NUMERO: 741

DATA: 20/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Cavallaro

MATERIA: Elettrotecnica

Prof. Canavero

1ª LEZIONE

Lunedì 1-10-2012

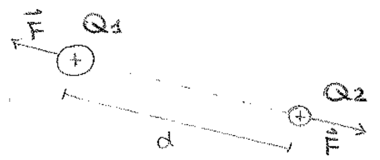
Ricevimento: Giovedì 18:00 - 19:00
Mercoledì 10 ottobre non c'è lezione
ESAME: scritto: domande (esercizi legati alla teoria a risp. aperta)
esercizi (2,3 applicazioni concetti)
Libri: 1° o 2° lista

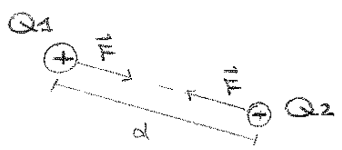
Tutti i fenomeni elettrici sono basati sulla presenza di cariche elettriche che sono di due specie diverse: + e − (legate a due proprietà diverse). Le cariche sono misurabili, non visibili, ma sono invece visibili gli effetti.
Sono presenti a partire dalla carica fondamentale dell'elettrone, una quantità di base e misurabile pari a:

$$e^- = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \quad \text{(coulomb)}$$

Le cariche interagiscono tra di loro:
- repulsione: cariche uguali, stesso segno
- attrazione: cariche opposte, segno diverso

LEGGE DELL'INTERAZIONE

1) 

2) 

Forza diretta lungo la congiungente avente come verso repulsivo se le cariche sono dello stesso segno (1), attrattivo se di segno opposto (2)
Il valore è dato da:

$$\vec{F} = K\frac{Q_1 Q_2}{d^2} \qquad \text{con } K = 9 \cdot 10^9 \qquad [F] = N$$

Indica come si attirano o respingono
Tale legge è simile a quella gravitazionale sostituendo Q a m.
Universalità delle interazioni a distanza: proporzionalità con le masse interagenti, inversionalità quadrato delle distanze
Forza gravitazionale solo attrattiva.

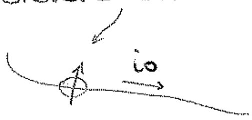
Facendo interagire due cariche: Q ferma, q libera

$\vec{F}$ spinge q ad allontanarsi fino ad A compiendo una distanza d

NB: indicare sempre la convenzione scelta per la direzione della corrente $i \nearrow$

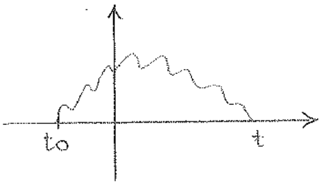
Anche in questo caso se $i < 0$ vuol dire che la direzione era contraria a quella scelta

Esistono strumenti che misurano la corrente: è possibile dunque ricavare q a partire da i



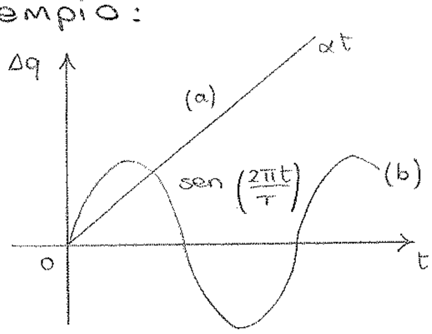
$$q = \int_{-\infty}^{t} i\,dt$$

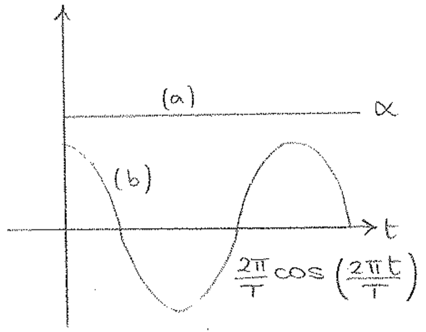
$-\infty = t_0$ a partire dal quale lo strumento inizia a funzionare



$$\int_{-\infty}^{t} i\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{t_0} i\,dt}_{\,0} + \int_{t_0}^{t} i\,dt = \int_{t_0}^{t} i\,dt$$

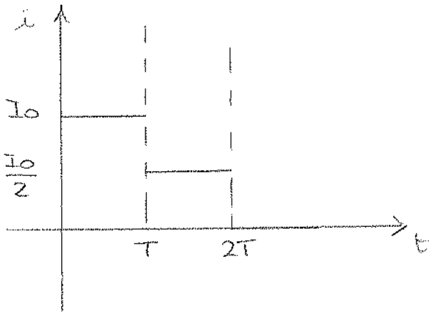
Esempio:

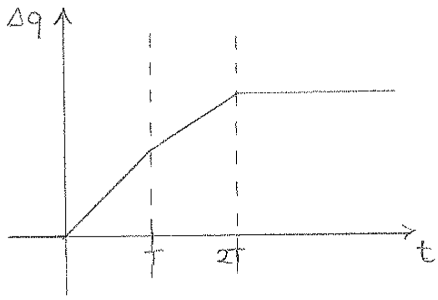




Se la corrente è fluttuante (b) → andamento della carica pulsante o alternato

Esempio:





per $0 < t < T$ $\quad q = \int_0^t I_0\,dt = I_0 t$

per $T < t < 2T$ $\quad q = \int_0^T I_0\,dt + \int_T^t \frac{I_0}{2}\,dt = I_0 t + \frac{I_0}{2}(t - T)$

per $t > 2T$ $\quad q = \int_0^T I_0\,dt + \int_T^{2T} \frac{I_0}{2}\,dt + \int_{2T}^{0} 0\,dt = I_0 T + \frac{I_0}{2} T$

CONSERVAZIONE DELLA CARICA: tanta carica entra nelle superfici, tanta ne deve uscire nella stessa unità di tempo

legge del bilanciamento delle correnti o legge di Kirchhoff delle correnti

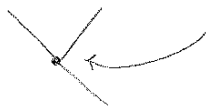
$$\underbrace{i_1 + i_3}_{\text{entrante}} = \underbrace{i_2}_{\text{uscente}}$$

detta anche KCL

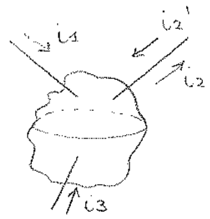
KCL_1: ip: superficie chiusa attraversata da correnti

Σ_n correnti entranti (i_n) = Σ_m correnti uscenti (i_m)

Se la superficie è ridotta ad un solo punto vale ancora tale legge



NODO: punto di saldatura a cui sono connessi due o più conduttori



$i_1 + i_3 - i_2 = 0$

$i_1 + i_3 + (-i_2) = 0$

$i_1 + i_3 + i_2' = 0$ opp. $i_2 + i_1' + i_3' = 0$

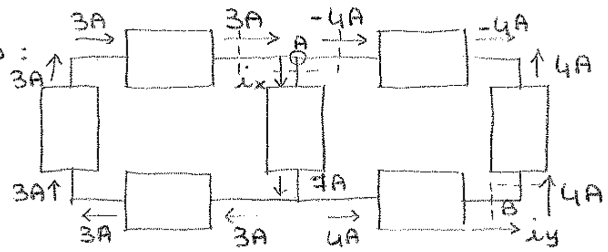
KCL_2: somma di tutte le correnti entranti in una superficie chiusa = 0

ip: superficie chiusa con conduttori

Σ_n correnti entranti $(i_n) = 0$ oppure Σ_m correnti uscenti $(i_m) = 0$

KCL_1 e KCL_2: due modi per esprimere la stessa legge

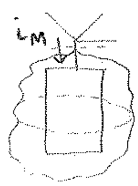
Esempio:



A) Applico KCL su A: $3A = -4A + i_x \rightarrow i_x = 7A$

B) Applico KCL su B: $i_y = 4A$

1 caso particolare: i_M

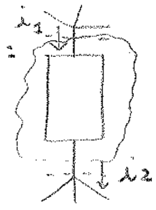


Elementi a monopòlo: unico filo uscente dalla superficie

Applicando KCL $\rightarrow i_M = 0$

Il monopòlo avrà sempre corrente uguale a 0

2 caso particolare:



Bipòlo

Applicando KCL $\rightarrow i_1 = i_2$

La corrente passante per un bipolo è sempre la stessa

Applico KCL in C : $i_1 + i_5 = i_4 \rightarrow 3A + 2A = 5A$ Vero!

Nei circuiti bisogna sempre escludere un nodo → serve solo come verifica

Misure delle tensioni : $v_1 = 5V$ $v_3 = 2V$

$v_2 = 7V$

Considero percorso chiuso A → B → C → A e applico KVL

$$v_1 = v_2 + v_5 \rightarrow v_5 = v_1 - v_2 = 5 - 7 = -2V$$

Considero percorso chiuso A → D → C → A e applico KVL

$$v_1 + v_3 + v_4 = 0 \rightarrow v_4 = -v_1 - v_3 = -5V - 2V = -7V$$

Abbiamo calcolato quindi tutte le tensioni e correnti che soddisfano Kirchhoff; calcolo adesso p su ogni elemento

- su a_1 : $p_1 = v_1 i_1 = 5 \cdot 3 = 15\ W$
- su a_2 : $p_2 = v_2 i_2 = 7 \cdot 2 = 14\ W$
- su a_3 : $p_3 = v_3 i_3 = 2 \cdot 5 = 10\ W$
- su a_4 : $p_4 = v_4 i_4 = -7 \cdot 5 = -35\ W$
- su a_5 : $p_5 = v_5 i_5 = -2 \cdot 2 = -4\ W$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 15W + 14W + 10W - 35W - 4W = 0$$

<u>LEGGE O TEOREMA DI TELLEGEN</u> : ip: tensioni e correnti devono soddisfare KCL e KVL

$$\Sigma_j\ p_j \text{ su tutti gli elementi del circuito} = 0$$

Indico con resistore il bipolo, con resistenza il valore anche se a volte si usa resistenza al posto di resistore

Calcolo la potenza assorbita dal resistore: si può indicare con p_{ass}

$$p = v i = (Ri) i = Ri^2 \quad \text{oppure} \quad p = vi = v\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{v^2}{R}$$

$i \geq 0$

p è sempre assorbita, il resistore oppone resistenza al passaggio delle cariche al suo interno → si converte energia in calore e dunque p viene assorbita → $p > 0$ per definizione della funzione del resistore

R quindi deve essere > 0

Ciò vale solo se utilizzo la giusta convenzione di segno

Caso particolare: suppongo che R tende a 0, $R = 0$

se $R = 0 \rightarrow p = 0$ le cariche scorrono nel metallo senza subire attrito

→ $v = 0$ elemento con $v = 0$ → non c'è differenza di energia stessa en. potenziale ovunque nel resistore → cortocircuito

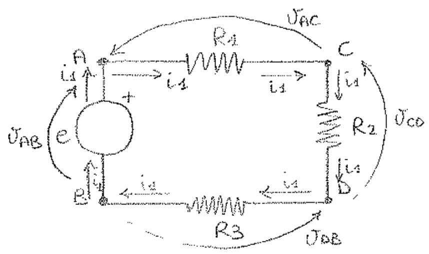
$i = \underbrace{\frac{1}{R}}_{} v$ (2ª forma della legge di ohm)

conduttanza, $G = \frac{1}{R} \Rightarrow$ unità di misura $G = \frac{A}{V} = S$ (siemens)

$G > 0$

Caso particolare: se $G = 0 \rightarrow i = 0$ elemento crea così tanto attrito da non far passare le cariche → situazione di circuito aperto

Esempio:



1- Inserire le variabili elettriche

Essendo un percorso chiuso posso applicare KVL₂

$$v_{AB} = v_{AC} + v_{CD} + v_{DB}$$

$$e = R_1 i_1 + R_2 i_1 + R_3 i_1 = i_1 (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$i_1 = \frac{e}{R_1 + R_2 + R_3}$$ ho calcolato la corrente nel circuito

Scrivere minimo numero di equazioni possibili

$$v_{CD} = R_2 i_1 = \frac{R_2 e}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Equivalenza: stesso generatore e circuito e stessa tensione

$$R' = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1}$$

Regola della resistenza equiv. del //: ip: circuito con tutti i resistori collegati fra gli stessi due punti (stessa tensione) → collegamento in PARALLELO (//)

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\sum_n \frac{1}{R_n} \text{ tutti i resistori}}$$

Altre scritture: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$ oppure $G_{eq} = \sum_k G_k$

Caso particolare: due resistori in parallelo R_1 e R_2

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$$

Regola del partitore di corrente:

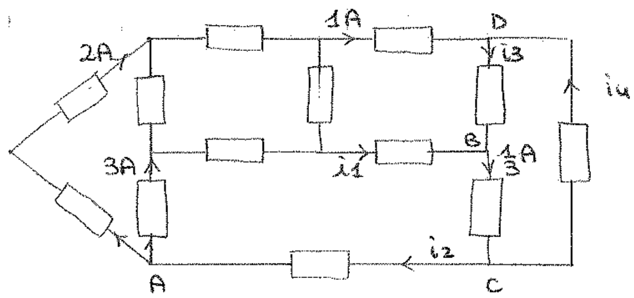
ip: generatore di corrente e resistori collegati tutti in parallelo

$$\Rightarrow i_k = \frac{a}{R_k} \cdot \frac{1}{\sum_n \frac{1}{R_n}} = \frac{a}{R_k \left(\frac{1}{R_{eq}}\right)}$$

Caso particolare: due resistori:

$$i_2 = \frac{a}{R_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{a R_2 R_1}{(R_2 + R_1) R_2} = \frac{a R_1}{R_1 + R_2}$$

4)



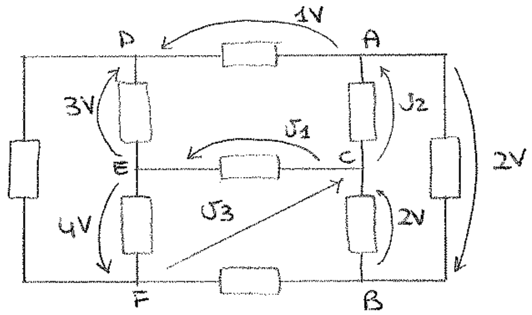
Applico KCL su A : $i_2 = 3A + 2A = 5A$

Applico KCL su B : $i_3 + i_1 = 1/3\,A \rightarrow i_1 = 1/3A + 11/3A = 4A$

Applico KCL su C : $1/3A \pm i_2 + i_4 \rightarrow i_4 = -14/3\,A$

Applico KCL su D : $i_4 + 1A = i_3 = -11/3\,A$

5)

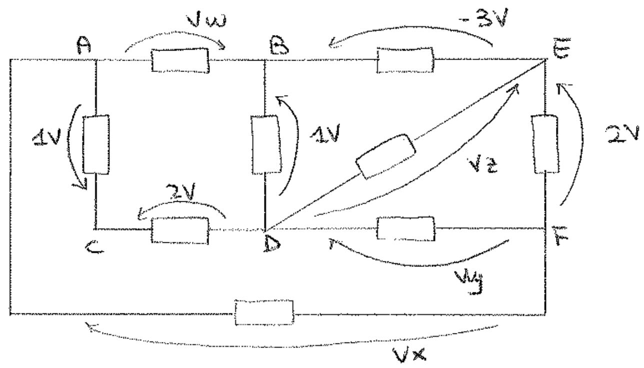


Applico KVL su ABCA : $V_2 + 2V + 2V = 0 \rightarrow V_2 = -2V(2) = -4V$

Applico KVL su ACEDA: $3V + V_1 = 1V + V_2 \rightarrow V_1 = 1V + V_2 - 3V = -6V$

Applico KVL su CEFC : $V_1 + 4V + V_3 = 0 \rightarrow V_3 = -V_1 - 4V = 6V - 4V = 2V$

6)



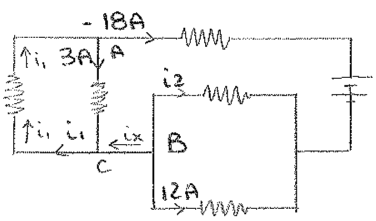
Applico KVL su ABDCA: $V_w + 2V = 1V + 1V \rightarrow V_w = 0V$

Applico KVL su BEDB: $-3V + V_z = 1V \rightarrow V_z = 4V$

Applico KVL su EFDE : $V_y + V_z = 2V \rightarrow V_y = 2V - V_z = -2V$

Applico KVL su FACDF: $V_x + 1V = 2V + V_y \rightarrow V_x = 2V - 2V - 1V = -1V$

7)



Applico KCL su A : $i_1 = -18A + 3A \rightarrow i_1 = -15A$

Applico KVL su ABCDA: $4V = 2V + V_1 \rightarrow V_1 = -2V$

Applico KVL su ABCA: $B_3 = 2V + 2V = 4V$

Applico KCL su A: $2A = 3A + i_2 \rightarrow i_2 = -A$

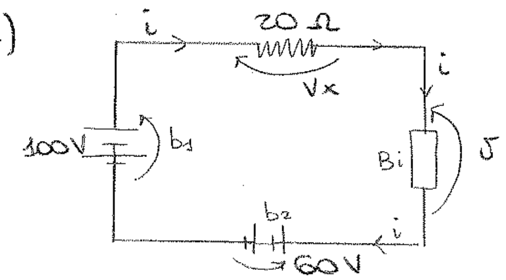
$p_1 = v_1 i_1 = 2V(2A) = +4\ W$

$p_2 = v_2 i_2 = -4V(-1A) = +4W$

$p_3 = v_3 i_3 = -4V(3A) = -12\ W$

$p_4 = v_4 i_4 = 2V(+2A) = +4A$

12)



$E = 100\ W$

Se b_1 eroga 100 Watt, 20 W sono assorbiti da Rx, 20 W da B_1 e 60 W da b_2

$p_{erog} = -(60)(1) = -60\ W \rightarrow p_{ass} = 60\ W$

$p = vi \rightarrow i = \frac{P}{v} = \frac{100\ W}{100V} = 1A$

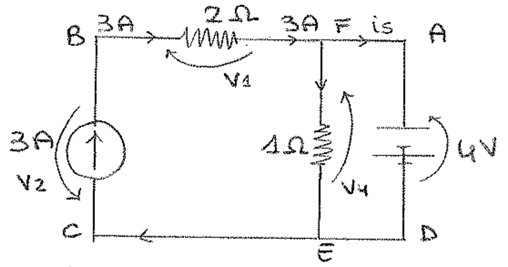
$p_{Bi} = 20V(1A) = 20W$

$V_x = Ri = 20\ \Omega\ (1A) = 20V$

$p_x = 20$ Watt $\qquad p_{b2} = 60W$

Applicando KVL: $60\ V + v + V_x = 100V \rightarrow v = 100V - 60V - 20V = 20V$

13)



$V_1 = Ri = 2\Omega(3A) = 6V$

Applico KVL su ABCDA: $4V + V_1 + V_2 = 0 \rightarrow 4V + 6V + V_2 = 0 \rightarrow V_2 = -10V$

Applico KVL su FBCEF: $V_4 + V_1 + V_2 = 0 \rightarrow V_4 = -V_2 - V_1 = 10V - 6V = 4V$

$V_4 = Ri_4 \rightarrow i_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{4V}{1\Omega} = 4A$

Applico KCL su A: $3A = i_4 + i_5 \rightarrow i_5 = 3A - i_4 = -A$

$p_1 = i_1 v_1 = -6V(3A) = -18\ W$

$p_2 = i_2 v_2 = -3A(-10V) = +30\ W$

$p_4 = -v_4 i_4 = -4V(4A) = -16\ W$

$p_5 = v_5 i_5 = -4V(-A) = +4W$

$i_{a1} = a_1 \qquad i_{a2} = a_2 \qquad i_{a3} = a_3$

Applico KCL su A : $i_{a1} - i_1 - i_2 - i_{a2} - i_3 + i_{a3} = 0$

$$\underbrace{a_1 - a_2 + a_3}_{a_E} = i_1 + i_2 + i_3$$

$$a_E = i_1 + i_2 + i_3$$

Ho sostituito i 3 generatori con un unico generatore avente valore = somma dei 3 e il cui verso della corrente è uguale al primo

Regola :

per generatori di corrente $a_E = \Sigma_n a_n$

Sfruttando la legge di Ohm :

$$a_E = \frac{v_{AB}}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} + \frac{v_{AB}}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_{AB}$$

Se ho un resistore molto più piccolo degli altri : $R_j << R_k$ con $k \neq j$

$R_{eq} = \dfrac{1}{\Sigma_n \frac{1}{R_n}}$ in $\Sigma_n R_n$ prevale R_j

$R_{eq} \approx R_j$

In realtà è più corretto dire che $R_{eq//} \leq R_j$

(il risultato è più piccolo della resistenza più piccola)

Corollario : se $R_j << R_k$

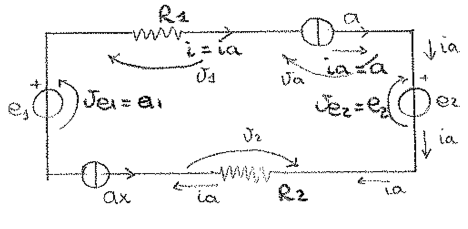
$\Rightarrow R_{eq//} \leq R_j$

Suppongo che la resistenza più piccola sia un corto circuito $R_j = 0$

$\Rightarrow R_{eq} \leq 0$ ma non potendo essere $< 0 \Rightarrow R_{eq//} = 0$

Se ho un cortocircuito considero solo quello e posso escludere tutti gli altri resistori

Considero un circuito serie con generatore di corrente



$i_1 = a$

$i_2 = a$

Applico KVL : $v_{e1} - v_1 - v_a - v_{e2} - v_2 = 0$

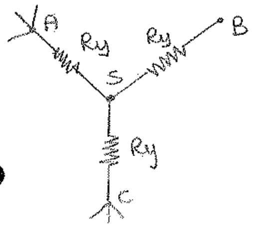
$e_1 - e_2 = v_1 + v_a + v_2$

$e_1 - e_2 = R_1 i_a + R_2 i_a + v_a$

$e_1 - e_2 = R_1 a + R_2 a + v_a$

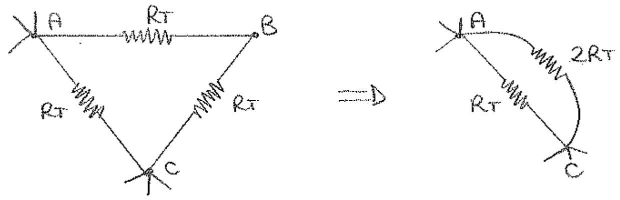
Unica incognita : $v_a = e_1 - R_1 a - e_2 - R_2 a$

In un circuito in serie che abbia un generatore di corrente, non posso applicare la legge del partitore di tensioni



Essendo B un monopolo $- i_B = 0$

$R_{eqAC} = 2R_y$ (considero A e C in serie)



$$R_{eqAC} = R_T \parallel 2R_T = \frac{R_T(2R_T)}{R_T + 2R_T} = \frac{2R_T^2}{3R_T} = \frac{2}{3}R_T$$

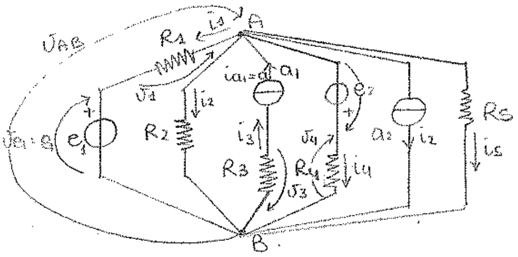
Equivalenza: $R_{eqAC\,Y} = R_{eqAC\,\nabla} \rightarrow 2R_y = \frac{2}{3}R_T \rightarrow R_y = \frac{1}{3}R_T$

$R_y = \frac{1}{3}R_T$

$R_T = 3R_y$

Dimostrare che anche negli altri 2 modi vale l'uguaglianza

Esercizio: <u>circuito parallelo di elementi serie</u>



$i_{a1} = a_1 \qquad i_{a2} = a_2$

$v_{e1} = e_1 \qquad v_{e2} = e_2$

$i_3 = i_{a1}$

Applico KCL in A: $i_1 + i_2 - i_3 + i_4 + i_5 + i_{a2} = 0$

$i_1 + i_2 - i_{a1} + i_4 + i_5 + i_{a2} = 0$

$i_1 + i_2 - a_1 + i_4 + i_5 + a_2 = 0$

$i_2 = \frac{v_{AB}}{R_2} \longrightarrow \quad i_1 + \frac{v_{AB}}{R_2} - a_1 + i_4 + \frac{v_{AB}}{R_5} + a_2 = 0$

Se considero il percorso chiuso posso ricavare v_1

$e_1 + v_1 = v_{AB} \rightarrow v_{AB} = e_1 + R_1 i_1$

$v_{AB} + e_2 = v_4 \rightarrow v_{AB} = -e_2 + R_4 i_4$

$$\frac{v_{AB} - e_1}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} - a_1 + \frac{v_{AB} + e_2}{R_4} + \frac{v_{AB}}{R_5} + a_2 = 0$$

$$v_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) = \frac{e_1}{R_1} + a_1 - \frac{e_2}{R_4} - a_2$$

$$v_{AB} = \frac{\frac{e_1}{R_1} + a_1 - \frac{e_2}{R_4} - a_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$

<u>Se</u> pongo $a_1 = e_2 = a_2 = 0 \Rightarrow v_{AB}| = K_1 e_1$

considero e $v = e$ $v = e \ \forall i$, per $e = 0 \Rightarrow v = 0$ cortocircuito

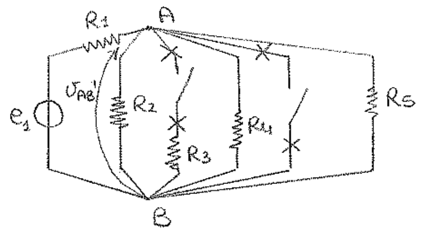
considero a $i = a \ \forall v$, per $a = 0 \Rightarrow$ circuito aperto

<u>Se</u> pongo $e_1 = e_2 = a_2 = 0 \Rightarrow v_{AB}| = K_2 a_1$

Tale procedimento è detto <u>regola di calcolo dei circuiti per SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI</u>

Considero circuito di prima:

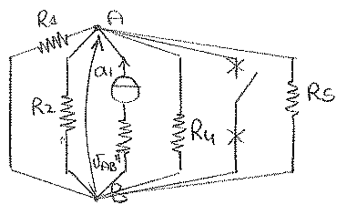
1° contributo: pongo $a_1 = e_2 = a_2 = 0$ lasciando solo e_1 attivo



essendo $R_2 // R_4 // R_5 \Rightarrow$ posso sostituirli con una $Req^{-1} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \Rightarrow$ calcolo Req

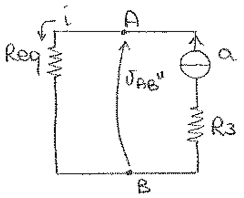
Applico partitore tensione: $v_{AB}' = e_1 \frac{Req}{R_1 + Req}$ con $K_1 = \frac{Req}{R_1 + Req}$

2° contributo: pongo $e_1 = e_2 = a_2 = 0$ lasciando solo a_1 attivo



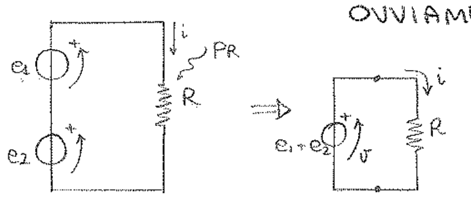
essendo $R_1 // R_2 // R_4 // R_5$ li sostituisco con

$$Req = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$



$v_{AB}'' = Req\, a_1$ con $K_2 = Req$

Esempio:



OVVIAMENTE

$v = e_1 + e_2$

$v = Ri \rightarrow e_1 + e_2 = Ri \rightarrow i = \frac{e_1 + e_2}{R}$

$$p = vi = (e_1 + e_2)\left(\frac{e_1 + e_2}{R}\right) = \frac{(e_1 + e_2)^2}{R} = \frac{v^2}{R}$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti

1° contributo: $i_R = K e_1$ con $e_2 = 0$

$i_R' = \frac{e_1}{R}$

$p_R' = v i_R' = e_1 \left(\frac{e_1}{R}\right) = \frac{e_1^2}{}$

V_0 nella sovrapposizione è calcolato quando $i = 0$ → quello esterno è un circuito aperto

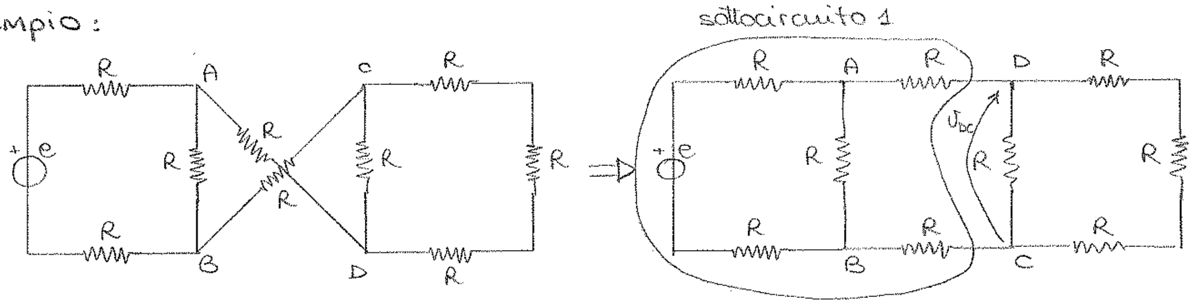
⇒ 2) V_0 = tensione a vuoto = tensione del sottocircuito con uscita in circuito aperto

$R_E = K_S$ = resistenza di tutto il sottocircuito

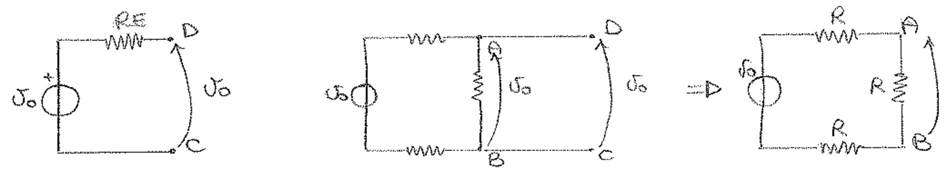
⇒ 2) R_E = Requivalente, resistenza del sottocircuito dall'uscita con generatori annullati

TEOREMA DI THEVENIN

Esempio:



Costituisco un sottocircuito e lo sostituisco con un generatore e un resistore Equivalente:



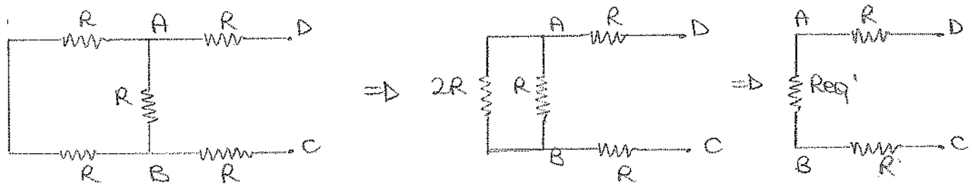
essendo D aperto $i_{DA} = 0$ $V_R = 0$ → cortocircuito

essendo C aperto $i_{CB} = 0$ $V_R = 0$ → cortocircuito

$V_0 = V_{DC} = V_{AB}$

$$V_{AB} = \frac{eR}{R+R+R} = \frac{e}{3} \qquad V_0 = V_{AB} = \frac{e}{3}$$

Per calcolare R_E annullo e → cortocircuito



Partire sempre dal punto più lontano

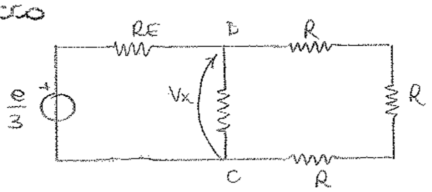
$$Req' = \frac{2R(R)}{3R} = \frac{2}{3}R$$

$$Req = \frac{2}{3}R + R + R = \frac{8}{3}R \qquad R_E = \frac{8}{3}R$$

$$R+R+R = 3R \parallel R = \frac{3}{4}R$$

$$V_x = \frac{\frac{e}{3}\left(\frac{3}{4}R\right)}{\frac{3}{4}R + \frac{8}{3}R}$$

Attacco



$$R \parallel 3R = \frac{3R^2}{4R} = \frac{3}{4}R$$

$$V_x = \frac{e}{3}\,\frac{(3/4 R)}{(3/4 + 8/3)R}$$

Esercizi parte 1 - cap. 2

2.4) $R_1 = 10\,\Omega$ $R_3 = 40\,\Omega$ $R_{eq} = ?$

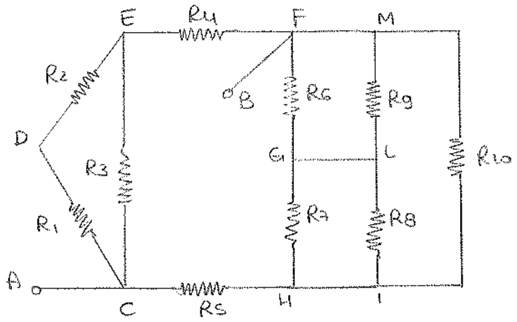
$R_2 = 20\,\Omega$ $R_4 = 40\,\Omega$

$$R_3 /\!/ R_4 = \frac{1}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} = \frac{R_3 R_4}{R_3+R_4} = \frac{(40\,\Omega)(40\,\Omega)}{80\,\Omega} = 20\,\Omega$$

$(R_3 /\!/ R_4)$ serie $R_2 = 20\,\Omega + 20\,\Omega = 40\,\Omega$

$((R_3 /\!/ R_4)$ serie $R_2) /\!/ R_1 = \frac{(40\,\Omega)(10\,\Omega)}{40\,\Omega + 10\,\Omega} = \frac{400\,\Omega}{50\,\Omega} = 8\,\Omega$

2.5)



$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R_9 = R_{10} = 1\,\Omega$

$(R_1$ serie $R_2) /\!/ R_3 = \frac{2 \cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}$

$((R_1$ serie $R_2) /\!/ R_3)$ serie $R_4 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$

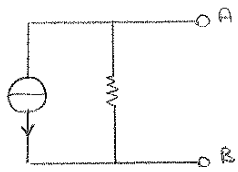
$R_6 /\!/ R_9 = \frac{1}{2}$

$R_7 /\!/ R_8 = \frac{1}{2}$ } serie $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$1 /\!/ R_{10} = \frac{1}{2}$ serie $R_5 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$$R_{eq} = \frac{5}{3} /\!/ \frac{3}{2} = \left(\frac{5}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\right) \Big/ \left(\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \Big/ \left(\frac{10+9}{6}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{19}{6}} = \frac{30}{38} = \frac{15}{19}$$

TEOREMA DI NORTON



$i_N = i \mid v_{AB} = 0$

$R_N = R_{AB} \mid$ gener indip spenti

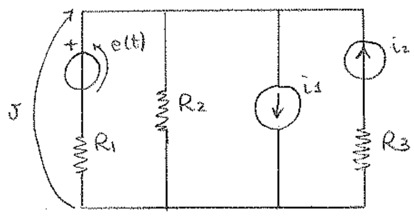
$R_N \equiv R_{TH}$

$i_N = \frac{v_{TH}}{R_{TH}}$

LEZIONE 8

24-10-2012

3.1)



$$v = \frac{\frac{e(t)}{R_1} - i_1 + i_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

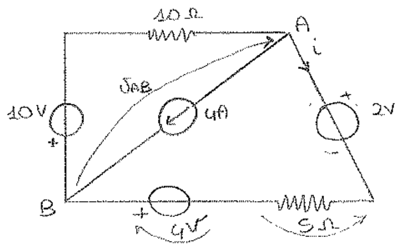
$R_1 = \frac{1}{2}\ \Omega$ $\qquad i_1(t) = 7A$

$R_2 = \frac{1}{3}\ \Omega$ $\qquad i_2(t) = 2A$

$R_3 = 1\,\Omega$ $\qquad e(t) = 10V$

$$v = \frac{\frac{10V}{1/2\,\Omega} - 7A + 2A}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{15A\,(6)}{5} = 18V$$

3.2)



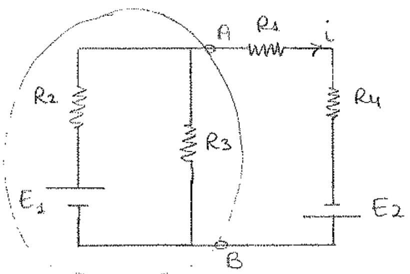
$i = ?$

$$v_{AB} = \frac{-\frac{10V}{10\Omega} - 4A - \frac{2V}{5\Omega}}{\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{5\Omega}} = \frac{-5A - \frac{2}{5}A}{\frac{3}{10}} = \frac{-\frac{27}{5}A}{\frac{3}{10}\,\Omega^{-1}} = -18V$$

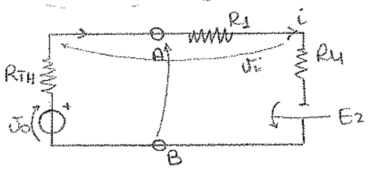
$$v_R = v_{AB} - (-2V) = -18 + 2 = -16V$$

$$i = \frac{v_R}{5\Omega} = -\frac{16}{5}A$$

3)



$i = ?$



$$i = \frac{v_i}{R_{TH} + R_1 + R_4} = \frac{v_{TH} + E_2}{R_{TH} + R_1 + R_4}$$

Applicando Thevenin:

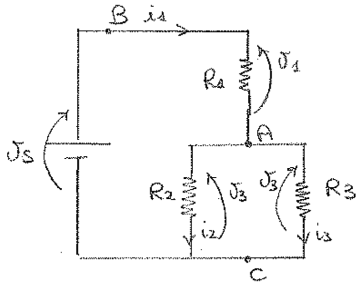
essendo $i_A = 0 = i_B \rightarrow R_2$ serie R_3

$$v_{AB} = \frac{E_1 R_3}{R_2 + R_3} = v_0$$

$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3}$$

LEZIONE 9

2.8)



$R_1 = 19\,\Omega$ $\qquad i_1 = ?$

$R_2 = 30\,\Omega$ $\qquad v_1 = ?$

$R_3 = 70\,\Omega$

$v_3 = 60\,V$

$$v_1 = \frac{v_S R_1}{R_1 \text{serie} (R_2 // R_3)} = \frac{60V(19\Omega)}{19\Omega + 21\Omega} = \frac{1140}{40} = 28{,}5\,V$$

$$R_2 // R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(30\Omega)(70\Omega)}{100\Omega} = 21\,\Omega$$

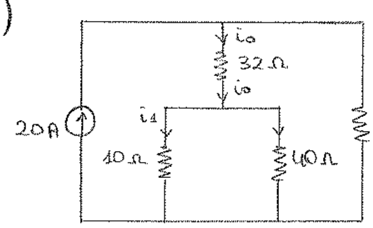
$$v_3 = \frac{v_S (R_2//R_3)}{(R_2//R_3) + R_1} = \frac{60V(21\Omega)}{19\Omega + 21\Omega} = \frac{1260}{40\Omega} = 31{,}5\,V$$

$$i_1 = \frac{v_S}{R_1 + (R_2//R_3)} = \frac{v_1}{R_1}$$ >0 poichè entra dal polo + $\quad i_1 = \frac{28{,}5V}{19\Omega} = 1{,}5\,A$

$$i_2 = \frac{i_1 (R_2//R_3)}{R_2} = \frac{(1{,}5A)(21\Omega)}{30\Omega} = 1{,}05\,A$$

$$i_3 = \frac{i_1 (R_2//R_3)}{R_3} = \frac{(1{,}5A)(21\Omega)}{70\Omega} = 0{,}45\,A$$

9)



Calcolare $i_1 = ?$

$$(10\Omega // 40\Omega) = \frac{(10\Omega)(40\Omega)}{50\Omega} = 8\,\Omega$$

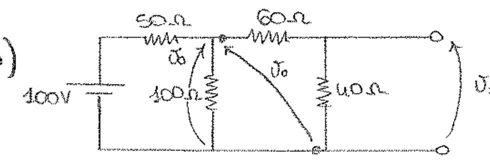
8Ω serie $32\,\Omega = 40\,\Omega$

$$40\Omega // 60\Omega = \frac{(40\Omega)(60\Omega)}{100\Omega} = 24\,\Omega$$

$$i_0 = \frac{20A \cdot 24\Omega}{240\Omega} = 12\,A \quad = \frac{20(60\Omega)}{100} = \frac{1200}{100} = 12\,A$$

$$i_1 = \frac{i_0 (10\Omega//40\Omega)}{10\Omega} = \frac{12A\,(8\Omega)}{10\Omega} = \frac{48}{5}\,A \quad = \frac{12 \cdot 40}{50} = \frac{48}{5}$$

10)



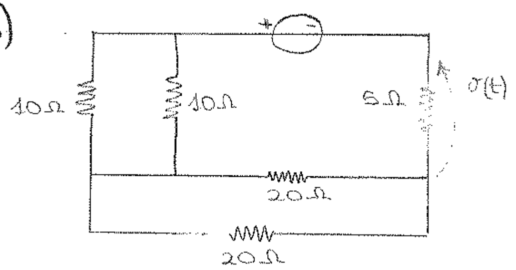
$v_1 = ?$

60Ω serie $40\Omega = 100\,\Omega$

$$100\Omega // 100\Omega = \frac{(100\Omega)(100\Omega)}{200\Omega} = 50\,\Omega$$

$$v_1 = \frac{v_0 (40\Omega)}{60\Omega + 40\Omega} = \frac{2}{5} v_0$$

2.6)



$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

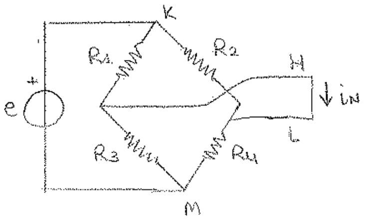
$\sigma(t) = ?$

$$20\Omega \parallel 20\Omega = \frac{(20\Omega)(20\Omega)}{(20\Omega + 20\Omega)} = \frac{400\Omega}{40\Omega} = 10\Omega$$

$$10\Omega \parallel 10\Omega = \frac{(10\Omega)(10\Omega)}{10\Omega + 10\Omega} = \frac{100\Omega}{20\Omega} = 5\Omega$$

$$R_{eq} = 5\Omega + 5\Omega + 10\Omega = 20\Omega$$

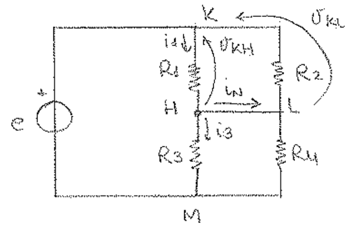
$$\sigma(t) = \frac{e(t)\,R_x}{R_{eq}} = \frac{E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}{4\,\cancel{20}\Omega}(\cancel{5}\Omega) = \frac{E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}{4}$$

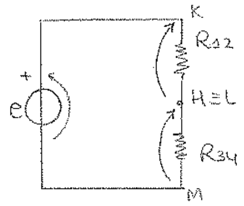


i_N da H verso L

$R_1 // R_2 = R_{12}$

$R_3 // R_4 = R_{34}$





$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$v_{KH} = \frac{e R_{12}}{R_{12} + R_{34}} = v_{KL} \quad \text{essendo } R_1 // R_2$$

$$i_1 = \frac{v_{KH}}{R_1} = \frac{e R_{12}}{R_1 (R_{12} + R_{34})}$$

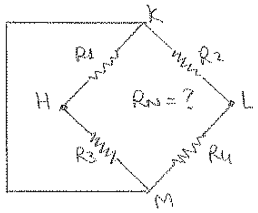
$$v_{HM} = \frac{e R_{34}}{R_{12} + R_{34}} \qquad i_3 = \frac{v_{HM}}{R_3} = \frac{e R_{34}}{R_3 (R_{12} + R_{34})}$$

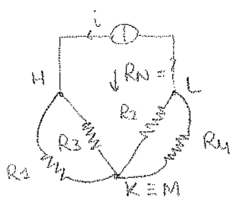
Posso quindi calcolare i_N mediante la KCL sul nodo H:

$$i_1 = i_3 + i_N \rightarrow i_N = i_1 - i_3 = \frac{e R_{12}}{R_1 (R_{12} + R_{34})} - \frac{e R_{34}}{R_3 (R_{12} + R_{34})} = \frac{e}{R_{12} + R_{34}} \left(\frac{R_{12}}{R_1} - \frac{R_{34}}{R_3} \right)$$

$$i_N = \frac{e}{R_{12} + R_{34}} \left(\frac{R_{12}}{R_1} - \frac{R_{34}}{R_3} \right)$$

Calcolo di R_N tra H e L





$R_{13} = R_1 // R_3$

$R_{24} = R_2 // R_4$

$$\Rightarrow R_N = R_{13} + R_{24} = (R_1 // R_3) + (R_2 // R_4)$$

$$i_x = - \frac{i_N (R_N // R_x)}{R_x} = - i_N \frac{R_N}{R_N + R_x}$$

come se calcolassi v nel generatore e poi $R_E = \frac{v}{i}$

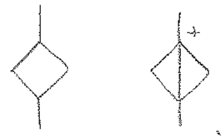
Tra H e L c'è un generatore di corrente

Esercizio: ricalcolare usando Thevenin

GENERATORI DIPENDENTI

Producono una tensione o una corrente che dipendono da altre tensioni o correnti all'interno del circuito

Sono del tipo:



generatore dipendente di tensione → non si trova fisicamente in commercio, si usa per spiegare il comportamento di certi "dispositivi" (es: transistor)

1) Trovo i_x ipotizzando generatore indipendente

Applico KCL in A : $i_3 = i_0 - i_x$

$v_1 = R_1 i_x$

$v_2 = R_2 i_x$

$v_3 = R_3 (i_0 - i_x)$

$v_{AB} = R_1 i_x + R_2 i_x + \hat{e} = R_3 (i_0 - i_x)$ essendo v verso sx = v verso dx

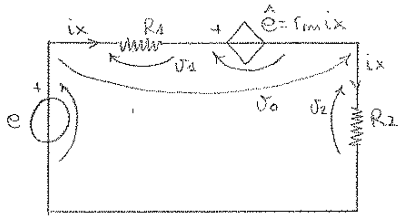
$R_1 i_x + R_2 i_x + r_m i_x = R_3 i_0 - R_3 i_x$

$$i_x = \frac{R_3 i_0}{R_1 + R_2 + r_m + R_3}$$ ho trovato la quantità pilotante

2) $$\hat{e} = r_m i_x = \frac{r_m R_3 i_0}{R_1 + R_2 + r_m + R_3}$$

3) $$v_{AB} = v_i = R_3 i_0 - \frac{R_3^2 i_0}{R_1 + R_2 + r_m + R_3} = \frac{R_3 R_1 i_0 + R_3 R_2 i_0 + R_3 r_m i_0 + \cancel{R_3^2 i_0} - \cancel{R_3^2 i_0}}{R_1 + R_2 + r_m + R_3}$$

Esempio:



1) $v_1 = R_1 i_x$

$v_2 = R_2 i_x$

Applico KVL : $e = v_1 + \hat{e} + v_2 = R_1 i_x + r_m i_x + R_2 i_x$

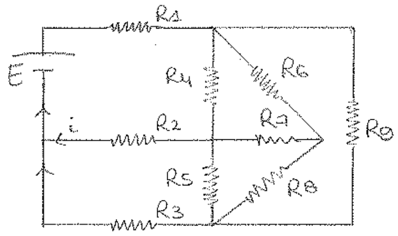
$$i_x = \frac{e}{R_1 + r_m + R_2}$$

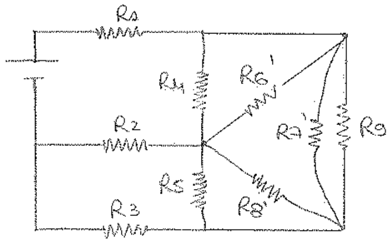
2) $$\hat{e} = r_m i_x = \frac{r_m e}{R_1 + r_m + R_2}$$

3) $$v_0 = - v_1 - \hat{e} = - R_1 \frac{e}{R_1 + r_m + R_2} - \frac{r_m e}{R_1 + r_m + R_2} = \frac{e}{R_1 + r_m + R_2} (-R_1 - r_m)$$

*2.9) $R_1=R_2=R_3=5\Omega$ $R_4=R_5=R_9=30\Omega$ $R_6=R_7=R_8=10\Omega$ $E=300V$

$i=?$



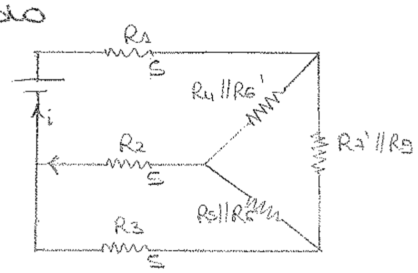


R6, R7, R8 sono a stella → trasformo triangolo

$R_6'=R_7'=R_8'=3(10\Omega)=30\Omega$

$R_7'\|R_9=\frac{R_7'R_9}{R_7'+R_9}=\frac{(30\Omega)(30\Omega)}{30\Omega+30\Omega}=15\Omega$

$R_4\|R_6'=R_5\|R_6'=\frac{(30\Omega)(30\Omega)}{30\Omega+30\Omega}=15\Omega$



(R4||R6'), (R5||R6'), (R7'||R9) sono a triangolo → trasformo in stella

$R_x=R_y=R_z=R_S=\frac{1}{3}R_T=5\Omega$

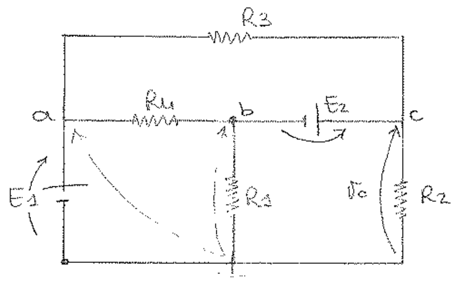
$5\Omega+5\Omega=10\Omega$

$10\Omega\|10\Omega=\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}=\frac{100}{20}=5+10\Omega=15\Omega$

$V=R_{eq}i \to i=\frac{V}{R_{eq}}=\frac{300V}{15}=20A$

$i=\frac{20A}{2}=10A$ essendo che $i+i=i_{tot}$

14) $E_1=12V$ $E_2=10V$ $R_1=12\Omega$ $R_2=8\Omega$ $R_3=8\Omega$ $R_4=2\Omega$



$V_a=E_1$

$V_b+E_2=V_c \to V_b=V_c-E_2$

• Suppongo $E_2=0$ → cortocircuito

$V_c|_{E_1}=\frac{E_1(R_1\|R_2)}{(R_1\|R_2)+(R_3\|R_4)}$

$V_c=V_c|_{E_1}+V_c|_{E_2}$

$R_1\|R_2=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ $R_3\|R_4=\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$

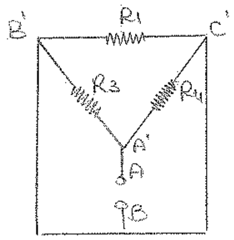
• Suppongo $E_1=0$ → cortocircuito

$V_c|_{E_2}=\frac{E_2(R_2\|R_3)}{(R_2\|R_3)+(R_1\|R_4)}$

$R_2\|R_3=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$ $R_1\|R_4=\frac{R_1R_4}{R_1+R_4}$

$V_c|_{E_2}$ = sia per $R_2\|R_3$

$V_c=\frac{E_1(R_1\|R_2)}{(R_1\|R_2)+(R_3\|R_4)}+\frac{E_2(R_2\|R_3)}{(R_2\|R_3)+(R_1\|R_4)}$

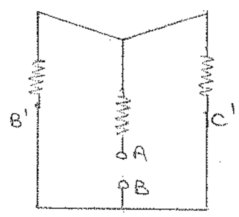


Equivalente triangolo-stella:

$R_A = (R_{AB} \cdot R_{AC}) / R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}$

$R_B = (R_{BC} \cdot R_{AB}) / R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}$

$R_C = (R_{AC} \cdot R_{BC}) / R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}$



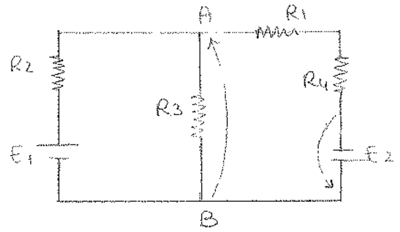
$R_A' = 8/8 = 1$

$R_B' = 4/8 = \frac{1}{2}$

$R_C' = 8/8 = 1$

$R_{eq} = (R_B' \parallel R_C') + R_A = \left(\frac{1/2}{3/2}\right) + 1 = \frac{4}{3} = 1{,}3\,\Omega$

5) $E_1 = 12V \quad E_2 = 3V \quad R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 4\Omega \quad R_3 = 4\Omega \quad R_4 = 5\Omega$

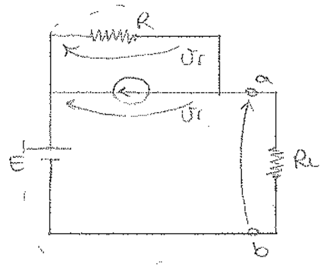


$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_2} + \frac{E_2}{R_1 + R_4}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_4}} = \frac{\frac{12}{4} - \frac{3}{7}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}} = 4V$$

$V_{7\Omega} = E_2 + V_{AB} = 4V + 3V = 7V$

$i_4 = \frac{V}{R} = \frac{7V}{7\Omega} = 1A$

* 6) $E = 12V \quad I = 4A \quad R = 1\Omega$



a) $V_R = RI = 1\Omega(4A) = 4V$

$V_{ab} = E - V_r = 12V - 4V = 8V = V_0$

$R_T = R_{eq} = R = 1\Omega$

b) $i_N = \frac{V_0}{R_T} = \frac{8V}{1\Omega} = 8A$

$R_N = R_T = 1\Omega$

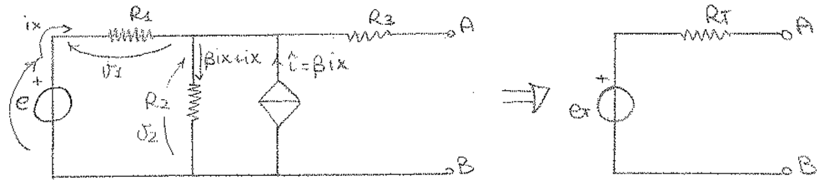
c) $P = Vi = V_0 i_N = V_0 i_L$

$$V = V_0 \frac{R_L}{R_T} = \frac{8V R_L}{R_L + R_T} = \frac{8V(R_L)}{1\Omega + R_L} = \frac{8R_L}{1 + R_L} V = R_N i_N$$

$$P = \frac{8R_L}{1 + R_L}\left(\frac{8V}{1 + R_L}\right) = \frac{64 R_L}{(1 + R_L)^2} W$$

$$i_L = \frac{i_N (R_N \parallel R_L)}{R_L} = \frac{i_N (R_N \cdot R_L)}{R_L (R_N + R_L)} = \frac{R_N i_N}{R_N + R_L} = \frac{8V}{1 + R_L} A$$

LEZIONE 11 31-10-2012



Calcolo l'equivalente di Thevenin:

- calcolo della q. pilotante i_x

Applico la KVL nel circuito di sinistra: $e = v_2 + v_1$

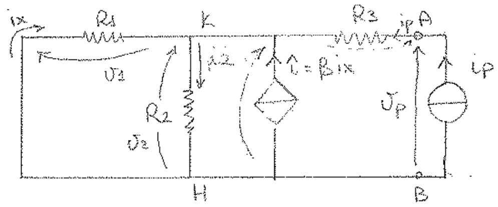
$$e = R_2(\beta i_x + i_x) + R_1 i_x = R_2\beta i_x + R_2 i_x + R_1 i_x$$

$$i_x = \frac{e}{R_2\beta + R_2 + R_1}$$

$$v_{AB} = v_2 = R_2(\beta i_x + i_x) = R_2(\beta + 1)\left(\frac{e}{R_2\beta + R_2 + R_1}\right) = \frac{R_2(\beta e + e)}{R_2\beta + R_2 + R_1}$$

$$\hat{i} = \frac{\beta e}{R_2\beta + R_2 + R_1}$$

- Calcolo R_T:



R_T: i generatori interni devono essere spenti; per calcolare R_T è come se avessi un generatore di corrente collegato ad AB (i): $e = R_T i$ → esisterà della corrente i_x passante per R_1 → il generatore dipendente DEVE ESSERE MANTENUTO ACCESO!

R_T è calcolata con generatori INDIPENDENTI spenti

Per calcolarla attacco ad AB un generatore i_p, calcolo v_p e R_T sarà uguale a $R_T = \frac{v_p}{i_p}$

- Calcolo la q. pilotante i_x

Applico KVL: $v_1 + v_2 = 0 \rightarrow R_1 i_x + R_2\beta i_x + R_2 i_x = 0 - R_2 i_p$

$$i_2 = i_x + \beta i_x + i_p$$

$$V_{KH} = v_2 = -v_1 \rightarrow R_1 i_x + R_2\beta i_x + R_2 i_x + R_2 i_p = 0$$

$$-i_x(R_1 + R_2 + R_2\beta) = R_2 i_p$$

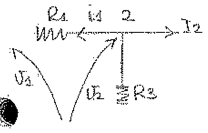
$$i_x = \frac{-R_2 i_p}{R_1 + R_2 + R_2\beta}$$

I_p è un valore di prova dunque alla fine deve scomparire

$$\hat{i} = \beta i_x = -\frac{\beta R_2 i_p}{R_1 + R_2 + R_2\beta}$$

$$v_3 = R_3 i_p$$

Applico KCL sul nodo 2:



$$i_3 = \frac{v_2}{R_3} \qquad i_1 = \frac{v_2 - v_1}{R_1}$$

$$I_2 + i_3 + i_1 = 0 \rightarrow I_2 + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_1}{R_1} = 0$$

Adesso ho il sistema di equazioni

$$\begin{cases} v_1\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) + v_2\left(-\frac{1}{R_1}\right) = i_1 \\ v_2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1}\right) + v_1\left(-\frac{1}{R_1}\right) = i_2 \end{cases}$$

Si può esprimere come prodotto tra una matrice dei coefficienti A per un vettore delle incognite v = vettore dei termini noti b

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Il termine a_{11} = inversi delle resistenze attaccate al primo nodo
il termine a_{22} = inversi delle resistenze attaccate al 2 nodo

Regola: i termini della diagonale principale sono uguali alla somma degli inversi delle resistenze collegati ai rispettivi nodi

$a_{ii} = \sum_n \frac{1}{R_n}$ collegate al nodo i

I termini fuori dalla diagonale principale del tipo a_{ij} sono uguali a meno la somma degli inversi di tutte le resistenze collegate a cavallo tra il nodo i e il nodo j

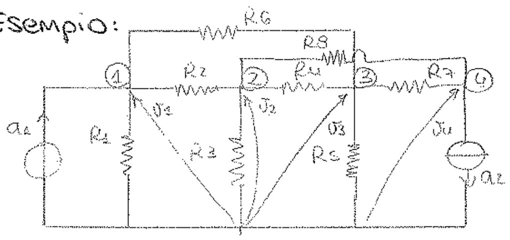
$a_{ij} = -\sum_q \frac{1}{R_q}$ collegate tra il nodi i e j

Tale regola si chiama SCRITTURA per ISPEZIONE della matrice
La matrice dei coefficienti è sempre SIMMETRICA

Regola: i termini noti di b sono costituiti dalla somma dei generatori di corrente con segno + se il generatore è entrante nel nodo, - se è uscente

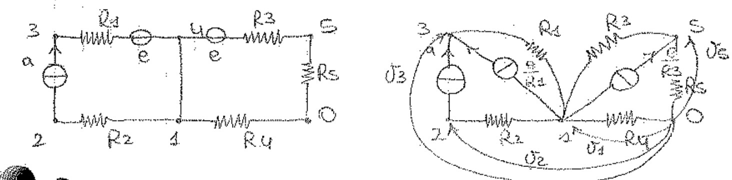
Tale metodo è anche chiamato METODO AUTOMATICO → viene infatti usato nei calcolatori per risolvere i circuiti

Esempio:



5 nodi → 4 tensioni nodali

Sistema 4x4 → matrice 4x4



Posso adesso formare la matrice con la regola automatica:

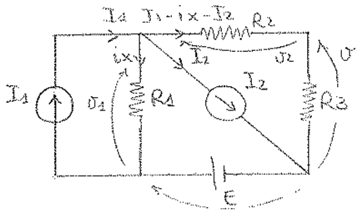
4 tensioni nodali → sistema 4×4 → matrice 4×4

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & 0 & 0 & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e}{R_1}-\frac{e}{R_3} \\ -a \\ a+\frac{e}{R_1} \\ \frac{e}{R_3} \end{pmatrix}$$

Millmann, Thevenin e Norton si applicano solo quando è presente più di un generatore; se è solo uno → ohm, kirchoff o partitori tensione o corrente

Esercizi materiale

9) $R_1 = 1\Omega$ $R_2 = 2\Omega$ $R_3 = 3\Omega$ $I = 4A$ $I_2 = 5A$ $E = 6V$



$v_3 + v_2 = v_1 + E \rightarrow E = v_3 + v_2 - v_1$

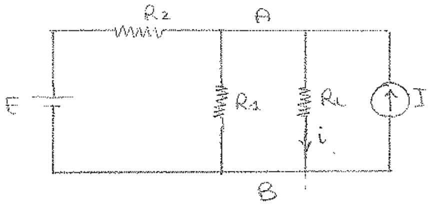
$E = R_3(I_1 - ix - I_2) + R_2(I_1 - ix - I_2) - R_1 ix$

$-ix(R_1 + R_3 + R_2) = E - R_3 I + R_3 I_2 - R_2 I + R_2 I_2$

$ix = \dfrac{-E + R_3 I - R_3 I_2 + R_2 I - R_2 I_2}{R_1 + R_3 + R_2} = \dfrac{-6+12-15+8-10}{6} = -\dfrac{11}{6} A$

$v = R_3(I - ix - I_2) = 3\Omega\left(4A - 5A + \dfrac{11}{6}A\right) = \dfrac{5}{6}(3) = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5 V$

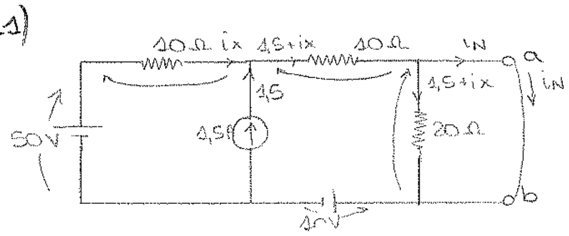
10) $E = 10V$ $I = 5A$ $R_1 = 4\Omega$ $R_2 = 6\Omega$



$v_{AB} = \dfrac{\frac{E}{R_2} + I}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_L}} = \dfrac{\frac{10}{6} + 5A}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{R_L}} = \dfrac{\frac{20}{3}A}{\frac{5}{12} + \frac{1}{R_L}}$

$i = \dfrac{v_{R_L}}{R_L} = \dfrac{\frac{20}{3}A\,(12 \cancel{R_L})}{\cancel{R_L}(5R_L + 12)} = \dfrac{80}{12 + 5R_L}$

11)



Calcolo equivalente di Thevenin:

$v_{ab} = v_{20\Omega}$

$50V = 10ix + 10(1{,}5 + ix) + 20(1{,}5 + ix) = 10ix + 15 + 10ix + 30 + 20ix + 10$

$ix(10 + 10 + 20) = 50 - 15 - 30 - 10$

$ix = \dfrac{-5}{40} = \dfrac{1}{8} A$

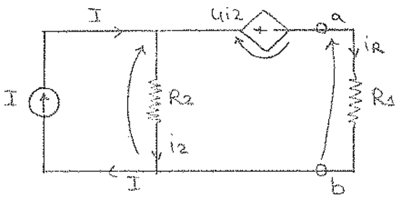
$v_{20\Omega} = 20\Omega\left(1{,}5 - \dfrac{1}{8}A\right) = 20\Omega\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{8}\right) = 20\Omega\left(\dfrac{12-1}{8}\right) = \dfrac{20(11)}{8} = \dfrac{55}{2} V$

$R_{eq} = (10\Omega + 10\Omega) \parallel 20\Omega = \dfrac{400\Omega^2}{40\Omega} = 10\Omega$

$R_N = R_{eq} = 10\Omega$

$i_N = \dfrac{v_{ab}}{R_N} = \dfrac{55}{2(10)} = 2{,}75 A$

$*3)$ $R_2 = 2\Omega$ $\quad I_1 = 10\,A$



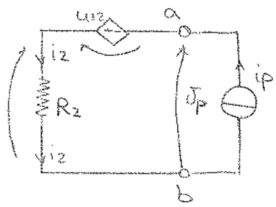
$i_R = \dfrac{v_{R1}}{R_1}$

$v_{R1} = v_{ab}$

Applicando def. di Thevenin:

$i_2 = I = 10\,A$

$v_{ab} = R_2 i_2 - 4i_2 = 2(10) - 4(10) = 20 - 40 = -20\,V$



$R_{eq} = \dfrac{R_T}{i_P} = \dfrac{2i_P}{i_P} = -2\,\Omega$

$i_p = i_2$

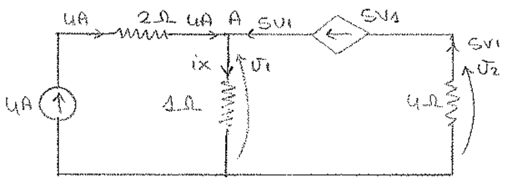
$v_p + 4i_2 = R_2 i_2 \rightarrow v_p = R_2 i_p - 4 i_p = (R_2 - 4) i_p = -2 i_p$

Applicando il partitore di corrente:

$i_N = \dfrac{v_T}{R_T} = \dfrac{20V}{-2\Omega} = 10\,A$

$i_R = i_N \dfrac{R_{eq}}{R_1} = \dfrac{-i_N (R_T \cancel{R_1})}{\cancel{R_1}(R_T + R_1)} = \dfrac{10(2)}{2+R_1} = \dfrac{-20}{2+R_1}\,A$

4) $v_2 = ?$



fem

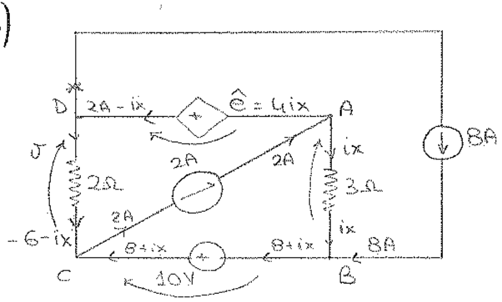
Applico KCL in A: $4A + i_x + 5v_1 = 0 \rightarrow 4A - i_x + 5i_x = 0 \rightarrow i_x = -1\,A$

$v_1 = 1\Omega(i_x) \rightarrow v_1 = i_x$

$v_1 = -1\,V \rightarrow I = 5v_1 = 5(-1) = -5\,A$

$v_2 = 4\Omega(i) = 4\Omega(5v_1) = +20\,V$

5)

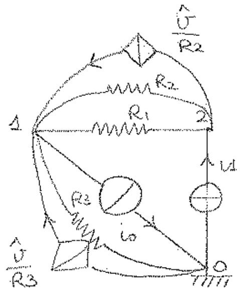


Applico KVL in ABCD : $3\Omega(i_x) + 4i_x = 10V + 2(6 + i_x)$

$3i_x + 4i_x = 10 - 12 - 2i_x \rightarrow 9i_x = -2 \rightarrow i_x = \dfrac{-2}{9}$

$\hat{e} = 4\left(\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{8}{9}V$

$v = 2\Omega\left(-6 + \dfrac{2}{9}\right) = 2\Omega\left(\dfrac{-54+2}{9}\right) =$



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{v}}{R_2}+\frac{\hat{v}}{R_3}-i_0 \\ i_1-\frac{\hat{v}}{R_2} \end{pmatrix}$$

Essendo $\hat{v} = \alpha v_x = \alpha v_1$

$$\frac{\hat{v}}{R_2}+\frac{\hat{v}}{R_3}-i_0 = \frac{\alpha v_1}{R_2}+\frac{\alpha v_1}{R_3}-i_0$$

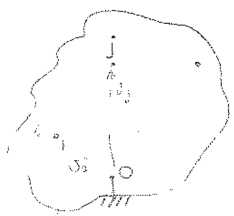
$$i_1-\frac{\alpha v_1}{R_2}$$

La prima riga della matrice A diventa così:

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{\alpha}{R_3}-\frac{\alpha}{R_2}\right) v_1 - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) v_2 = -i_0$$

La seconda: $-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{\alpha}{R_2}\right) v_1 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) v_2 = i_1$

Ripetere il caso in cui $\hat{v} = r_m i_x$ con $i_x = \frac{v_2 - v_1}{R_1}$



$Av = b$ con b contenente solo i generatori indipendenti

Per la soluzione uso il metodo di Cramer

$$v_j = \frac{\det\left(\vdots \ \vdots \ b \ \vdots\right)}{\det A}$$ con $\det\left(\vdots \ \vdots \ b \ \vdots\right)$ = det A ma nella colonna j ho b

pongo $\det A = \Delta A$

$$v_j = \frac{\det\left(\vdots \ \vdots \ b \ \vdots\right)}{\Delta A} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$v_j = \frac{\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \vdots & b^1 & \vdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \vdots & b_2 & \vdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{\dots} & \vdots & b_n & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix}}{\Delta A} = \frac{b_1 \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \dots & A_{1n} \\ A_{31} & \dots & A_{3n} \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} + \dots + b_n \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1} & A_{\dots} & \dots \end{vmatrix}}{\Delta A}$$

in A non ci sono mai i generatori

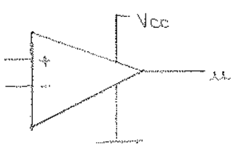
Una $\forall$ tensione nodale è una combinazione lineare dei generatori

→ Ogni variabile elettrica è una combinazione lineare di generatori

AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

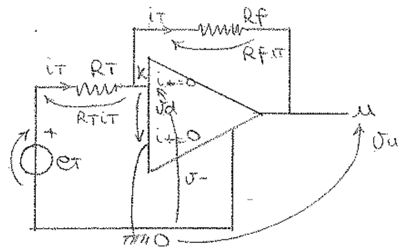
Oggetto realmente prodotto, lo considereremo come una scatola nera dall'esterno. Funziona solo quando è acceso, alimentato; 8 piedini: 2 per l'alimentazione, gli altri per altre funzioni. A differenza di tutti gli altri è un OTTOPOLO

Abbreviazione: OpAmp



la v in uscita anche di molto

Ragionamento più semplice per arrivare allo stesso risultato



se tra + e - cortocircuito e $v_d \approx 0 \rightarrow v^- = 0$

K è in cortocircuito virtuale → non è presente realmente ma l'effetto è lo stesso

$0 \xrightarrow{Th} K \xrightarrow{OpAmp} 0$

Applico KVL: $e_T = R_T i_T + v^- = R_T i_T \rightarrow i_T = \frac{e_T}{R_T}$

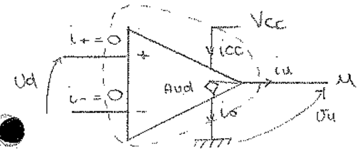
Essendo $i_- = 0 \rightarrow$ in R_f passa ancora i_T

$u \xrightarrow{R_f} K \xrightarrow{OpAmp} 0 \rightarrow u$

Applico KVL: $v_u + R_f i_T = v^- \rightarrow v_u = -R_f i_T = -R_f \frac{e_T}{R_T} = -e_T \frac{R_f}{R_T}$

Stessa formula di prima ma senza fare intervenire nè Millmann nè il limite per $A \rightarrow \infty$

LEZIONE 14 07-11-2012



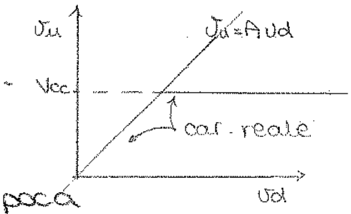
Applico KCL sulla sup. chiusa:

$i_+ + i_- + i_{cc} = i_o + i_u$

ma essendo $i_+ = i_- = 0$

$i_{cc} = i_o + i_u$ la corrente dell'alimentazione si ripartisce tra i_o e i_u

$v_u = A v_d$ tensione a vuoto dell'uscita v_u

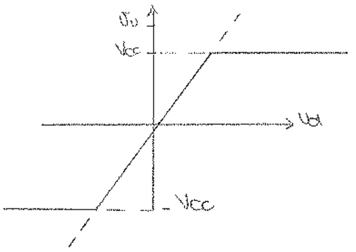


Caratteristica dell'operazionale

Più è > A, più la retta diventa verticale → basta poca v_d per creare una v_u alta

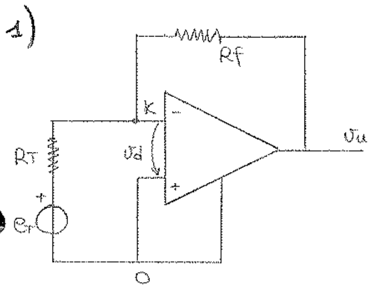
Questa caratteristica è ideale → al max si può arrivare al valore Vcc della batteria

Spesso O è attaccato a −Vcc → la caratteristica reale può arrivare fino a −Vcc; essendo A molto grande la linea si avvicina molto a v_u



se $A \to \infty \Rightarrow$ anche v_u sarebbe molto grande ma non può andare all'infinito quindi deve v_d tendere a 0

1)



$v_d = 0 \to$ K è equivalente a O

$i_T = \frac{e_T}{R_T}$

$v_u = -e \frac{R_f}{R_T}$

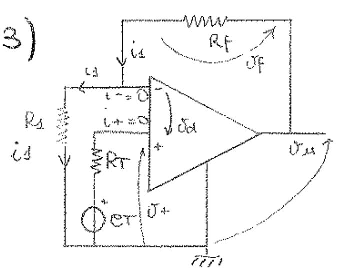
configurazione invertente

v_u è opposta ad e_T (se $e_T > 0$ crescente, $v_u < 0$ decrescente)

se $v_u > e$ → ho creato un amplificazione

2) Se collego al polo + un resistore il risultato NON cambia poichè la corrente $i_+ = 0$ e quindi in R non ne scorre → $v_R = 0$

3)



$v_d = 0$

essendo $i_+ = 0 \to v_{RT} = 0$

$v_+ = e_T$

ma anche $v_d = 0 \to v_- = e_T$

In Rf scorre ancora $i_2 = \frac{e_1 R_+}{R_2(R_1+R_+)} - \frac{e_2}{R_2}$

Applico KVL su $u \to k \to 0 \to u$: $v_u = v_k + v_f = \frac{e_1 R_+}{R_1+R_+} + \frac{e_1 R_+ R_f}{R_2(R_1+R_+)} - \frac{e_2 R_f}{R_2}$

$$v_u = \frac{e_1 R_+ R_2 + e_1 R_1 R_f - e_2 R_f R_1 - e_2 R_f R_+}{R_2(R_1+R_+)} = e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} + \frac{R_f}{R_2} e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - \frac{R_f}{R_2} e_2$$

$$= e_1 \frac{R_+\left(1+\frac{R_f}{R_2}\right)}{R_1+R_+} - \frac{R_1+R_+}{R_1+R_+}\frac{R_f}{R_2} e_2 = \frac{e_1 \cancel{R_+}\left(1+\frac{R_f}{R_2}\right)}{\cancel{R_+}\left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)} - \frac{R_f}{R_2} e_2 =$$

$$\cancel{= \frac{e_1 R_+\left(1+\frac{R_f}{R_2}\right) - e_2 \frac{R_f}{R_2} R_+\left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)}{R_+\left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)}}$$

Il risultato è la differenza pesata tra i due generatori che ho inserito nel circuito → uscita = coefficiente che moltiplica la differenza dei 2 generatori

Se scelgo Rf ed R+ in modo che le due parentesi siano uguali:

$1 + \frac{R_f}{R_2} = \left(1+\frac{R_1}{R_+}\right)\frac{R_f}{R_2}$ semplifico molto il risultato

$$v_u = e_1 \frac{R_f}{R_2} - e_2 \frac{R_f}{R_2} = \frac{R_f}{R_2}(e_1 - e_2)$$

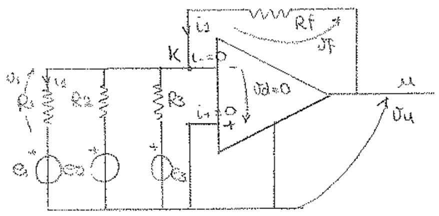
$$\frac{R_2+R_f}{\cancel{R_2}} = \frac{R_+ + R_1}{R_+ \cancel{R_2}} R_f \to \frac{R_2}{R_f} + 1 = \frac{1}{} + \frac{R_1}{R_+}$$

$$R_+\left(\frac{1+R_1/R_f}{R_+}\right) R_f = R_f\left(1+\frac{R_2}{R_f}\right) \to \cancel{1} + \frac{R_2}{R_f} = \cancel{1} + \frac{R_1}{R_+}$$

Amplificatore differenziale

Esempio: 1° e 2° Thevenin = sensori di misura → posso capire se sono uguali o no (se sono uguali l'uscita deve essere 0)

Bisogna però rispettare la funzione: $\frac{R_2}{R_f} = \frac{R_1}{R_+}$



$v_k = 0$

Uso la sovrapposizione degli effetti:

- Effetto di e_1 : $e_2 = e_3 = 0$ cortocircuiti

  R_2 e R_3 sono in parallelo con $v_k = 0$ → non hanno effetto, no corrente

  $v_k = e_1 + R_1 i_1 = 0 \to i_1 = -\frac{e_1}{R_1}$

  Essendo $i_- = 0 \to i_1$ scorre in Rf → $v_f = R_f i_1 = v_u' = -\frac{e_1 R_f}{R_1}$

- Effetto di e_2 : $e_1 = e_3 = 0$ cortocircuiti

  $v_k = 0$, $R_1 // R_3$ ma $i_1 = i_3 = 0$

  $v_u'' = -\frac{e_2 R_f}{R_2}$

- Effetto di e_3 : $v_u''' = -\frac{e_3 R_f}{R_3}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 274

$$v_{k}' = v_{u} = v'_{+} = e + \frac{eR_f}{R_1}$$

$$i' = \frac{v_{k}'}{R_1'} = \frac{e}{R_1'} + \frac{eR_f}{R_1' R_1} = \text{corrente dentro } R_f'$$

$$v_{R_f'} = R_f' \frac{v_k'}{R_1'}$$

$$v_u' = v_k' + v_{R_f}' = v_u + R_f' \frac{v_u}{R_1'} = v_u\left(1 + \frac{R_f'}{R_1'}\right)$$

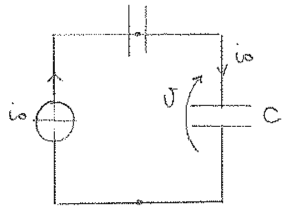
In una cascata la tensione all'uscita del secondo elemento è uguale alla tensione in uscita del primo per il coefficiente della configurazione non invertente

In generale è uguale al prodotto tra la tensione a fondo e tutti i coefficienti non invertenti

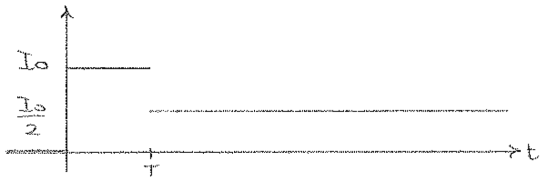
Nel caso di due : $v_u'' = v_u\left(1 + \frac{R_f'}{R_1'}\right)\left(1 + \frac{R_f''}{R_1''}\right)$ ecc...

Si osserva che la tensione e la corrente hanno due forme completamente diverse (triangolare e squadrata), cosa che invece non accade in un resistore; ciò è dovuto all'introduzione della derivata.

Esempio 2:



Suppongo che $i_0 = i(t)$



$$i = C\frac{dV}{dt} \rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt$$

$$V - V_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' \qquad 2^a \text{ forma dell'eq. di funzionamento del condens.}$$

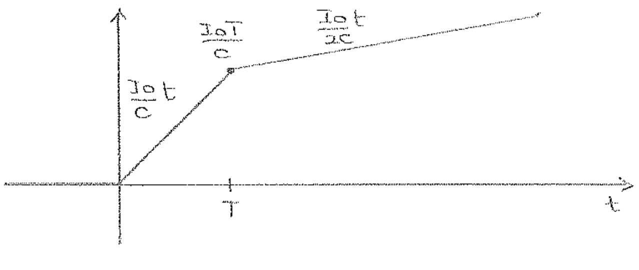
Conoscendo la forma della corrente calcolo V

- se $t < 0 \rightarrow i = 0 \quad V - V_0 = 0 \rightarrow V = V_0$ ma essendo il circuito spento $V_0 = 0$ (se non c'è corrente non c'è tensione)
- se $0 < t < T \rightarrow i = I_0$

$$V - V_0 = \frac{1}{C}\int_0^t I_0\,dt = \frac{1}{C} I_0 t = V \quad \text{poiché } V_0 = 0$$

- se $t > T \rightarrow i = \frac{I_0}{2}$

$$V = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{I_0}{2}dt' = \frac{1}{C}\left[\int_0^T I_0\,dt' + \int_T^t \frac{I_0}{2}dt'\right] = \frac{I_0 T}{C} + \frac{I_0}{2C}(t - T) = \frac{1}{C}\left(\frac{I_0}{2}T + \frac{I_0}{2}t\right)$$



Un condensatore con un gen. di corrente ha i grafici di funzione e corrente completamente diversi

Proprietà del condensatore

1) $V - V_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{C} i(t')dt'$ calcolata per t $\quad *$

Ricalcolo V per $t' = t + \Delta t$ (momento dopo)

$$V(t + \Delta t) - V_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t')dt' \qquad **$$

Faccio la differenza tra le due formule $* - ** = -(** - *) =$

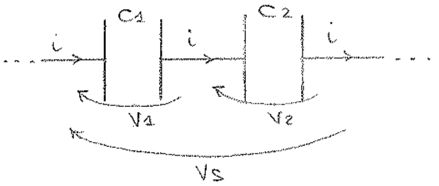
$$= -\left[V(t) - V_0 - V(t + \Delta t) + V_0\right] = \frac{1}{C}\left\{\int_{t_0}^{t} i(t')dt' - \int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t')dt'\right.$$

$$V(t + \Delta t) - V(t) = \frac{1}{C}\left\{\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t')dt' - \int_{t_0}^{t} i(t')dt'\right.$$

$i = C\dfrac{dV}{dt}$ $\qquad V = \dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$

COLLEGAMENTI IN SERIE E IN PARALLELO

- Collego <u>in serie</u> due condensatori:

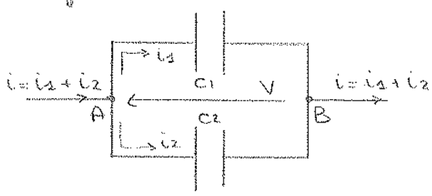


$$V_s = V_1 + V_2 = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' =$$
$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_{t_0}^{t} i(t')dt' = C'\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$$

con $\underline{\dfrac{1}{C'} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$ condensatore equivalente di tensione V_s, corrente i

Regola della serie dei condensatori

Collego <u>in parallelo</u> due condensatori:



KCL in A: $i = i_1 + i_2$

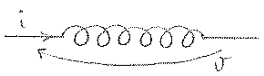
$$i = C_1\frac{dV}{dt} + C_2\frac{dV}{dt} = (C_1 + C_2)\frac{dV}{dt} = C'\frac{dV}{dt}$$

con $\underline{C' = C_1 + C_2}$ Regola del parallelo dei condensatori

condensatore equivalente di tensione v, corrente i e $C = C' = C_1 + C_2$

INDUTTORE

Elemento con eq di funzionamento con una derivata



SOLENOIDE (convenzione degli utilizzatori)

Si dimostra che $V = \dfrac{di}{dt}\cdot L$ con L = induttanza, costante positiva

Si scambia il ruolo di tensione e corrente

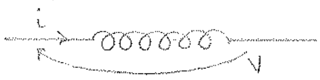
$[L] = \dfrac{s}{A}\cdot V = H$ (Henry)

La corrente che scorre nel solenoide: $i = i_0 + \dfrac{1}{L}\int_{t_0}^{t} V(t')dt'$

(2^a forma dell' eq. di funzionamento)

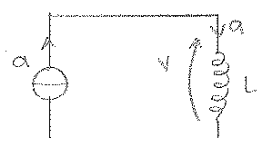
La corrente in un induttore dipende dall' integrale della tensione, tiene quindi conto di tutto ciò che è successo prima → ha memoria della tension

Valgono quindi le stesse proprietà del condensatore scambiando V con i

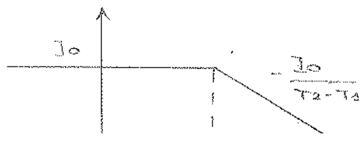


$V = L\dfrac{di}{dt}$ $\qquad i = \dfrac{1}{L}\int_{t_0}^{t} V(t)dt$

- Esempio:

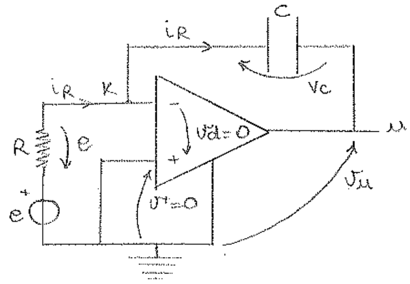


$a = a(t)$



Serie dei condensatori ≈ parallelo degli induttori e viceversa

1) CIRCUITO INTEGRATORE



Simile ma non uguale all'invertente

$v_K = 0 \qquad v^+ = v^- = 0$

$v_R = e \qquad i_R = \frac{e}{R}$ scorre anche in C

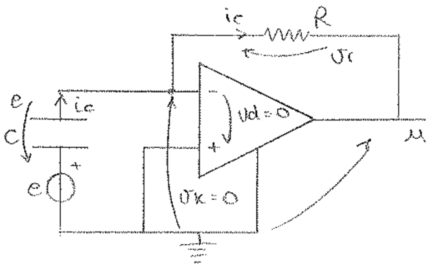
$$V = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\frac{e}{R}dt' =$$
$$= \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e(t')dt'$$

ma KVL su $u \to k \to 0 \to u$

$$v_u + v_C = v_K \to v_u + v_C = 0 \to v_u = -v_C = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e(t')dt'$$

Questa configurazione dà una tensione all'uscita che è uguale all'integrale del generatore entrante

2) CIRCUITO DERIVATORE



$v_d = v^+ = v^- = 0$

$v_C + e = 0 \to v_C = -e$

$i_C = C\frac{dv}{dt} = C\frac{de}{dt}$ scorre anche in R

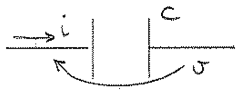
$$v_u + v_R = v_K = 0 \to v_u = -v_R = R\left(-C\frac{de}{dt}\right) = -RC\frac{de}{dt}$$

(circuito base dei tachimetri)

la tensione in uscita è uguale alla derivata del generatore in entrata

LEZIONE 17 - 14-11-2012

Bipòli { differenziali, dinamici, con memoria



$i = C\frac{dv}{dt}$

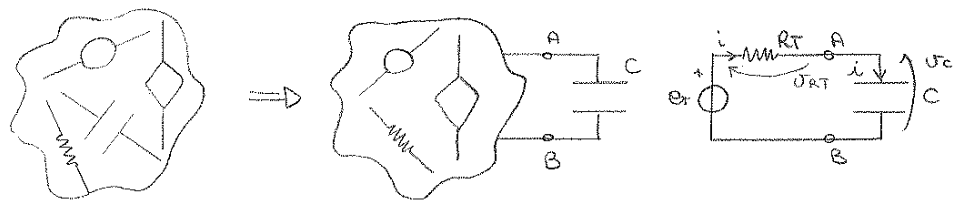
$V = L\frac{di}{dt}$

v deve essere continua — i deve essere continua

non può avere dei salti

Consideriamo circuiti che contengono un solo elemento con memoria

a)



Sostituisco il circuito di sinistra con Thevenin:

$i = C\frac{dv_C}{dt}$

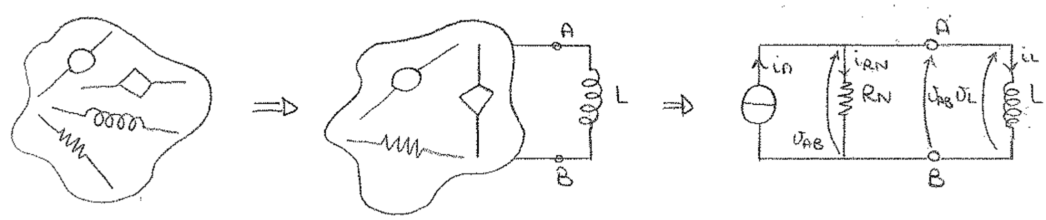
$v_{RT} = R_T i$

Applico KVL: $e_T = v_{RT} + v_C$

$$e_T = R_T i + v_C = R_T C\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_T C}v_C = \frac{e_T(t)}{R_T C}$ unica incognita v_C → eq. differenziale del primo ordine a coefficienti costanti non omogenea (è presente il termine noto $\frac{e_T(t)}{R_T C}$ che dipende da com'è fatto il circuito)

b) se ci fosse un induttore



$v_{AB} = L\frac{di}{dt} = v_L = v_{RN}$

$i_{RN} = \frac{v_{AB}}{R_N} = \frac{L}{R_N}\frac{di}{dt}$

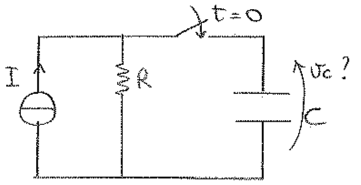
Applico KCL in A: $i_N = i_{RN} + i_L \rightarrow i_N = \frac{L}{R_N}\frac{di_L}{dt} + i_L$

$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\frac{L}{R_N}}i_L = \frac{i_N R_N}{L}$ unica incognita i_L → eq. differenziale del primo ordine a coefficienti costanti non omogenea

La <u>soluzione</u> è: (condizione finale meno quella iniziale) $e^{-\frac{t}{\tau}}$ + cond. finale
le <u>ipotesi</u> sono: un solo elemento con memoria
generatori costanti

Cercare le soluzioni applicando regole e senza risolvere le eq. differenziali

1° Esempio:



Suppongo poi di chiudere l'interruttore $(t=0)$
1 bipolo dinamico = condensatore
1 generatore costante
} ip della soluzione

$$v_c(t) = [v_c(0) - v_c(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + v(\infty) \qquad \text{per } t \geq 0$$

non so tuttavia quanto vale $v_c(0)$, $v_c(\infty)$ e τ → devo quindi ricavarmeli

- <u>Calcolo di τ:</u>

Trattandosi di un condensatore: $\tau = CR_T = CR$
per calcolare R_T devo quindi considerare il circuito chiuso $(t \geq 0)$

- <u>Calcolo di $v_c(0)$:</u>

istante 0 = istante in cui il circuito inizia a funzionare → le cariche iniziano a circolare su R e su C
Sul condensatore la tensione DEVE essere continua, non può fare salti → anche per $t=0$ v_c = ultimo momento in cui l'interruttore era aperto

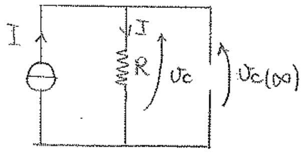
v_c (ultimo ist. prima chiusura) = v_c (primo ist. dopo la chiusura)

$$v_c 0^- = v_c 0^+$$

$v_c(0) = v_c(0^+)$ Ma non potendo conoscere $v_c(0^+)$ ricavo $v_c(0^-)$
Essendo spento si comporta come un morsetto → $v_c(0^-) = 0 = v_c(0^+)$
Condizione iniziale: $v_c(0) = 0$

- <u>Calcolo di $v_c(\infty)$:</u>

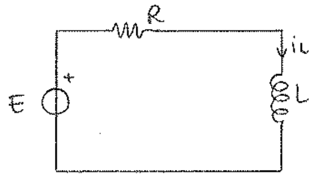
condizione finale = condizione quando interruttore è chiuso
Dopo un certo tempo l'esponenziale decade (nullo), si esaurisce → se i generatori erano costanti → tutto ritorna costante
Anche $v_c(\infty)$ sarà dunque costante $\Rightarrow i = C\frac{dv}{dt} = 0 \quad i_c = 0$
È un circuito aperto:



$v_c(\infty) = RI$

- Calcolo di $i_L(\infty)$:

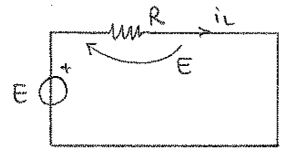
Nella condizione finale l'interruttore è chiuso e tutta la corrente passa nell'induttore:



esponenziale va a 0 → tutto è costante nel circuito

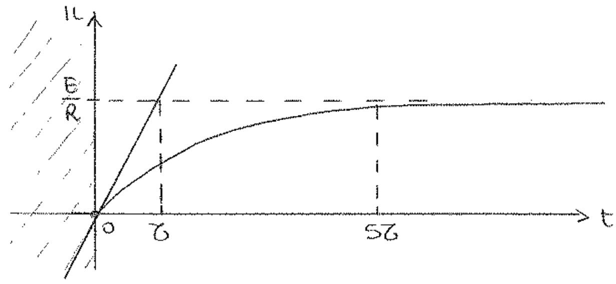
Anche i_L è costante → $v = L\frac{di}{dt} = 0$

Induttore è diventato un cortocircuito



$$i_L(\infty) = \frac{E}{R}$$

Quindi: $i_L(t) = \left[0 - \frac{E}{R}\right] e^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}} + \frac{E}{R} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$

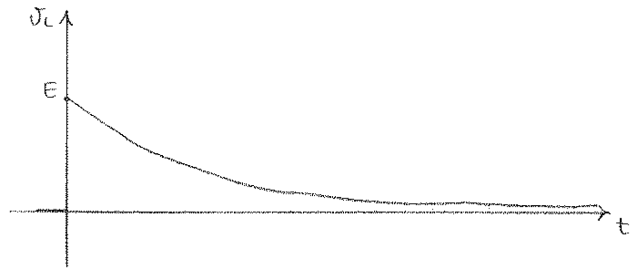


$t = 0 \qquad i_L = \frac{E}{R}(1-1) = 0$

$t \to \infty \qquad i_L(t \to \infty) = \frac{E}{R}$

Dal punto di vista fisico: quando chiudo l'interruttore la corrente comincia a passare e si svilupperà una tensione sull'induttore

Eq. funzionamento induttore: $v_L = L\frac{di_L}{dt} = \cancel{L}\frac{E}{\cancel{R}}\left(\frac{\cancel{R}}{\cancel{L}} e^{-\frac{tR}{L}}\right) = E e^{-\frac{tR}{L}}$



In tutti i circuiti che hanno elementi differenziali i grafici di tensione e corrente sono diversi tra loro

Nell'ultimo istante in cui l'interruttore è aperto la corrente e la tensione sono uguali a 0 → la corrente deve essere continua, la tensione no

Sul nodo A': $i_{2\Omega} = \dfrac{v_{A'}-v_A}{2} = \dfrac{v_{A'}-10}{2}$ tra A e A'

$i_{2\Omega}(A'C) = \dfrac{v_{A'}-v_C}{2}$

$i_{2\Omega}(OA') = \dfrac{v_{A'}}{2}$

Applico KCL: $\dfrac{v_{A'}-10}{2} + \dfrac{v_{A'}-v_C}{2} + \dfrac{v_{A'}}{2} = 0 \rightarrow 3v_{A'} - v_C - 10 = 0$

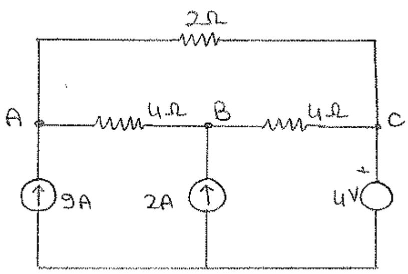
Stessa eq. che ottengo nella matrice!

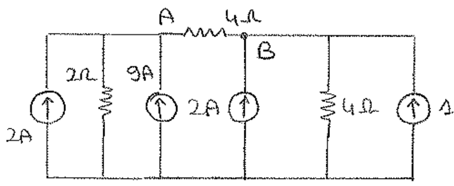
Sul nodo B: $\dfrac{v_B-10}{3} + \dfrac{v_B}{6} + \dfrac{v_B-v_C}{2} = 0 \rightarrow 2v_B - 20 + v_B + 3v_B - 3v_C = 0$

$6v_B - 3v_C - 20 = 0$

Sul nodo C: $\dfrac{v_C-v_B}{2} + \dfrac{v_C}{4} + \dfrac{v_C-v_{A'}}{2} = 0 \rightarrow 5v_C - 2v_B - 2v_{A'} = 0$

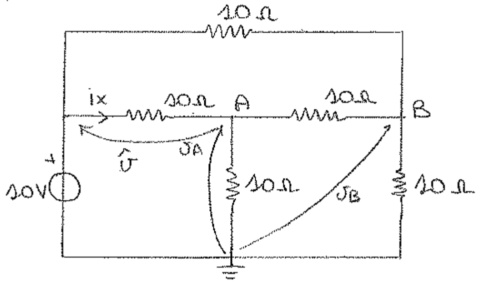
5.2)





$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 \\ 2+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5.3)



KCL su A: $\dfrac{v_A-10}{10} + \dfrac{v_A}{10} + \dfrac{v_A-v_B}{10} = 0 \rightarrow 3v_A - v_B = 10$

KCL su B: $\dfrac{v_B-v_A}{10} + \dfrac{v_B}{10} + \dfrac{v_B-10}{10} = 0 \rightarrow 3v_B - v_A = 10$

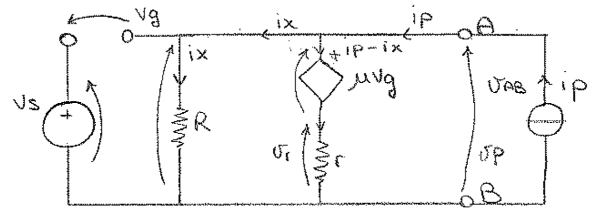
$v_A = \dfrac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}}{9-1} = \dfrac{30+10}{8} = \dfrac{40}{8} = \dfrac{10}{2} = 5$

$\hat{v} = 10 - 5 = 5V$

$i_x = \dfrac{\hat{v}}{10} = 0{,}5\ A$

Esercizi cap. 4

4.9) circuito Thevenin = ?



$v_{AB} = v_g = Ri_x$

$v_p = \mu V_g + r(i_p - i_x) = \mu V_g + r i_p + \frac{r}{R} V_g$

$V_p = Ri_x = -V_g$

$i_x = \frac{-V_g}{R}$

Applico KVL: $v_p = \mu V_g + r(i_p - i_x) = \mu V_g + r i_p + \frac{r}{R} V_g = -V_g$

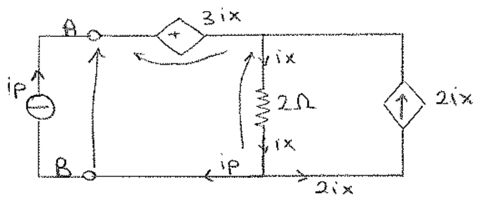
$V_g(1+\mu) + r i_p + \frac{r}{R} V_g = 0 \rightarrow i_p = -\frac{V_g}{r}(1+\mu) - \frac{1}{R} V_g$

$$R_{eq} = \frac{V_p}{i_p} = \frac{-V_g}{-\frac{V_g}{r}(1+\mu) - \frac{1}{R} V_g} = \frac{1}{\frac{1+\mu}{r} + \frac{1}{R}} = \frac{rR}{R(1+\mu) + r}$$

$V_p = V_s - V_g = Ri_x = r i_x + \mu V_g = \frac{r \mu V_g}{R-r} + \mu V_g$

$r i_x + \mu V_g = R i_x \rightarrow i_x = \frac{\mu V_g}{R-r}$

10) Req = ?



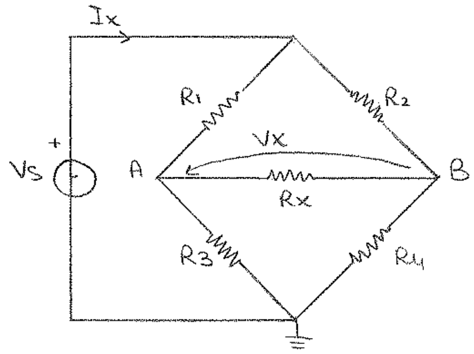
$i_x = i_p + 2i_x \rightarrow i_x = -i_p$

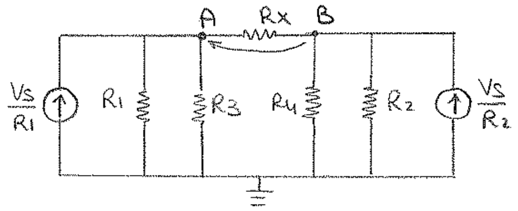
$v_{AB} = 3i_x + 2i_x = -3i_p - 2i_p = -5i_p$

$R_{eq} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{-5i_p}{i_p} = -5\,\Omega$

$$\frac{1}{1000}\begin{pmatrix} 1+1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}01 \end{pmatrix}$$

5.6) $R_1 = 10k\Omega \quad R_2 = 20k\Omega \quad R_3 = 30k\Omega \quad R_4 = 40k\Omega \quad R_x = 3k\Omega \quad V_S = 10V$





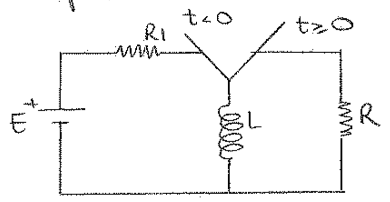
$V_x = V_A - V_B$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_x} & -\frac{1}{R_x} \\ -\frac{1}{R_x} & \frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_S}{R_1} \\ \frac{V_S}{R_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1000}\begin{pmatrix} \frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-3} \\ 5\cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0{,}5 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{14}{30}V_A - \frac{1}{3}V_B = 1000 \\ -\frac{1}{3}V_A + \frac{49}{120}V_B = \frac{1}{2}\,500 \end{cases} \quad \begin{cases} 14V_A - 10V_B = 30 \\ -40V_A + 49V_B = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} 14V_A - \frac{400}{49}V_A - \frac{600}{49} = 30 \\ V_B = \frac{40}{49}V_A + \frac{60}{49} \end{cases}$$

Esempio 2:



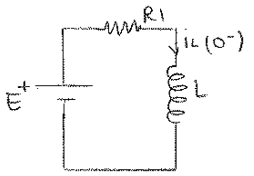
$$i(t) = \left(i(0) - i(\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty) \quad \text{per } t \geq 0$$

a) Calcolo τ : per $t \geq 0$

essendo un induttore $\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{L}{R}$

b) calcolo $i_L(0)$: $i_L(0^+)$ ma non potendo conoscerla e sapendo che non può avere dei salti → calcolo $i_L(0^-) = i_L(0^+)$

$i_L(0^-)$ vale per $t < 0$



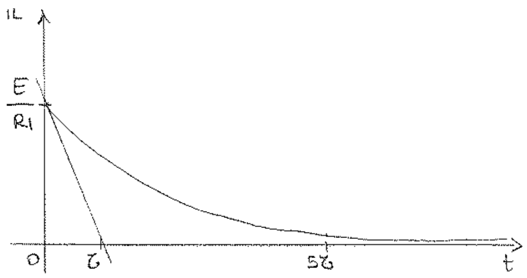
il circuito è in condizioni stazionarie con un generatore costante, tutto è costante → anche $i_L = \text{cost}$ → $V_L = 0$

L si comporta come un cortocircuito

$$i_L(0^-) = \frac{E}{R_1}$$

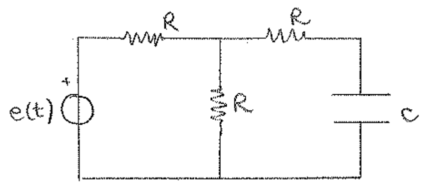
c) Calcolo $i_L(\infty)$: $t \geq 0$ il circuito è formato dalla sola parte di destra ed è inerte → $i_L(\infty) = 0$

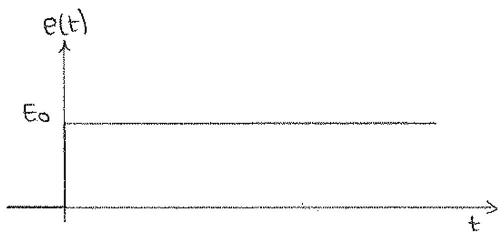
Soluzione : $i_L(t) = \left(\frac{E}{R_1} + 0\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + 0 = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{tR}{L}}$, $t \geq 0$



Anche in questo caso si annulla per $t \approx 5\tau$

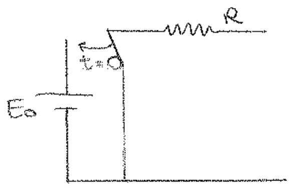
Esempio 3:





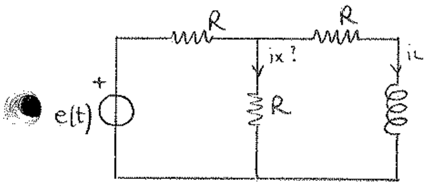
funzione gradino

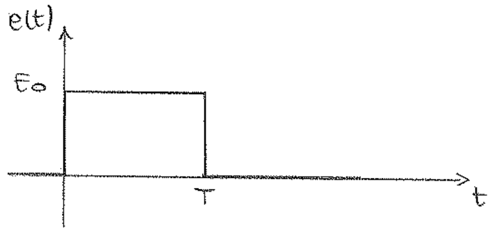
Il generatore e(t) non è rigorosamente costante ma per $t \geq 0$ posso considerarlo come costante e uguale a E_0 per $t \geq 0$



$$v_C(t) = \left(v_C(0^+) - v_C(\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(\infty) \quad t \geq 0$$

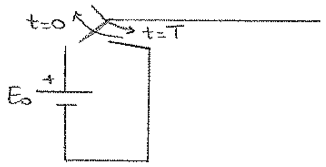
Esempio 4:





funzione onda quadra

Il generatore non è sempre costante ma posso spezzare in due parti la soluzione



Si risolve a tratti:

<u>1° tratto:</u> $0 \le t \le T$ considero solo il gradino

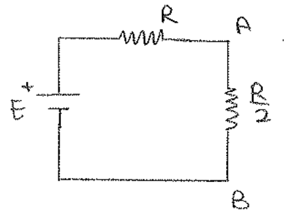
Soluzione al gradino:

$$i_L(t) = (i_L(0^+) - i_L(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty) \quad , 0 \le t \le T$$

a) calcolo τ: $\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2L}{3R}$

b) calcolo $i_L(0^+)$: calcolo $i_L(0^-)$ → per $t<0$ il circuito è inerte dunque $i_L(0^-) = 0$

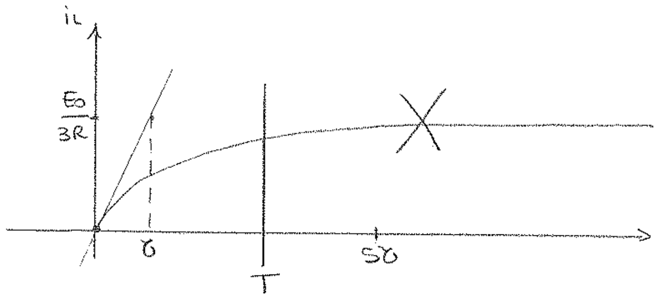
c) calcolo $i_L(\infty)$: tutto è tornato costante → condiz. stazionarie $i_L = cost$ $V = cost$ → L è un cortocircuito e voglio calcolare la corrente i_L che vi scorre



$$V_{AB} = E_0 \frac{\frac{R}{2}}{\frac{3}{2}R} = \frac{E_0}{3}$$

$$i_L(\infty) = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{E_0}{3R}$$

$$i_L(t) = \left(0 - \frac{E_0}{3R}\right)e^{-\frac{3tR}{2L}} + \frac{E_0}{3R} = \frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3tR}{2L}}\right) \qquad 0 \le t \le T$$



ma $0 \le t \le T$
quindi questa soluzione vale fino a $t = T$

<u>2° tratto</u>: $t \ge T$

cambiamento di variabile: $t' = t - T$ come se tutto fosse riazzerato

$$i_L(t') = (i_L(0^+) - i_L(\infty))e^{-\frac{t'}{\tau}} + i_L(\infty) \qquad t' \ge 0$$

a) calcolo di τ: $\tau = \frac{L(2)}{3R} = \frac{2L}{3R}$

b) calcolo $i_L(0^+)$: $i_L(t'=0^+) = i_L(t'=0^-)$

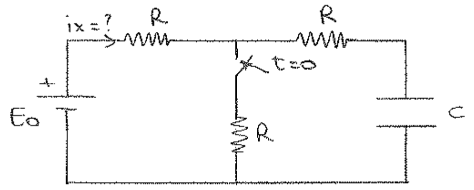
ma $t' = 0$ vuol dire $t = T$ quindi $i_L(t'=0^-) = i_L(t=T)$

o una variabile qualsiasi → la soluzione è data dalla soluz. di un'equaz. differenziale del primo ordine a coefficienti costanti:

$$y(t) = \big(y(0) - y(t\to\infty)\big)e^{-\frac{t}{\tau}} + y(t\to\infty) \quad , t \geq 0$$

Se nell'esempio 4 volessi calcolare i_x: non ho la certezza che le altre variabili siano funzioni continue (questo vale sempre <u>solo</u> per condensatori e induttori) → $y(0^+) \neq y(0^-)$

Esempio:



Voglio calcolare $i_x = ?$

$i_x(t) = \big(i_x(0^+) - i_x(\infty)\big)e^{-\frac{t}{\tau}} + i_x(\infty) \;,\; t \geq 0$

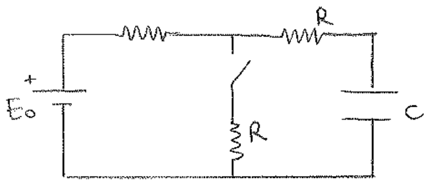
calcolare $i_x(0^+)$, $i_x(\infty)$, τ

a) calcolo τ: per τ non c'è alcuna novità, si calcola come sempre

$\tau = CR_{eq} = \frac{3}{2}R$

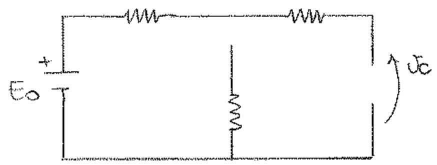
$R_{eq} = (R /\!/ R) + R$ per $t \geq 0$ con generatore spento $E_0 = 0$

b) Calcolo $i_x(0^+)$: non posso sfruttare $i_x(0^-)$ ma la continuità della tensione sul condensatore → prima calcolo la cond. iniziale sul condensatore e poi la converto



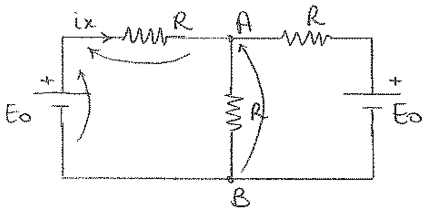
per $t < 0$ tutto è costante, $V_C = cost \rightarrow i = 0$

condensatore = circuito aperto



$v_C(0^-) = E_0$

per $t = 0^+$



Per continuità $v_C(0^+) = E_0$

da questo posso calcolarmi $i_x(0^+)$

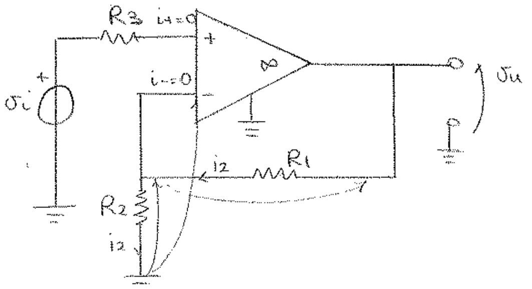
$$v_{AB} = \frac{\frac{E_0}{R} + \frac{E_0}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{2}{3}E_0$$

Applico KVL: $v_{AB} + v_R = E_0 \rightarrow \frac{2}{3}E_0 + Ri_x = E_0 \rightarrow i_x = \frac{1}{R}\left(E_0 - \frac{2}{3}E_0\right) = \frac{E_0}{3R}$

Devo quindi sfruttare la continuità del cond/induttore (e calcolare la condiz. iniziale), poi calcolare la variabile richiesta per $t = 0^+$ considerando che la cond. iniz (0^+) = cond. iniz. (0^-)

Esercizi cap. 6

6.4) $v_u = ?$



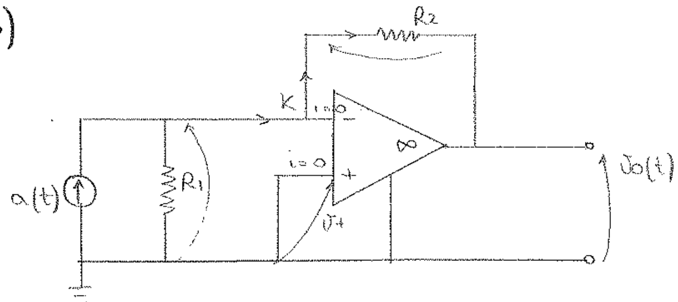
$v^- = v^+ = v_i = v_2$

$i_2 = \dfrac{v_i}{R_2}$ scorre anche in R1 essendo $i_- = 0$

$v_1 = R_1 i_2 = v_i \dfrac{R_1}{R_2}$

$v_u = v_1 + v_2 = v_i \left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)$

6.5)



$v_o(t) = ?$

$R_1 = 100\,k\Omega$

$R_2 = 10\,k\Omega$

$a(t) = 0{,}5\,\text{sen}(500t)\ mA$

$v^+ = v_K = v^- = 0\,V$ Equivalente di Thevenin: $e(t) = a(t) R_1$

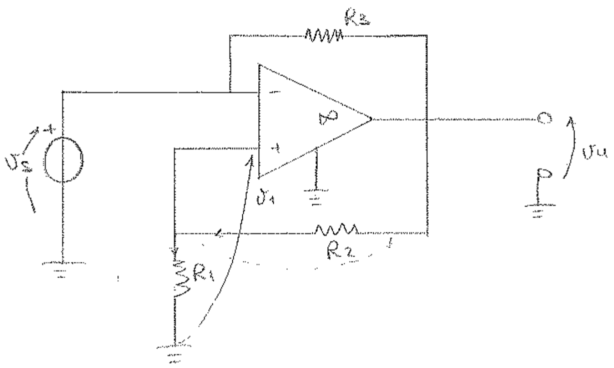
$a(t)$ scorre su R_1 ma anche su R_2 $\rightarrow v_{R1} = R_1 a(t) = 100\,k\Omega(0{,}5\,\text{sen}(500t))\,mA$

$v_{R1} = 50\,\text{sen}(500t)\,V$

$v_2 = R_2 a(t) = 10\,k\Omega(0{,}5\,\text{sen}(500t))\,mA = 5\,\text{sen}(500t)\,V$

$v_o(t) = v_K - v_2 = 0 - 5\,\text{sen}(500t)\,V$

6.6)



$R_1 = 3\,\Omega$ $v_s = 3V$

$R_2 = 9\,\Omega$

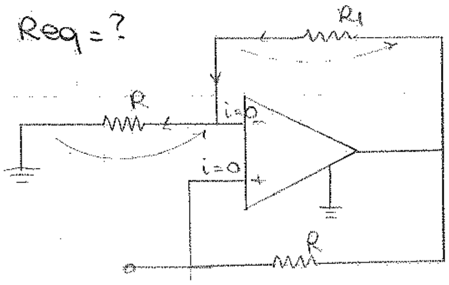
$R_3 = 9\,\Omega$

$v^+ = v^- = v_K = v_s = 3V$

$i_1 = \dfrac{v_+}{R_1} = \dfrac{3V}{3\Omega} = 1A$ scorre anche su R_2 $v_2 = R_2 i_1 = 9V$

$v_u = v_1 + v_2 = 3V + 9V = v_s + \dfrac{R_2}{R_1} v_s = v_s \left(\dfrac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = 3\left(\dfrac{12}{3}\right) = 12V$

6.7) $R_{eq} = ?$



$v_+ = v_- = v_R$

8.1) $L_{eq} = L_1 + L_2$ $\qquad V = (L_1 + L_2)\frac{di}{dt}$

$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ $\qquad V = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\frac{di}{dt}$

8.2) a) $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ $\qquad V = \frac{q}{C_{eq}} = \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right) q$

b) $C_{eq} = C_1 + C_2$ $\qquad V = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1 + C_2}$

a) $i = C\frac{dV}{dt} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\frac{dV}{dt}$

b) $i = C\frac{dV}{dt} = (C_1 + C_2)\frac{dV}{dt}$

8.3) a) condensatore → v deve essere continua

$v(t) - v_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_0^{t=T} \frac{A}{T}t\,dt + \int_T^t A\,dt = \frac{1}{C}\left[\frac{At^2}{2T}\right]_0^T + \frac{1}{C}\left[At\right]_T^t =$

$= \frac{AT}{2C} + \frac{1}{C}At - \frac{1}{C}AT = \frac{1}{C}At - \frac{AT}{2C}$

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{C}\frac{A}{T}\frac{t^2}{2} & \text{se } 0 < t < T \\ \frac{At}{C} - \frac{AT}{2C} & \text{se } t > T \end{cases}$$

b) se $t < 0$ $\quad v(t) = L\frac{di}{dt} = 0$

se $0 < t < T$ $\quad v(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{T}t\right) = \frac{LA}{T}$

se $T < t < 2T$ $\quad v(t) = 0$

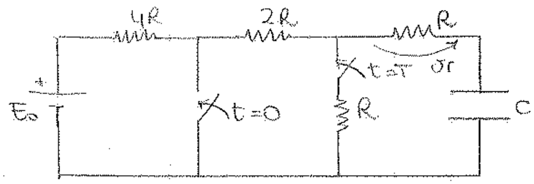
se $2T < t < 3T$ $\quad v(t) = L\frac{d}{dt}\left(-\frac{A}{T}t\right) = -\frac{LA}{T}$

se $t > 3T$ $\quad v(t) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 274

LEZIONE 20 22-11-2012

Esempio:



$v_r = ?$

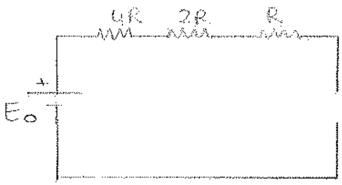
Anche se non è privilegiata vale:

$v_r(t) = (v_r(0^+) - v_r(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + v_r(\infty)$, $0 \le t < T$

Variabili di stato: grandezze privilegiate, nel condensatore v, nell'induttore i.
le altre due (i nel cond. e v nell'indut.) si dicono variabili complementari

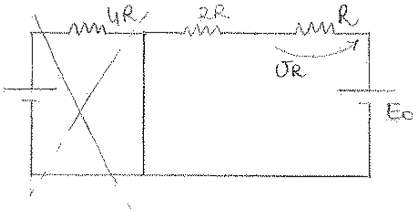
1) Calcolo di τ: τ per $t \ge 0$ e $\tau = CR_{eq}$, $t \ge 0$
non considero R colleg. al secondo interruttore $\rightarrow R_{eq} = 2R + R = 3R$
$\tau = 3RC$, $t \ge 0$

2) Calcolo $v_r(0^+)$: non essendo una variabile privilegiata, non è una funzione continua $\rightarrow v_r(0^+) \ne v_r(0^-)$ quindi non posso ricavarmela direttamente
Tuttavia so che $v_c(0)$ è continua $\rightarrow$ calcolo $v_c(0^-) = v_c(0^+)$
per $t < 0$ siamo in condizioni stazionarie e quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto ($dV_c = 0 \rightarrow i = 0$)



le resistenze si comportano come monopoli $\rightarrow v_R = 0$
$v_c(0^-) = E_0$

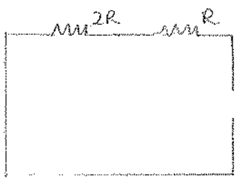
per $t = 0^+$ $v_c(0^+) = E_0$ ma adesso il 1° interruttore è chiuso



Circuito completamente serie $\rightarrow$ partitore di tensione

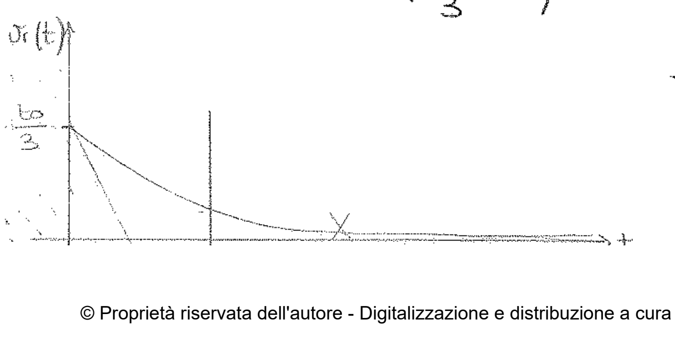
$$v_R(0^+) = \frac{E_0 R}{2R + R} = \frac{E_0}{3}$$

3) Calcolo $v_r(\infty)$



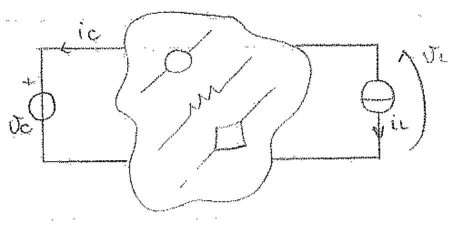
sono in condizioni stazionarie ma il circuito è inerte $\rightarrow v_r(\infty) = 0$

Soluzione 1: $v_r(t) = \left(\frac{E_0}{3} - 0\right)e^{-\frac{t}{3RC}} + 0 = \frac{E_0}{3}e^{-\frac{t}{3RC}}$, $0 \le t \le T$



$T = 6RC = 2\tau$

Suppongo che v_C e i_L siano note e che i generatori siano costanti



$$i_C = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n + \beta_1 \hat{i} + \dots + \beta_2 \hat{i} + m_{11} v_C + m_{12} i_L$$

$$v_L = \alpha_1' e_1 + \dots + \alpha_n' e_n + \beta_1' \hat{i}_1 + \dots + \beta_n' \hat{i}_n' + m_{21} v_C + m_{22} i_L$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 \hat{i}_1 + \dots + \beta_n \hat{i}_n + m_{11} v_C + m_{12} i_L = u_1 + m_{11} v_C + m_{12} i_L$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} = u_2 + m_{21} v_C + m_{22} i_L$$

considerando con u_1 e u_2 gli effetti interni

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{u_1}{C} + \dfrac{m_{11} v_C}{C} + \dfrac{m_{12} i_L}{C} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{u_2}{L} + \dfrac{m_{21} v_C}{L} + \dfrac{m_{22} i_L}{L} \end{cases} \Rightarrow$$ sistema di due equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee

Il n° di equazioni differenziali è uguale al n° di elementi differenziali

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x} + \vec{S}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{C} & \frac{m_{12}}{C} \\ \frac{m_{21}}{L} & \frac{m_{22}}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \vec{S} = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{C} \\ \frac{u_2}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

u_1, u_2 dipendono da generatori interni $\rightarrow$ costanti

Se si tratta di due condensatori $\rightarrow \vec{x} = [v_{C1} \quad v_{C2}]$ se 2 indutt. $\vec{x} = [i_{L1} \quad i_{L2}]$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_o(t) + \vec{x}_p$$

$\vec{x}_o$ = soluzione del sistema omogeneo associato

$\vec{x}_p$ = soluzione particolare - vettore formato da costanti $X = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

Soluzione dell'omogenea:

$$v_C = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$i_L = K_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t}$$

λ_1, λ_2 sono gli autovalori della matrice A dei coefficienti

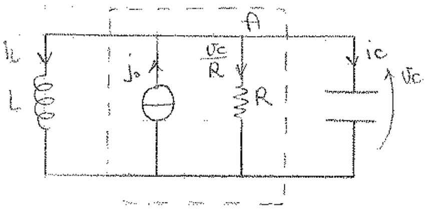
$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - (a_{21} a_{12}) = 0$$

$$a_{11} a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{21} a_{12} = 0$$

1°) Costruire la matrice A dal circuito

- rifare la dimostrazione e scrivere l'eq. differenziale



Mediante la sovrapposizione degli effetti trovo il sistema differenziale

$x = [v_C \quad i_L]$

- per ogni elemento differenziale guardo la variabile complementare →

1) se questa è una corrente scrivo una KCL al nodo dell'elemento differenziale

(es: nel condensatore è i_C)

Applico KCL in A: $j_0 = i_L + \frac{v_C}{R} + i_C = i_L + \frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt}$

$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{RC} - \frac{i_L}{C} + \frac{j_0}{C}$ 1ª eq. differenziale

2) se questa è una tensione applico una KVL su un percorso chiuso che include l'elemento differenziale

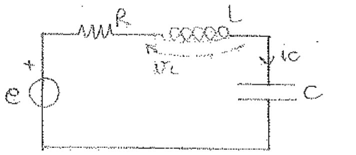
(es: percorso chiuso che contiene induttore e condensatore)

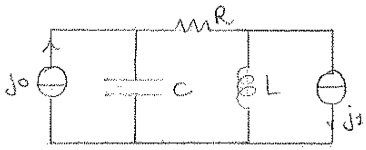
Applico KVL: $v_L = v_C \rightarrow v_C = L\frac{di_L}{dt}$

$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C$ 2ª eq. differenziale

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{j_0}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scrivere a casa i due circuiti → eq. diff. con questo metodo





2) Trovo gli autovalori di A:

$$\det\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} - \lambda & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\lambda \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{RC} - \lambda\right)(-\lambda) + \frac{1}{CL} = \frac{\lambda}{RC} + \lambda^2 + \frac{1}{CL} = \lambda^2 + \frac{\lambda}{RC} + \frac{1}{CL} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2C^2} - \frac{4}{CL}}}{2}$$ ho ottenuto i due autovalori

3) Calcolo degli autovettori:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{RC} - \frac{\eta_1}{C} = \lambda_1 \rightarrow \eta_1 = -\frac{1}{R} - \lambda_1 C \\ \text{non c'è bisogno che la scrivo} \end{cases}$$

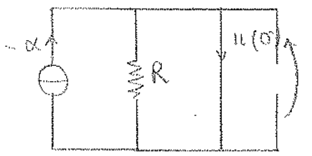
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{RC} - \frac{\eta_2}{C} = \lambda_2 \rightarrow \eta_2 = -\frac{1}{R} - \lambda_2 C$$

4) Calcolo le condiz. iniziali:

$v_C(0^+)$, $i_L(0^+)$ $\Rightarrow$ ma essendo continue $\Rightarrow$ $v_C(0^-)$, $i_L(0^-)$

per $t < 0$ il circuito è in condizioni stazionarie → tutto è costante → l'induttore si comporta come cortocircuito, il condensatore come circuito aperto



$v_C(0^-) = v_{cortocircuito} = 0$

$i_L(0^-) = -\alpha$

5) Calcolo le condizioni finali

per $t \rightarrow \infty$ il circuito è in condizioni stazionarie: induttore ____, condensatore ____ ____ → stesso circuito punto 3 ma con $j_0 = \alpha$

$v_C(\infty) = 0$

$i_L(\infty) = \alpha$

6) Posso scrivere il sistema per ricavare k_1 e k_2

$$\begin{cases} v_C(0^+) = k_1 + k_2 + v_C(\infty) \\ i_L(0^+) = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + i_L(\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = k_1 + k_2 + 0 \rightarrow k_1 = -k_2 \\ -\alpha = k_1\left(-\frac{1}{R} - \lambda_1 C\right) + k_2\left(-\frac{1}{R} - \lambda_2 C\right) + \alpha \end{cases}$$

Ricavo k_1 e k_2 e sostituisco tutto nell'eq. finale

$$-2\alpha = k_2\left(\frac{1}{R} + \lambda_1 C - \frac{1}{R} - \lambda_2 C\right) = k_2\left(\lambda_1 C - \lambda_2 C\right) \rightarrow k_2 = \frac{-2\alpha}{\lambda_1 C - \lambda_2 C}$$

<u>Soluzione:</u>

$$\begin{cases} v_C(t) = \frac{2\alpha}{(\lambda_1 - \lambda_2)C} e^{\lambda_1 t} - \frac{2\alpha}{(\lambda_1 - \lambda_2)C} e^{\lambda_2 t} \\ i_L(t) = \frac{2\alpha}{C(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(-\frac{1}{R} - \lambda_1 C\right)e^{\lambda_1 t} - \frac{2\alpha}{(\lambda_1 - \lambda_2)C}\left(-\frac{1}{R} - \lambda_2 C\right)e^{\lambda_2 t} + \alpha \end{cases}$$