frac{1}{2}(m+m')v^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}Mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = \frac{1}{2}(m+m')v^2 + Mv^2 + \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(m+m')v^2 + Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(m+m')v^2 + \frac{3}{2}Mv^2$$

In ogni ciclo di funzionamento una macchina termica assorbe un calore Q_H dalla sorgente termica calda e lo impiega per compiere un lavoro L, cedendo ad una sorgente fredda un calore di valore assoluto pari a 4L.
Qual è il suo rendimento?

$$\eta = \frac{L}{Q_H} = \frac{L}{5L} = 5^{-2}$$

Il sistema in figura consiste di un filo leggero e inestensibile, due carrucole senza attrito e due blocchi A e B di massa m.
Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete con le masse alla stessa altezza da terra.

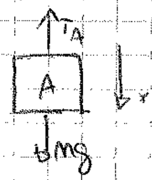


a) Se si tira verso il basso il blocco A facendolo spostare di un tratto y, di quanto si sposta il blocco B e in che verso?

Si sposta verso il basso di un tratto 2y

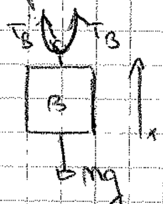
(b) All'istante t=0 i blocchi vengono rilasciati. Supponendo le carrucole prive di massa, calcolare l'accelerazione di A

Corpo A



$$mg - T_A = ma_A$$

Corpo B



$$2T_B - mg = ma_B \Rightarrow 2T - mg = m\frac{a}{2}$$

però $T_A = T_B$ (dati a masse uguali)

e $a_B = \frac{a_A}{2}$ (vedi punto 1)

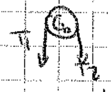
$$\begin{cases} mg - T = ma \rightarrow T = m(g-a) \\ 2T - mg = m\frac{a}{2} \quad 2mg - 2ma - mg = m\frac{a}{2} \end{cases}$$

$$g = \frac{a}{2} + 2a \;;\; \frac{5}{2}a = g \rightarrow a = \frac{2g}{5}$$

Supponendo che le carrucole siano dischi di massa m e raggio R, calcolare nuovamente l'accelerazione

Corpo A $\Rightarrow$ $mg - T_1 = ma$

Carrucola 1

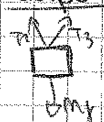


$$T_1 R - T_2 R = I\alpha$$
$$T_1 \cancel{R} - T_2 \cancel{R} = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a}{\cancel{R}} \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} ma$$

Carrucola 2

$$T_2 R - T_3 R = I\alpha$$
$$T_2 \cancel{R} - T_3 \cancel{R} = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a_B}{\cancel{R}} \rightarrow T_2 - T_3 = \frac{1}{4} ma \quad e \quad T_2 + T_3 - mg = m\frac{a}{2}$$

Corpo B



$$T_2 + T_3 - mg = m\frac{a}{2}$$

8 WG10 (B) 8

Un corpo di massa m si muove su una retta, scelta come asse x.
All'istante t0 il corpo si trova nell'origine e all'istante t1>t0 è ancora
e nell'origine.
Quale delle seguenti affermazioni è vera

(a) $v=0$ in almeno un istante tra t_0 e t_1

Si consideri un urto completamente anelastico tra due masse A ($m_A = 2m_B$)
e B. A è inizialmente ferma ed è colpita da B con velocità v. Quale delle
due masse ha ΔE_k maggiore?

$$v' = \frac{2m_B v_A + m_B v}{(m_A + m_B)} = \frac{m_B}{m_A + m_B} v$$

$$\Delta E_k A = \frac{1}{2} m_A \left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\right)^2 v^2 = \cancel{2} m_B \left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\right)^2 v^2$$

$$\Delta E_k B = \frac{1}{2} m_B v^2 - \frac{1}{2} m_B \left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\right)^2 v^2 = \frac{1}{2} m_B v^2 \left[1 - \left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\right)^2\right]$$

(B) il corpo B

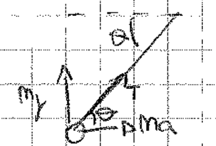
È dato un sistema di N corpi puntiformi. Il corpo i-esimo ha massa m_i,
posizione r_i rispetto a O e distanza R_i rispetto a z.
Qual è il suo momento ~~angolare rispetto~~ di inerzia rispetto a z

(a) $I = \Sigma m_i R_i^2$

Un gas ideale viene portato da una Ti ad una Tf > Ti attraverso due
processi reversibili.
Il processo A è isobaro, quello B è adiabatico. Quale delle seguenti
affermazioni sull'entropia è vero?

$$\Delta S_A > \Delta S_B = 0$$

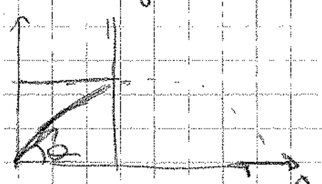
) come es 6 ma



$T = ma \cos\theta$

$T = Mg \,\mathrm{sen}\theta \quad \rightarrow \quad \cancel{m} a \cancel{\cos}\,\overset{\mathrm{sen}}{}\theta = \cancel{m} g \cancel{\mathrm{sen}}\,\overset{\cos}{}\theta \qquad \cot g\theta = \frac{a}{g}$

Un bambino sta giocando nel cortile del palazzo. Calcia un pallone
verso il muro che si trova a distanza d, imprimendogli vel v, formante
un angolo θ con l'orizzontale, a quale altezza h colpisce il muro?



$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t = v\cos\theta\, t = d \\ y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = h = v\,\mathrm{sen}\ldots - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Un blocco di legno di massa M è fissato ad un'asta rigida di lunghezza l e di massa trascurabile, incernierata all'altra estremità O. Il sistema può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per O. Un proiettile di massa m e velocità v, colpisce il blocco e vi rimane conficcato. Si supponga che in O non ci sia attrito.

1) Determinare la velocità angolare del sistema dopo l'urto

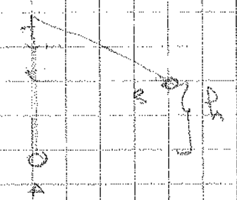
$L_i = L_f$

$L_i = m v l \qquad L_f = (m+M)\, l\, v'$

$L_i = L_f \rightarrow v m l = (m+M)\, l\, v' \rightarrow v' = \frac{m}{(M+m)} v$

Quindi $\omega = \frac{v'}{l} \rightarrow \frac{m}{(m+M)} \frac{v}{l}$

2) Determinare la massima quota a cui può arrivare il sistema dopo l'urto e dire in quali condizioni compie un giro intero intorno all'asse



$E_{MA} = E_{MB}$

$E_{KA} + U_A = E_{KB} + U_B$

$\frac{1}{2}(m+M) \cdot \frac{m^2}{(m+M)^2} v^2 + 0 = 0 + (m+M) g h$

$h = \frac{1}{2} \frac{m^2}{(m+M)^2} \frac{v^2}{g}$

fa un giro completo quando $h = 2l$

$2l = \frac{1}{2} \frac{m^2}{(m+M)^2} \frac{v^2}{g} \rightarrow v = \sqrt{4lg}\, \frac{m+M}{m}$

3) Determinare l'impulso della reazione vincolare in O durante l'urto

$J = \Delta P = 0 \rightarrow$ non c'è impulso

$P_i = mv$

$P_f = (m+M) v' = (m+M) \cdot \frac{m}{(m+M)} v = mv$

Una macchina di Carnot ha un rendimento del 20%. Essa opera tra due sorgenti le cui temperature T_h e T_c differiscono di 50°C. Quali sono le temperature?

$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 0{,}2 \rightarrow 1 - \frac{T_c}{T_c+50} = 0{,}2 \quad ; \quad 0{,}8(T_c+50) = T_c$$

$$0{,}8T_c - T_c = -40 \rightarrow 0{,}2T_c = 40 \rightarrow T_c = 200\ K \quad T_h = 250\ K$$

Un innaffiatore da giardino è costituito da un tubo di diametro 1 cm e 20 fori laterali, ognuno con diametro 1mm.
Se nel tubo l'acqua scorre con velocità v, con quale velocità esce da ognuno dei fori?

$$Av = cost \quad 1 \cdot v = \frac{10}{20} \cdot v_u \rightarrow v_u = 2v$$

Un corpo rigido ruota inizialmente con velocità angolare costante attorno al suo asse di simmetria, rispetto al quale ha momento di inerzia I.
Il suo momento angolare iniziale ha modulo L.
Quanto vale il lavoro necessario per far raddoppiare il momento angolare del corpo mantenendo fisso l'asse?

$$L_0 = r m v = \cancel{r} I \frac{\omega}{\cancel{r}} = I\omega$$

$2L_0 = 2I\omega$ → la velocità angolare deve essere raddoppiata

$\cancel{W = F}$ $\quad W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \frac{1}{2} I 4\omega^2 \quad \frac{3}{2} I\omega^2$