NUMERO: 740

DATA: 20/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Cavallaro

MATERIA: Analisi dei Segnali

Prof. Visentin

LEZIONE 1

1- Calcolare parte reale e immaginaria, modulo e fase di:

$C_1 = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$ $\qquad C_3 = j$

$C_2 = 3+j$ $\qquad C_4 = 1-j$

Disegnarli nel piano complesso

$C_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} + j2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$ $\qquad |C_1| = 2$ $\qquad \varphi C_1 = \frac{\pi}{4}$

$C_2 = 3+j$ $\qquad |C_2| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ $\qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \sim 0{,}1\pi \sim 18°$

$C_3 = j$ $\qquad |C_3| = 1$ $\qquad \varphi C_3 = \frac{\pi}{2}$

$C_4 = 1-j$ $\qquad |C_4| = \sqrt{2}$ $\qquad \varphi C_4 = -\frac{\pi}{4}$

Formula di Eulero

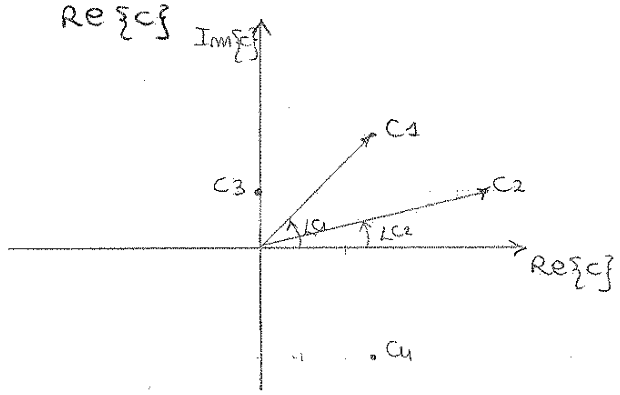
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = Re\{e^{j\theta}\} \qquad Re\{c\} = \frac{c+c^*}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = Im\{e^{j\theta}\} \qquad Im\{c\} = \frac{c-c^*}{2}$$

$$|c|^2 = \sqrt{Re\{c\}^2 + Im\{c\}^2} = cc^*$$

$$\angle c = tg^{-1}\frac{Im\{c\}}{Re\{c\}}$$



$e^{j2\pi} = 1$

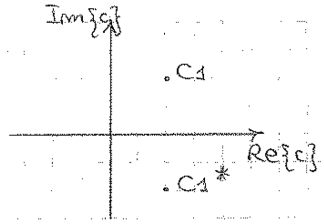
$e^{j2k\pi} = 1$

$e^{jk\pi} = (e^{j\pi})^k = -1^k$

2 - Scrivere i complessi coniugati

$C_1^* = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$ $\qquad C_2^* = 3-j$

$C_4^* = 1+j$ $\qquad C_3^* = -j$



3 - Disegnare quantitativamente il grafico quotato dei seguenti segnali (ex: 4):

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad z(t) = x(t) + y(t)$$

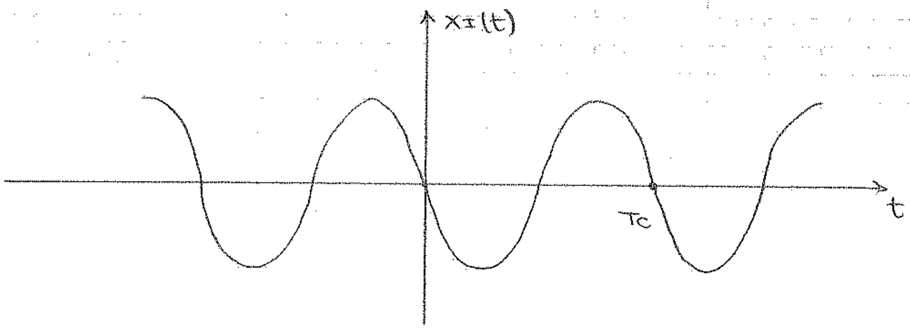
$$y(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & |t| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

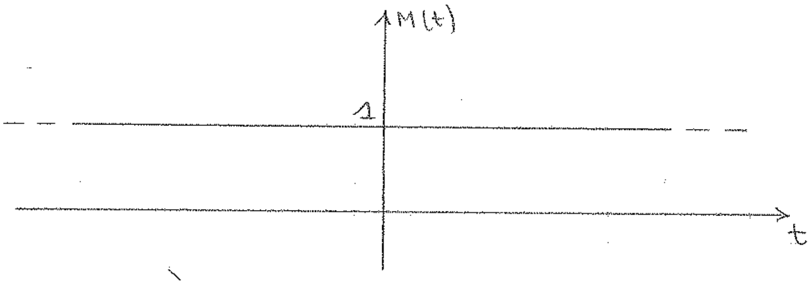
Il max del segnale è 1, il minimo -1, il secondo max si avrà per $t = T_C$ (T con C, non "T di C")

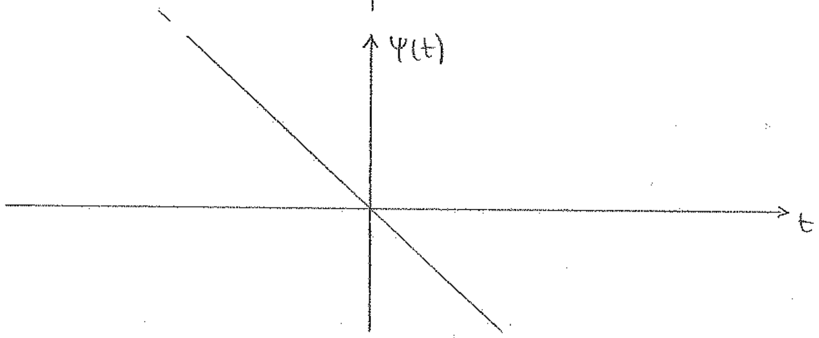
NB: Non scrivere 2π poiché dimensionalmente errato!

$x_R(T_C) = \cos(2\pi f_C T_C) = 1 = \cos(2\pi)$

$2\pi f_C T_C = 2\pi \rightarrow f_C T_C = 1 \rightarrow T_C = \frac{1}{f_C}$







5- Disegnare nel piano complesso i punti corrispondenti a $x(t)$ per $t = 0, \frac{1}{8f_C}, \frac{1}{4f_C}, \frac{3}{8f_C}, \frac{1}{2f_C}, \frac{1}{f_C}, \frac{2}{f_C}$

$x(0) = 1$

$x\left(\frac{1}{8f_C}\right) = e^{-j2\pi f_C \frac{1}{8f_C}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

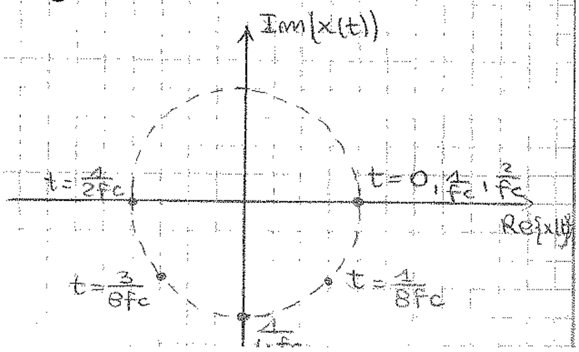
$x\left(\frac{1}{4f_C}\right) = e^{-j2\pi f_C \frac{1}{4f_C}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

$x\left(\frac{3}{8f_C}\right) = e^{-j2\pi f_C \frac{3}{8f_C}} = e^{-j\frac{3}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x\left(\frac{1}{2f_C}\right) = e^{-j2\pi f_C \left(\frac{1}{2f_C}\right)} = e^{-j\pi} = -1$

$x\left(\frac{1}{f_C}\right) = e^{-j2\pi f_C \frac{1}{f_C}} = 1$

$x\left(\frac{2}{f_C}\right) = e^{-j2\pi f_C \left(\frac{2}{f_C}\right)} = 1$



LEZIONE 2 06-03-2013

Libri: Lo Presti, Neri: L'analisi dei segnali, - Introduz. ai processi casuali
- Dovis, Magli, "Esercizi svolti di teoria dei segnali" - Clut

Esame scritto: 2 ore

Programma da scaricare: OCTAVE / Mathlab
www.cuberry.com/octave

Considero la sinusoide complessa: $x(t) = e^{-j2\pi f_c t}$

Al calcolatore non posso chiedere di disegnare $t \in (-\infty, +\infty)$ ma devo determinare un intervallo

Octave ha bisogno di un vettore con i vari tempi e di uno con tutte le parti reali.

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \quad t_k = t_{k-1} + dt$$

Suppongo di considerare N=20 campioni nell'intervallo da 0 a $\frac{1}{f_c}$ $\qquad dt = \frac{1/f_c}{N}$

File: exp.m   mettere sempre l'estensione .m

```
fc = 10.  % freq. centrale in Hz        (10., 1. poiché reali)
Tc = 1./fc;  % periodo in secondi
t = [0 : dt : 5*Tc]';     l'apice' trasforma il vettore riga in colonna;
dt = Tc/N;     % passo di campionamento
N = 20;     % num. di campioni per periodo
```

(Se manca ; viene stampato il comando, altrimenti solo eseguito)

```
x = exp(-j*2* pi *t*fc);% esponenziale complesso
xr = real(x);
plot (t, xr);    (t nelle ascisse, xr nelle ordinate)
[ xi = imag(x);      figure (1);
[ plot (t, xr, t, xi);     (per vedere due grafici)
xlabel 't', ylabel 'segnali', grid on   (mettere la griglia)
figure (2)
plot (xr, xi), grid on
```

Per migliorare la figura aumentare il n° di campioni
(es: N=4 rombo; N=20 circonferenza ma con 20 lati, N=100 si percepisce una circonferenza)

Se cambio il segnale:

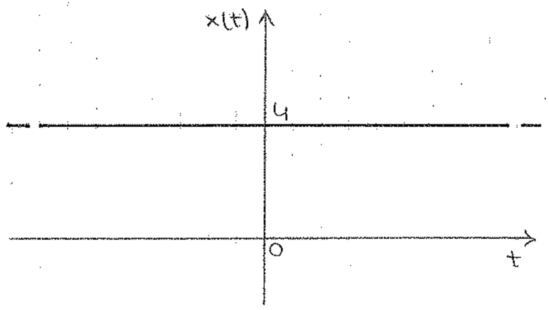
ESERCITAZIONE 1

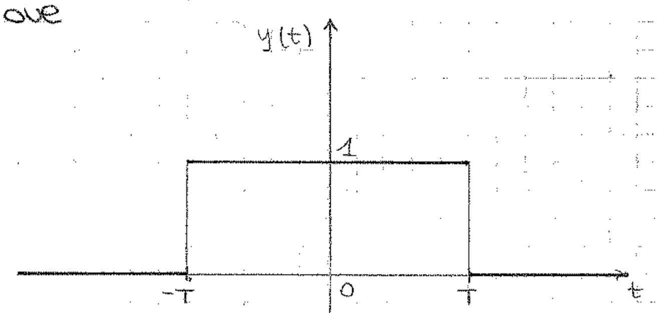
1 - Scrivere una tabella con i valori di $\text{sen}\varphi$, $\cos\varphi$, $e^{j\varphi}$ con $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi$

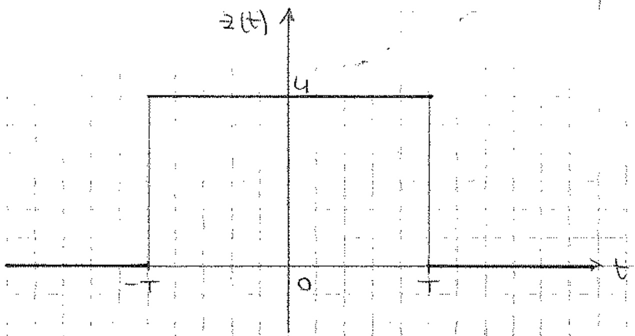
$\varphi = 0$	$\text{sen}0 = 0$	$\cos 0 = 1$	$e^{j0} = 1$
$\varphi = \frac{\pi}{4}$	$\text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$	$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$	$e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + j\,\text{sen}\frac{\pi}{4}$
$\varphi = \frac{\pi}{3}$	$\text{sen}\pi/3 = \sqrt{3}/2$	$\cos\pi/3 = 1/2$	$e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\text{sen}\pi/2 = 1$	$\cos\pi/2 = 0$	$e^{j\frac{\pi}{2}} = 1j$
$\varphi = \frac{3}{4}\pi$	$\text{sen}\,3\pi/4 = \sqrt{2}/2$	$\cos 3\pi/4 = -\sqrt{2}/2$	$e^{j\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2$
$\varphi = \pi$	$\text{sen}\pi = 0$	$\cos\pi = -1$	$e^{j\pi} = -1$

2 - Disegnare il grafico quotato per le seguenti funzioni di t:

$x(t) = 4$ $\qquad y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\qquad z(t) = x(t)\,y(t)$



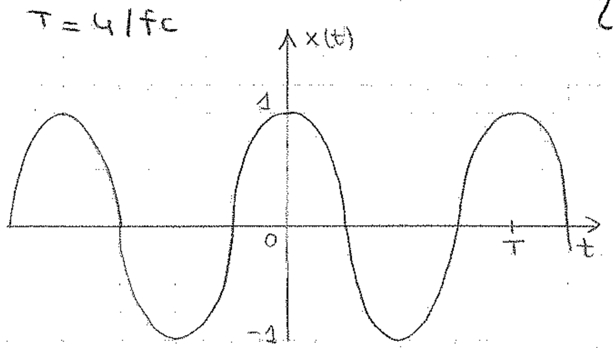


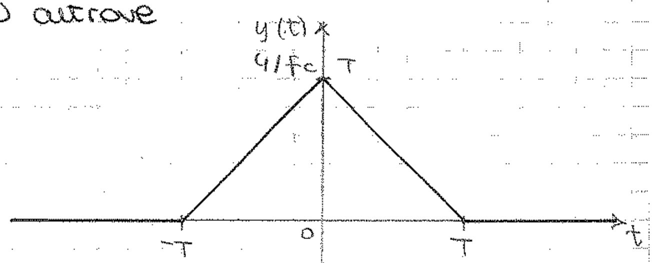


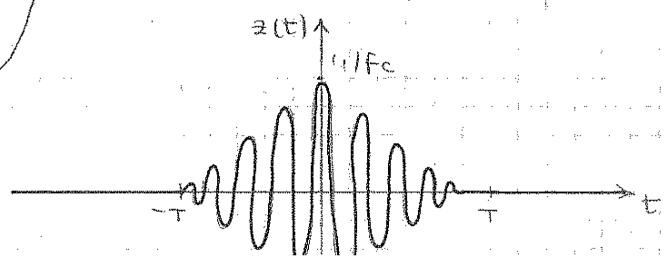
3 - Disegnare il grafico quotato per le seguenti funzioni:

$x(t) = A\cos(2\pi f_c t)$ $\qquad y(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\qquad z(t) = x(t)\,y(t)$

$T = 4/f_c$







LEZIONE 3 07-03-2013

t=[0:dt:5*Ts]; piecewise linear

M = t/T * (t≤T) + (t>T)

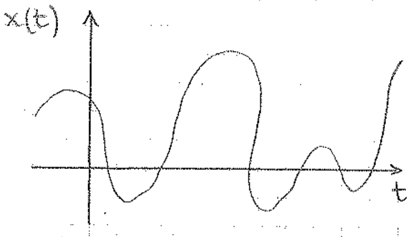
↳ per t≤T considera t/T, per t>T scarta la prima e rimane solo 1

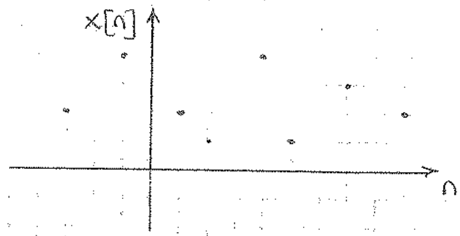
Classificazione dei segnali:

- segnali determinati (niente di casuale, tutti i parametri sono noti)
- segnali casuali (processi casuali): es: voce, ECG

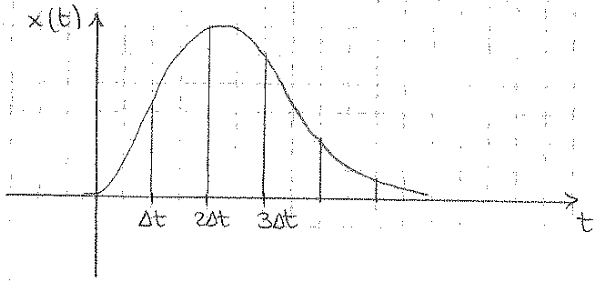
1: espressione matematica, analitica del segnale

- Segnale tempo continuo: continuo nel tempo (1) → $x(t)$ $t \in R$
- segnale tempo discreto: sequenza di numeri → $x[n]$ $n \in Z$





I campionatori permettono di passare da un tipo di segnale all'altro: es: ogni Δt secondi il campionatore preleva il segnale



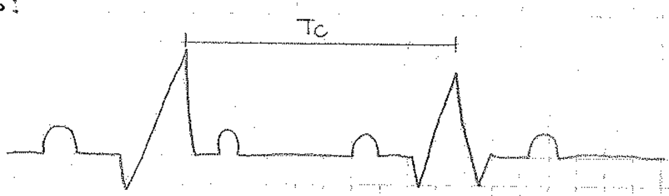
Δt costante

$x[n] = x(n\Delta t)$

All'uscita del campionatore vi è una sequenza di numeri

Talvolta il Δt non è sempre costante ma può variare nel tempo

Es:



l'intervallo Δt non è costante nel tempo

- SEGNALE TEMPO CONTINUO (TC)
- SEGNALE TEMPO DISCRETO (TD)

Segnali a tempo continuo determinati

- ad energia finita
- periodici
- non periodici a potenza finita

Segnali a tempo discreto determinati:

- ad energia finita
- periodici
- non periodici a potenza finita

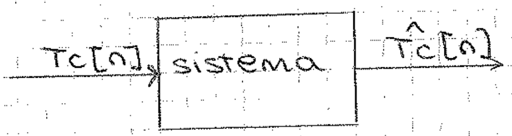
SEGNALI

- DETERMINATI
  - TC
  - TD
  - • energia finita
  - • periodici
  - • non periodici a potenza finita
- CASUALI
  - TC
  - TD
  - • stazionari
  - • ciclostazionari

Esempio di <u>SISTEMA TEMPO DISCRETO</u>

tempi $Tc[n]$ tra un max e il succes. nel sistema cardiaco

$\hat{Tc}[n]$ = stima di $Tc[n]$ $= \left(Tc[n] + Tc[n-1] + Tc[n-2] \right) / 3$ (media mobile → rimuovo una buona parte di rumore)

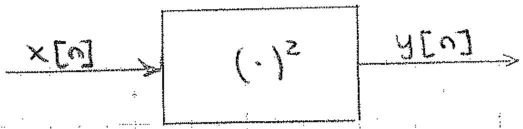


il sistema esegue cioè la media mobile

I sistemi possono essere:

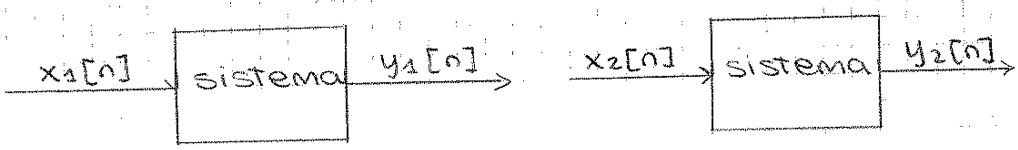
- <u>lineari</u>: vale la sovrapposizione degli effetti (se e solo se)
- <u>non lineari</u>

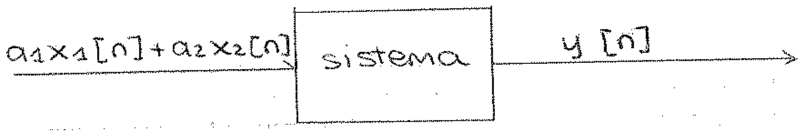
Un esempio di sistema non lineare è:



Se all'interno invece moltiplico $x[n]$ per 5 il sistema è lineare, se a $x[n]$ sommo 1 non lo è.

Per vedere se un sistema è lineare:





Il sistema è lineare se $y[n]$ è del tipo $y[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$

Nel terzo esempio $y_1[n] = x_1[n] + 1$

$y_2[n] = x_2[n] + 1$

$y[n] = x[n] + 1 = (a_1 x_1[n] + x_2[n] a_2) + 1 \neq a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$

Difatti $a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] = a_1 (x_1[n] + 1) + a_2 (x_2[n] + 1) =$

$= a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_1 + a_2$

la linearità deve valere per $\forall\, a_1, a_2 \neq 0$

Se invece moltiplico $x[n]$ per 5 ottenendo $y[n]$ il sistema è lineare → $y_1[n] = 5 x_1[n]$

$y_2[n] = 5 x_2[n]$

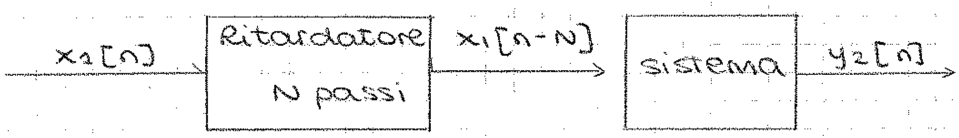
$y[n] = 5 x[n] = 5 (a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]) = a_1 5 x_1[n] + a_2 5 x_2[n] =$

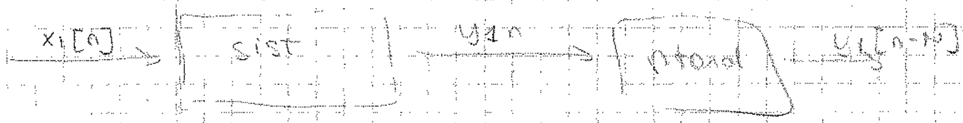
$= a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$

Talvolta la presenza di un sistema si indica con $y_1[n] = \mathcal{T}\{x_1[n]\}$

In questo caso il sistema è tempo invariante, se il secondo grafico è completamente diverso allora è tempo variante

Esiste un sistema detto ritardatore di N passi che ritarda $x_1[n]$

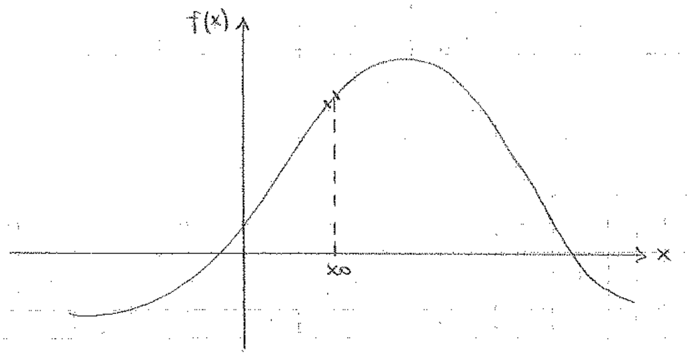




Il sistema è tempo invariante se $y_2[n] = y_1[n-N]$ e se è possibile scambiare la posizione relativa di ritardatore e sistema senza che l'uscita cambi

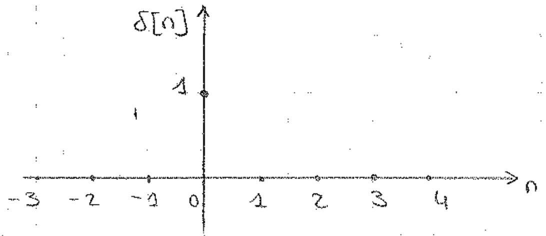
$$y_1[n] = \tau\{x_1[n]\}$$
$$y_2[n] = \tau\{x_1[n-N]\}$$

Il sistema è tempo invariante se $y_2[n] = y_1[n-N]$

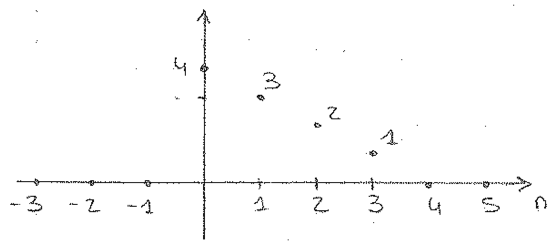


tutta la f(x) non è lineare ma se lavoro sul punto di lavoro xo posso considerarla come lineare

Segnale $\delta[n]$



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{se } n\neq 0 \end{cases}$$



$$x[n] = \underbrace{4}_{x[0]}\delta[n] + \underbrace{3}_{x[1]}\delta[n-1] + \underbrace{2}_{x[2]}\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

per $x[0] = 4 = 4(1) + 0 + 0 + 0 = 4$

$x[1] = 3 = 0 + 3 + 0 + 0 = 3$

$x[2] = 2 = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$

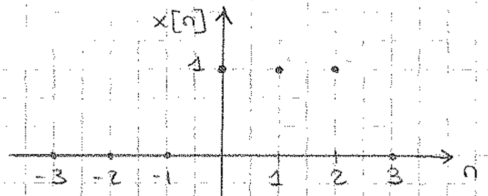
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

($k = -\infty \rightarrow +\infty$ poiché non danno valore)

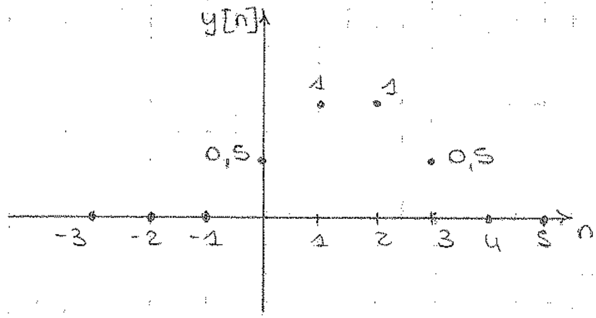
Tale formula vale anche per un processo casuale

Quindi per calcolare la risposta all'impulso bastava sostituire a $x[n]$ $\delta[n]$ (non è sempre così)

- Calcolo dell'uscita mediante la convoluzione



n	x[n]	y[n]
-2	0	0
-1	0	0
0	1	0,5
1	1	1
2	1	1
3	0	0,5



$$y[n] = 0{,}5\,\delta[n] + 1\,\delta[n-1] + 1\,\delta[n-2] + 0{,}5\,\delta[n-3]$$

Non è possibile avere $h[n] \neq 0$ per $n<0$; $h[n]$ è sicuramente $=0$ per $n<0$ poichè non è possibile avere una risposta prima di applicare un impulso

$y[n] = x[n] * h[n] =$ Calcolo la convoluzione di $x[n]$ e $h[n]$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

per $n=0$ $\quad y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[-k] = x[0]h[-0] + x1(h[-1]) +$

$+ x2\,h[-2] = x[0]h[0] = 0{,}5$

per $n=1$ $\quad y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[1-k] = x[1]h[0] + x2h[-1] + x0h[1]$

$= x1h[0] + x[0]h[1] = 1$

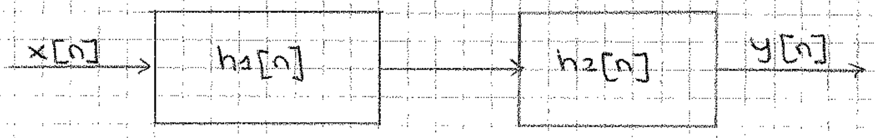
per $n=2$ $\quad y(2) = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 1$

$y[n] = x[n] * h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] * \{0{,}5\,\delta[n] + 0{,}5\,\delta[n-1]\} =$

$= 0{,}5\,\delta(n) + 0{,}5\,\delta[n-1] + 0{,}5\,\delta[n-1] + 0{,}5\,\delta[n-2] + 0{,}5\,\delta[n-2] + 0{,}5\,\delta[n-3]$

LEZIONE 4 -

Es: 2)

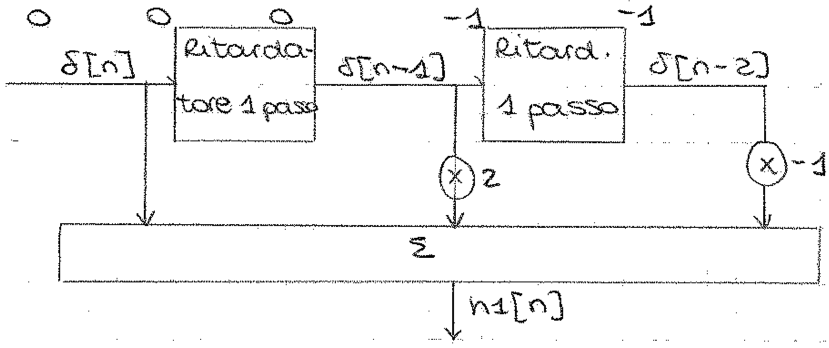


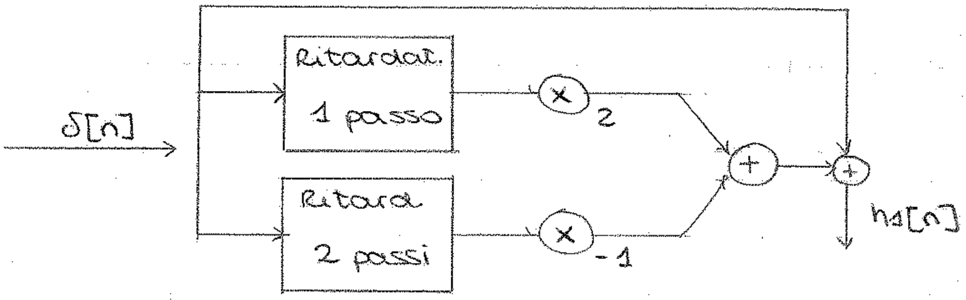
$h_1[n]$ = risposta impulso sottosistema 1 $= \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$

$h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-3]$

n	δ[n]	δ[n-1]	δ[n-2]	h1[n]
-2	0	0	0	0
-1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	2
2	0	0	1	-1
0	0	0	0	0

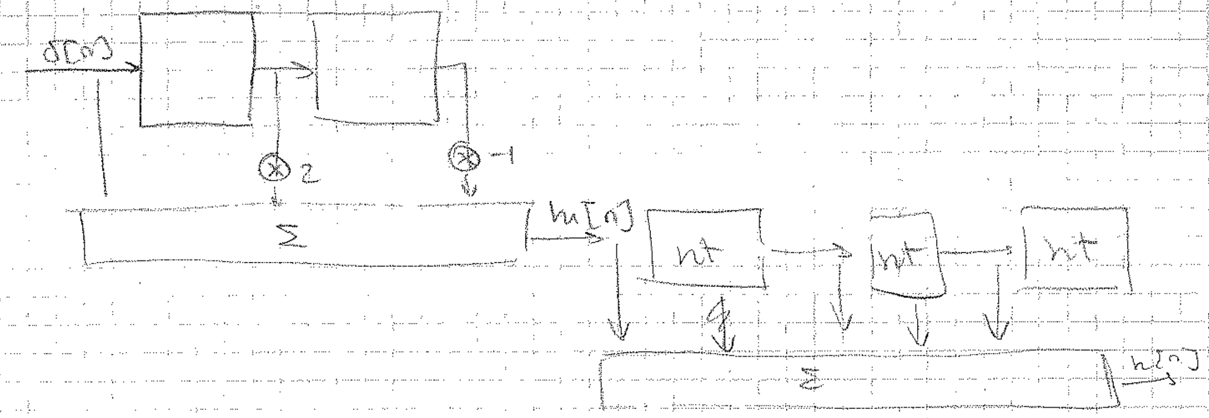
n	h1[n]	hi[n]	h1[n-1]	hi[n-3]	h2[n]
-1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	2	2	1	0	3
2	-1	-1	2	0	1
3	0	0	-1	1	0
4	0	0	0	2	2
5	0	0	0	-1	-1





Impulso o delta sono sinonimi

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$



n	h[n]
<	0
0	1
1	3
2	1
3	0

Quando aumento di 1 n → i numeri vengono traslati di un posto a destra

In mathlab:

h1[n] = [1,2,-1];
h2[n] = [1,1,0,1]
h = con (h1,h2);
h

Stampa 1 3 1 0 2 -1

h1 ha dim 3 , h2 = 4 convoluzione = 3 + 4 - 1 = 6

<u>dim convolut = dim V1 + dim V2 - 1</u>

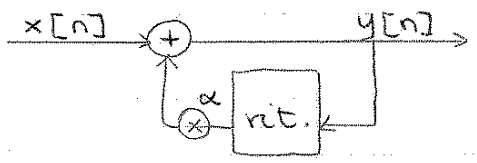
4) Scrivere le equazioni che legano x[n] e y[n]

Prima di tutto battezzare i segnali (w[n] e z[n])

$$\begin{cases} y[n] = w[n]\beta_1 + z[n]\beta_2 + z[n-1]\beta_3 \\ w[n] = x[n] + \alpha_1 z[n-1] \\ z[n] = w[n-1] + \alpha_2 z[n-1] \end{cases}$$ → equazione alle diff. ricorsiva

Equazioni alle differenze (per il tempo discreto) → analoghe delle eq. differenziali per il tempo continuo

3) $y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$ Scrivere la h[n] e lo schema a blocchi



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 261

LEZIONE 5

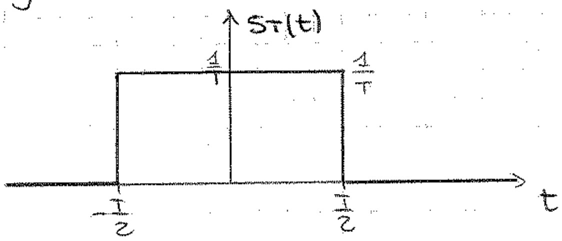
Sistemi a tempo discreto

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, \delta[n-k]$$

DELTA DI DIRAC

Segnale tempo continuo $\delta(t)$ non standard



$$\delta_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

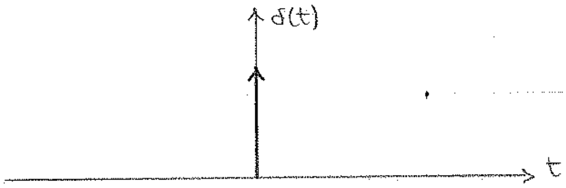
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)\, dt = 1$$

$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t)$ (simile a $\delta[n]$ ma continua)

$\lim_{T \to 0} \delta(t) = \infty$ la base diventa infinitesima ma l'altezza infinita e l'area vale sempre 1.

Quindi $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

Si disegna:



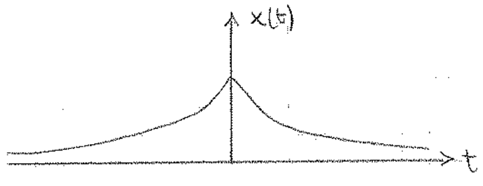
Rappresentazione grafica di $\delta(t)$ = freccia con altezza = area

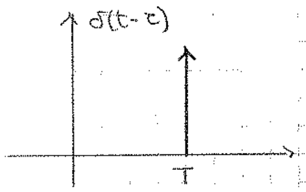
Proprietà:

$x(t) = e^{-\frac{|t|}{t_0}}$

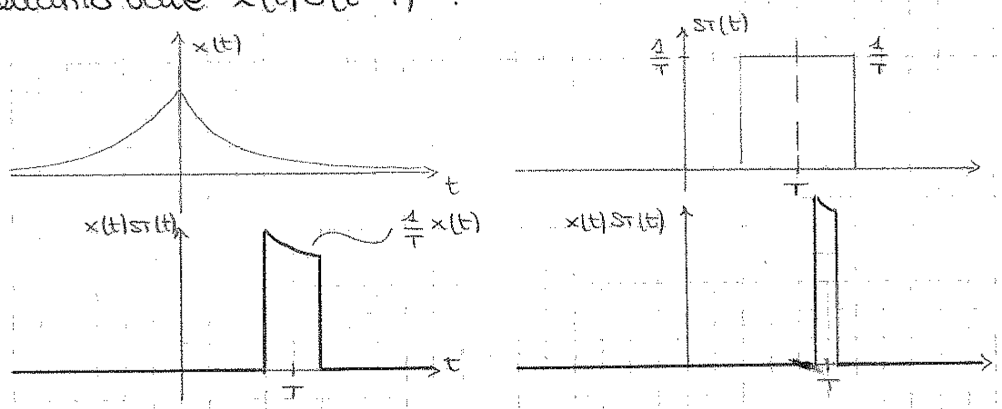
$x(t)\,\delta(t-\tau) = ?$

$\delta(t-T)$ per $t = T$ vale ∞





Quanto vale $x(t)\,\delta(t-T) = ?$



il $\lim_{t \to \tau} x(t)\,\delta(t-\tau) = x(\tau)\,\delta(t-\tau)$ campionare $x(t)$ in $t = \tau$

CAMPIONAMENTO

(È un $\infty \cdot x(\tau)$, non un semplice ∞)

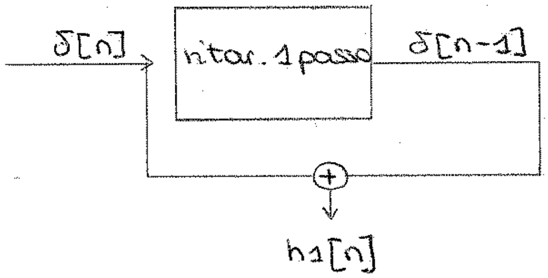
Per la convoluzione: NON scrivere $\int x(t)h(t-\tau)d\tau$ poichè è $x(\tau)$ oppure $\int x(\tau)h(\tau-t)d\tau$ non è $\tau-t$ ma $t-\tau$

ESERCITAZIONE 2

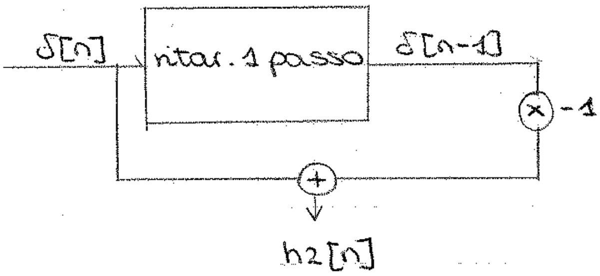
1) $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

   $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

a) schema a blocchi di $h_1[n]$:



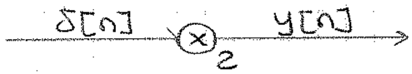
b) Schema a blocchi $h_2[n]$:



c) Calcolare $h[n] = h_1[n] + h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n] - \delta[n-1] =$
$= 2\delta[n]$

d) $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k]$

Sistema equivalente:



2) $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

   $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

   Calcolare $h[n]$, disegnare il grafico di $h[n]$, schema a blocchi alternativo.

$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k] = h[0]h_2[n] + h[1]h_2[n-1] =$

n	$\delta[n]$	$\delta[n-1]$	$h_1[n]$
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
2	0	0	0

$= h_2[n] + h_2[n-1] =$

$= \delta[n] - \cancel{\delta[n-1]} + \cancel{\delta[n-1]} - \delta[n-2] =$

$= \delta[n] - \delta[n-2]$

$$= a_1 \int_{t-1}^{t} x_1(\tau)d\tau + a_2 \int_{t-1}^{t} x_2(\tau)d\tau + a_1 x_1(t-2) + a_2 x_2(t-2) =$$

$$= a_1 \int_{t-1}^{t} x_1(\tau)d\tau + a_1 x_1(t-2) + a_2 \int_{t-1}^{t} x_2(\tau)d\tau + a_2 x_2(t-2) =$$

$$= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

Dunque il sistema è lineare, cioè vale la sovrapposizione degli effetti

- Verificare se il sistema è tempo invariante:

$$y_2[n] = y_1[n-N]$$

dove $y_1[n-N] = \tau\{y_1[n]\}$ $\quad x_1 \rightarrow y_1[n] \rightarrow y_1[n-N]$

$y_2[n] = \tau\{x_1[n-N]\}$ $\quad x_1 \rightarrow x_1[n-N] \rightarrow y_2[n]$

Si calcola $y_1(t)$ per $x_1(t)$: $y_1(t) = \tau\{x_1(t)\} = \int_{t-1}^{t} x(\tau)d\tau + x_1(t-2)$

poi si ritarda di un $t = t_0 \forall$

$$y_1(t-t_0) = \tau\{y_1(t)\} = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} x_1(\tau)d\tau + x_1(t-t_0-2)$$

Adesso calcolo $y_2(t)$ con ingresso $x_1(t-t_0)$

$$y_2(t) = \tau\{w(t)\} = \int_{t-1}^{t} w(\tau)d\tau + wt$$

$$y_2(t) = \tau\{x_1(t-t_0)\} = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} x_1(u)du + x_1(t-t_0-2)$$

Il sistema è anche tempo invariante $\rightarrow$ $y_1(t-t_0) = y_2(t)$

6) $y(t) = \tau\{x(t)\} = 4 + e^{x(t)}$

considero $y_1(t) = \tau\{x_1(t)\} = 4 + e^{x_1(t)}$

$$y_2(t) = \tau\{x_2(t)\} = 4 + e^{x_2(t)}$$

$$y(t) = \tau\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = 4 + e^{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)} =$$

$$= 4 + e^{a_1 x_1(t)} e^{a_2 x_2(t)} \neq a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

Il sistema <u>non</u> è quindi lineare $\rightarrow$ non vale la sovrapposizione effetti

Affinché sia tempo invariante $y_1(t-t_0) = y_2(t)$

$$y_1(t) = \tau\{x_1(t)\} = 4 + e^{x_1(t)}$$

$$y_1(t-t_0) = 4 + e^{x_1(t-t_0)}$$

se considero $w(t) = x_1(t-t_0)$

$$y_2(t) = \tau\{w(t)\} = 4 + e^{w(\tau)} = 4 + e^{x_1(\tau-t_0)} = 4 + e^{x_1(t-t_0)}$$

Essendo $y_2(t) = y_1(t-t_0)$ il sistema è tempo invariante!

la trasformata è una funz. complessa a variabile complessa

$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$

la TRASFORMATA DI FOURIER è quella di Laplace ponendo

$s = j2\pi f$ (è quindi un suo sottoinsieme)

Dipende da f che in questo caso $f \in \mathbb{R}$

$w_f(t) = e^{j2\pi f t} \quad f \in \mathbb{R}$

$w_f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, w_f(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j2\pi f t} e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = e^{j2\pi f t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}_{\lambda f = H(f)} =$

$= w_f(t)\, H(f)$

con H(f) = TRASFORMATA DI FOURIER di h(t)

È espressa anche come : $H(f) = \int h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

con $H(f) \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{R}$

f è la frequenza

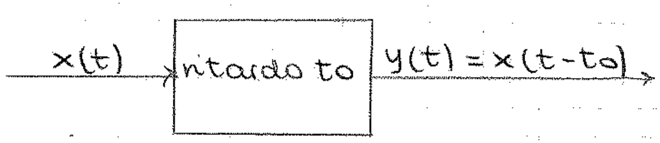
A volte la H(f) si ottiene dalla H(s) : $H(f) = H(s)\big|_{s=j2\pi f}$

H(f) ci consente di gestire i segnali periodici, la H(s) no

RIEPILOGO

- $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$
- $\int \delta(t)\, dt = 1$
- $x(t) * h(t) = \int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$
- $H(f) = \int h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

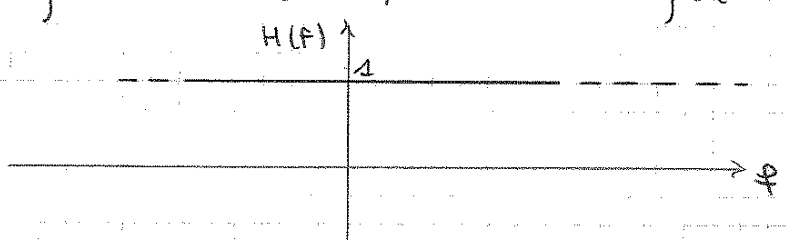
Esempio:



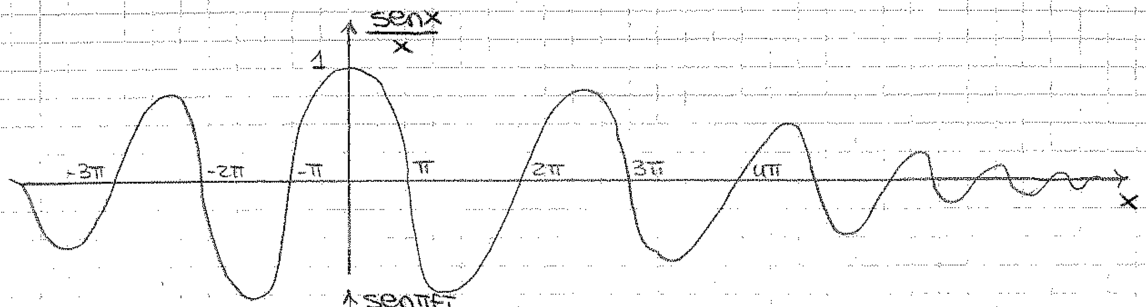
$h(t) = \delta(t-t_0)$

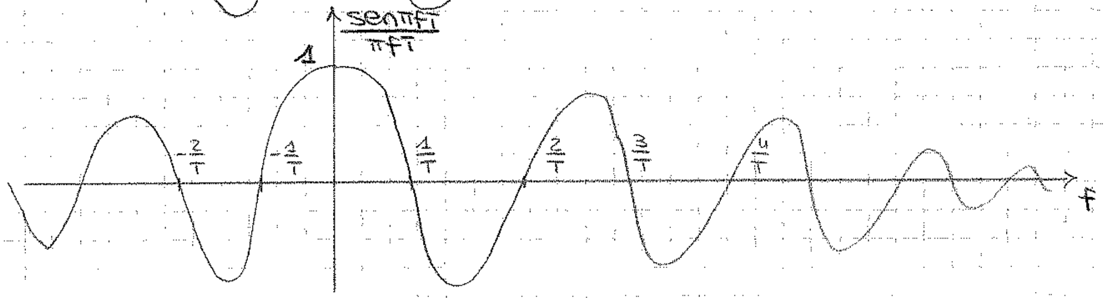
Calcolo $H(f) = \int h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int \delta(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$

$= \int e^{-j2\pi f t_0}\, \delta(t-t_0)\, dt = e^{-j2\pi f t_0} \int \delta(t-t_0)\, dt = e^{-j2\pi f t_0}$



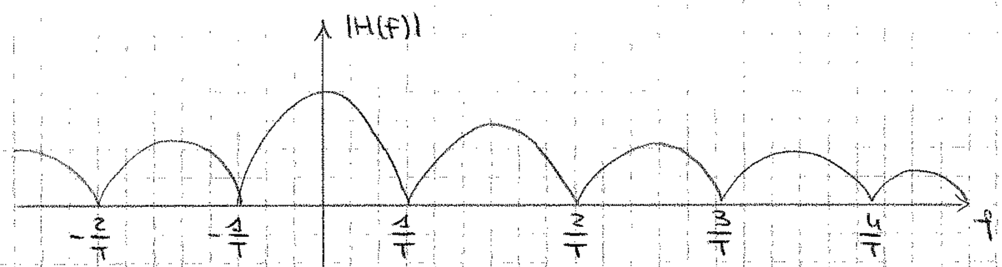
$|H(f)| = 1$





$\pi f T = \pi \rightarrow f = \frac{1}{T}$

Grafico del $|H(f)|$:



TRASFORMATE DI FOURIER

$H(f) = \int h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

Scrivere sempre la dipendenza dalla frequenza o dal tempo $(X(f), x(t))$

- LINEARITÀ : $\mathcal{F}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$
- Se $x(t)$ è reale (come le risp. $h(t)$), allora $X^*(f) = X(-f)$

possibile domanda compito scritto

$X(f) = \int x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

$X^*(f) = \left[\int x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\right]^* = \int \left[x(t)\, e^{-j2\pi f t}\right]^* dt = \int x^*(t)\, e^{+j2\pi f t}\, dt =$

$= \int x(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt = X(-f)$ (essendo $x(t)$ reale $x^*(t) = x(t)$)

Se $x(t)$ è reale,

$|X(f)| = |X(-f)|$

$\angle X(f) = -\angle X(-f)$

$X(-f) = X^*(f)$

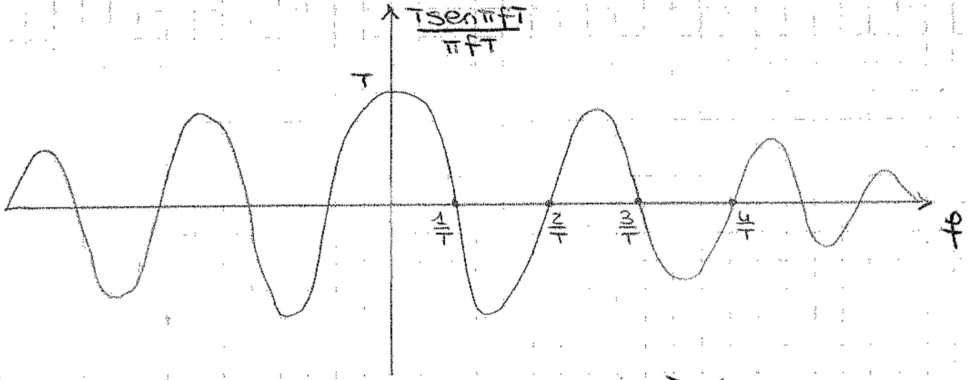
$X(f) = M(f)\, e^{j\Psi(f)}$

$X(-f) = X^*(f) \Rightarrow M(-f)\, e^{j\Psi(-f)} = \left[M(f)\, e^{j\Psi(f)}\right]^* = M(f)\, e^{-j\Psi(f)}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}\,dt =$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}\,dt = \left[\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{(-2j)\pi f} = \frac{\operatorname{sen}\pi fT}{\pi f}\,\frac{T}{T}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}\,dt = \lim_{T\to\infty} T\,\frac{\operatorname{sen}\pi fT}{\pi fT}$$



la distanza tra due zeri successivi è $\frac{1}{T}$

se $T\to\infty$ $\frac{1}{T}\to 0$ quindi $\lim_{T\to\infty} T\frac{\operatorname{sen}2\pi fT}{\pi fT} = \delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

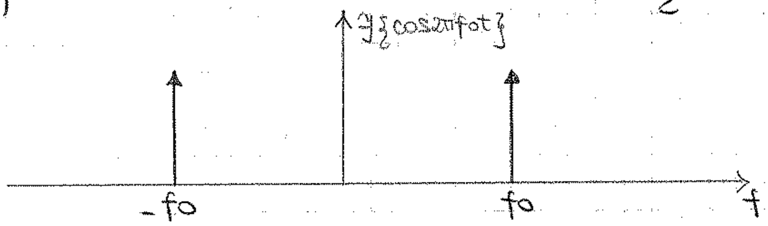
4) $\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \int e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft}\,dt = \delta(f-f_0)$ (spirale sul piano)

$$= \int e^{-j2\pi(f-f_0)t}\,dt = \delta(f-f_0)$$

5) $\mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \delta(f+f_0)$

6) $\mathcal{F}\{\cos 2\pi f_0 t\} = \int \cos 2\pi f_0 t\, e^{-j2\pi ft}\,dt = \int\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)e^{-j2\pi ft}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-j2\pi(f_0+f)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t}\,dt = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

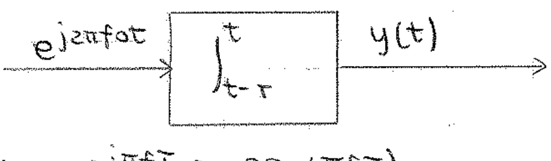


Non esiste la trasformata di laplace di questa funzione

7) $\mathcal{F}\{\operatorname{sen}2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2j}\delta(f-f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f+f_0)$

8) $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t + \theta)\} = \int\left(\frac{e^{j(2\pi f_0 t+\theta)} + e^{-j(2\pi f_0 t+\theta)}}{2}\right)e^{-j2\pi ft}\,dt =$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j\theta}e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\theta}e^{-j2\pi f_0 t}\} = \frac{1}{2}e^{j\theta}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\theta}\delta(f+f_0)$$



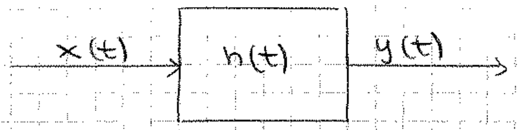
$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

$h(t) = \begin{cases} 1 & t\in[0,T] \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

$H(f) = e^{-j\pi fT}\,T\,\frac{\operatorname{sen}(\pi fT)}{}$

LEZIONE - ESERCITAZIONE

1) $h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,T) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



Calcolare $y(t)$ per $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ lavorando prima nel dominio del tempo e poi nel dominio della frequenza. $Y(f) = X(f)H(f)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(2\pi f_0 \tau + \theta) h(t-\tau) d\tau =$$

se $t-\tau < 0 \lor t-\tau > T \rightarrow t < \tau \land t > T+\tau \rightarrow \int A\cos(2\pi f_0 \tau + \theta)\, 0\, d\tau = 0$

se $0 < t-\tau < T \rightarrow \tau < t < T+\tau \rightarrow t > \tau > t-T$

$$\int_{t-T}^{t} A\cos(2\pi f_0 \tau + \theta) 1\, d\tau = \left[\frac{A}{2\pi f_0} \operatorname{sen}(2\pi f_0 \tau + \theta)\right]_{t-T}^{t} = \frac{A}{2\pi f_0}\Big[\operatorname{sen}(2\pi f_0 (t) + \theta)$$

$$- \operatorname{sen}(2\pi f_0 (t-T) + \theta)\Big] = \frac{A}{-2\pi f_0}\left[\operatorname{sen}(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 T + \theta) - \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \theta)\right]$$

Oppure $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^T x(t-\tau)d\tau = \int_0^T A\cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \theta) d\tau =$

$$= \int_0^T A\cos(-2\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t + \theta) d\tau = \left[A \frac{1}{-2\pi f_0} \operatorname{sen}(-2\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t + \theta)\right]_0^T$$

$$= \frac{A}{-2\pi f_0}\left(\operatorname{sen}(-2\pi f_0 T + 2\pi f_0 t + \theta) - \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \theta)\right)$$

Nel dominio della frequenza: $Y(f) = X(f)H(f)$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\} = \frac{A}{2} e^{j\theta}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2} e^{-j\theta}\delta(f+f_0)$$

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = e^{-j\pi f T}\, T\, \frac{\operatorname{sen}\pi f T}{\pi f T}$$

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\right]H(f) =$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0)H(f) + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)H(f)\right] =$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}H(f_0)\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}H(-f_0)\delta(f+f_0)\right] =$$

$$H(f_0) = e^{-j\pi f_0 T}\, T\, \frac{\operatorname{sen}\pi f_0 T}{\pi f_0 T}$$

$$H(-f_0) = e^{j\pi f_0 T}\, T\, \frac{\operatorname{sen}\pi(-f_0)T}{-\pi f_0 T} = e^{j\pi f_0 T}\, T\, \frac{\operatorname{sen}\pi f_0 T}{\pi f_0 T}$$

$H(-f_0) = [H(f_0)]^*$ (infatti il sistema ha una risp. all'impulso reale)

$$= \frac{A}{2} T \frac{\operatorname{sen}\pi f_0 T}{\pi f_0 T}\left[e^{j(\theta - \pi f_0 T)}\delta(f-f_0) + e^{-j(\theta-\pi f_0 T)}\delta(f+f_0)\right] =$$

$$y(t) = AT\frac{\operatorname{sen}\pi f_0 T}{\pi f_0 T}\cos(2\pi f_0 t + \theta - \pi f_0 T)$$

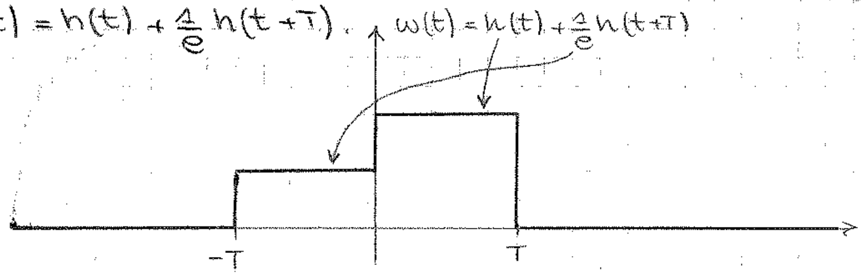
$$w(t) = z(t) * h(t) = \left[\delta(t) + \frac{1}{e}\delta(t+T)\right] * h(t) = \delta(t) * h(t) + \frac{1}{e}\delta(t+T) * h(t)$$
$$= h(t) + \frac{1}{e}h(t+T)$$

[$x(t) * \delta(t-t_0) = \int \delta(\tau - t_0)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int x(t-t_0)\,\delta(\tau - t_0)\, d\tau =$
$= x(t-t_0)\int \delta(\tau - t_0)\, d\tau = x(t-t_0)$

$\underline{x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$

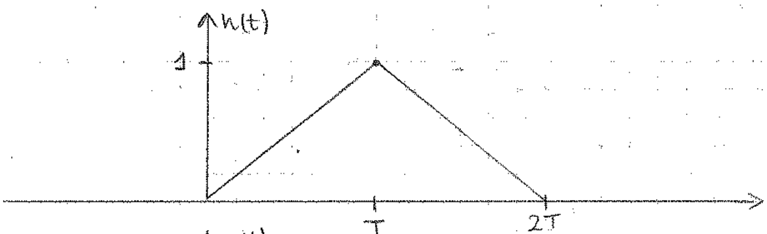
$\underline{x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)}$]

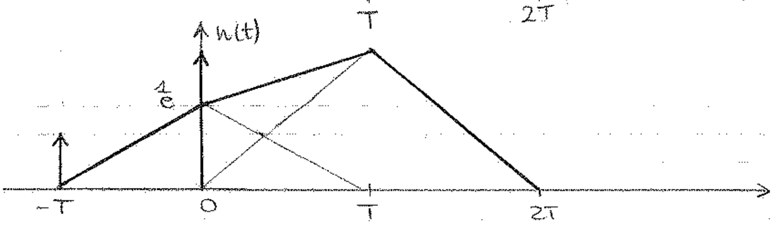
$w(t) = h(t) + \frac{1}{e}h(t+T)$.



Se invece $h(t) = \begin{cases} t/T & t \in [0, T] \\ 2 - t/T & t \in [T, 2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Grafico di $w(t) = z(t) * h(t)$





$h(t+T)$ va traslato a sinistra di $1T$, non di $2T$

Sommare funzione a funzione

VERIFICA: $X(f) = \int x(u)\, e^{-j2\pi fu}\, du$

$$x(t) = \int X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df = \int_f \left[\int_u x(u)\, e^{-j2\pi fu}\, du \right] e^{j2\pi ft}\, df =$$

$$= \int_u x(u) \int_f e^{-j2\pi fu}\, e^{j2\pi ft}\, df\, du = \int_u x(u) \int_f \underbrace{e^{j2\pi f(t-u)}\, df}_{\delta(t-u)}\, du =$$

$$= \int_u x(u)\, \delta(t-u)\, du = x(t) \int_u \delta(t-u)\, du = x(t)$$

Se $X(f) = \int x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$ (trasformata di Fourier)

$x(t) = \int X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$ (antitrasformata di Fourier)

DERIVAZIONE

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} X(f)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$$

$$Y(f) = \int y(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \int \frac{d}{dt} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \int \dot{x}(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt =$$

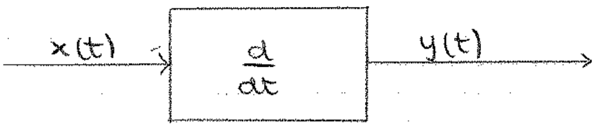
$$= x(t)\, e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{dt} e^{-j2\pi ft}\, dt = \text{(integrando per parti)}$$

ipotesi aggiuntiva : $x(t) = 0$ per $t = \pm\infty$

$$\Rightarrow Y(f) = -\int x(t) \frac{d}{dt} e^{-j2\pi ft}\, dt = -\int x(t)\,(-j2\pi f)\, e^{-j2\pi ft}\, dt =$$

$$= j2\pi f \underbrace{\int x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt}_{X(f)} = j2\pi f\, X(f)$$

La derivata di un segnale ha come trasf. di Fourier la trasf. di Fourier del segnale per $j2\pi f$



$$Y(f) = X(f) \cdot j2\pi f = X(f)\, H(f) \rightarrow H(f) = j2\pi f$$

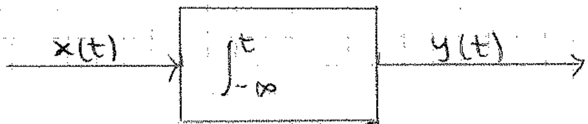
Quindi la funzione di trasferimento di un derivatore è

$$H(f) = j2\pi f$$

(Con la trasformata di Laplace si moltiplica per s)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} x(t)\right\} = s\, \mathcal{L}\{x(t)\}$$

INTEGRAZIONE



$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)\, du$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(u)\, du = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

LEZIONE - ESERCITAZIONE

1) $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$

$y(t) = x(kt) \qquad k \in \mathbb{R},\ k > 1$

$Y(f) = ?$

$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(kt)\} = \int x(kt)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int x(kt)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$

$kt = \tau \rightarrow t = \frac{\tau}{k} \qquad dt = \frac{d\tau}{k}$

$Y(f) = \frac{1}{k}\int x(\tau)\, e^{-j2\pi f \frac{\tau}{k}}\, d\tau = \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)$ associo k alla f e non a τ

2) $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$

$y(t) = x(-t)$

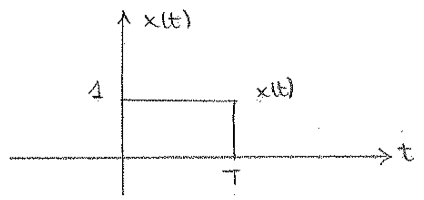
$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int x(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

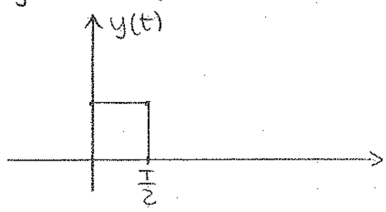
pongo $u = -t \qquad du = -dt$

$\int_{\infty}^{-\infty} x(u)\, e^{+j2\pi f u}(-du) = \int x(u)\, e^{j2\pi f u}\, du = X(-f)$

se x è reale $X(-f) = X^*(f)$

3) $x(t) \qquad k = 2 \qquad y(t) = x(2t)$



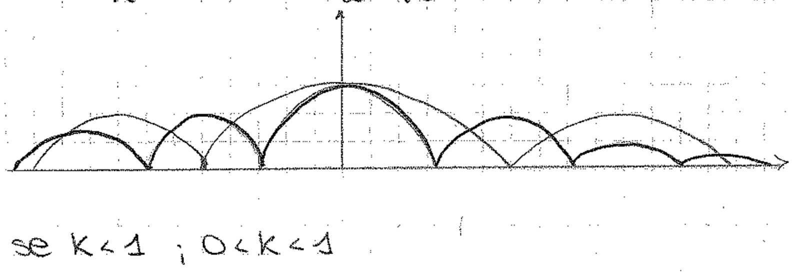


$y(0) = x(2t)|_{t=0} = 1$

$y(T/2) = x(2t)|_{t=\frac{T}{2}} = x(T) = 1$

$x(2T)$ ha durata = metà di $x(t)$ → accorciamo $x(t)$

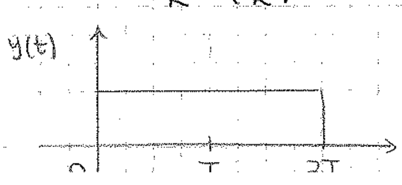
$Y(f) = \frac{1}{k} X(f/k) \rightarrow \frac{1}{2} X\left(\frac{f}{2}\right)$ stiro la trasformata di Fourier

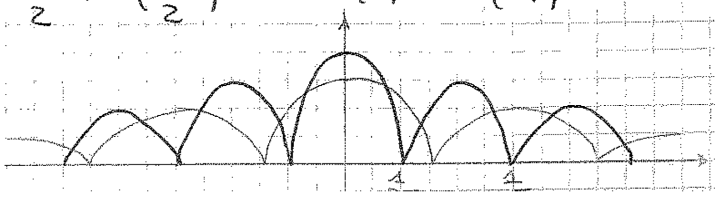


4) se $k < 1$; $0 < k < 1$

$y(t) = x(kt)$

$Y(f) = \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)$ se $k = \frac{1}{2} \rightarrow x\left(\frac{1}{2}t\right)$ $\quad Y(f) = 2X(2f)$

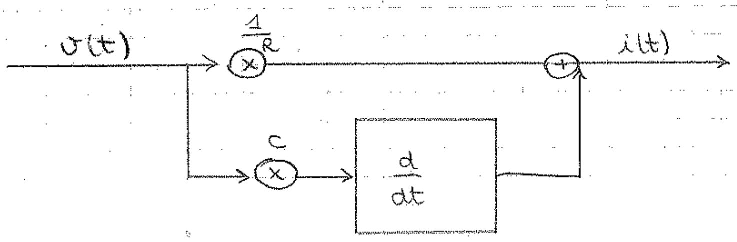




$$i(t) = i_R + i_C(t) = \frac{v(t)}{R} + C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\mathcal{F}\{i(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{v(t)}{R}\right\} + \mathcal{F}\left\{C\frac{dv(t)}{dt}\right\} = \frac{1}{R}V(f) + Cj2\pi f\,V(f) = I(f)$$

$$H(f) = \frac{1}{R} + j2\pi fC$$



LEZIONE

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$

$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f)$

$z(t) = x(t)\,y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$

$$Z(f) = \int z(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \int x(t)\, y(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$x(t) = \int X(f_1)\, e^{j2\pi f_1 t}\, df_1$$

$$y(t) = \int Y(f_2)\, e^{j2\pi f_2 t}\, df_2$$

$$Z(f) = \int_t \int_{f_1} \int_{f_2} X(f_1)\, e^{j2\pi f_1 t}\, Y(f_2)\, e^{j2\pi f_2 t}\, e^{-j2\pi ft}\, df_1\, df_2\, dt =$$

$$= \int_{f_1} \int_{f_2} X(f_1) Y(f_2) \int_t e^{-j2\pi t(f-f_1-f_2)}\, dt\, df_1\, df_2 =$$

$$= \int_{f_1} \int_{f_2} X(f_1) Y(f_2)\, \delta(f-f_1-f_2)\, df_1\, df_2 =$$

$$= \int_{f_1} X(f_1) \int_{f_2} Y(f_2)\, \delta(f-f_1-f_2)\, df_2\, df_1 = \int_{f_1} X(f_1) \int_{f_2} Y(f-f_1)\, \delta(f-f_1-f_2)\, df_2$$

$$= \int_{f_1} X(f_1)\, Y(f-f_1)\, df_1 = X(f) * Y(f)$$

RIASSUNTO

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \\ \mathcal{F}\{1\} = \delta(f) \\ \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f)\,Y(f) \\ \mathcal{F}\{x(t)\, y(t)\} = X(f) * Y(f) \end{array}\right\} \text{simmetria dei risultati}$$

Esempio:

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$

$y(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

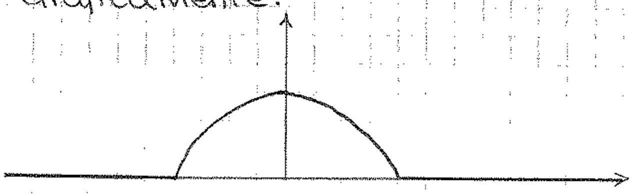
$z(t) = x(t)\,y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$

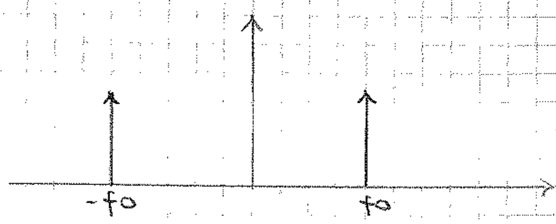
$$Z(f) = X(f) * Y(f) = \frac{A}{2}\left[X(f) * \delta(f-f_0) + Y(f) * \delta(f+f_0)\right]$$

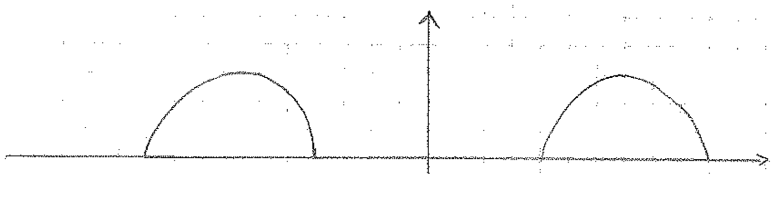
$$Y(f) = \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$

$$Z(f) = \frac{A}{2} X(f-f_0) + \frac{A}{2} X(f+f_0)$$

Graficamente:







© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 261

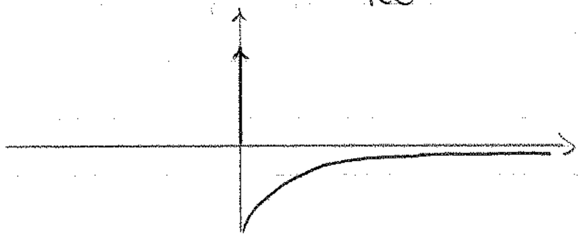
$$H_1(f) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{1}{RC} \mathcal{F}\{e^{-a|t|} u(t)\} \quad \text{con } a = \frac{1}{RC}$$

$$h_1(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Considerando $H_2(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} = \frac{j2\pi f\cancel{RC}}{\cancel{RC}(\frac{1}{RC} + j2\pi f)} = 1 - \frac{1}{RC(\frac{1}{RC} + j2\pi f)}$

$$h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_2(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 - H_1(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1\} - \mathcal{F}^{-1}\{H_1(f)\} =$$

$$= \delta(t) - h_1(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



Oppure $h_2(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{RC}{1 + j2\pi fRC}\right\} = \frac{d}{dt} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f}\right\} =$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t}{RC}} u(t)\right) =$$

$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$ (serve a derivare un segnale con una discontinuità)

$$\xrightarrow{\delta(t)} \boxed{\text{integrat.}} \xrightarrow{u(t)} \qquad \xrightarrow{u(t)} \boxed{\text{derivat.}} \xrightarrow{\delta(t)}$$

$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt$ $\quad$ $u(t)$ è la primitiva della delta; delta la sua derivata

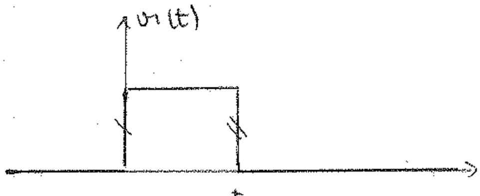
$$h_2(t) = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + e^{-\frac{t}{RC}} \delta(t) = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + \delta(t)$$

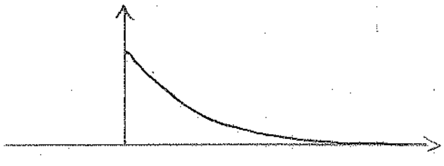
Quindi:

Filtro passa-basso: $H_1(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$ $\quad h_1(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$

Filtro passa-alto: $H_2(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}$ $\quad h_2(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$

Se un generatore genera un segnale porta



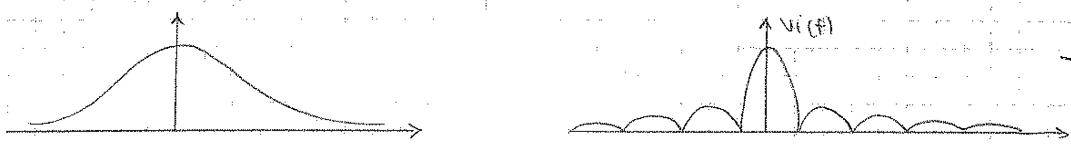


$$h_1(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$v_u(t) = v_i(t) * h_1(t) = \int h_1(\tau) v_i(t-\tau)\,d\tau \qquad t \in \mathbb{R}$

Disegno la funzione integranda in alcuni casi in funzione di τ

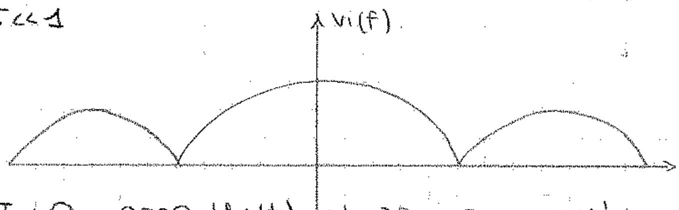
Se $|H_1(f)|$ è fisso, non cambio RC ma faccio cambiare T



$T \gg 1$

$T \gg 1$ la posizione degli zeri è molto vicina e il segnale in uscita è simile a quello in entrata

Se $T \ll 1$

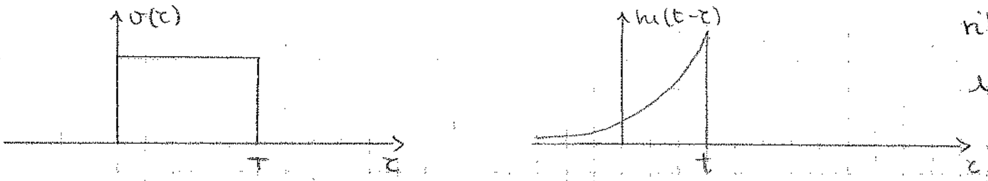


$T \ll 1$ $V_i(f)$ è sempre $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ma è molto allargato

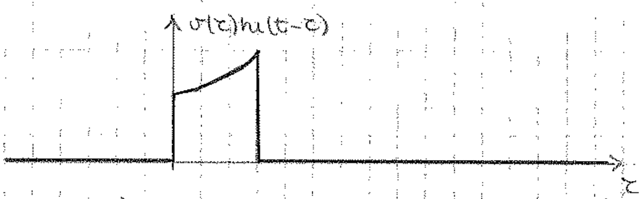
se $T \to 0$ esce $H_1(t)$, gli zeri sono all'∞ → sto cercando di creare una $\delta(t)$

Questi sistemi si comportano come FILTRI, fanno passare certe frequenze e altre no.

$$v_u(t) = \int h_1(\tau)\, v_i(t-\tau)\, d\tau = \int v_i(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau$$



ribalto $h_1(t)$ e lo sposto di t



$h_1(t-\tau) = h_1(0)$ se $t-\tau = 0 \to t = \tau \to \tau = t$

$h_1(t-\tau) = h_1(\infty)$ se $t - \tau = \infty \to \tau \to -\infty$

$\int v_i(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau$

se $t < 0$ $\int v_i(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau = 0$

se $0 < t < T$ $\int v_i(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t v_i(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau$

se $t > T$ $\int v_i(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau = \int_0^T v_i(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau$

se $0 < t < T$ $\int_0^t V \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \underbrace{\cancel{u(t-\tau)}}_{1}\, d\tau = \frac{V}{RC} \int_0^t e^{-\frac{t}{RC}} e^{\frac{\tau}{RC}}\, d\tau =$

$= \frac{V}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \left[RC\, e^{\tau/RC} \right]_0^t = V e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{t/RC} - 1 \right) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$

se $t > T$ $\int_0^T V \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} u(t-\tau)\, d\tau = \frac{V}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \left[e^{\frac{\tau}{RC}} RC \right]_0^T =$

$= V e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{T/RC} - 1 \right)$

I risultati sono uguali a quelli trovati prima!

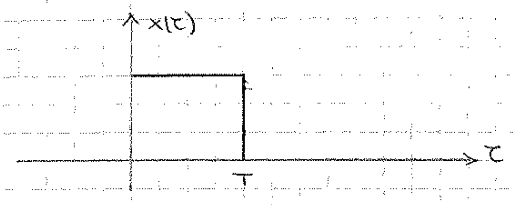
Considero invece un filtro <u>passa-alto</u>:

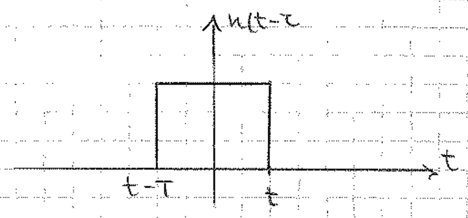
$h_2(t) = \delta(t) - h_1(t)$

$v_u(t) = v_i(t) * h_2(t) = v_i(t) * \delta(t) - v_i(t) * h_1(t) = v_i(t) - v_i(t) * h_1(t)$

Calcolo della convoluzione tra due segnali porta:

$y(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$



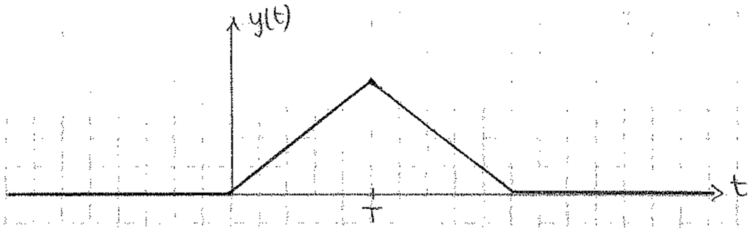


per $t<0$ $\quad y(t) = \int 0\,d\tau = 0$

per $0<t<T$ $\quad y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t 1\,d\tau = [\tau]_0^t = t$

per $t>T, t<2T$ $\quad y(t) = \int_{t-T}^{T} 1\,d\tau = [\tau]_{t-T}^{T} = T-t+T = 2T-t$

per $t>2T$ $\quad y(t) = 0$

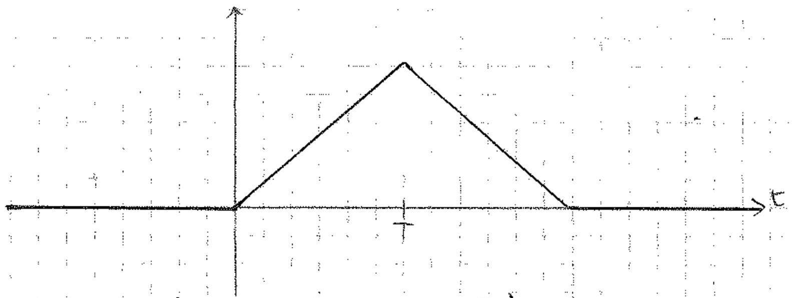


Conv. di una porta per se stessa = triangolo

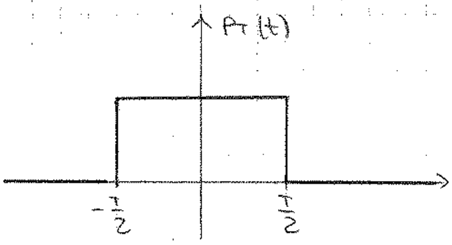
$y_1(t) = p_T\left(t-\frac{T}{2}\right) * p_T\left(t-\frac{T}{2}\right) = \int_0^T x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^T 1 d\tau$

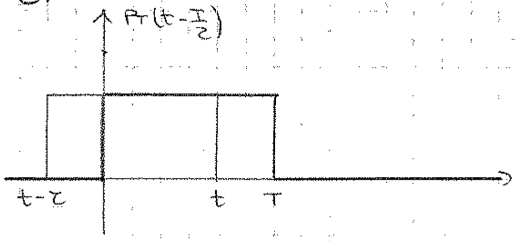
se $0<t<T$ $\quad \int_0^t 1 d\tau = [\tau]_0^t = t$

se $T<t<2T$ $\quad \int_{t-T}^{T} 1 d\tau = [\tau]_{t-T}^{T} = T - t + T = 2T - t$



$y_2(t) = x_2(t) * h(t) = p_T(t) * p_T\left(t-\frac{T}{2}\right)$



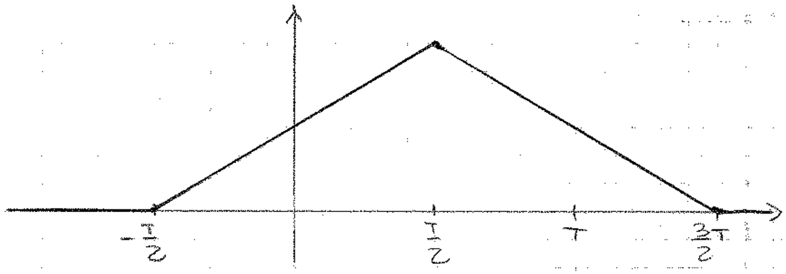


$y_2(t) = \int x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau$

se $t<-\frac{T}{2}$ $\quad \int x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int 0 d\tau = 0$

se $-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$ $\quad \int_{-\frac{T}{2}}^{t} x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{t} d\tau = [\tau]_{-\frac{T}{2}}^{t} = t+\frac{T}{2}$

se $\frac{T}{2}<t<\frac{3}{2}T$ $\quad \int_{t-\tau}^{T/2} 1 d\tau = [\tau]_{t-T}^{T/2} = \frac{T}{2} - t + T = \frac{3}{2}T - t$



4) $h_1(t) = e^{-\frac{t}{T_1}}u(t)$ $\qquad$ 1°) $T_1>T_2>0$ $\qquad$ 2°) $T_1=T_2=T>0$

$h_2(t) = e^{-\frac{t}{T_2}}u(t)$ $\qquad$ grafico nel caso di $T_1=T_2$

$y(t) = x(t) * h_1(t)$

$z(t) = y(t) * h_2(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$

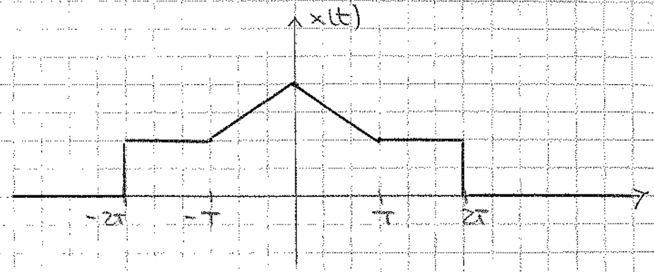
$y(t) = \int x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau$

$z(t) = \int y(\tau)h_2(t-\tau)d\tau$

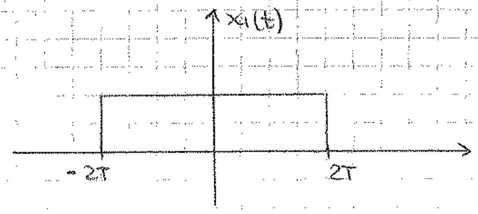
$H(f) = H_1(f)H_2(f) \rightarrow h(t) = h_1(t)h_2(t) = e^{-\frac{t}{T_1}}u(t)e^{-\frac{t}{T_2}}u(t) =$

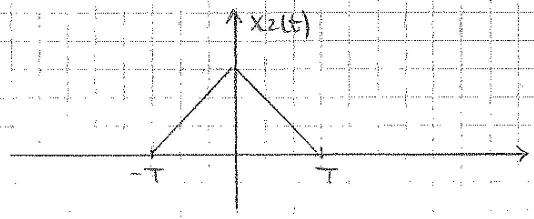
$= e^{-t\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)}u(t)$

4) $x(t) = \begin{cases} 2T - |t| & |t| \le T \\ T & t \in [T, 2T] \\ T & t \in [-2T, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$





$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \mathcal{F}\{x_2(t)\} = X_1(f) + X_2(f)$

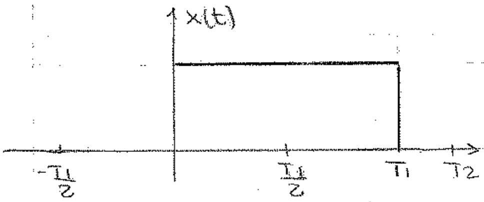
$\mathcal{F}\{x_1(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t)\} = \frac{\text{sen}(4\pi f T)}{\pi f} \cdot T$

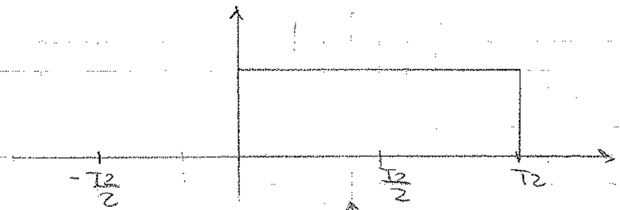
$\mathcal{F}\{x_2(t)\} = \frac{T^2 \text{sen}^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$

$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{T \,\text{sen}(4\pi f T)}{\pi f} + T^2 \frac{\text{sen}^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$

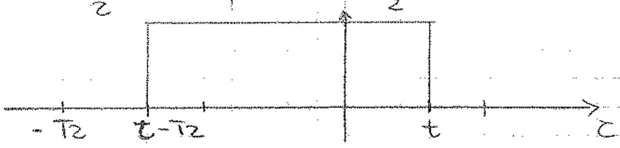
5) $x(t) = p_{T_1}\left(t - \frac{T_1}{2}\right)$ $\quad h(t) = p_{T_2}\left(t - \frac{T_2}{2}\right)$ $\quad T_2 > T_1 \quad y(t) = ?$

$y(t) = x(t) * h(t)$





$y(t) = \int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$



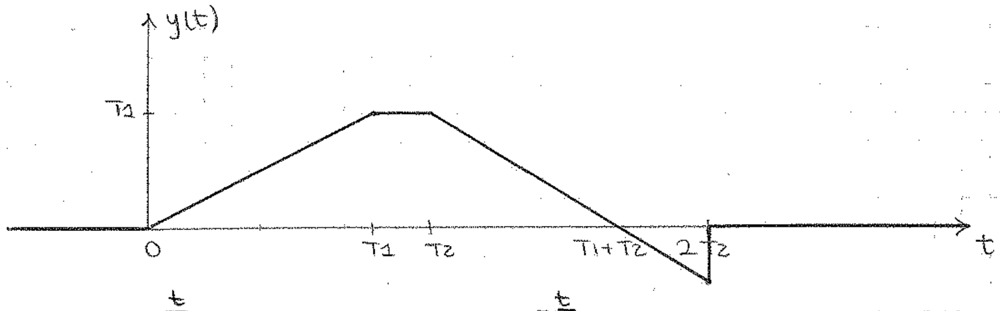
se $t < 0 \quad y(t) = 0$

se $0 < t < T_1 \quad y(t) = \int_0^t d\tau = t$

se $T_1 < t < T_2 \quad y(t) = \int_0^{T_1} 1\, d\tau = T_1$

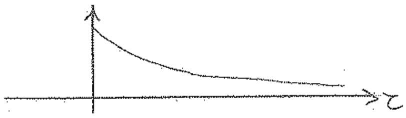
se $T_2 < t < 2T_2 \quad y(t) = \int_{t-T_2}^{T_1} d\tau = T_1 - t + T_2$

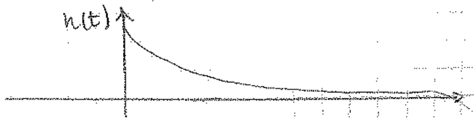
se $t > 2T_2 \quad y(t) = 0$



6) $x(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$ $\quad h(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$

$x(\tau) = e^{-\frac{\tau}{T}} u(\tau)$ $\quad h(t-\tau) = e^{-\frac{t-\tau}{T}} u(t-\tau)$

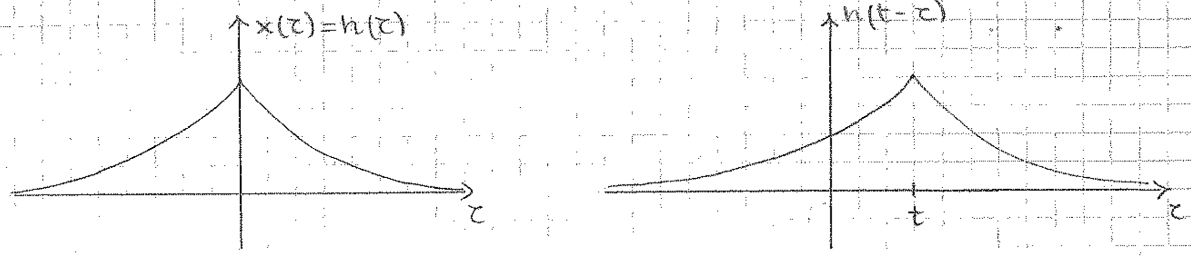




Esercizi

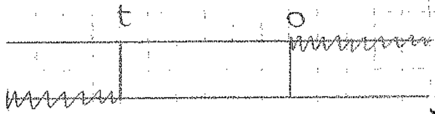
1) Calcolare la convoluzione di $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$ con $h(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\tau|}{T}} e^{-\frac{|t-\tau|}{T}} d\tau$$

$\begin{cases} \tau > 0 \\ t-\tau > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \tau > 0 \\ \tau < t \end{cases}$, $t < 0$



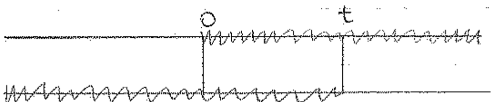
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{\tau}{T}} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau + \int_{t}^{0} e^{\frac{\tau}{T}} e^{\frac{t-\tau}{T}} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}} e^{\frac{t-\tau}{T}} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{2\tau}{T}} e^{-\frac{t}{T}} d\tau + \int_{t}^{0} e^{\frac{t}{T}} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2\tau}{T}} e^{\frac{t}{T}} d\tau =$$

$$= \left[e^{-\frac{t}{T}} \frac{T}{2} e^{\frac{2\tau}{T}} \right]_{-\infty}^{t} + \left[\tau e^{\frac{t}{T}} \right]_{t}^{0} + \left[e^{\frac{t}{T}} \left(-\frac{T}{2}\right) e^{-\frac{2\tau}{T}} \right]_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{T}{2} e^{+\frac{t}{T}} - t e^{\frac{t}{T}} + \frac{T}{2} e^{\frac{t}{T}} = T e^{\frac{t}{T}} - t e^{\frac{t}{T}} = (T - t) e^{\frac{t}{T}}$$

se $t > 0$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\tau}{T}} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\frac{\tau}{T}} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau + \int_{t}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}} e^{\frac{t-\tau}{T}} d\tau =$$

$$= \left[e^{-\frac{t}{T}} \frac{T}{2} e^{\frac{2\tau}{T}} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\tau e^{-\frac{t}{T}} \right]_{0}^{t} + \left[-\frac{T}{2} e^{\frac{t}{T}} e^{-\frac{2\tau}{T}} \right]_{t}^{\infty} =$$

$$= \frac{T}{2} e^{-\frac{t}{T}} + t e^{-\frac{t}{T}} + \frac{T}{2} e^{-\frac{t}{T}} = T e^{-\frac{t}{T}} + t e^{-\frac{t}{T}} = (T + t) e^{-\frac{t}{T}}$$

Oppure lavorando in frequenza:

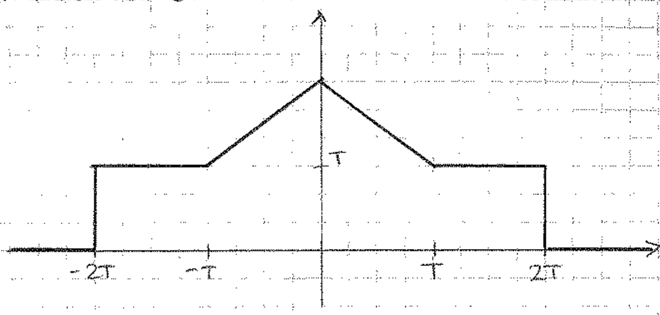
$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$$

$$Y(f) = X(f) H(f) = \frac{\frac{2}{T}}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2} \cdot \frac{\frac{2}{T}}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2} = \frac{\frac{4}{T^2}}{\left(\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2\right)^2}$$

Quindi $y(t) = (T + |t|) e^{-\frac{|t|}{T}}$

4) Calcolare la trasformata di Fourier di

$$x(t)=\begin{cases} 2T-|t| & |t|<T \\ T & t\in[T,2T] \\ T & t\in[-2T,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$x(t)=y(t)+z(t)$

$$y(t)=p_{4T}(t)=\begin{cases} 1 & \text{se } |t|<2T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$z(t)=\begin{cases} +1-|t|/T & |t|<T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quindi $x(t)=y(t)+z(t) \rightarrow \mathcal{F}\{x(t)\}=\mathcal{F}\{y(t)+z(t)\}=$
$=\mathcal{F}\{y(t)\}+\mathcal{F}\{z(t)\}=Y(f)+Z(f)$

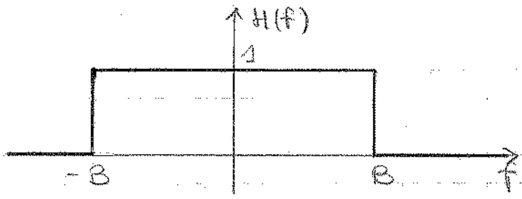
$$Y(f)=T\frac{\operatorname{sen}(4\pi fT)}{\pi f}$$

$$Z(f)=T^2\frac{\operatorname{sen}^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$$

$$X(f)=T\frac{\operatorname{sen}(4\pi fT)}{\pi f}+T^2\frac{\operatorname{sen}^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$$

5) Calcolare $h(t)$ di un sistema avente $H(f)$:

$$H(f)=\begin{cases} 1 & |f|<B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$

$H(f)=p_{\frac{1}{T}}(f)$ ponendo $\frac{1}{2T}=B \rightarrow T=\frac{1}{2B}$

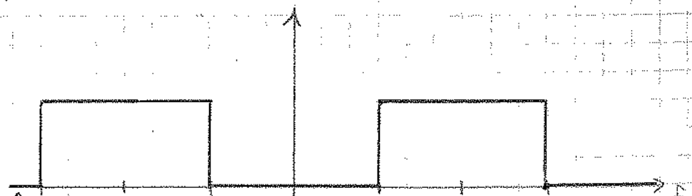
Quindi $h(t)=\frac{\operatorname{sen}(2\pi Bt)}{\pi t}=2B\frac{\operatorname{sen}(2\pi Bt)}{2\pi Bt}=\left.\frac{\operatorname{sen}(\pi t/T)}{\pi t}\right|_{T=1/2B}$

Oppure $h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}=\int H(f)e^{j2\pi ft}df=\int_{-B}^{B}e^{j2\pi ft}df=\left[\frac{1}{j2\pi t}e^{j2\pi ft}\right]_{-B}^{B}$

$$=\frac{1}{j2\pi t}\left(e^{j2\pi Bt}-e^{-j2\pi Bt}\right)=\frac{1}{\pi t}\left(\frac{e^{j2\pi Bt}-e^{-j2\pi Bt}}{2j}\right)=\frac{\operatorname{sen}(2\pi Bt)}{\pi t}$$

6) Calcolare la risposta all'impulso del sistema che ha come $H(f)$

$$H(f)=\begin{cases} 1 & |f-f_0|<B \\ 1 & |f+f_0|<B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$|f-f_0|<B \rightarrow -B<f-f_0<B \rightarrow f_0-B<f<f_0+B$

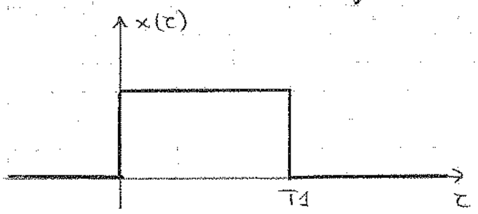
$|f+f_0|<B \rightarrow -B<f+f_0<B \rightarrow -f_0-B<f<-f_0+B$

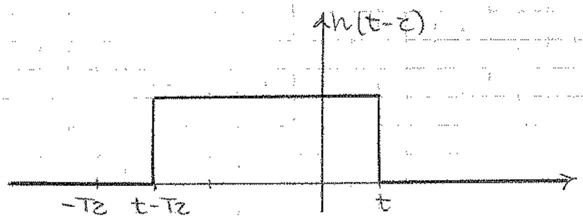
$$h(t)=\int_{-f_0-B}^{-f_0+B}e^{j2\pi ft}df+\int_{f_0-B}^{f_0+B}e^{j2\pi ft}df=\left[\frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi t}\right]_{-f_0-B}^{-f_0+B}+\left[\frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi t}\right]_{f_0-B}^{f_0+B}=$$

8) $x(t) = p_{T1}\left(t - \frac{T_1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T_1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\qquad T_2 > T_1$ $\qquad y(t) = ?$

$h(t) = p_{T2}\left(t - \frac{T_2}{2}\right) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T_2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$





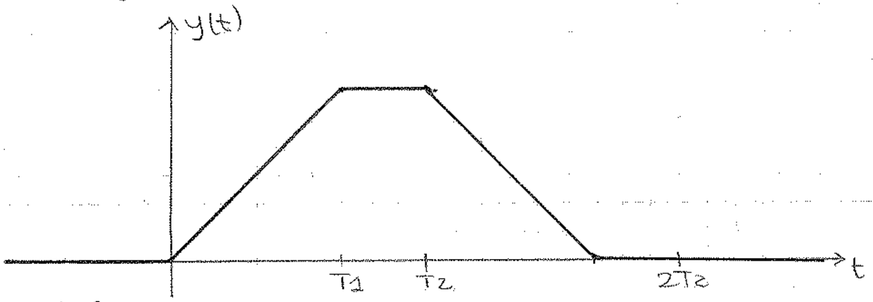
se $t < 0$ $\quad y(t) = 0$

se $t < T_1$ $\quad y(t) = \int_0^t d\tau = t$

se $T_1 < t < T_2$ $\quad y(t) = \int_0^{T_1} d\tau = T_1$

se $T_2 < t < 2T$ $\quad y(t) = \int_{t-T_2}^{T_1} d\tau = T_1 + T_2 - t$

se $t > 2T$ $\quad y(t) = 0$



9) $x(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}$

$H(f) = e^{-\left(\frac{f}{B}\right)^2} e^{-j2\pi f(10/B)}$

$y(t) = x(t) * h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)H(f)\}$

$x(t) = e^{-\frac{t^2}{T^2}}$

pongo $2T_0^2 = T^2 \rightarrow T_0 = T/\sqrt{2}$ $\quad$ quindi $X(f) = T\sqrt{\pi}\, e^{-2\pi^2 f^2 T^2/2} = T\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 f^2 T^2}$

$Y(f) = X(f)H(f) = T\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 f^2 T^2} e^{-\frac{f^2}{B^2}} e^{-j2\pi f(10/B)} = T\sqrt{\pi}\, e^{-f^2(\pi^2 T^2 + 1/B^2)} e^{-j2\pi f(10/B)}$

$y(t) = T\sqrt{\pi}\, \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j2\pi f(10/B)}\} * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-f^2(\pi^2 T^2 + \frac{1}{B^2})}\} =$

$y(t) = T\sqrt{\pi}\, \delta\left(t - \frac{10}{B}\right) * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2\pi^2 f^2 (T^2/2 + 1/2\pi^2 B^2)}\}$

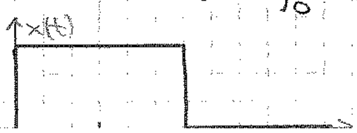
ponendo $T_0^2 = \frac{T^2}{2} + \frac{1}{2\pi^2 B^2}$

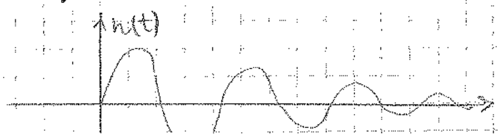
$y(t) = T\sqrt{\pi}\, \delta\left(t - \frac{10}{B}\right) * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2\pi^2 f^2 T_0^2}\} = T\sqrt{\pi}\, \delta\left(t - \frac{10}{B}\right) * e^{-\frac{t^2}{2T_0^2}}\left(\frac{1}{T_0\sqrt{2\pi}}\right) =$

$= \frac{T}{T_0\sqrt{2}}\, e^{-(t-10/B)^2/2T_0^2}$

10) $x(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$ $\qquad h(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t)\, e^{-\frac{t}{T}} u(t)$

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^T x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$





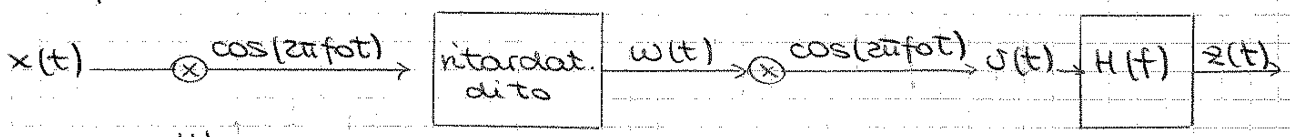
LEZIONE

Mercoledì 27-03

11- $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$ $\quad y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$w(t) = y(t-t_0)$ $\quad v(t) = w(t)\cos(2\pi f_0 t)$ filtro p.basso ideale

per quale t_0 $z(t) = v$?



$y(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}\cos(2\pi f_0 t)$

filtro passabasso ideale : $H(f) = \begin{cases} 1 & t \in [-T, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Da $x(t)$ a $z(t)$ il sistema NON è TI ma è LINEARE

Non esiste una funzione di trasferimento complessiva

Quindi seguendo la catena:

$y(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}\cos(2\pi f_0 t)$

$w(t) = y(t-t_0) = x(t-t_0)\cos(2\pi f_0(t-t_0)) = y(t) * \delta(t-t_0)$

$v(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, w(t) = x(t-t_0)\cos(2\pi f_0(t-t_0))\cos(2\pi f_0 t)$

$V(f)$ conviene adesso lavorare in frequenza e calcolare $Z(f)$:

$Z(f) = V(f) H(f)$

$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} =$

$Y(f) = X(f) * S(f) = \dfrac{2/T}{\left(\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2\right)} * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right] =$

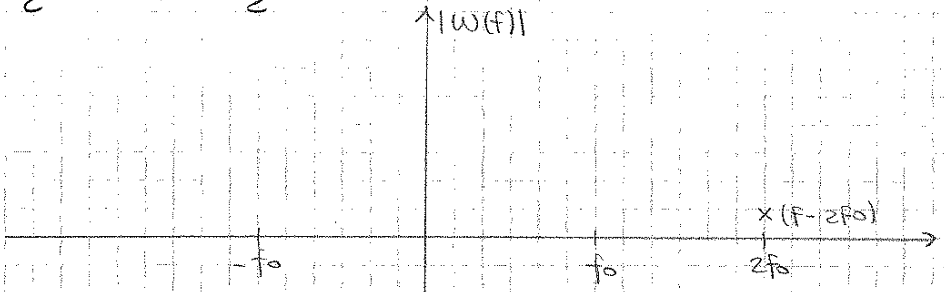
$= \dfrac{2T/2}{1+4\pi^2T^2(f-f_0)^2} + \dfrac{T}{1+4\pi^2T^2(f+f_0)^2}$

$W(f) = Y(f) H_1(f) = \left(\dfrac{T}{1+4\pi^2T^2(f-f_0)^2} + \dfrac{T}{1+4\pi^2T^2(f+f_0)^2}\right) e^{-j2\pi f t_0}$

$V(f) = W(f) * H_2(f) =$

$= Y(f)e^{-j2\pi f t_0} * \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] =$

$= \frac{1}{2}W(f-f_0) + \frac{1}{2}W(f+f_0)$



$V(f) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi(f-f_0)t_0}\left(X(f-f_0-f_0) + X(f+f_0-f_0)\right) =$

$= \frac{1}{2} e^{-j2\pi(f-f_0)t_0}\left(X(f-2f_0) + X(f)\right) + \frac{1}{2} e^{-j2\pi(f+f_0)t_0}\left(X(f) + X(f+2f_0)\right)$

$V(f) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi f t_0}\Big[e^{j2\pi f_0 t_0}\left(X(f-2f_0)\right) + e^{-j2\pi f_0 t_0} X(f) + e^{+j2\pi f_0 t_0} X(f) +$

$+ e^{-j2\pi f_0 t_0}\left(X(f+2f_0)\right)\Big] = \cancel{\frac{1}{2} e^{-j2\pi f t_0}\Big[e^{j2\pi f_0 t_0} X(f-2f_0) + e^{-j2\pi f_0 t} 2X(f) + e^{-j2\pi f_0 t_0} X(f+2f_0)}$

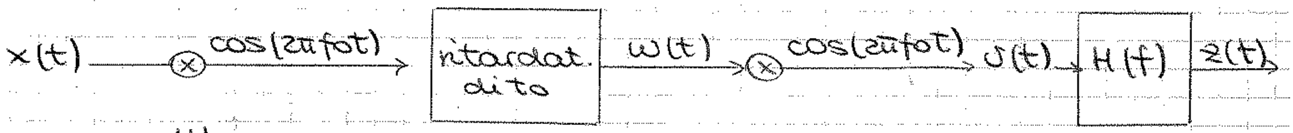
LEZIONE

Mercoledì 27-03

11- $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$ $\quad y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$w(t) = y(t-t_0)$ $\quad v(t) = w(t)\cos(2\pi f_0 t)$ filtro p.basso ideale

per quale t_0 $z(t) = v$?



$y(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}\cos(2\pi f_0 t)$

filtro passabasso ideale : $H(f) = \begin{cases} 1 & t \in [-T, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Da $x(t)$ a $z(t)$ il sistema NON è TI ma è LINEARE

Non esiste una funzione di trasferimento complessiva

Quindi seguendo la catena:

$y(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}\cos(2\pi f_0 t)$

$w(t) = y(t-t_0) = x(t-t_0)\cos(2\pi f_0(t-t_0)) = y(t) * \delta(t-t_0)$

$v(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, w(t) = x(t-t_0)\cos(2\pi f_0(t-t_0))\cos(2\pi f_0 t)$

$V(f)$ conviene adesso lavorare in frequenza e calcolare $Z(f)$:

$Z(f) = V(f)H(f)$

$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} =$

$Y(f) = X(f) * S(f) = \frac{2/T}{\left(\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2\right)} * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right] =$

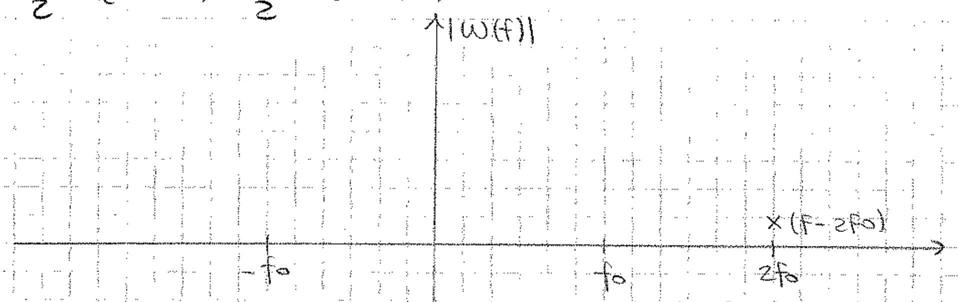
$= \frac{2T/2}{1 + 4\pi^2 T^2 (f-f_0)^2} + \frac{T}{1 + 4\pi^2 T^2 (f+f_0)^2}$

$W(f) = Y(f)H_1(f) = \left(\frac{T}{1 + 4\pi^2 T^2 (f-f_0)^2} + \frac{T}{1 + 4\pi^2 T^2 (f+f_0)^2}\right) e^{-j2\pi f t_0}$

$V(f) = W(f) * H_2(f) =$

$= Y(f)e^{-j2\pi f t_0} * \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] =$

$= \frac{1}{2}W(f-f_0) + \frac{1}{2}W(f+f_0)$



$V(f) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi(f-f_0)t_0}\left(X(f-f_0-f_0) + X(f+f_0-f_0)\right) =$

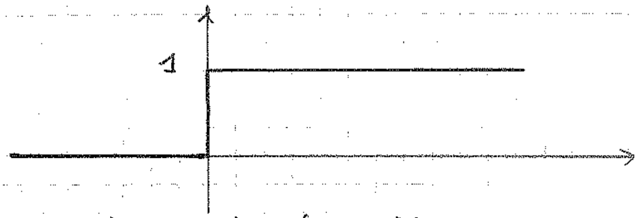
$= \frac{1}{2} e^{-j2\pi(f-f_0)t_0}\left(X(f-2f_0) + X(f)\right) + \frac{1}{2} e^{-j2\pi(f+f_0)t_0}\left(X(f) + X(f+2f_0)\right)$

$V(f) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi f t_0}\left[e^{j2\pi f_0 t_0}\left(X(f-2f_0)\right) + e^{-j2\pi f_0 t_0}X(f) + e^{+j2\pi f_0 t_0}X(f) +\right.$

$\left. + e^{-j2\pi f_0 t_0}\left(X(f+2f_0)\right)\right] = \frac{1}{4}\cancel{e^{-j2\pi f t_0}}\cancel{\left[e^{j2\pi f_0 t_0}\right.}\cancel{X(f-2f_0)}\cancel{+e^{-j2\pi f_0 t}}\cancel{2X(f)}\cancel{+e^{-j2\pi f_0 t_0}}\cancel{X(f+2f_0)}$

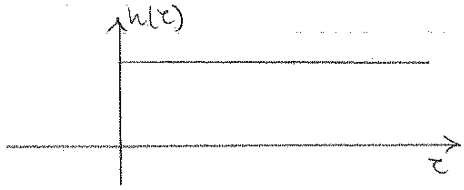
trovare un segnale limitato che in uscita diverge

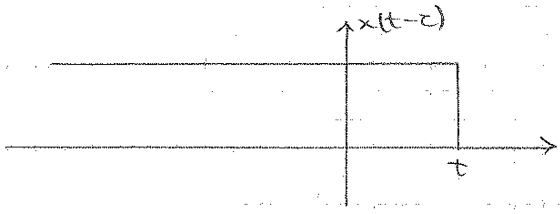
se considero $x(t) = u(t)$



$A = 1$ in questo caso

$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau =$

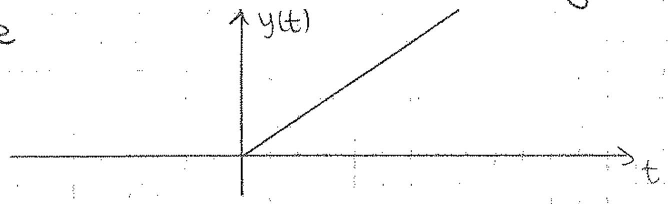




$y(t) = 0$ per $t < 0$

$y(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t d\tau = t$ per $t > 0$

man mano che t aumenta il segnale di uscita cresce linearmente



$y(t)$ non è limitato in ampiezza → il sistema NON è stabile in senso BIBO

<u>Condizioni necessarie e sufficienti per avere stabilità BIBO sono:</u>

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < C < \infty$ (condizione nel tempo)

(Nell'integratore $\int$ diverge)

$|H(f)| < \infty \quad \forall f$ (condizione in frequenza)

Queste due sono equivalenti, ne basta dimostrare una sola.

$|h(t)|$ perché magari il segnale oscilla → $\int = 0$ → sistema NON stab.

È possibile che esista un sistema stabile in senso BIBO che abbia una risposta all'impulso del tipo $\cos(2\pi f_0 t)$? No, poiché $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \delta(t)$ oppure $\int|\cos(2\pi f_0 t)|\,dt = \infty$

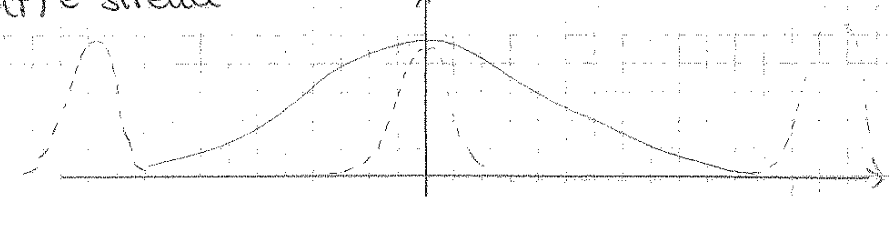
Il ritardatore invece è stabile

$h(t) = \delta(t - t_0)$ la $h(t)$ va all'∞ ma la condizione è stata messa sulla $H(f)$ e non sulla $h(t)$.

Tra i sistemi LTI distinguiamo 3 casi:

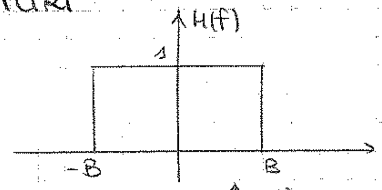
- FILTRO PASSA-BASSO: (lo vedo in frequenza) lascia passare basse frequenze tagliando quelle alte

se $X(f)$ è stretta

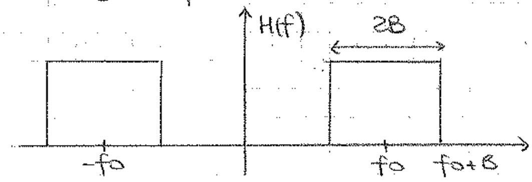


LEZIONE Giovedì 4-04-2013

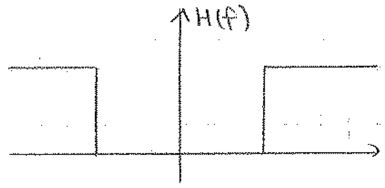
FILTRI



filtro passabasso di banda B

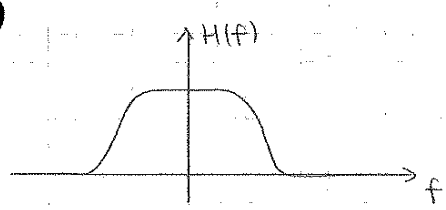


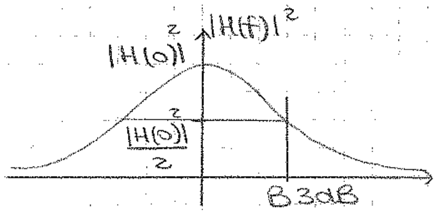
filtro passabanda di banda 2B



filtro passaalto con freq. di taglio B

Nel filtro passabasso reale - Banda a 3 dB del filtro





$|H(B3dB)|^2 = \frac{1}{2}|H(0)|^2$

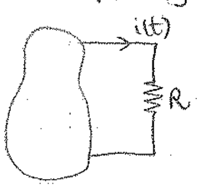
Per vedere qual è la banda Ba3dB cerco il valore del $|H(f)|^2$ in $f=0$ poi il valore medio e quindi il valore della funzione assunto nel valore medio

Indica il punto in cui la fdt inizia a scendere passando da 1 a 0, è un valore POSITIVO

SEGNALI A ENERGIA FINITA

L'energia $\mathcal{E}_x$ del segnale $x(t)$ è definita come $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

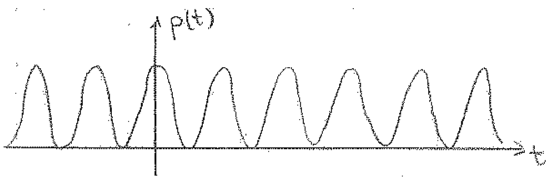
Suppongo di avere un resistore



$v(t) = Ri(t)$

Potenza assorbita dal resistore: $p(t) = v(t)i(t)$ (potenza istantanea) $p(t) = Ri^2(t)$

Potenza media P = media temporale di $p(t)$



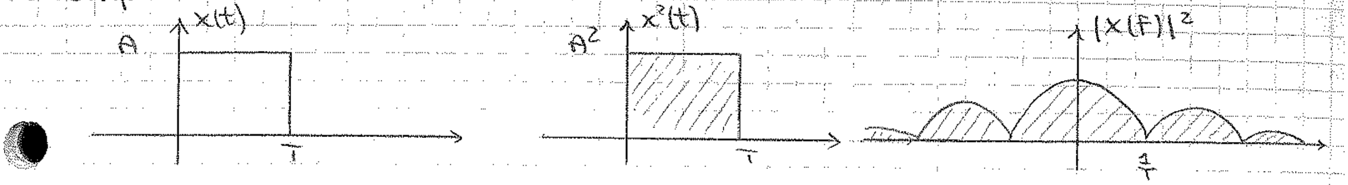
$i(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

Energia assorbita in 1 secondo:

$\int_0^1 p(t)\,dt$

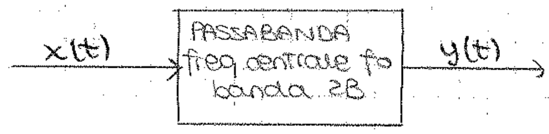
Energia assorbita nell'intervallo t_0-t_1 è: $\int_{t_0}^{t_1} p(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} Ri^2(t)\,dt$

Esempio:



l'area sottesa da $x^2(t)$ è uguale a quella di $|X^2(f)|$

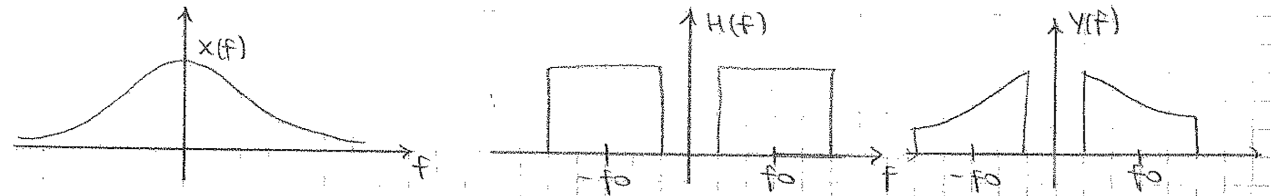
Esperimento ideale:



qual è l'energia di $y(t)$ = ?

$$\mathcal{E}y = \int y^2(t)\,dt = \int |Y(f)|^2 df$$

ma $Y(f) = X(f)H(f)$



$$\mathcal{E}y = \int |Y(f)|^2 df = \int |X(f)|^2 |H(f)|^2 df = \int_{f_0-B}^{f_0+B} |X(f)|^2 df + \int_{-f_0-B}^{-f_0+B} |X(f)|^2 df$$

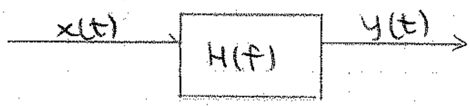
Energia di y ≡ energia della porzione di x(t) contenuta nell'intervallo di frequenze $[f_0-B, f_0+B]$

L'energia di x(t) è distribuita su tutte le frequenze → $|X(f)|^2$ dice come l'energia di x(t) è distribuita in frequenza e quindi per questo viene definito SPETTRO DI ENERGIA

$$|X(f)|^2 = \text{SPETTRO di ENERGIA} = S_x(f)$$

lo spettro dice, frequenza per frequenza, come la quantità è distribuita in frequenza → $\int$ spettro = energia

Suppongo che:



qual è il legame tra $S_y(f)$ e $S_x(f)$?

$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = S_x(f)\,|H(f)|^2$$

È valida per tutti gli spettri.

Lo spettro di energia vale solo per i segnali ad energia finita

Se lo calcolassimo per un segnale sinusoidale otterremmo una $\delta^2(t)$ che non ha senso → $|X(f)|^2$ ∄ per i segnali sinusoidali

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \longrightarrow |X(f)|^2 \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_x(\tau)$$

$R_x(\tau)$ è detta FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE definita come antitrasformata di Fourier dello spettro di energia

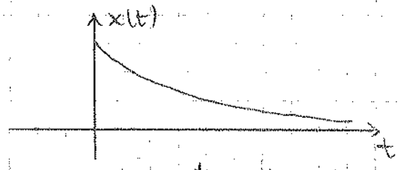
Quindi se $\tau > 0$

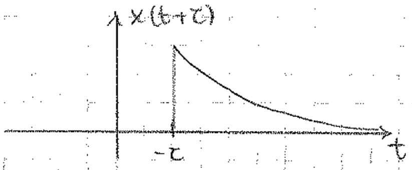
$$R_x(\tau) = \int x^*(t)x(t+\tau)dt = \int_0^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{\tau}{T}} dt =$$

$$= e^{-\tau/T} \int_0^{\infty} e^{-2t/T} dt = e^{-\tau/T} \cdot -\frac{T}{2} \left[e^{-2t/T} \right]_0^{\infty} = \frac{T}{2} e^{-\tau/T}$$

Abbiamo quindi ottenuto gli stessi risultati

se $\tau < 0$

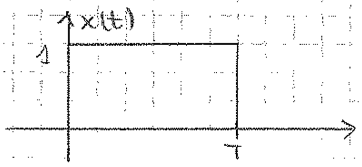




$$R_x(\tau) = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{\tau}{T}} dt = e^{-\frac{\tau}{T}} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}} dt = e^{-\frac{\tau}{T}} \cdot -\frac{T}{2} \left[e^{-\frac{2t}{T}} \right]_{-\tau}^{\infty} = \frac{T}{2} e^{-\frac{\tau}{T}} e^{\frac{2\tau}{T}} =$$

$$= \frac{T}{2} e^{\frac{\tau}{T}}$$

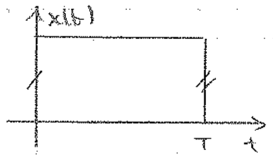
Calcolare la funzione di autocorrelazione di $x(t) = p_T(t - \frac{T}{2})$

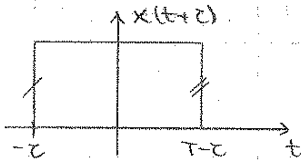


$$R_x(\tau) = \int x^*(t)x(t+\tau)dt = \int x(t)x(t+\tau)dt$$

se $\tau > 0$ e $\tau > T$ $\quad R_x(\tau) = 0$

se $\tau > 0$ e $\tau < T$ $\quad : 0 < \tau < T$

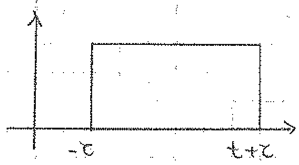




$$R_x(\tau) = \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^{T-\tau} d\tau = \left[\tau \right]_0^{T-\tau} = T - \tau$$

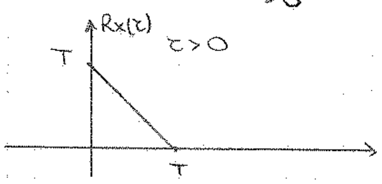
se $\tau < 0$ e $\tau < T$

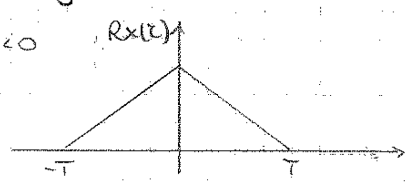


$$R_x(\tau) = \int_{-\tau}^{T} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\tau}^{T} d\tau = T + \tau$$

se $\tau < 0$ e $-\tau > T$ $\quad R_x(\tau) = 0$

$$R_x(0) = T = \mathcal{E}_x = \int_0^T |x(t)|^2 dt = \int_0^T dt = T$$





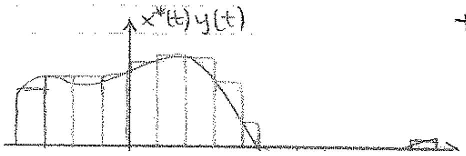
L'autocorrelazione di un rettangolo è un triangolo

Da un punto di vista fisico:

Si definisce prodotto scalare tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ a energia finita

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int x^*(t)y(t)\, dt$$

$$\langle x(t), y(t) \rangle \simeq \sum x^*(k\Delta t)y(k\Delta t)\Delta t$$ (posso pensarlo come somma di tutti i rettangoli)



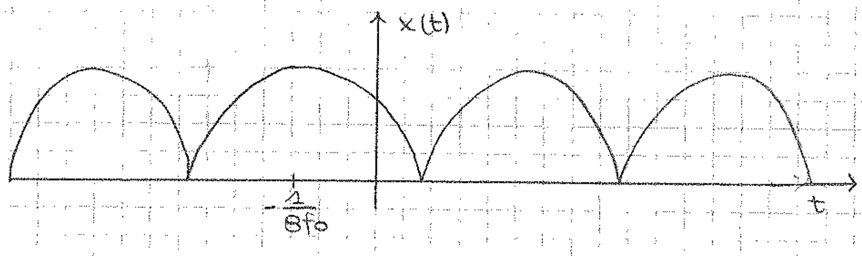
Considero un vettore $\underline{x}$: $\underline{x} = [\ldots, x(-\Delta t), x(0), x(\Delta t), \ldots]$

$\underline{y} = [\ldots\, y(-\Delta t), y(0), y(\Delta t)]$

Esercizi

1) $z(t) = |\cos(2\pi f_0 t)| \quad t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = z\left(t + \frac{1}{8f_0}\right)$

$x(t) = \left|\cos\left(2\pi f_0\left(t + \frac{1}{8f_0}\right)\right)\right| = z(t) * \delta\left(t + \frac{1}{8f_0}\right)$



$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{z(t) * \delta\left(t + \frac{1}{8f_0}\right)\right\} = Z(f)H(f) = Z(f)e^{j2\pi f/8f_0}$

$Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(2\pi f_0 t)|e^{-j2\pi ft}dt =$

$\cos(2\pi f_0 t) < 0 \rightarrow 2\pi f_0 t > \frac{\pi}{2},\ 2\pi f_0 t < \frac{3}{2}\pi \rightarrow \frac{1}{4f_0} < t < \frac{3}{4f_0}$

$\cos(2\pi f_0 t) > 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\pi f_0 t < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{1}{4f_0} < t < \frac{1}{4f_0}$

2) $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$

$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] =$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[k] + 2\delta[k-1] + 3\delta[k-2] + 2\delta[k-3] + \delta[k-4])(\delta[n-k] - \delta[n-k-1]) =$

per $n=0$ $\quad y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] + x[3]h[-3] + x[4]h[-4] = 1$

per $n=1$ $\quad y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] = -1 + 2 = 1$

per $n=2$ $\quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = -2 + 3 = 1$

per $n=3$ $\quad y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] = -3 + 2(1) = -1$

per $n=4$ $\quad y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k] = x[0]h[4] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] + x[4]h[0] = -2 + 1 = -1$

$y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] - \delta[n-4] - \delta[n-5]$

per $n=5$ $\quad y[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[5-k] = x[0]h[5] + x[1]h[4] + x[2]h[3] + x[3]h[2] + x[4]h[1] + x[5]h[0] = -1$

Oppure $y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} =$

$= x[n] - x[n-1] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4] -$

$- \delta[n-1] - 2\delta[n-2] - 3\delta[n-3] - 2\delta[n-4] - \delta[n-5] =$

$= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] - \delta[n-4] - \delta[n-5]$

2) $\mathcal{E}y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{\frac{T}{2}}^{T} 2\,dt = [2t]_{\frac{T}{2}}^{T} = 2T - T = T$

3) $\mathcal{E}(x+y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)+y(t)|^2 dt = \int_0^{\frac{T}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (\sqrt{2}-1)^2 dt = \frac{T}{2} + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 2+1-2\sqrt{2}\,dt =$

$= \frac{T}{2} + [(3-2\sqrt{2})t]_{\frac{T}{2}}^{T} = \frac{T}{2} + 3T - 2T\sqrt{2} - \frac{3}{2}T + \sqrt{2}T = +2T - T\sqrt{2}$

4) $\mathcal{E}(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)-y(t)|^2 dt = \int_0^{\frac{T}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-1-\sqrt{2})^2 dt = \frac{T}{2} + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 1+2+2\sqrt{2}d$

$= \frac{T}{2} + [t(3+2\sqrt{2})]_{\frac{T}{2}}^{T} = \frac{T}{2} + 3T + 2\sqrt{2}T - \frac{3}{2}T - \sqrt{2}t = 2T + T\sqrt{2}$

Difatti se $\omega(t) = x(t) + y(t)$

$\mathcal{E}\omega = \mathcal{E}x + \mathcal{E}y + 2\int x(t)\,y(t)\,dt$

se $\omega(t) = x(t) - y(t)$

$\mathcal{E}\omega = \mathcal{E}x + \mathcal{E}y - 2\int x(t)\,y(t)\,dt$

$\int x(t)\,y(t) = \int_{\frac{T}{2}}^{T} -\sqrt{2}\,dt = [-\sqrt{2}t]_{\frac{T}{2}}^{T} = -\sqrt{2}T + \frac{\sqrt{2}}{2}T$

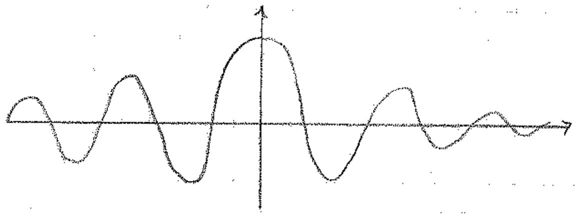
$2\int x(t)\,y(t)\,dt = -2\sqrt{2}T + \sqrt{2}T$

Quindi $\mathcal{E}x = T + T - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}T = 2T - \sqrt{2}T$

$\mathcal{E}y = T + T + 2\sqrt{2}T - \sqrt{2}T = 2T + \sqrt{2}T$

5) 6-7) Calcolare energia e fz. di autocorrelazione per $x(t)$

$x(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi t/T}{\pi t/T} = T\,\frac{\operatorname{sen}\pi t/T}{\pi t}$



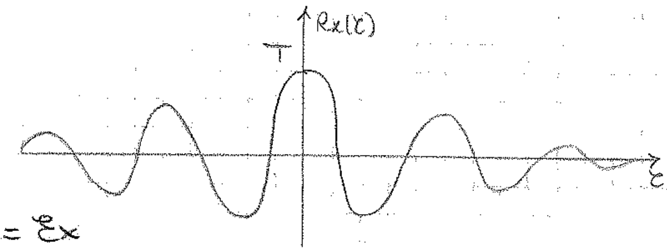
$\mathcal{E}x = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$

$X(f) = T\,p_{\frac{1}{T}}(f) = T \begin{cases} 1 & |f| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$\mathcal{E}x = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} T^2 dt = [T^2 t]_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} = T^2\frac{1}{2T} + T^2\frac{1}{2T} = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T$

$Rx(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{|T p_{\frac{1}{T}}(f)|^2\} = T^2\,\mathcal{F}^{-1}\{p_{\frac{1}{T}}(f)\} = T^2\frac{\operatorname{sen}\pi\tau/T}{\pi\tau}$

$|X(f)|^2 = \begin{cases} T^2 & |f| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



$Rx(\tau) = T\,\frac{\operatorname{sen}\pi\tau/T}{\pi\tau/T}$

$Rx(0) = \mathcal{E}x = T\,\frac{\operatorname{sen}\pi(0)/T}{\pi(0)/T} = T = \mathcal{E}x$

6) 5) Si trovi la relazione tra l'energia $\mathcal{E}x$ di un segnale $x(t)$ e l'energia $\mathcal{E}y$ del segnale $y(t) = x(\frac{t}{2})$ $\qquad \frac{t}{2} = u \rightarrow dt = 2du$

$\mathcal{E}x = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$

$\mathcal{E}y = \int |y(t)|^2 dt = \int |x(\frac{t}{2})|^2 dt = \int x^2(\frac{t}{2})dt = \int x^2(t)(2dt) = 2\,\mathcal{E}x$

ESERCITAZIONE 5 -

2) Si dimostri che la f2. di autocorrelazione di un segnale reale ad energia finita è una funzione pari.

FUNZIONE PARI $\Rightarrow R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

$R_x(\tau) = \int x^*(t)\, x(t+\tau)\,dt = \int x(t)\, x(t+\tau)\,dt$

$R_x(-\tau) = \int x^*(t)\, x(t-\tau)\,dt = \int x(t)\, x(t-\tau)\,dt = \int x(u+\tau)\,x(u)\,du =$

pongo $t-\tau = u \rightarrow t = u+\tau \rightarrow dt = du$

$R_x(-\tau) = \int x(u)\,x(u+\tau)\,du = \int x(t)\,x(t+\tau)\,dt = R_x(\tau)$

$R_x(\tau)$ è dunque una f. pari!

Oppure lavorando in frequenza:

$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \int |X(f)|^2 e^{j2\pi f t}\,df$

$R_x(-\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(-f)|^2\} = \int |X(-f)|^2 e^{-j2\pi f t}\,df = \left[\int |X(f)|^2 e^{j2\pi f t}\,df\right]^* =$

$= [R_x(\tau)]^* = R_x(\tau)$

3) Dimostrare che $R_x(\tau)$ di $x(t)$ e $R_y(\tau)$ di $y(t) = x(t-t_0)$ sono identiche

$R_x(\tau) = \int x(t)\,x(t+\tau)\,dt$

$R_y(\tau) = \int y(t)\,y(t+\tau)\,dt = \int x(t-t_0)\,x(t-t_0+\tau)\,dt = \int x(u)\,x(u+\tau)\,du$

pongo $u = t-t_0 \rightarrow du = dt$

$R_y(\tau) = \int x(t)\,x(t+\tau)\,dt = R_x(\tau)$

Oppure lavorando in frequenza:

$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\}$

$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|Y(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)X^*(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = R_x(\tau)$

$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * \delta(t-t_0)\} = X(f)H(f) = X(f)\,e^{+j2\pi f t_0}$

$|Y(f)| = X(f)$

$|Y(f)|^2 = X(f)X^*(f)$

4) Si trovi la relazione tra $\mathcal{E}_x$ di un segnale $x(t)$ (energia finita) e l'energia $\mathcal{E}_y$ del segnale $y(t) = x(2t)$

$\mathcal{E}_x = \int |x(t)|^2\,dt = \int |X(f)|^2\,df$

$\mathcal{E}_y = \int |y(t)|^2\,dt = \int |x(2t)|^2\,dt = \int |x(u)|^2 \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int |x(u)|^2\,du = \frac{1}{2}\mathcal{E}_x$

pongo $2t = u \rightarrow dt = \frac{1}{2}du$

5) $x(t)$, $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$

$\mathcal{E}_x = \int |x(t)|^2\,dt$

$\mathcal{E}_y = \int |y(t)|^2\,dt = \int \left|x\left(\frac{t}{2}\right)\right|^2 dt = \int |x(u)|^2 (2\,du) = 2\int |x(u)|^2\,du = 2\mathcal{E}_x$

pongo $\frac{t}{2} = u \rightarrow t = 2u \rightarrow dt = 2du$

LEZIONE

Fz. di autocorrelazione:

$R_x(\tau) = \int x^*(t)x(t+\tau)dt = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\}$

il massimo di $R_x(\tau)$ si ha per $\tau = 0$

Disuguaglianza di Schwartz:

$$\left|\int f(t)g(t)dt\right|^2 \leq \int |f(t)|^2 dt \int |g(t)|^2 dt$$

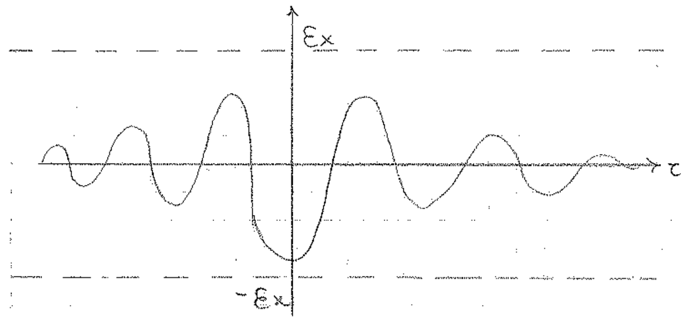
Il max si ha quando $f(t) \propto g(t)$

$|R_x(\tau)|^2 = \left|\int x(t)x(t+\tau)dt\right|^2 \leq \int |x(t)|^2 dt \int |x(t+\tau)|^2 dt = \mathcal{E}_x^2$

Il max si ha quando $x(t) \propto x(t+\tau) \Rightarrow \tau = 0$

$R_x(0) = \int x(t)x(t+\tau)dt \Big|_{\tau=0} = \int x(t)x(t)dt = \int x^2(t)dt = \mathcal{E}_x$

Quindi $\underline{|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = \mathcal{E}_x}$



$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ se $x(t)$ è una funzione reale

$R_x(-\tau) = \int x(t)x(t-\tau)dt = \int x(u+\tau)x(u)du = \int x(t)x(t+\tau)dt = R_x(\tau)$

pongo $t - \tau = u$

Definisco il segnale $e(t) = x(t) - x(t+\tau)$ e calcolo $\mathcal{E}_e$

$\mathcal{E}_e = \int |e(t)|^2 dt = \int (x(t) - x(t+\tau))^2 dt = \int x^2(t) + x^2(t+\tau) - 2x(t)x(t+\tau)dt$

$= \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_x - 2R_x(\tau) = 2\mathcal{E}_x - 2R_x(\tau)$

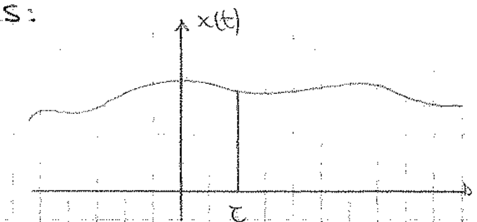
Quindi l'energia del segnale differenza $e(t)$ è:

$$\mathcal{E}_e = 2\mathcal{E}_x - 2R_x(\tau)$$

Da questa posso ricavare che $R_x(\tau) \leq \mathcal{E}_x$ poiché $\mathcal{E}_e$ deve essere ≥ 0

$\mathcal{E}_e$ è piccola se $R_x(\tau) \approx \mathcal{E}_x \Rightarrow x(t)$ è simile a $x(t+\tau)$ in modo tale che il segnale $e(t)$ sia piccolo e sia piccola $\mathcal{E}_e \rightarrow$ questo vuol dire anche che $x(t)$ varia lentamente in un intervallo di durata τ.

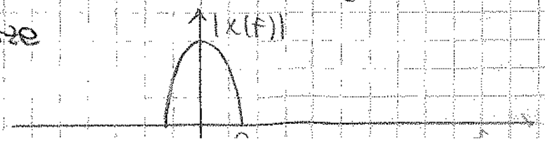
Es:



tra $x(t)$ e $x(t+\tau)$ non c'è molta variazione $\rightarrow x(t+\tau)$ non è molto diverso dal valore $t = 0$ (max)

Questo vuol dire che la maggior parte dell'energia si ha nelle basse frequenze

B_x piccola



Viene trasmesso il segnale $x(t)$ e si riceve il segnale $y(t) = \alpha x(t-t_0)$ con $\alpha < 1$. Per semplicità considero $\alpha = 1$

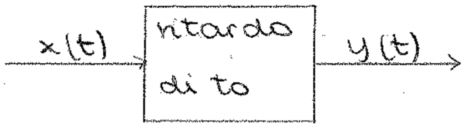
Il ricevitore esegue il prodotto scalare di $x(t-\tau)$ e $y(t)$ per $\forall$ possibile valore di τ e sceglie τ che rende max il prodotto scalare

$$\langle x(t-\tau), y(t) \rangle = \int x(t-\tau)\, y(t)\, dt = \int x(t-\tau)\, x(t-t_0)\, dt$$

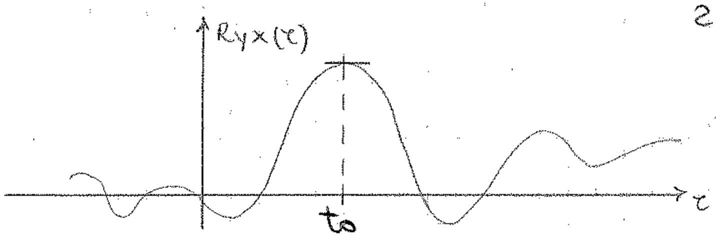
pongo $t-\tau = u \rightarrow t = u+\tau \rightarrow dt = du$

$$\langle x(t-\tau), y(t) \rangle = \int x(u)\, x(u+\tau-t_0)\, du = R_x(\tau-t_0)$$

Il max di $\langle x(t-\tau), y(t) \rangle$, cioè di $\underline{R_x(\tau-t_0) = \mathcal{E}_x \text{ per } \tau = t_0}$



Si calcola poi la mutua correlazione tra $x(t)$ e $y(t)$ e si cerca il max della mutua correlazione; il valore di τ per il quale si trova il max è la stima di t_0.



$2x(t) = vt = vt_0 \rightarrow x(t) = \frac{vt_0}{2}$

$v = \text{cost}$

In realtà nel corpo umano v non è cost (dipende anche dalla temp. e dalla superficie)

$1540 < v < 4000$ m/s (1540 m/s → tessuti molli, 4000 m/s tes. osseo)

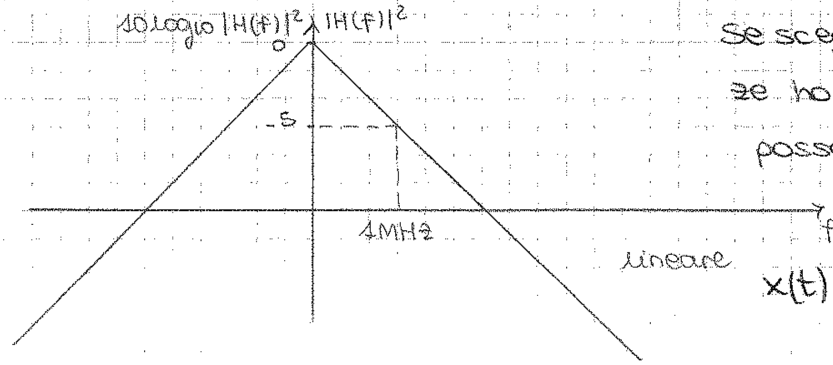
L'attenuazione $\left(\frac{dB}{cm\, MHz}\right)$ dipende dal tessuto e dalla frequenza

Tessuto	Attenuazione
Sangue	0,18
Grasso	0,6
Cervello	0,85
Cranio	20
Polmoni	40
Acqua	0,0022

Atten. media $0{,}5\ \frac{dB}{cm\, MHz}$

(se ↑ frequenza, ↑ attenuazione)

Il corpo umano si comporta come un filtro avente una $H(f)$



Se scegliamo le basse frequenze ho meno risoluzione (non posso vedere gli oggetti più piccoli)

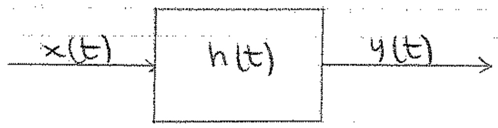
$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)\, p_T\!\left(t - \frac{T}{2}\right)$

per individuare la nostra posizione $(x, y, z, \Delta t)$. 4 segnali: $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$

Il ricevitore riceve un segnale $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$

$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t) + \alpha_4 x_4(t)$

Il ricevitore calcola $\langle y(t), x_1(t-\tau)\rangle$, $\langle y(t), x_2(t-\tau)\rangle$, $\langle y(t), x_3(t-\tau)\rangle$, $\langle y(t), x_4(t-\tau)\rangle$



$Y(f) = X(f)H(f)$

$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = S_x(f)|H(f)|^2$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)|H(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} =$$

$$= R_x(\tau) * \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\}$$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f) \longrightarrow |H(f)|^2 \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_h(\tau)$$

quindi $R_h(\tau)$ = autocorrelazione di $h(t) = \int h(t)h(t+\tau)dt$

Quindi $R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$ in frequenza funziona sempre, nel tempo non funziona se il sistema non è stabile

L'integratore ha $h(t) = u(t)$ e NON esiste $R_h(\tau)$ poiché $h(t)$ non è un segnale ad energia finita

Anche per il ritardatore non esiste $R_h(\tau)$; difatti $h(t) = \delta(t - t_0)$ che non è un segnale ad energia finita

Solitamente i sistemi LTI stabili hanno $h(t)$ ad energia finita ed $R_h(\tau)$ esiste ?

SEGNALI PERIODICI

Un segnale $x(t)$ è periodico di periodo T se $x(t+T) = x(t)$

ES: $x(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t)$

$x(t+T) = \text{sen}(2\pi f_0(t+T)) = \text{sen}(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 T) \overset{?}{=} x(t)$

$x(t+T) = x(t)$ se $2\pi f_0 T = 2k\pi$ con k intero $T = \frac{k}{f_0}$

Il periodo è quello più piccolo, cioè $T = \frac{1}{f_0}$

Il segnale periodico deve necessariamente avere durata infinita ed energia infinita

La potenza di un segnale $x(t)$ è definita come

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$$

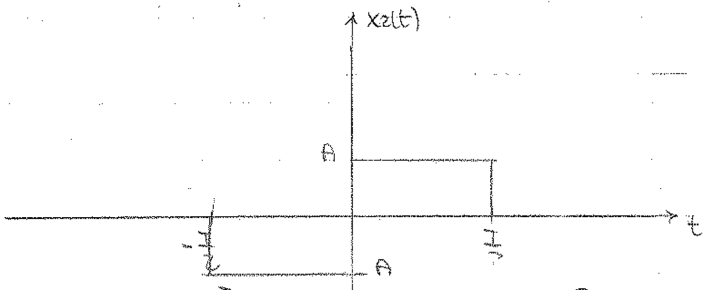
Per un segnale periodico di periodo T_P, la potenza può essere calcolata più semplicemente come:

LEZIONE - ESERCITAZIONE 6

1) 4) Calcolare il prodotto scalare tra i segnali della base ortonormale $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kt/T} p_T(t) \right\}$ con k da $-\infty$ a $+\infty$ (intero) ed il segnale

$x_2(t) = A \, \text{segn}\left(\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) p_T(t)$

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int x_1^*(t) x_2(t)\, dt = \int x_2(t) \psi_k^*(t)\, dt$$



se non ci fosse $p_T(t)$ sarebbe un'onda quadra

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_2(t) \psi_k^*(t)\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} -A \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} A \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T} dt =$$

$$= -\frac{A}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{0} e^{-j2\pi kt/T} dt + \frac{A}{\sqrt{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi kt/T} dt = -\frac{A}{\sqrt{T}} \left[\frac{T e^{-j2\pi kt/T}}{-j2\pi k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\frac{T e^{-j2\pi kt/T}}{-j2\pi k} \right]$$

$$= -\frac{A}{\sqrt{T}} \left(\frac{T}{-j2\pi k} \right) + \frac{A}{\sqrt{T}} \left(\frac{T e^{j\pi k}}{-j2\pi k} \right) + \frac{A}{\sqrt{T}} \left(\frac{T e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} \right) - \frac{A}{\sqrt{T}} \left(\frac{T}{-j2\pi k} \right) =$$

$$= -\frac{2A}{\sqrt{T}} \left(\frac{T}{-j2\pi k} \right) + \frac{A}{\sqrt{T}} \cdot \frac{T}{-j\pi k} \cos(\pi k) = + \frac{A\sqrt{T}}{j\pi k} - \frac{A\sqrt{T}}{j\pi k} \cos(\pi k)$$

se $k = 2n \rightarrow \langle x_1(t), x_2(t) \rangle = 0$

se $k = 2n+1 \rightarrow \langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \frac{2A\sqrt{T}}{j\pi k}$

Oppure $e^{j\pi k} = (-1)^k$, $e^{-j\pi k} = (-1)^k$

Un altro modo per calcolare il prodotto scalare è:

$$x_{2,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi kt/T} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} X_2\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{T}} X_2(f) \Big|_{f=\frac{k}{T}}$$

Calcolo di $X_2(f)$ con $f = \frac{k}{T}$ $\qquad x_2(t) = p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{4}\right) - p_{\frac{T}{2}}\left(t + \frac{T}{4}\right)$

$$X_2(f) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \mathcal{F}\left\{ A \, \text{segn}\left(\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) p_T(t) \right\} = A \mathcal{F}\left\{ \text{segn}\left(\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) p_T(t) \right\}$$

$$= \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \mathcal{F}\left\{ p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{4}\right) - p_{\frac{T}{2}}\left(t + \frac{T}{4}\right) \right\} = \mathcal{F}\left\{ A p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{4}\right) \right\} - \mathcal{F}\left\{ A p_{\frac{T}{2}}\left(t + \frac{T}{4}\right) \right\} =$$

$$= \frac{A \,\text{sen}\, \pi f T/2}{\pi f} - \frac{A \,\text{sen}(\pi f T/2)}{\pi f} = A p_{\frac{T}{2}}(t) * \delta\left(t - \frac{T}{4}\right) - A p_{\frac{T}{2}}(t) * \delta\left(t + \frac{T}{4}\right) =$$

$$= A p_{\frac{T}{2}}(t) * \left[\delta\left(t - \frac{T}{4}\right) - \delta\left(t + \frac{T}{4}\right) \right] = A \mathcal{F}\left\{ p_{\frac{T}{2}}(t) \right\} \mathcal{F}\left\{ \delta\left(t - \frac{T}{4}\right) - \delta\left(t + \frac{T}{4}\right) \right\} =$$

$$= A \frac{\text{sen}\, \pi f T/2}{\pi f} \cdot \left[e^{-j2\pi f T/4} - e^{j2\pi f T/4} \right] = A(2j) \frac{\text{sen}\, \pi f T/2}{\pi f} \left(-\text{sen}(\pi f T/2) \right) =$$

$$= -\frac{2jA}{\pi f} \left(\text{sen}^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right) \right)$$

$$x_{3,k} = \frac{1}{\sqrt{T}} X_3(f)\Big|_{f=\frac{k}{T}} = \frac{A\sqrt{T}}{\pi} \cos^2\frac{\pi k}{2} \cdot \frac{-2}{k^2-1}$$

se k è pari: $x_{3,k} = \left(\frac{A\sqrt{T}}{\pi}\right)\left(-\frac{2}{k^2-1}\right)$

se k è dispari: $x_{3,k} = 0$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int x_T(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt \cdot \frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{j2\pi kt/T} p_T(t) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int x_T(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt}_{\mu_k} \cdot e^{j2\pi kt/T} p_T(t) =$$

$$= \sum \mu_k\, e^{j2\pi kt/T} p_T(t)$$

Quindi $\underline{x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k\, e^{j2\pi kt/T} p_T(t)}$

$\underline{\text{con } \mu_k \triangleq \frac{1}{T} \int x_T(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} X_T(f)\big|_{f=\frac{k}{T}}}$

μ_k = K-esimo coefficiente della serie di Fourier

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi kt/T} p_T(t)$ è la serie di Fourier

Il segnale periodico vale $x_T(t)$ nel periodo fondamentale $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo T

Il segnale $e^{j2\pi kt/T}$ è periodico di periodo T/k e quindi è anche periodico di periodo T per $\forall k$

$\Rightarrow \underline{x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi kt/T} \quad -\infty < t < \infty}$ Serie di Fourier seg. periodico

Quindi per un generico segnale periodico $x(t)$, si ha

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi kt/T} \quad -\infty < t < \infty$$

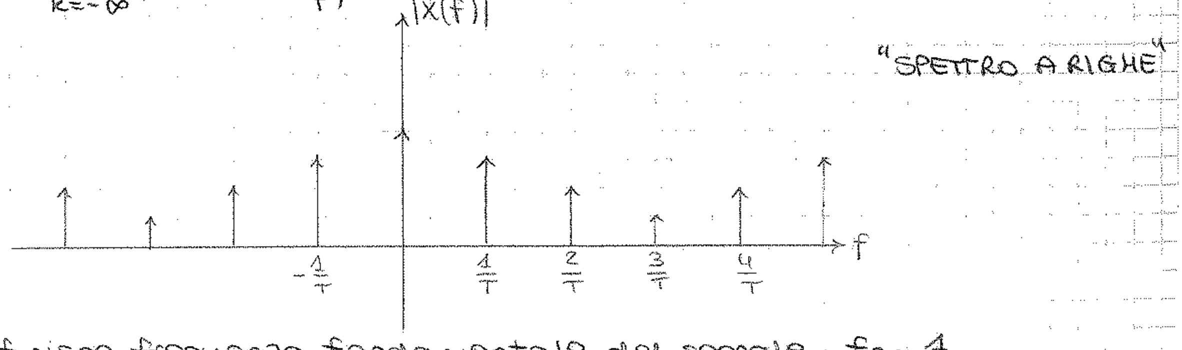
con $\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt =$ (in μ_k c'è $x_T(t)$ = troncato)

$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt =$ (essendo che $x(t) = x_T(t)$ per $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$)

$= \frac{1}{T} X_T\left(\frac{k}{T}\right)$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi kt/T} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k\, \mathcal{F}\left\{ e^{j2\pi kt/T} \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k\, \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



Si definisce frequenza fondamentale del segnale: $f_0 = \frac{1}{T}$

la trasf. di Fourier ha un aspetto a "SPETTRO A RIGHE" (è una serie di $\delta(t)$ centrate nelle frequenze multiple di f_0.

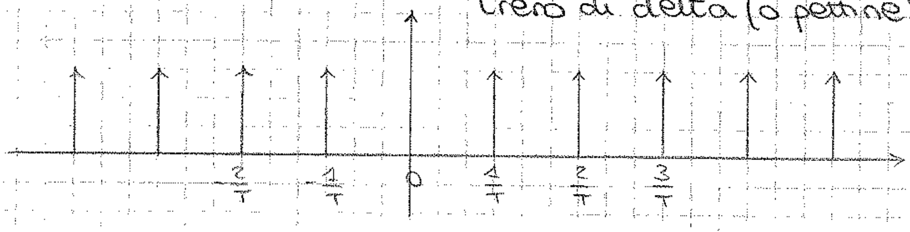
LEZIONE

SEGNALI PERIODICI

$$x(t) = \sum \mu_k e^{+j2\pi kt/T}$$

$$\mu_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt = \frac{1}{T}X_T(f)\Big|_{f=\frac{k}{T}}$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu_k\,\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}X_T(f)\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)}_{\text{treno di delta (o pettine)}}$$



Segnale sinusoidale:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \qquad T = 1/f_0$$

$$\mu_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(2\pi f_0 t+\theta)e^{-j2\pi kt/T}\,dt =$$

$$= \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi t/T+j\theta} + e^{-j2\pi t/T-j\theta}\right)e^{-j2\pi kt/T}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2T}e^{j\theta}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(k-1)t/T}\,dt + \frac{A}{2T}e^{-j\theta}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(k+1)t/T}\,dt$$

$\mu_k = 0$ se $k \neq \pm 1$

$$\mu_1 = \frac{A}{2T}e^{j\theta}T = \frac{A}{2}e^{j\theta}$$

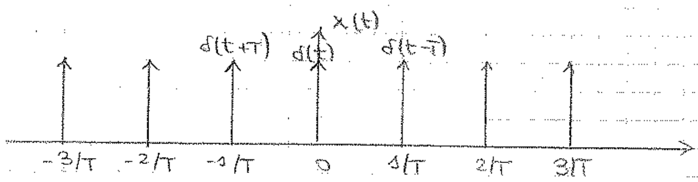
$$\mu_{-1} = \frac{A}{2T}e^{-j\theta}T = \frac{A}{2}e^{-j\theta}$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t+\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu_k e^{j2\pi kt/T} = \mu_{-1}e^{-j2\pi t/T} + \mu_1 e^{j2\pi t/T} =$$

$$= \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j2\pi t/T} + \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j2\pi t/T} = \frac{A}{2}\left(e^{j2\pi t/T+j\theta} + e^{-j(2\pi t/T+\theta)}\right)$$

$$X(f) = \mu_1\,\delta\left(f-\frac{1}{T}\right) + \mu_{-1}\,\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)$$

Segnale treno di delta



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$$x(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t+T) + \delta(t+2T) + \delta(t-2T)$$

$$x(t) = \sum\delta(t-kT) = \sum\mu_k e^{j2\pi kt/T} \qquad x_T(t) = \delta(t)$$

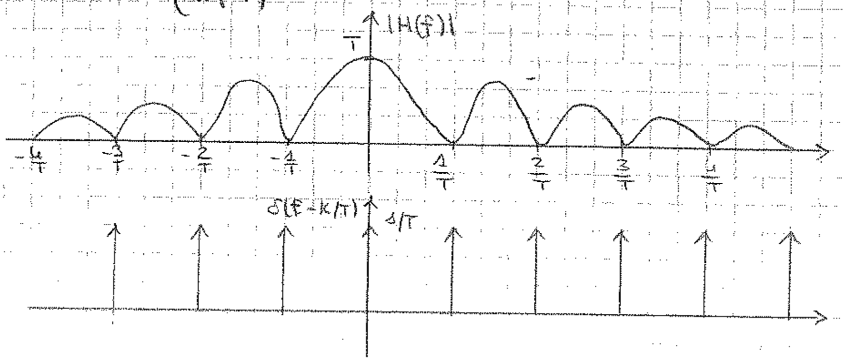
$$\mu_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt =$$

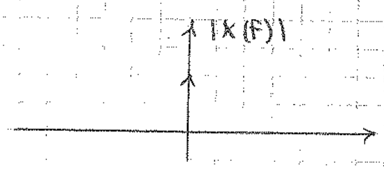
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\cdot 1\,dt = \frac{1}{T} \qquad \forall k$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi kt/T}$$ (la serie di Fourier vale anche per $\delta(t)$)

$X(f) = H(f)\,\frac{1}{T}\sum \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$

$H(f) = T\,\frac{\operatorname{sen}^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}\,e^{-j2\pi f T}$ $\quad$ ($e^{-j2\pi f T}$ poiché è ritardato di T)



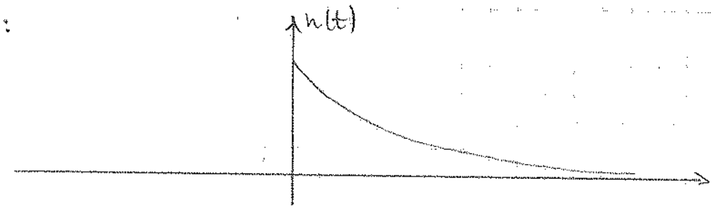


$|H(f)|\,\frac{1}{T}\sum \delta(f-k/T) = \delta(t)$ $\quad$ rimane solo la $\delta(t)$ centrata in 0

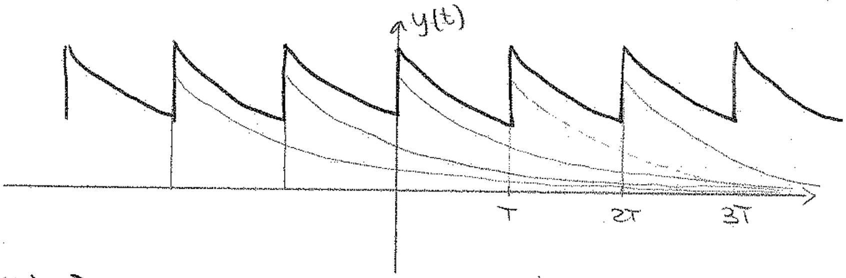
$|X(f)| = \frac{1}{T}(T) = 1$

$\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(t)$

Se $h(t)$:



$y(t) = h(t) * \sum \delta(t-kT) = \sum h(t) * \delta(t-kT) = \sum h(t-kT)$



$y(t)$ è un segnale periodico di periodo T

SIMMETRIE

Se $x(t)$ è reale, $x_T(t)$ è reale e $X_T(f)$ è tale che $X_T(-f) = X_T^*(f)$

$X(f) = X_T(f)\,\frac{1}{T}\sum\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = \sum \mu_k\,\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$

$|X(f)|$ è una f.z pari

$\angle X(f)$ è una f.z. dispari

$\mu_k = \frac{1}{T} X_T(f)\big|_{f=\frac{k}{T}}$ $\qquad$ $|\mu_{-k}| = |\mu_k|$

$\angle \mu_{-k} = -\angle \mu_k$

Potenza di un segnale periodico

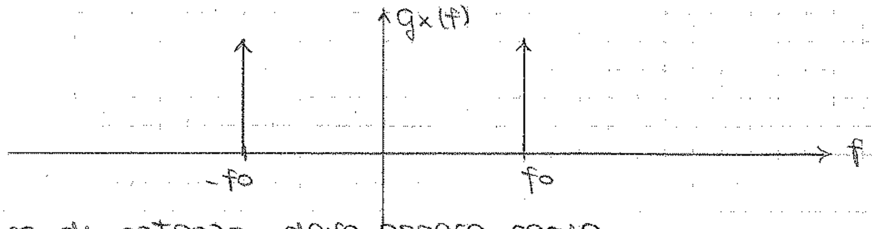
$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_k \mu_k e^{j2\pi k t/T}\left(\sum_n \mu_n e^{j2\pi n t/T}\right)^* dt =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_k\sum_n \mu_k\mu_n^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi k t/T}\,e^{-j2\pi n t/T}\,dt =$$

Per il segnale sinusoidale $x(t)$:

$$G_x(f) = |\mu_1|^2 \delta(f-f_0) + |\mu_{-1}|^2 \delta(f+f_0) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

lo spettro di potenza si riduce a due sole δ



lo spettro di potenza deve essere reale

<u>Funzione di autocorrelazione:</u>

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_k |\mu_k|^2 \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)\right\} = \sum_k |\mu_k|^2 \mathcal{F}^{-1}\left\{\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)\right\} =$$
$$= \sum_k |\mu_k|^2 e^{j2\pi k\tau/T}$$

Quindi $R_x(\tau)$ è una funzione periodica di periodo T

$$x(t) = \sum \mu_k e^{j2\pi kt/T}$$
$$R_x(\tau) = \sum |\mu_k|^2 e^{j2\pi k\tau/T}$$
$$X(f) = \sum \mu_k \delta(f-k/T)$$
$$G_x(f) = \sum |\mu_k|^2 \delta(f-k/T)$$

$R_x(0) = \sum_k |\mu_k|^2 = P_x$ ($R_x(0)$ è uguale a P_x come $R_x(0) = \mathcal{E}_x$)

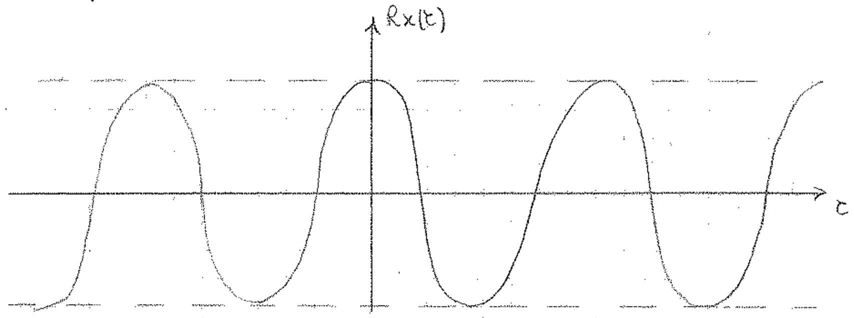
se $x(t)$ è reale $\Rightarrow R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

Il massimo di $|R_x(\tau)|$ si ha in $\tau = 0, \pm T, \pm 2T$ (essendo periodica)

Se $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ $\qquad T = 1/f_0$

$\mu_1 = \frac{A}{2}e^{j\theta} \qquad \mu_{-1} = \frac{A}{2}e^{-j\theta}$

$$R_x(\tau) = \sum_k |\mu_k|^2 e^{j2\pi k\tau/T} = |\mu_1|^2 e^{j2\pi\tau/T} + |\mu_{-1}|^2 e^{-j2\pi\tau/T} =$$
$$= \frac{A^2}{4}\left(e^{j2\pi\tau/T} + e^{-j2\pi\tau/T}\right) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\tau/T) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$



$R_x(\tau)$ è periodica con periodo $= x(t)$

$R_x(0) = P_x$; il massimo si ha per $\tau = 0$

se $x(t)$ è reale $R_x(\tau)$ è una f. pari