NUMERO: 738

DATA: 20/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Cavallaro

MATERIA: Meccanica delle Macchine

Prof. Eula

LEZIONE 1

- Ferraresi, Raparelli, "Meccanica applicata", Ed Clut
- G. Belforte, "Meccanica applicata alle macchine", ed Levrotto & Bella

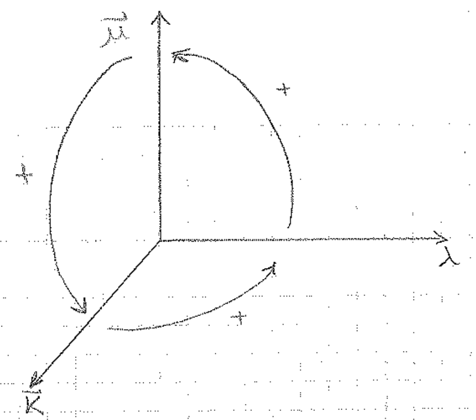
Prox settimana laboratorio : 13 marzo → 17 aprile

DERIVATA DI UN VETTORE ROTANTE

$$\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega\vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$$

con ω = velocità di rotazione di $r\lambda$ nel piano

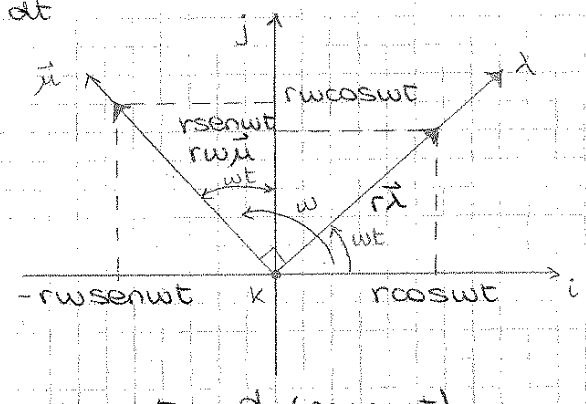
TERNA DESTRORSA : se la percorro in senso antiorario (ognuno dei tre si ricava dal prodotto vettoriale degli altri due)



$$\begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{\mu} = \vec{k} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{k} = \vec{\lambda} \\ \vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{k} = -\vec{\mu} \\ \vec{k} \wedge \vec{\mu} = -\vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{\lambda} = -\vec{k} \end{cases}$$

$\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt}$ è analizzata sul piano xy



ω = velocità di rotazione di un vettore $r\vec{\lambda}$ attorno all'asse $\vec{k}$

$\vec{\mu} \perp \vec{\lambda}$, $r\omega\vec{\mu}$

entrambi ruotano con velocità angolare ω ma si mantengono $\perp$

$$-r\omega\,sen\,\omega t = \frac{d}{dt}(r\cos\omega t)$$
$$r\omega\cos\omega t = \frac{d}{dt}(r\,sen\,\omega t)$$

⇒ il 2° vettore ha le proiezioni uguali alle derivate delle proiezioni del 1°.

$$\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = r\omega\vec{\mu} = r\omega[\vec{k} \wedge \vec{\lambda}] = \omega\vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$$ essendo $\vec{\mu} = \vec{k} \wedge \vec{\lambda}$

Quindi $\underbrace{\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt}}_{3} = \underbrace{\omega\vec{k}}_{1} \wedge \underbrace{(r\vec{\lambda})}_{2}$ (cioè ω moltiplicata per il vettore stesso)

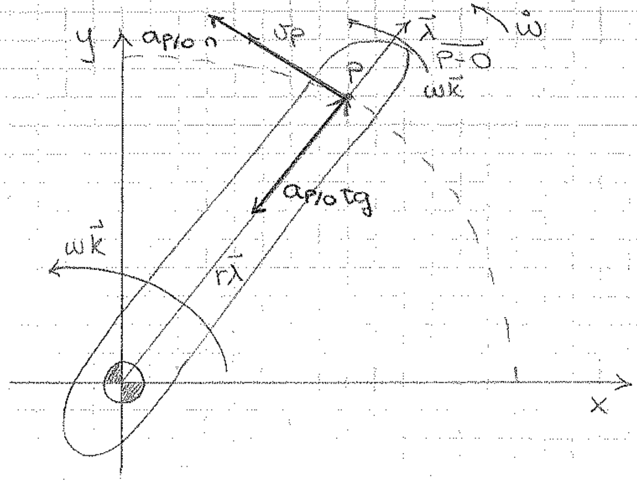
$r\vec{\lambda}$ = vettore posizione

$\frac{d(r\lambda)}{dt}$ = vettore velocità – per calcolare la velocità useremo $\omega k \wedge$ i

Nel piano, dunque, derivare un vettore rotante significa:

1 - ruotarlo di 90° nel senso di ω (si passa da $\vec{\lambda}$ a $\vec{\mu}$)

2° - MOTO ROTATORIO INTORNO AD UN PUNTO FISSO:

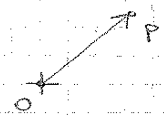


cerniera fissa al telaio

P descrive attorno ad O una circonferenza di raggio $\overline{PO}$

$r\vec{\lambda} = \overline{P-O}$

$PO = r = cost$



$P-O = r\vec{\lambda}$

Lavoreremo solo con il vettore $\overline{PO}$, $\overline{P-O}$

$$v_P = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\lambda} + r\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = r\left[\omega\vec{k}\wedge\vec{\lambda}\right] = \omega\vec{k}\wedge(r\vec{\lambda}) = \omega\vec{k}\wedge(\overline{P-O}$$

poiché $r = cost \rightarrow \frac{dr}{dt} = 0$, λ si sta muovendo con velocità ang. ω

$v_O = 0$ poiché il punto è fisso

$\overline{P-O}$ = vettore posizione al posto di $r\vec{\lambda}$

$v_P = \overline{P-O}$ ruotato di $90°$ nel senso di ω → tangente alla circonferenza descritta da P.

$$v_P = v_O + \omega\vec{k}\wedge(\overline{P-O})$$

$$a_P = \frac{d(r\omega\vec{\mu})}{dt} = \frac{dr}{dt}\omega\vec{\mu} + r\frac{d\omega}{dt}\vec{\mu} + r\omega\frac{d\vec{\mu}}{dt} = r\dot{\omega}\left[\vec{k}\wedge\vec{\lambda}\right] +$$

$$+ r\omega\left[\omega\vec{k}\wedge\vec{\mu}\right] = \dot{\omega}\vec{k}\wedge(r\vec{\lambda}) + r\omega^2\left[-\vec{\lambda}\right] =$$

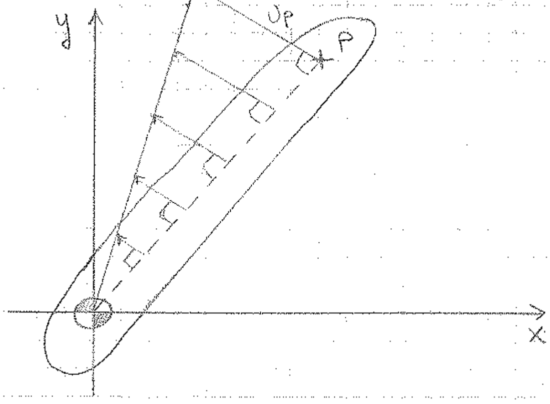
$$= \dot{\omega}k\wedge(\overline{P-O}) - \omega^2(\overline{P-O}) = \vec{a}_P \qquad (a_O = 0)$$

$a_P = a_P$ tangenziale + a_P normale o centripeta $= \overline{a_{P/O\,tg}} + \overline{a_{P/O\,n}}$

dove $a_{P/O\,n}$ è diretta verso il centro e negativa poiché opposta al vettore $\overline{P-O}$; esiste anche se ω è costante

$a_{P/O\,tg}$ è diretta nel verso di ω

A noi interessa v_P, $a_{P/O\,tg}$ e $a_{P/O\,n}$



Distribuzione triangolare delle velocità

$$v_P = \omega\vec{k}\wedge(\overline{P-O})$$

$$v_G = \omega\vec{k}\wedge(\overline{G-O})$$

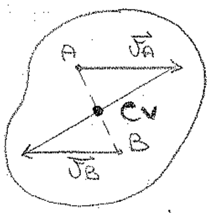
Essendo G più vicino a O

$v_G < v_P$

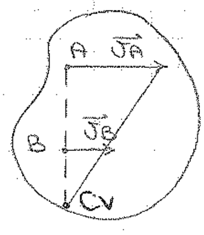
Tutti i punti del corpo ruotano rispetto a Cv con la stessa velocità ω; le ortogonali alle velocità sono le direzioni e la loro intersezione è il Cv

METODO DEL Cv

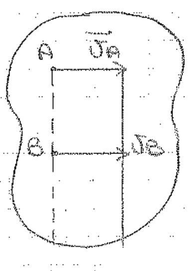
b) se $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ ho bisogno di modulo, direzione e verso:



Parallele e discordi



Parallele e concordi



$|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B|$

$C_v = +\infty$

Stesso modulo

Il Cv è dato dall'intersezione tra la retta che unisce i due punti A e B e la retta che unisce i due vettori

1° caso: Cv interno (se discordi) alla distanza AB = X tra la retta che unisce vA e vB e quella che unisce A e B

2° caso: Cv esterno alla distanza AB, tutti i punti ruotano con la stessa ω rispetto a Cv

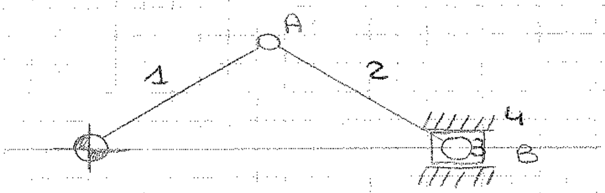
3° caso: il corpo subisce una traslazione, le due rette sono ∥ e il Cv si trova all'infinito ($\omega = 0$)

Per le velocità → metodo del Cv o formula fond. della cinematica

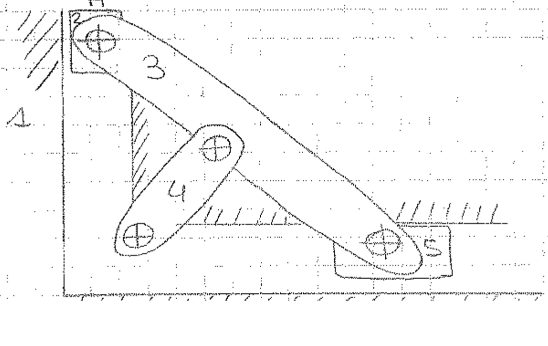
Per le accelerazioni → formula di Rivals

CATENE CINEMATICHE = insieme di più corpi rigidi connessi da vincoli

- catena cinematica semplice: ogni corpo rigido ha solo 1 o 2 coppie cinematiche (vincoli)



- catena cinematica composta: esiste almeno un corpo con 3 coppie cinematiche



CALCOLO DEI GRADI DI LIBERTÀ DI UN MECCANISMO:

→ FORMULA DI GRÜLER

$$x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

con x = n° dei GdL

m = n° di corpi compreso il telaio

C_1 = n° di vincoli presenti a 1 GdL (es: cerniera piana)

C_2 = n° di vincoli presenti a 2 GdL (es: carrello)

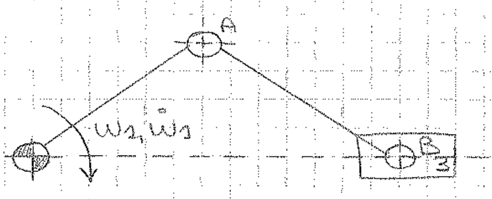
Se $x=0$ <u>non</u> si tratta di un meccanismo ma di una struttura

Per il sistema biella-manovella

$$\begin{cases} m = 4 & (AO;\ AB;\ 3;\ \text{telaio}) \\ C_1 = 4 & (O, A, B, \text{guida orizzontale}) \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ GdL}$$

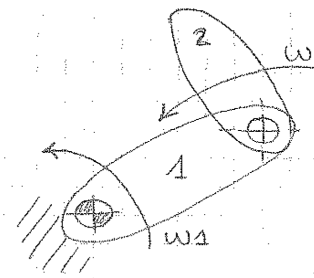
meccanismo a

Se in un meccanismo ho la ω_1



in questo caso, avendo 1 solo GdL, mi è data o ω_1 o v_B ma <u>non</u> entrambe

Se invece il sistema ha 2GdL → ci forniscono due velocità (ω)



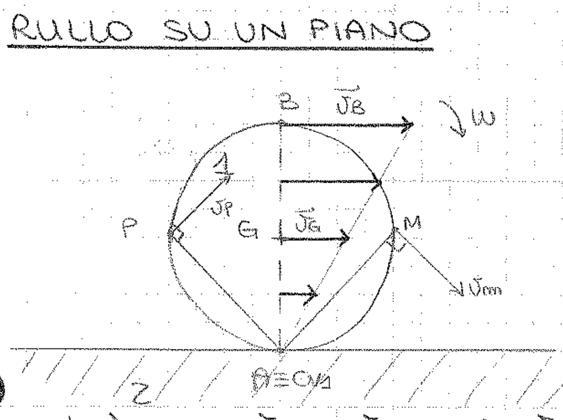
infatti il corpo 1 potrebbe anche fermarsi mentre il corpo 2 no

n° di GdL = n° dei motori necessari per muovere il meccanismo

Nell'incastro GdL = 0 → $\omega = 0$

Ogni GdL deve cioè essere coperto da un motore

RULLO SU UN PIANO



1 - rullo

2 - piano

A seconda di come avviene il contatto abbiamo 1 o 2 GdL

1: <u>puro rotolamento</u>: $v_{relativa\,1/2} = 0$

1 solo GdL = rotazione (no strisciamento)

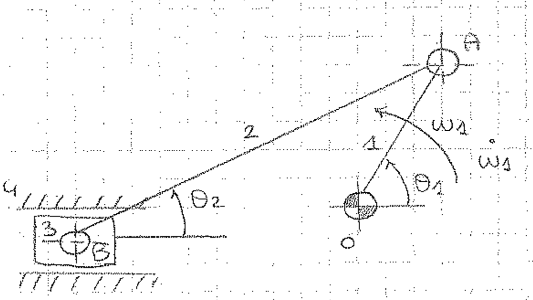
$v_{A1} = v_{A2} \Rightarrow v_{A1} = 0 \quad v_{A2} = 0$

v_G di avanzamento

$A \equiv C_{v1}$ punto a velocità nulla ≡ centro di ist. rotazione

LEZIONE 2 06-03-2013

Esempio: biella manovella



$n_1 = 1500$ giri/min

$\dot{\omega}_1 = 1000\ rad/s^2$

$OA = 0{,}21\ m$

$\theta' = 45°$

$AB = 0{,}61\ m$

$\theta_2 = 30°$

AB = biella

A ruota, B trasla orizzontalmente

OA è detta manovella

B è il piede di biella

Trasforma il moto rotatorio della manovella in un moto traslatorio del piede B alternato (o viceversa)

Sistema presente nel motore a scoppio

- <u>Calcolo dei gradi di libertà</u>

Poichè abbiamo 1 sola ω deve essere 1

$$x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

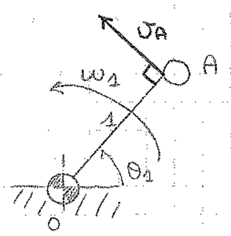
$$\begin{cases} m = 4\ (AO; AB; 3; \text{telaio}) \\ C_1 = 4\ (\text{3 cerniere, sia fisse che non, e la guida orizz = pattino}) \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi $x = 3(3) - 2(4) = 1$

- <u>Analisi cinematica</u>

Conviene partire dal punto in cui abbiamo delle informazioni, in questo caso il corpo 1

<u>AO:</u>



$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = 157{,}07\ rad/s$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{A/O} = \vec{v}_{A/O} = \omega_1 \vec{k} \wedge \overline{(A-O)}$$

$v_O = 0 \quad a_O = 0$

L'espressione vettoriale di v_A va sempre specificata

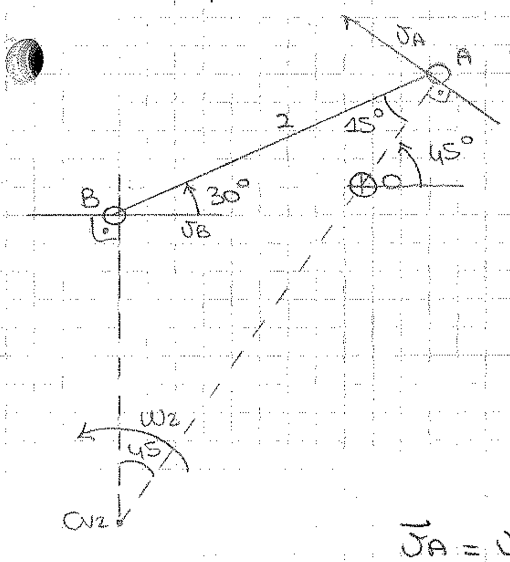
$M = \omega_1 AO = 32{,}98\ m/s$

$D = \perp AO$

$V =$ uguale a ω_1 ↺

Abbiamo calcolato $\vec{v}_A$ senza ricorrere alle derivate delle posizioni ma attraverso la formula fondamentale della cinematica

Per il corpo A C_{V1} coincide con O, devo calcolare il C_{V2} mentre il $C_{V3} = \infty$ poichè il corpo 3 può solo traslare



Tutti i punti del corpo 2 ruotano attorno a C_{V2} con la stessa velocità

$\theta_1 - \theta_2 = 15°$

Con il teorema dei seni calcolo AC_{V2}:

$$\frac{AC_{V2}}{sen(90+30)} = \frac{AB}{sen 45°} \Rightarrow AC_{V2}$$

$$\frac{BC_{V2}}{sen 15°} = \frac{AB}{sen 45°} \Rightarrow BC_{V2} = 0{,}223 \text{ m}$$

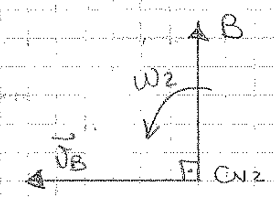
$$\vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_{C_{V2}}}^{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{A - C_{V2}})$$

M: $\omega_2 = \frac{v_A}{AC_{V2}} = 44{,}21$ rad/s

D: $\perp AC_{V2}$

V: ω_2 ↺ (da $\vec{v}_A$)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_{V2}} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{B - C_{V2}})$$



M: $v_B = \omega_2 AC_{V2} = 9{,}86$ m/s

D: orizzontale

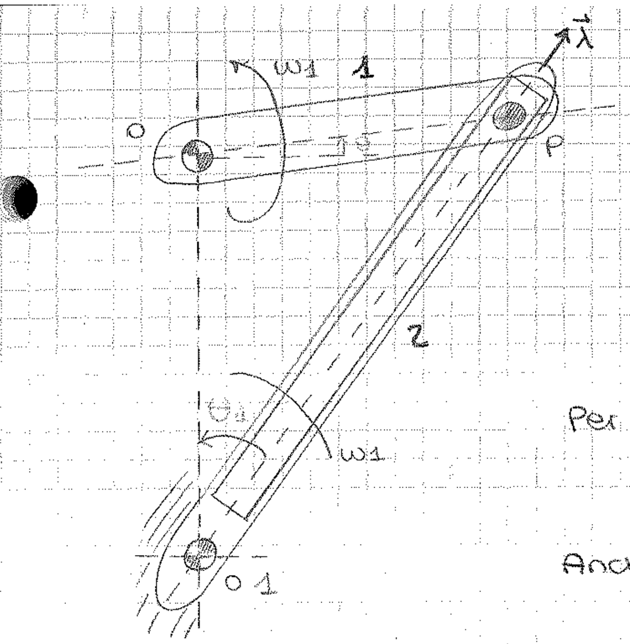
V: ← (vettore posizione ruotato di 90° nel verso di ω_2)

Sul corpo 1 ci è data anche $\dot{\omega}_1$ → usiamo il <u>teorema di RIVALS</u>:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A|O\,tg} + \vec{a}_{A|O\,n} = \underbrace{\dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (\overline{A - O})}_{\text{tangenziale}} - \underbrace{\omega_1^2 (\overline{A - O})}_{\text{angolare}}$$

Conoscendo $\dot{\omega}_1$ e ω_1 la posso calcolare

	TANGENZIALE	CENTRIPETA
M:	$\dot{\omega}_1 AO = 210 \frac{m}{s^2}$	$\omega_1^2 (AO) = 5180{,}9$ m/s²
D:	$\perp AO$	// AO
V:	$\dot{\omega}_1$ ↺	A → O



Corpo 2: moto rotatorio alterno

Nel corpo 2 c'è un punto che cambia la sua posizione rispetto ai vincoli fissi → <u>moto composto</u>

P si muove anche lungo $\vec{\lambda}$ introducendo un moto relativo tra i due corpi

Per calcolare $\vec{v}_P$:

$$\vec{v}_{P\,assoluta} = \vec{v}_{P\,relativa} + \vec{v}_{P\,trascinamento}$$

Anche $\vec{a}_P$ sarà:

$$\vec{a}_{P\,assoluta} = \vec{a}_{P\,relativa} + \vec{a}_{P\,trasc.} + \vec{a}_{co}$$

con a_{co} = accelerazione di Coriolis o accelerazione complementare =
$= 2\omega_{TRASC.}\vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$

Essa è nulla quando il moto è di traslazione

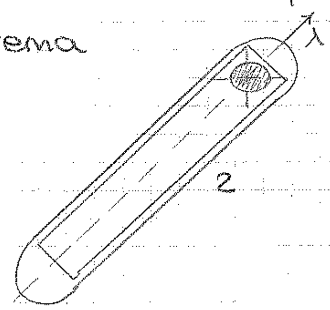
<u>IDENTIFICAZIONE DEI MOTI</u> (da chi sono effettuati e quali sono)

1) <u>Moto assoluto</u>: rotazione di P intorno ad O

2) <u>Moto relativo</u>: moto di P rispetto ad O1 → Traslazione di P lungo $\vec{\lambda}$

3) <u>Moto di trascinamento</u>: moto di rotazione corpo 2 intorno a O1

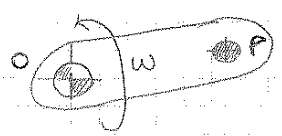
- Conviene cercare prima sempre il moto relativo poiché interno al sistema



moto relativo di P: traslazione lungo $\vec{\lambda}$:
$\pm v_{P\,rel}\,\vec{\lambda}$

- Conviene poi separare i due corpi e analizzarli uno per uno:
  - Corpo 2: può ruotare attorno ad O1 con velocità ω_1
    nel corpo 2 si trova sempre il moto di trascinamento (corpo in cui c'è il moto relativo) che in questo caso è un moto di rotazione attorno ad O1.

- Considero ora il corpo 1:



la somma dei due moti viene scambiata con il corpo 1 → moto assoluto si trova nel sottosistema in cui non c'è moto relativo → in questo caso coincide con la rotazione di P attorno ad O.

LEZIONE 4-

Guida di Glifo

$x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$

$m = 3$ (1,2 telaio)

$C_1 = 2$ (0, 01)

$C_2 = 1$ (P = perno che consente traslazione e rotazione → carrello)

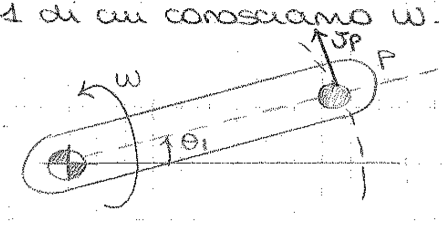
$x = 3(\ ) - 2(2) - 1 = 1$ Gdl

Esiste un altro metodo → considero che in P ci sia una slitta quindi $m = 4$ (1,2,3 = slitta, telaio) eliminando il vincolo C_2

$C_1 = 4$ (0, 01 slitta, perno P)

$C_2 = 0$

Per calcolare le velocità scomponiamo i pezzi e iniziamo dal corpo 1 di cui conosciamo ω.

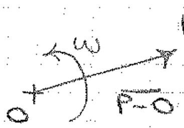


$v_P = v_O + v_{P/O} = \omega \vec{k} \wedge (\overline{P-O})$

M: $\omega PO = 47{,}1$ m/s

D: ⊥ PO

V: ω ↺

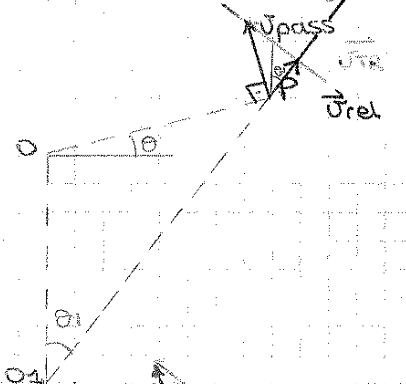


Ho ruotato il vettore posizione $\overline{P-O}$ di 90° nel verso di ω per calcolare la $\vec{v}_P$ che in questo caso coincide con il moto assoluto

$\underline{\vec{v}_P} = \vec{v}_{pass} = \vec{v}_{prel} + \vec{v}_{ptras} = \pm v_{prel}\vec{\lambda} + [\cancel{\vec{v}_{O1}}^{\,0} + \omega_1 \vec{k} \wedge (P - O_1)]$

M:	NOTA		?	$\omega_1 (PO_1) = ?$
D:			lungo $\vec{\lambda}$	⊥ PO_1
V:			?	ω_1) ?

Avendo una v nota e due direzioni ho il n° minimo di informazioni per costruire il triangolo delle velocità



Essendo $v_P = v_{pass}$ dobbiamo ripartire dal punto P

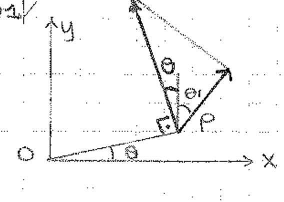
Abbiamo quindi ottenuto i versi di $\vec{v}_{prel}$ e $\vec{v}_{ptras}$ → per calcolare i moduli uso le formule valide per i triangoli rettangoli:

$v_{pTR} = v_{pass} \operatorname{sen}(\theta + \theta_1) = 37{,}93$ m/s

$v_{prel} = v_{pass} \cos(\theta + \theta_1) = 27{,}91$ m/s

Essendo $v_{ptras} = \omega_1 PO_1$ →

$$\omega_1 = \frac{v_{ptras}}{PO_1} = 63{,}22 \text{ rad/s} = \omega_{TR}$$



Il suo verso è antiorario

1- Traslazione lungo $\vec{i}$

2- rotazione intorno a B (cerniera fissa) (ω_1)

3- AB $\neq$ cost $\rightarrow$ 1 può scorrere in 2 lungo $\vec{\lambda}$ $\rightarrow$ traslazione lungo $\vec{\lambda}$

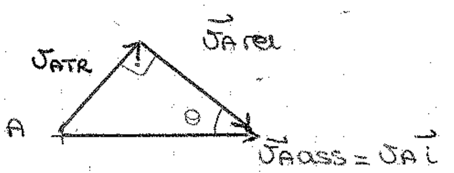
<u>Analisi dei moti</u>:

- <u>Moto relativo</u>: moto interno al sistema = traslazione lungo $\vec{\lambda}$ (moto 3)
- <u>Moto di trascinamento</u>: tolta la guida l'unico altro moto che rimane è quello di trascinamento = rotazione intorno a B
- <u>Moto assoluto</u>: traslazione lungo $\vec{i}$ (unico che esce dal sistema) ottenuta dalla combinazione degli altri due

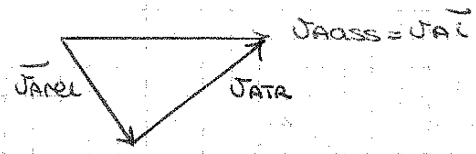
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A\,rel} + \vec{v}_{A\,TR} = \underline{\vec{v}_{A\,ass}} = \pm v_{rel}\vec{\lambda} + [\cancel{\vec{v}_B}^{\,0} + \omega_1\vec{k}\wedge(A-B)]_{TR}$$

M:	NOTA	?	$\omega_1 AB = ?$
D:		lungo $\vec{\lambda}$	$\perp AB$
V:		?	ω_1) ?

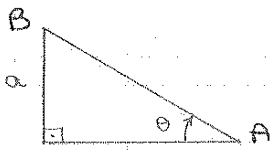
N° minimo di informazioni per costruire il triangolo delle velocità



o



Per calcolare i moduli:



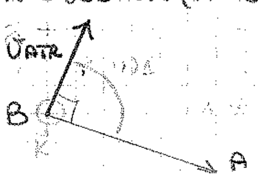
$$\overline{AB} = \frac{a}{\sin\theta} = 0{,}5\ m$$

$$v_{ATR} = v_{A\,ass}\sin\theta = 0{,}5\ m/s$$

$$v_{A\,rel} = v_{A\,ass}\cos\theta = 0{,}86\ m/s$$

$$\omega_1 = \frac{v_{ATR}}{AB} = 1\ rad/s$$

$v_{ATR} = \omega_1\vec{k}\wedge(A-B)$ direzione) verso antiorario



Calcolo delle accelerazioni:

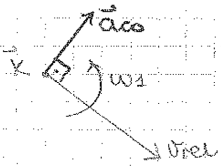
$$\vec{a}_{A\,ass} = \vec{a}_{A\,rel} + \vec{a}_{ATR} + \vec{a}_{A\,co}$$

a_{co} esiste poiché il moto è composto $= 2\omega_{TR}\wedge\vec{v}_{rel} = 2\omega_1\vec{k}\wedge\vec{v}_{rel}$

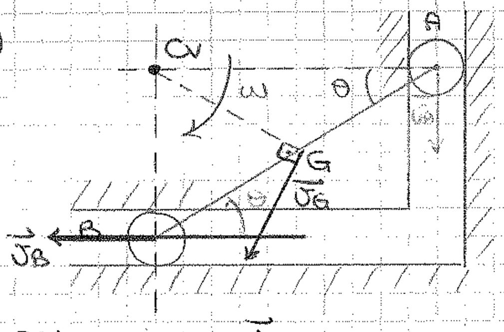
M: $2\omega_1 v_{A\,rel} = 1{,}73\ m/s^2$

D: $\perp v_{A\,rel}$

V: ↗



2)



$AB = 200\ mm$

$v_A = 2\ m/s$

$\theta = 30°$

$AB = cost$

Determinare $\vec{v}_B$: o attraverso la formula fondamentale della cinematica o mediante metodo del Cv

Cv = ortogonali alle due velocità $\rightarrow v_{Cv} = 0$

$\vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_{Cv}}^{0} + \omega \vec{k} \wedge \overline{(B - Cv)}$ tutti i punti ruotano attorno a Cv con = ω

$\vec{v}_G = \cancel{\vec{v}_{Cv}}^{0} + \omega \vec{k} \wedge \overline{(G - Cv)}$

$ACv = AB\cos\theta = 0{,}173\ m$

$BCv = AB\ sen\theta = 0{,}10\ m$

$GCv = \sqrt{AG^2 + CvA^2 - AGCv(2\cos\theta)} = 0{,}0998\ m$ (teorema carnot)

$\omega = \dfrac{v_A}{ACv} = 11{,}56\ rad/s$

$v_B = \omega \vec{k} \wedge (B - Cv) = 1{,}156\ m/s$

$v_G = \omega \vec{k} \wedge (G - Cv) = 1{,}154\ m/s$

I versi sono noti trattandosi di un corpo rigido

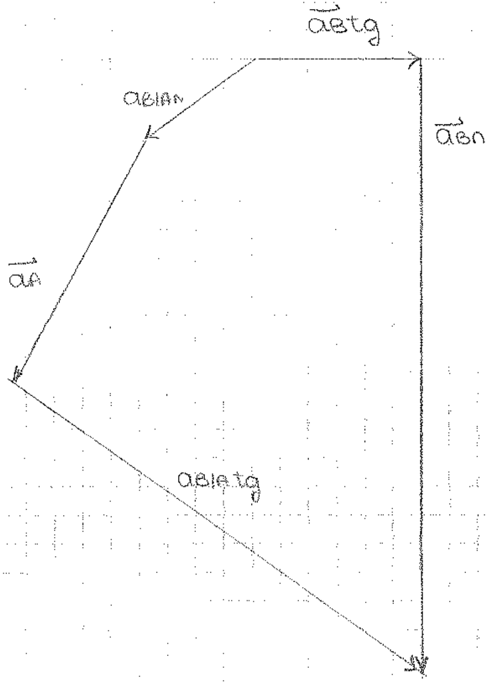
Nell' es: 3 $C = Cv3$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B|A\,tg} + \vec{a}_{B|A\,n} = a_A + \dot{\omega}_2 \vec{k} \wedge (\overline{B-A}) - \omega_2^2 (B-A)$$

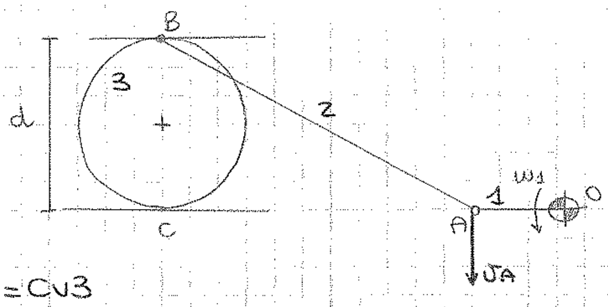
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{O1} + a_{B|O1\,tg} + a_{B|O1\,n} = \dot{\omega}_3 \vec{k} \wedge (B-O1) - \omega_3^2 (B-O1)$$

$$-\omega^2(\overline{A-O}) + \dot{\omega}_2 \vec{k} \wedge (\overline{B-A}) - \omega_2^2 (B-A) = \dot{\omega}_3 \vec{k} \wedge (B-O1) - \omega_3^2 (B-O1)$$

$\vec{a}_B =$	$-\omega^2(A-O)$	$+\dot{\omega}_2 \vec{K} \wedge (\overline{B-A})$	$-\omega_2^2 (B-A)$	$\dot{\omega}_3 \vec{K} \wedge (B-O1)$	$\omega_3^2 (B-O1)$
M:		$\dot{\omega}_2 BA = ?$	$\omega_2^2 BA = 70{,}5$	$\dot{\omega}_3 BO1 = ?$	$\omega_3^2 BO = 84{,}05$
D:	NOTA	$\perp BA$	lungo BA	$\perp BO$	lungo BO1
V:		?	da $B \to A$	?	ω_3



3)



$\omega_1 = 50$ rad/s

AB = 200 mm d = 100 mm

AO = 40 MM

1) $v_B = ?$ 2) $\omega_2 = ?$ 3) $\omega_3 = ?$

$C = CV3$

$v_B = 2v_G = \vec{v}_C + \vec{v}_{B|C} = \omega_3 \vec{K} \wedge (\overline{BC}) = \omega_3 \vec{K} \wedge (\overline{B-C})$

$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{A|O} = \omega_1 K \wedge (\overline{A-O})$

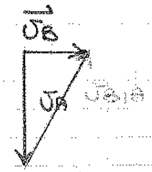
M: $v_A = 2$ m/s

D: $\perp AO$

V: $\downarrow$

$v_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B|A} = v_A + \omega_2 \vec{K} \wedge (\overline{B-A})$

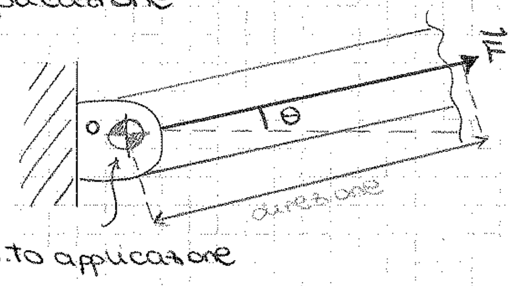
$\omega_3 \vec{K} \wedge (B-C) = \underline{v_B} = v_A + \underline{\omega_2 \vec{K} \wedge (\overline{B-A})}$



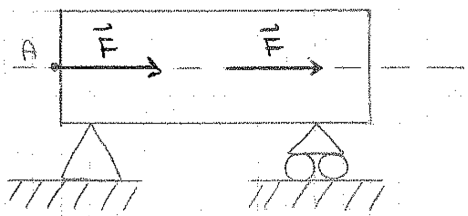
M:	?	NOTA	$\omega_2 BA = ?$
D:	orizzon.		$\perp BA$

LEZIONE

FORZA = vettore applicato con modulo, direzione, verso e punto di applicazione

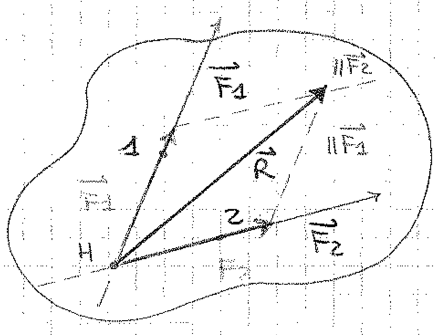


Nei corpi rigidi: PRINCIPIO DI TRASMISSIBILITÀ DI UNA FORZA



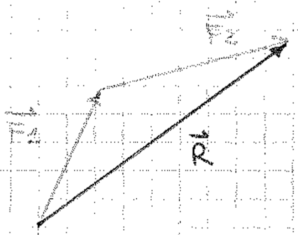
lungo la retta d'azione e all'interno del corpo la forza può essere traslata

Composizione di forze:



$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Regola del parallelogramma

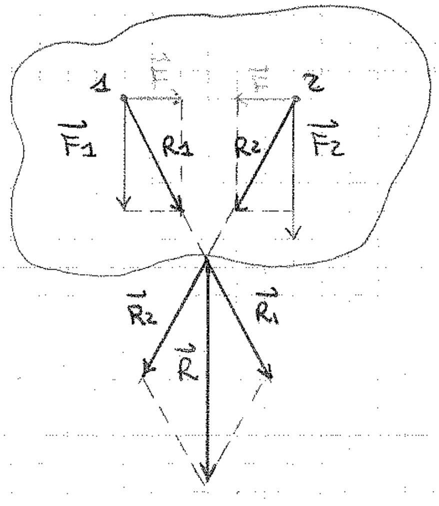


Si può creare il triangolo delle forze

È possibile passare dalle componenti alla risultante e viceversa

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ è un'identità (o metto $\vec{R}$ oppure $\vec{F_1} + \vec{F_2}$) e non un triangolo di equilibrio!

Composizione di forze parallele:



Posso aggiungere e sottrarre $\vec{F}$, comporla con F_1 / F_2 ed ottenere due risultanti provvisorie $\vec{R_1}$ e $\vec{R_2}$ e da queste $\vec{R}$.

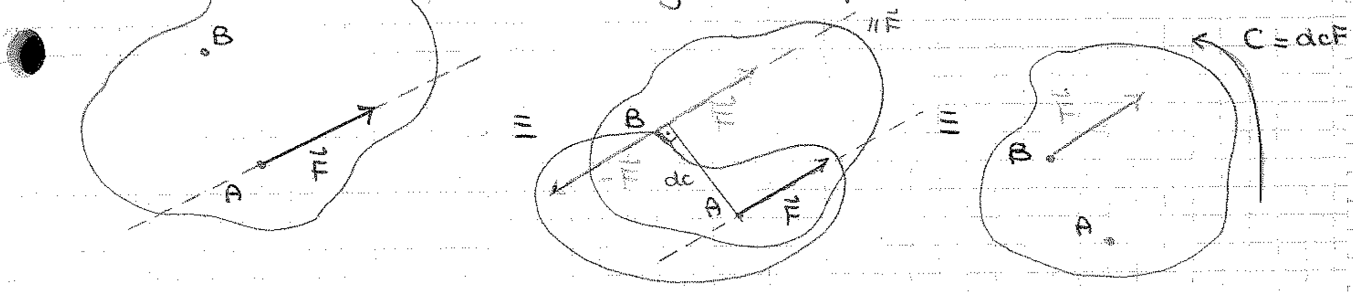
$\vec{R_1} = \vec{F_1} + \vec{F}$

$\vec{R_2} = \vec{F_2} - \vec{F}$

$\vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{F_1} + \vec{F} + \vec{F_2} - \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

TRASPORTO DI UNA FORZA FUORI DALLA SUA RETTA D'AZIONE

Voglio trasportare la forza $\vec{F}$ in B:



La parte cerchiata può formare una coppia di forze
Se una forza $\vec{F}$ viene portata fuori dalla sua retta d'azione, devo aggiungere un <u>momento di trasporto $C = dcF$</u>

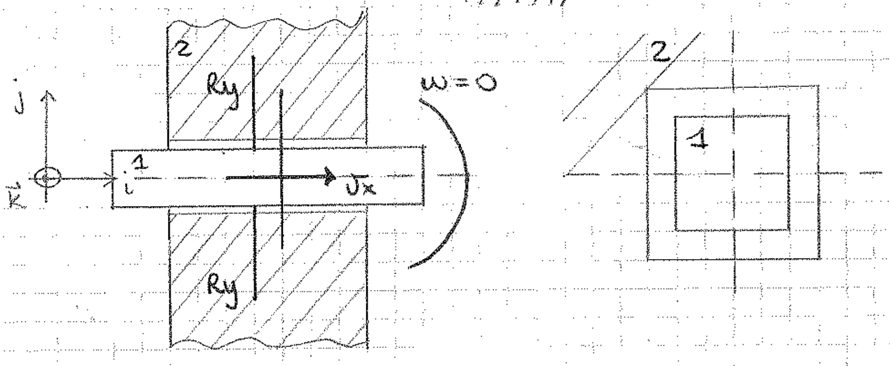
TIPI DI FORZE

- forze concentrate = applicate in un punto
- forze distribuite
- <u>forze esterne</u> : pesi e inerzie (compaiono sull'assemblato)
- <u>forze interne</u> : forze scambiate nei vincoli (reazioni vincolari) e sono sempre delle incognite

<u>REAZIONI VINCOLARI</u> : forze o coppie scambiate nei vincoli, incognite e nascono nelle direzioni in cui il vincolo impedisce il moto

TIPI DI VINCOLI :

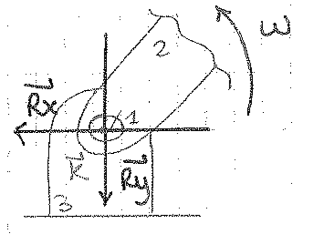
a) <u>coppia prismatica</u> (pattino ⇒ solo traslazione)

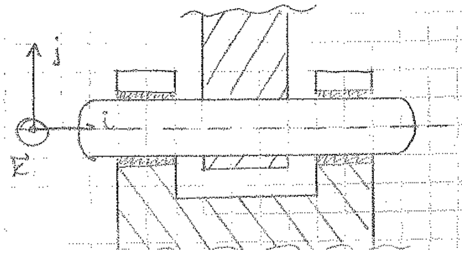


$$\begin{cases} v_x \neq 0 \\ v_y = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_i \neq 0 \end{cases}$$ (per effetto del contatto tra i corpi)

b) <u>cerniera piana</u>:

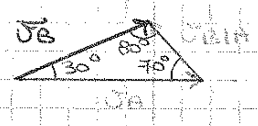
$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ \omega \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_k = 0 \end{cases}$$





$v_B = v_A + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{B-A})$

M:	?	$\omega_2 BA = ?$
D: NOTA	—	$\perp BA$
V:	?	?



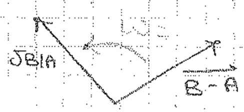
$BH = OB \operatorname{sen} 60° = 36,80$ mm

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 101$ mm

$AB \cos\theta_2 = AH \rightarrow \cos\theta_2 = \frac{AH}{AB} = 0,939 \rightarrow \theta_2 = 20°$

Applicando il teorema dei seni:

$\frac{v_B}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{v_{B|A}}{\operatorname{sen} 30°} \rightarrow v_{B|A} = 3,55$ m/s



$\omega_2 BA = v_{B|A} \rightarrow \omega_2 = \frac{v_{B|A}}{AB} = 33,02$ rad/s

$\frac{v_B}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{v_A}{\operatorname{sen} 80°} \rightarrow v_A = 7$ m/s

$\vec{v_G} = \vec{v_A} + \vec{v_{G|A}} = \vec{v_A} + \omega_2 \vec{k} \wedge (G-A) = 7\,\text{m/s} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{G-A})$

M:	?	$v_A = 7$ m/s	$\omega_2 GA = 2,48$ m/s
D:	?	NOTA	$\perp GA$
V:	?		$\omega_2 \circlearrowleft$

$v_G = \sqrt{v_A^2 + v_{B|A}^2 - 2 v_{GA} v_A \cos\theta} = 6,58$ m/s (Teorema di Carnot)

$a_{B|A n} = -\omega_2^2 (\overline{A-B})$ $\quad \vec{a}_{B|A tg} = \dot{\omega}_2 \vec{k} \wedge (\overline{A-B})$

M: $\omega_2^2 BA = 117,2$ rad/s²

D: lungo BA

V: da A verso B

$\vec{a_A} = \vec{a}_{AB tg} + \vec{a}_{A|B n} = \dot{\omega}_2 \vec{k} \wedge (\overline{A-B}) - \dot{\omega}_2^2 (\overline{A-B}) + \vec{a_B}$

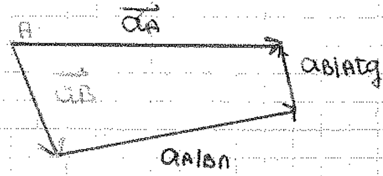
M:	?	$\dot{\omega}_2 \overline{B-A} = ?$	NOTA	NOTA
D:	orizzontale	$\perp BA$		
V:	?	$\dot{\omega}_2 \circlearrowleft = ?$		

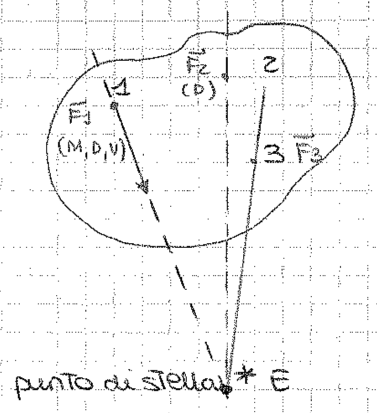
$\vec{a_B} = \vec{a_O}^{\,0} + \vec{a}_{B|O n} + \vec{a}_{B|O tg} = \cancel{\dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (B-O)} - \omega_1^2 (B-O) = -\omega_1^2 (\overline{B-O})$

M: $\omega_1^2 BO = 1047,6$ m/s²

D: lungo BO

V: da $B \rightarrow O$





Una nota, un'altra delle due in direzione

* punto di stella

Per l'equilibrio alla rotazione $\vec{F}^3$ deve passare per il punto di stella.

Infatti eq. rotazione $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} M_{iF} = 0$

$M_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$

$M_O = bF$ con $b \perp F$, b rispetto ad O

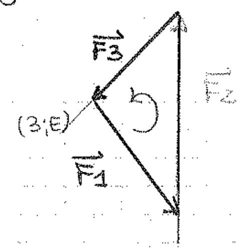
Una coppia C è un vettore libero, fa solo ruotare il corpo, un M_O dipende invece dal punto

E) $F_1 b_E + F_2 b_E + F_3 b_3 = 0$ ma $b_E = 0$ poiché la forza passa per E e dunque il braccio è nullo

Il punto di stella mi consente di trovare la direzione di $\vec{F_3}$

Adesso dobbiamo trovare l'equilibrio alla traslazione

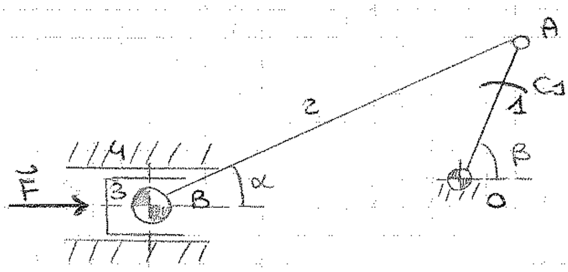
Eq. alla traslazione: $\sum_i \vec{F_i} = \vec{R}_F = 0$ devo quindi tracciare il triangolo delle forze



In questo caso i versi devono essere tutti in serie $\Rightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 0$

Esempio 1:

- Meccanismo biella-manovella



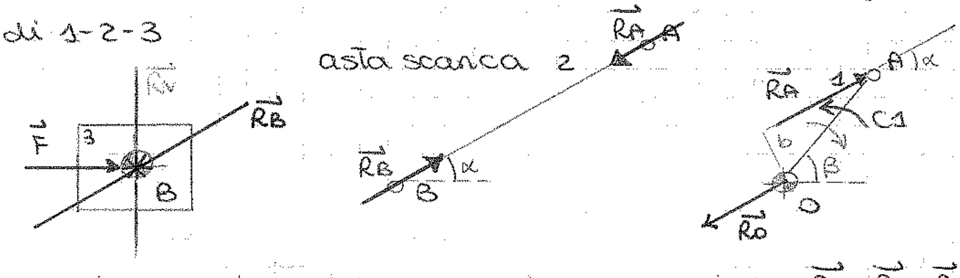
trascuriamo i pesi

? C_1 $\vec{F}$ nota

noti OA, OB, α, β

Dobbiamo staccare i 3 pezzi e tracciare i diagrammi di corpo libero di 1-2-3

asta scarica 2



Lavoriamo solo sulle risultanti e quindi con $\vec{R_A}, \vec{R_B}, \vec{R_O}$ risultanti

Dobbiamo vedere quante forze agiscono su ogni corpo

Sul corpo 3: $\vec{F}, \vec{R_B}$ e $\vec{R_V}$ (telaio) $\rightarrow$ il corpo ricade nella 3ª regola

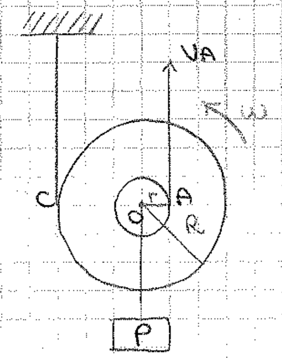
Sul corpo 1: $\overline{R_A} \parallel \overline{R_O}$ $|\overline{R_A}| = |\overline{R_O}|$ $C_1 = R_A b$

Sul corpo 2: $|\overline{R_B}| = |\overline{R_A}|$ $\overline{R_B} = \overline{R_A}$ verso opposto

Sul corpo 3: $\overline{R_B} \parallel \overline{R_O}$ $|\overline{R_B}| = |\overline{R_O}|$

Essendo $C = R_B b_3$ orario → $C_3 = R_B b_3$ antiorario

1.3)



$r = 0{,}15\ m \qquad R = 0{,}3\ m$

$V_A = 1{,}5\ m/s \uparrow$

$V_O = ? \qquad V_B = ? \qquad \omega = ?$

Il punto $C \equiv C_{IR}$

$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{A|C} = \vec{v}_{A|C} = \omega \vec{k} \wedge (\overline{A-C})$

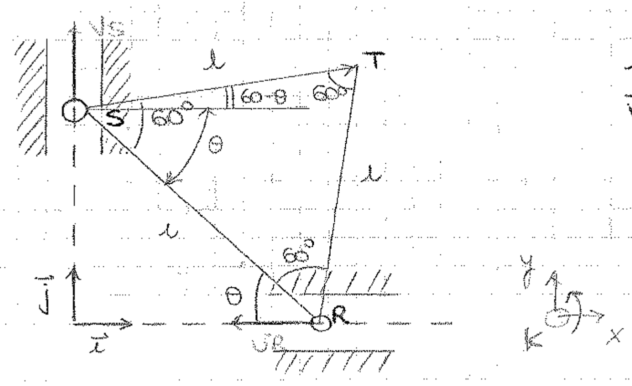
$A-C = r + R = 0{,}45\,m$

$|\omega| = \dfrac{v_A}{A-C} = 3{,}33\ rad/s \qquad$ verso: antiorario

$\vec{V}_O = \vec{v}_C + \vec{v}_{O|C} = \vec{v}_{O|C} = \omega \vec{k} \wedge (\overline{O-C}) = 1\ m/s \qquad$ verso: $\uparrow$

$\vec{V}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B|C} = \vec{v}_{B|C} = \omega \vec{k} \wedge (\overline{B-C}) = 1{,}14\ m/s \qquad$ verso: $\perp BC$

1.5)



$l = 0{,}5\ m$

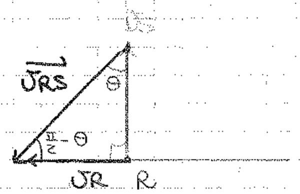
$\vec{v}_S = 0{,}8\ m/s$ cost

$\theta = ? \qquad v_{Tj} = ?$

$v_T(\theta) = ? \qquad a_R = ?$

$\vec{v}_R = \vec{v}_S + \vec{v}_{R|S} = \vec{v}_S + \omega \vec{k} \wedge (\overline{R-S})$

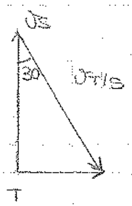
M:		$\omega RS = ?$
D: orizzontale	NOTA	$\perp RS$
V:		



$\vec{v}_R = v_S \operatorname{tg}\theta \qquad \vec{v}_{R|S} = \vec{v}_S / \cos\theta = \omega RS \rightarrow \omega = \dfrac{v_S}{RS\cos\theta} = \dfrac{1{,}6}{\cos\theta}$

$\vec{v}_T = \vec{v}_S + \vec{v}_{T/S} = \vec{v}_S + \omega \vec{k} \wedge (T-S)$

M:		$\omega TS =$
D:	NOTA	$\perp TS$
V:		



Affinché v_T abbia componente verticale nulla $\rightarrow v_T$ deve essere orizzontale

$T-S = l\cos(60-\theta)i + l\,\mathrm{sen}(60-\theta)j$

$-\omega \vec{k} \wedge (T-S) = -\omega l\cos(60-\theta)\vec{j} + \omega l\,\mathrm{sen}(60-\theta)\,i$

$v_{Tj} = v_S - l\omega\cos(60-\theta)j = 0 \rightarrow 0{,}8 - \dfrac{0{,}8}{\cos\theta}(\cos 60 \cos\theta - \mathrm{sen}60\,\mathrm{sen}\theta) = 0$

$0{,}8 - 0{,}4 + \frac{0{,}8\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\theta = 0 \rightarrow \theta = 30° \qquad v_T = 0{,}462\ m/s$

$\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_O}^{\,0} + \vec{a}_{B|O} = \cancel{\vec{a}_{B|O\,tg}}^{\,0} + \vec{a}_{B|O\,n} = -\omega_1^2 BO$

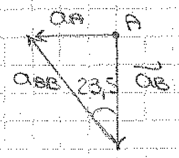
M: $\omega_1^2 BO = 1000\ m/s^2$

D: lungo BO

V: da B verso O

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A|B} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A|B\,tg} + \vec{a}_{A|B\,n} = \vec{a}_B + \dot{\omega}_2 \vec{k} \wedge (\overline{A-B})$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B\, tg 30° = 436{,}4\ m/s^2$

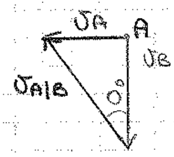


per $\theta = 180°$

$\vec{v}_{B'} = \vec{v}_B$ direzione: | verso: ↓

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{A-B}) = 0\ m/s$

$\vec{a}_B = \vec{a}_{B|O\,n} = -\omega_1^2 BO = 1000\,\vec{i}\ m/s^2$

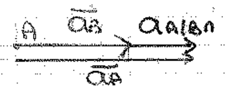


M: $1000\ m/s^2$

D: lungo BO —

V: da B – O →

$\underline{\vec{a}_A} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A|B} = \underline{\vec{a}_B} + \dot{\omega}_2 \vec{k} \wedge (A-B) - \underline{\omega_2^2 (A-B)}$



$\omega_2 = \dfrac{v_B}{AB} = 40\ rad/s$

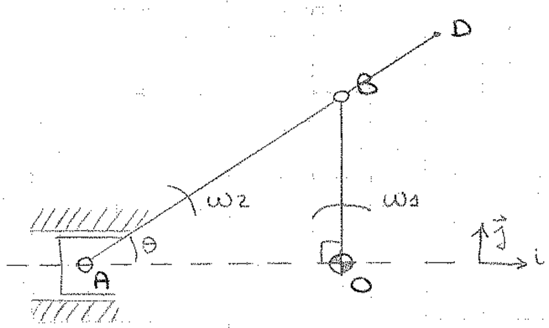
D: ω_2

V: orario ↷

$-\omega_2^2 (A-B) = 400\ m/s^2$

$a_A = +1400\,\vec{i}\ m/s^2$

1.8)



$v_A = 0{,}8\,\vec{i}\ m/s$ $\quad v_d = ?$

$AB = 1\ m$ $\quad \omega_1 = ?$

$BD = 0{,}5\ m$ $\quad \omega_2 = ?$

$OB = 0{,}5\ m$ $\quad \dot{\omega}_2 = ?$

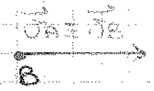
$a_B = ?$

$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{D|A} = \vec{v}_A + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{D-A})$

$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{B|O} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\overline{B-O})$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B|A} = v_A + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{B-A})$

$\underline{\omega_1 \vec{k} \wedge (\overline{B-O})} = \underline{\vec{v}_A} + \underline{\omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{B-A})}$

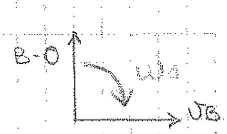


		NOTA	
M:	$\omega_1 BO = ?$		$\omega_2 BA = ?$
D:	$\perp BO$		$\perp BA$
V:	?		?

$\vec{v}_B \equiv \vec{v}_A \Rightarrow \omega_2 = 0$

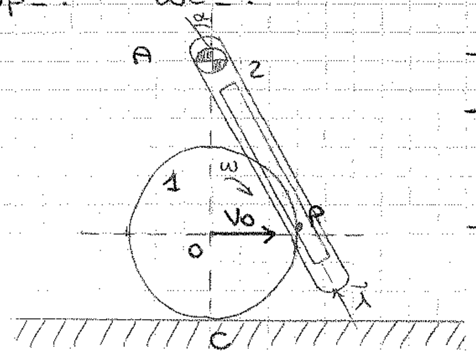
$\vec{v}_D = \vec{v}_A = 0{,}8\,\vec{i}\ m/s$

$\omega_1 = \dfrac{v_B}{BO} = 1{,}6\ rad/s$



1.20) $r = 250$ mm $V_0 = 2{,}5$ m/s $\alpha = 30^\circ$ $\hat{POA} = 90^\circ$ $\omega = ?$

$v_P = ?$ $\omega_2 = ?$

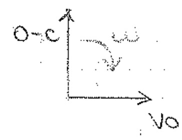


- <u>Moto relativo</u> = traslazione di P lungo $\vec{\lambda}$
- <u>Moto di trascinamento</u> = rotazione del corpo 2 attorno ad A
- <u>Moto assoluto</u> = rotazione della ruota attorno a C

$\vec{v}_O = \cancel{\vec{v}_C}^{\,0} + \vec{v}_{O|C} = \omega \vec{k} \wedge (\overline{O-C})$

ma $C \equiv C_V$ quindi $v_C = 0$

$\omega = \frac{v_O}{OC} = 10$ rad/s (oraria)

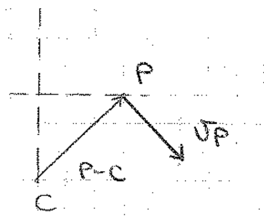


$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{v}_{P|C} = \omega \vec{k} \wedge (\overline{P-O})$ $OP = r\sqrt{2}$

M: $\omega PO = 3{,}535$ m/s

D: $\perp PC$

V: ↘

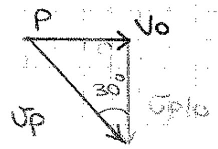


$\vec{v}_P = \cancel{\vec{v}_A}^{\,0} + \vec{v}_{P|A} = \vec{v}_{P|A} = \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{P-A})$

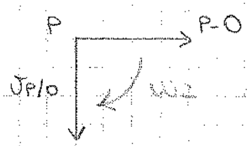
NO

$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{P|O} = \vec{v}_O + \omega_1 \vec{k} \wedge (\overline{P-O})$

M:	NOTA	NOTA	$\omega_2 PO = ?$
D:			$\perp PO$
V:			?



NO



$\vec{v}_{P|O} = v_P \cos 30^\circ = 3{,}06$ m/s

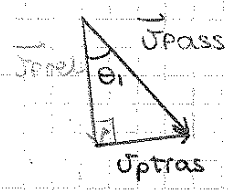
$\omega_2 = \frac{v_{P|O}}{PO} = 12{,}245$ rad/s (oraria)

$\vec{v}_P = \vec{v}_{Pass} = \vec{v}_{Prel} + \vec{v}_{Ptras} = \pm v_{Prel} \vec{\lambda} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{P-A})$

$PA \operatorname{sen} 30^\circ = OP \rightarrow PA = 0{,}5$ m

$\underline{\vec{v}_{Pass} = \pm v_{Prel} \vec{\lambda} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{P-A})}$

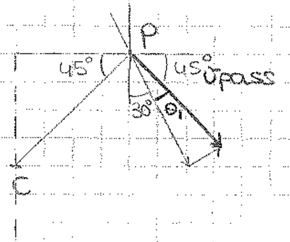
M:		?	$\omega_2 PA = ?$
D:	NOTA	lungo λ	$\perp PA$
V:		?	?



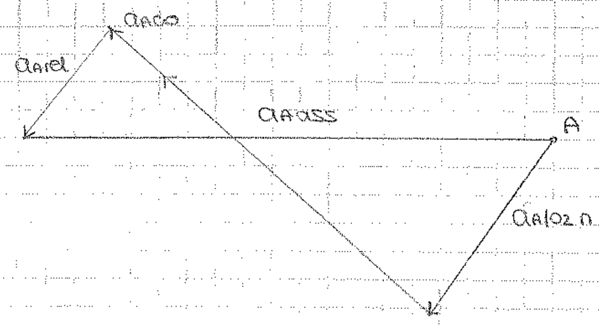
$\theta_1 = 45 - 30 = 15^\circ$

$v_{Ptras} = v_{Pass} \operatorname{sen} 15^\circ = 0{,}915$ m/s

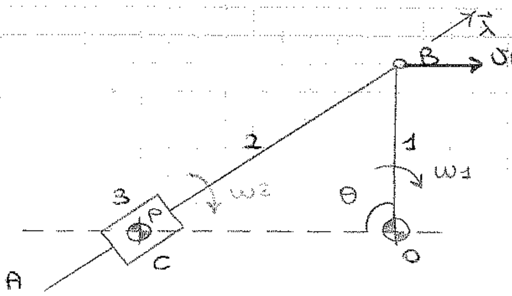
$\omega_2 = \frac{v_{Ptras}}{PA} = 1{,}83$ rad/s (antioraria)



Poligono delle accelerazioni:



1.25)



$OB = 250$ MM $\quad \theta = 90°$

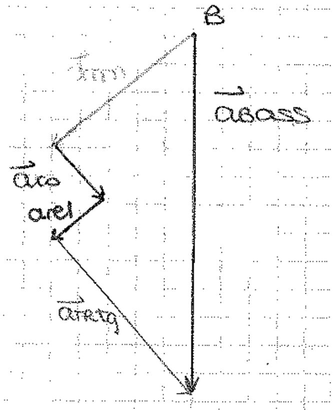
$OC = 600$ MM

$\omega_1 = 5$ rad/s

$v_B = ?\quad v_{Crel} = ?\quad \omega_2 = ?\quad \dot{\omega}_2 = ?$

$\underline{\vec{v}_{Bass} = \vec{v}_{Brel} + \vec{v}_{Btras}}$

- <u>Moto relativo</u>: traslazione di C lungo $\vec{\lambda}$
- <u>Moto di trascinamento</u>: rotazione di C attorno al punto P
- <u>Moto assoluto</u>: rotazione di B attorno ad O



$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{B|O} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\overline{B-O})$

M: $\omega_1 BO = 1{,}25$ m/s

D: $\perp BO$

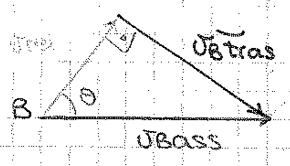
V: $\rightarrow$

$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C|B} = \vec{v}_B + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{C-B})$

$\vec{v}_{Bass} = \vec{v}_{Brel} + \vec{v}_{Btras} = \pm v_{rel}\vec{\lambda} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{B-C})$

NOTA

		$\pm v_{rel}$	$\omega_2 \vec{k} \wedge (\overline{B-C})$
M:		$\pm v_{rel} = ?$	$\omega_2 BC = ?$
D:		lungo $\vec{\lambda}$	$\perp BC$
V:		?	?



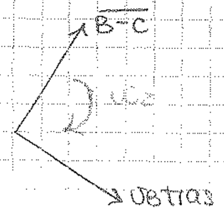
$\theta = \arctan \dfrac{OB}{OC} = 22{,}62°$

$v_{rel} = v_B \cos\theta = 1{,}154$ m/s

$v_{Btrasc} = v_{Bass} \operatorname{sen}\theta = 0{,}48$ m/s

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{0{,}4225} = 0{,}65$ m

$\omega_2 = \dfrac{0{,}48 \text{ m/s}}{0{,}65 \text{ m}} = 0{,}738$ rad/s (oraria)



$\vec{a}_{Bass} = \vec{a}_O^{\,0} + \dot{\omega}_1^{\,0} \vec{k} \wedge (B-O) - \omega_1^2 (B-O) = -\omega_1^2 (\overline{B-O})$

$-\omega_1^2 (B-O) = \pm a_{Brel}\vec{\lambda} + \dot{\omega}_2 \vec{k} \wedge (B-C) - \omega_2^2 (B-C) + 2\omega_2 \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$

M: $\omega_1^2 BO = 6{,}25$	$\pm a_{Brel} = ?$	$\dot{\omega}_2 BC = ?$	$\omega_2^2 BC = 0{,}356$	$1{,}7 = 2\omega_2 v_{rel}$
D: lungo BO	lungo $\vec{\lambda}$	$\perp BC$	lungo BC	$\perp v_{rel}$
V: da $B \rightarrow O$	?	?	da $B \rightarrow C$	$\searrow$

Nel piano

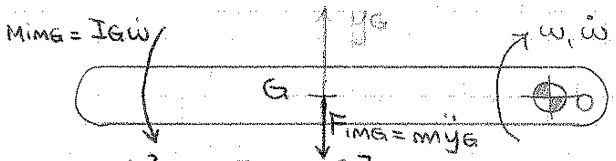
$$P\begin{cases} \text{lungo } \vec{i} \xrightarrow{+} \sum_{i=1}^{n} F_{est\,ix} + F_{IMG\,x} = 0 \\ \text{lungo } \vec{j} \uparrow^{+} \sum_{i=1}^{n} F_{est\,iy} + F_{IMG\,y} = 0 \\ P\circlearrowleft^{+} \sum_{i=1}^{n} M_{est\,i} + M_{IMG} + b_{IM} F_{IMG} = 0 \end{cases}$$

eq. scalari di equilibrio alla traslazione (prime due); eq. scalare equilibrio alla rotazione (terza)

$M_{est\,i} \to Fb$, $M_{IMG} \to I_G\dot{\omega}$, $b_{IM} \to b_{IM} \perp F_{IMG}$

Tale metodo è detto analitico → n equazioni in n incognite

Considero un'asta:



$I_G = m\dfrac{l^2}{12}$ $[Kgm^2]$ con l = lunghezza della leva

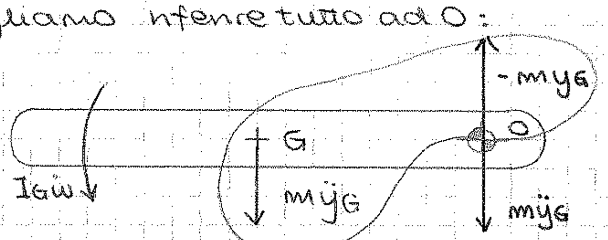
Equilibri alla traslazione:

Equilibrio alla rotazione: conviene farlo rispetto ad un punto di vincolo → le reazioni vincolari hanno braccio nullo

$$O\circlearrowleft^{+} \ldots\ldots + \underbrace{(m\ddot{y}_G)(GO)}_{G} + I_G\dot{\omega} + \ldots$$

$I_G\dot{\omega}$ → coppia di inerzia è un vettore libero

Se vogliamo riferire tutto ad O:



$I_O \neq I_G$

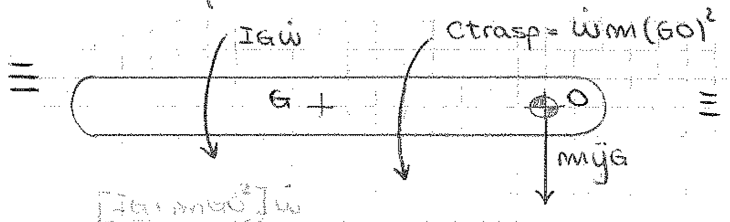
Devo portare $m\ddot{y}_G$ in O

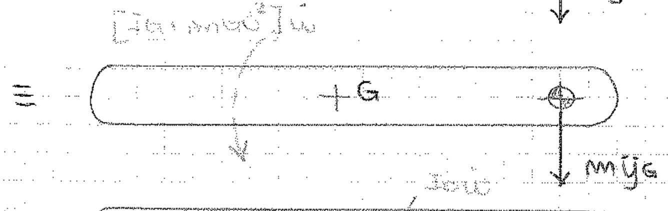
$C_{trasporto} = (m\ddot{y}_G)GO = \dot{\omega}\, m(GO)^2$ ⊛

$\vec{\ddot{y}}_G = \vec{a}_{tgG} = a_O + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (G-O) =$

M: $\ddot{y}_G = \dot{\omega}GO$ ⊛

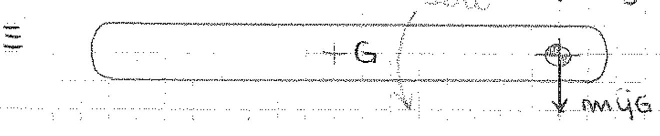
Il sistema equivalente è:



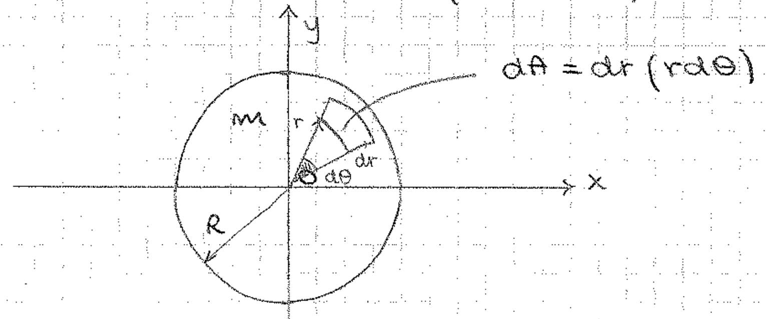


$I_G + m(GO)^2 = I_O$

per il teorema di Huygens



Esempio: disco sottile (h piccola)



Due tipi di momenti di inerzia:

1) Momento di inerzia assiale : (O)   O ≡ G in questo caso

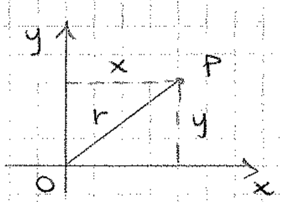
$$I_O = \int_V r^2 \rho \, dV = \int_A r^2 \rho h \, dA = \int_0^R r^2 [r dr] \rho h \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \rho h \frac{R^4}{4} 2\pi = \rho \frac{R^4 h \pi}{2} = \underbrace{[\rho \, \underbrace{h \, \underbrace{\pi R^2}_{A}}_{V}]}_{M} \frac{R^2}{2} =$$

$$= \frac{MR^2}{2} = I_O = I_G$$

2) Momenti di inerzia diametrali : (x, y)

$$I_x = \int_M y^2 dm = \int_A y^2 \rho h \, dA$$
$$I_y = \int_M x^2 dm = \int_A x^2 \rho h \, dA$$
$\Rightarrow$ per simmetria $I_x = I_y$



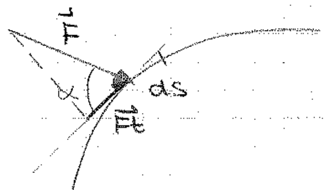
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_O = \int_M r^2 dm = \int_M (x^2 + y^2) dm = \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm = I_x + I_y$$

ma $I_x = I_y$

$$I_x = I_y = \frac{I_O}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right) = \frac{MR^2}{4}$$

LAVORO DI UNA FORZA



$$dL = \vec{F} \times \vec{ds} = F ds \cos\alpha \qquad [J = \text{Joule}]$$

$$L = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \times \vec{ds}$$

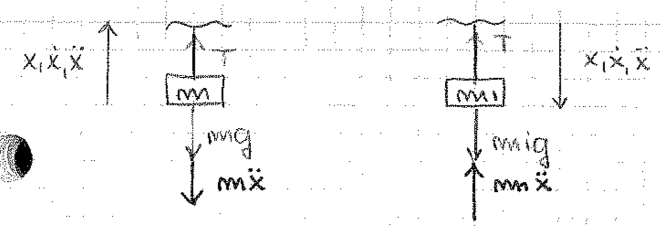
$$F_t = F\cos\alpha \rightarrow L = [F\cos\alpha] ds = F_t \, ds$$

se sono concordi $\rightarrow L > 0$

se sono discordi $\rightarrow L < 0$

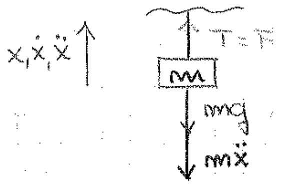
$$L_F = \int_{S_1}^{S_2} F_t \, ds$$

$$L_C = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \qquad \text{(spostamento angolare)}$$



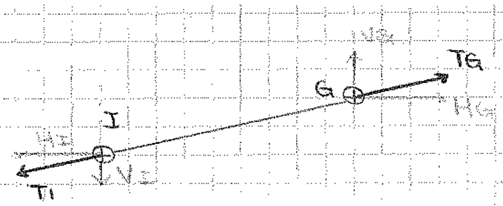
$$m: \uparrow^{+} \qquad m_1: \uparrow^{+} \quad \begin{cases} T - mg - m\ddot{x} = 0 \\ T - m_1 g + m_1 \ddot{x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{g(m_1 - m)}{m_1 + m} = 1{,}4\ m/s^2 \end{cases}$$

Se al posto di m_1 applico una forza $F = m_1 g = 1962\ N$ quanto vale $\ddot{x}$?



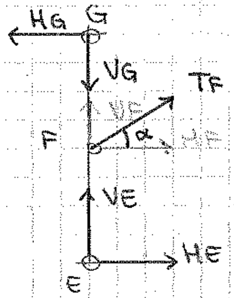
$$\uparrow^{+} \quad F - mg - m\ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{F - mg}{m} = 3{,}27\ m/s^2$$

l'accelerazione è maggiore se metto la F poiché non ho l'inerzia → $m\ddot{x}$ abbassa l'accelerazione rispetto alle forze motrici



$$\begin{cases} i \xrightarrow{+} & -HI + HG = 0 \\ j +\uparrow & -VI + VG = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} HG = 26224\ N \\ VG = 15140\ N \end{cases}$$

Considero ora il corpo GE:

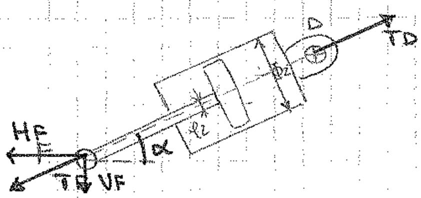


HF, VF, HE, VE arbitrari

$$\begin{cases} \vec{i} \xrightarrow{+} & HF + HE - HG = 0 \\ j +\uparrow & VF + VE - VG = 0 \\ E +\curvearrowleft & HG(EG) - HF(EF) = 0 \end{cases}$$

Incognite: HF, VF, HE, VE → sono ancora 4 equaz.

In F ho il cilindro 2:



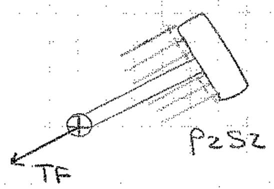
Ancora una volta posso scrivere

$\vec{TF} = \vec{VF} + \vec{HF}$

$VF = HF\,tg\alpha$ 4ª equazione

Quindi:
$$\begin{cases} HF = 52448\ N \\ VF = 30280\ N \\ VE = -15140\ N \\ HE = -26224\ N \end{cases}$$

Nel cilindro 2: la camicia in cui scorre lo stelo → si ha un moto relativo tra lo stelo e il punto D → bisogna mettere in equilibrio lo stelo → dentro la camera ci deve essere una $p_2 S_2 = F$



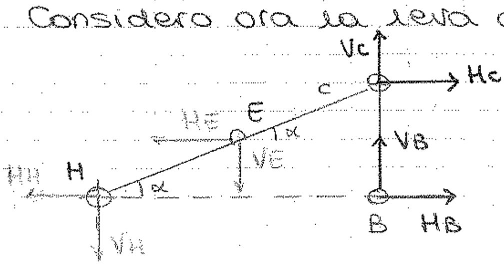
$$S_2 = \frac{\pi\left[\Phi_2^2 - \varphi_2^2\right]}{4}$$

Quindi $TF = p_2 S_2 = \sqrt{VF^2 + HF^2}$ da cui ricavo

$$p_2 = \frac{TF}{S_2} = 7139690{,}74\ Pa = 71{,}39\ bar$$

$1\,bar = 10^5\,Pa$

Considero ora la leva ad L:



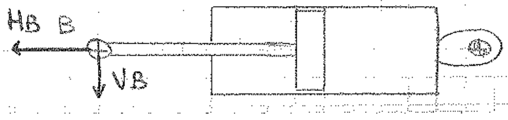
$i \xrightarrow{+}$ $Hc + HB - HE - HH = 0$

$j +\uparrow$ $-VH - VE + Vc + VB = 0$

$C \curvearrowleft^{+}$ $HB(BC) - HE(CE\,sen\alpha) + VE\cos\alpha +$
$- HH(BC) + VH(BH) = 0$

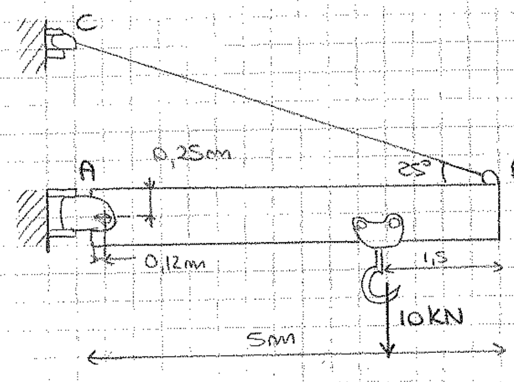
Ancora una volta le incognite sono 4 quindi serve una 4ª equazione

Considero il cilindro 1:



ESERCITAZIONE 2

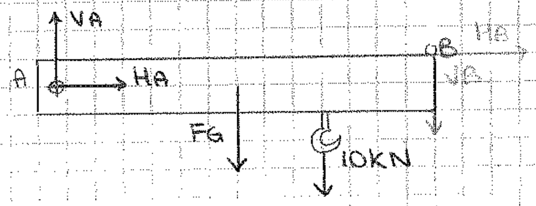
2) BRACCIO DI SUPPORTO



$m = 95 kg/m \quad F = 10 kN$

$M = m\ell = 95 kg/m (5m) = 475 kg$

$F_G = Mg = 4655 N$



Considero la trave:

$$\begin{cases} i \xrightarrow{+} & H_A + H_B = 0 \\ j + \uparrow & V_A + V_B - F_G - F = 0 \\ B \curvearrowleft^{+} & 10KN(1{,}5m) + F_G(2{,}5m) - V_A(5m) + H_A(0{,}25m) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = -H_B \\ V_A + V_B = F_G + F \\ 10\cdot 10^3(1{,}5) + 2{,}5F_G - 5V_A + 0{,}25H_A = 0 \\ V_B = H_B tg 25° \end{cases}$$

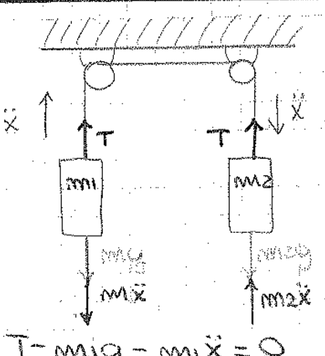
$$\begin{cases} H_A = -H_B \\ V_A + V_B = 14655 \\ 15000 + 11637{,}5 - 4{,}8V_A + 0{,}25H_A = 0 \\ V_B = H_B(0{,}466) \end{cases} \qquad \begin{cases} H_A = -H_B \\ V_A = 14655 + V_B \\ 26637{,}5 - 4{,}8(14655 + 0{,}466H_A) + 0{,}25H_A \\ V_B = H_B(0{,}466) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = -H_B \\ V_A = 14655 + V_B \\ -44878{,}9 = -2{,}52H_A \\ V_B = 0{,}466H_B \end{cases} \qquad \begin{cases} H_B = -18076{,}55 \ N \rightarrow -17809{,}1N \\ V_A = 23078{,}67 \ N \rightarrow 6356 \ N \\ H_A = 18076{,}55 \ N \rightarrow 17809{,}1N \\ V_B = -8423{,}67 \ N \rightarrow -8299N \end{cases}$$

$T = \sqrt{H_B^2 + V_B^2} = 19{,}6kN$

$R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = 18{,}9kN$

MASSE CON CARRUCOLE



$m_1 = 150kg \quad m_2 = 200kg$

$$\begin{cases} T - mg - m_1\ddot{x} = 0 \\ T - m_2g + m_2\ddot{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T = m_1(g + \ddot{x}) \\ m_1g + m_1\ddot{x} - m_2g + m_2\ddot{x} \end{cases}$$

$\ddot{x}(m_1 + m_2) = (m_2 - m_1)g$

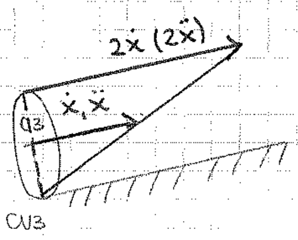
$\ddot{x} = 1{,}4 m/s^2$

b) $\begin{cases} T - m_1g - m_1\ddot{x} = 0 \\ T - F = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = (F - m_1g)/m_1 = 3{,}28 m/s^2 \\ T = F \end{cases}$

Devo cercare di legare le accelerazioni angolari con quelle lineari

$\dot\omega_2 \longleftrightarrow \ddot{x}$?

$\dot{x}$ si trova anche in O_3. Quando la fune è vincolata si comporta come fosse un piano → moto di puro rotolamento



Rispetto al CV3 ho una distribuzione triangolare di velocità

Quindi $2\ddot{x}$ si troverà anche sul corpo 3

Sul corpo 3: $2\ddot{x} = r_2\dot\omega_2$

($a_T = r\dot\omega$ l'acc. tangenziale)

Posso quindi sostituire all'eq. di momento attorno ad O

$O\circlearrowleft^+ \quad I_O\dot\omega_2 + T_E r_2 - F r_2 = 0$

$$2I_O\ddot{x}\left(\frac{1}{r_2}\right) + T_E r_2 - F r_2 = 0 \rightarrow 2I_O\frac{\ddot{x}}{r_2} + \frac{T_D}{2}r_2 - F r_2 = 0$$

$i \xrightarrow{+} \quad T_D - m_1\ddot{x} - m_1 g \operatorname{sen}\alpha = 0$

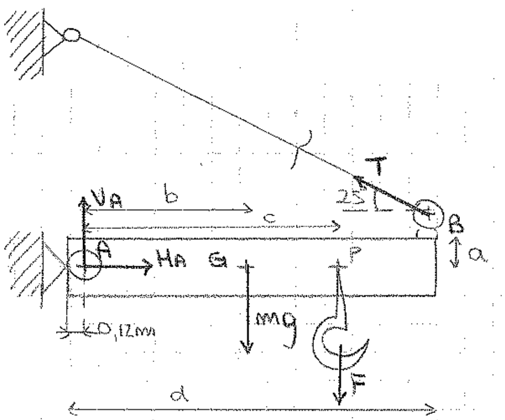
$I_O = I_G = \frac{m_2 r_2^2}{2}$

Quindi : $\frac{m_2 r_2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\cancel{2}\frac{\ddot{x}}{\cancel{r_2}} + \frac{T_D}{2}r_2 - F r_2 = 0$

$$\begin{cases} m_2\cancel{r_2}\ddot{x} + \frac{T_D}{2}\cancel{r_2} - F\cancel{r_2} = 0 \\ T_D = m_1\ddot{x} + m_1 g\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} 2m_2\ddot{x} + m_1\ddot{x} + m_1 g\operatorname{sen}\alpha - 2F = 0 \\ T_D = m_1\ddot{x} + m_1 g\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \frac{2F - m_1 g\operatorname{sen}\alpha}{2m_2 + m_1} = 4{,}69\ m/s^2$$

2)



$M = 95(5) = 475\,kg$

$F = 10\,kN$

$P = mg = 4660\,N$

$BA = 0{,}25\,m = a$

$AG = b = 2{,}38\,m$

$AB = 4{,}88\,m = d$

$AP = c = 3{,}38\,m$

Considero la trave e un pezzo del filo:

$A\circlearrowleft^+ \quad -mgb - Fc + T\cos25^\circ a + T\operatorname{sen}25^\circ d = 0$

$T = 19{,}61\,kN$

$i \xrightarrow{+} \quad H_A - T\cos25^\circ = 0 \rightarrow H_A = T\cos25^\circ = 17{,}77\,kN$

$j^{+\uparrow} \quad V_A - mg - F + T\operatorname{sen}25^\circ = 0 \rightarrow V_A = 6{,}37\,kN$

$R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = 18{,}88\,kN$

$L = l + h - y = h - y + \sqrt{x^2+h^2}$ = cost essendo la fune inestensibile

L = costante quindi $\frac{dL}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dL}{dt} = -\dot{y} + \frac{1}{2}(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)\dot{x} = 0$

$\dot{y} = (x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}} x\dot{x} = x\dot{x}(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} = \dot{x}\dot{x}(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}} + \cancel{x\ddot{x}(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}} + x\dot{x}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(x^2+h^2)^{-\frac{3}{2}}(\cancel{2}x)\dot{x}$

$\ddot{y} = \dot{x}\dot{x}(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}} - xx\dot{x}\dot{x}(x^2+h^2)^{-\frac{3}{2}} = 1{,}25 - 0{,}45 = 0{,}8\ m/s^2$

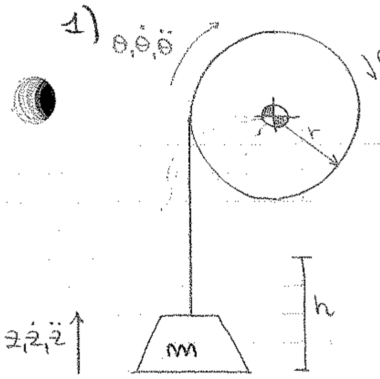
Quindi $T = m(g+\ddot{y}) = 424\ N$

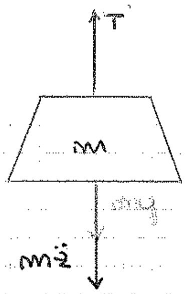
2.4) $m_t = 100 kg$ $\quad r = 0{,}15 m$ $\quad m = 200 kg$ $\quad t=0 \quad z = \dot{z} = 0$

1) Calcolare C_M: $h = 2m \quad v = 1 m/s$

2) Calcolare R_{ox}, R_{oy}

1)





Per la massa m:

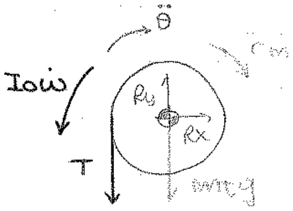
$\Sigma Y = 0$

$T - mg - m\ddot{z} = 0$

$v_f^2 - \cancel{v_i^2} = 2a(x_f - \cancel{x_i})$

$a = \ddot{z} = \frac{v_f^2}{2(2)} = 0{,}25\ m/s^2$

$T = m(g+\ddot{z}) = 2010\ N$



Nella carrucola:

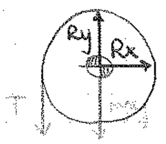
$a = a_T = \dot{\omega}\vec{k} \wedge \vec{r} \rightarrow \dot{\omega} = a/r = \frac{3{,}33}{2}\ rad/s = 1{,}67$

$I_o = \frac{m_t r^2}{2} = 1{,}125\ kg m^2$

$\circlearrowleft^+ \quad Tr + I_o\dot{\omega} - C_M = 0$

$C_M = Tr + I_o\dot{\omega} = 2010(0{,}15) + (1{,}125)(3{,}3)\frac{1}{2} =$
$= 303{,}4\ Nm$

2) Calcolo delle reazioni vincolari



$\begin{cases} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_{ox} = 0 \\ R_{oy} - T - mg = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_{ox} = 0 \\ R_{oy} = 2990\ N \end{cases}$

2.6) $m = 30000\ kg$ $\quad \theta = 15°$ $\quad R = 10 kN$ $\quad a = 9 m$ $\quad b = 200 mm = 0{,}2 m$

$c = 0{,}18 m$ $\quad T = ?$ $\quad P = ?$ $\quad S = ?$

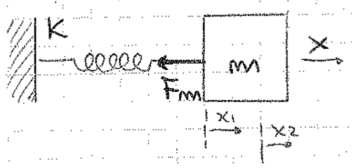
Equazioni dell'equilibrio:

$\begin{cases} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma_G M_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T - R - mg\,sen\theta = 0 \\ P + S - mg\cos\theta = 0 \\ Rc - Tc + Pb - Sa = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T = R + mg\,sen\theta = 86{,}1\ kN \\ P + S = 283{,}98\ kN \\ 1800 - 0{,}18T + 0{,}2P - 9S = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} P + S = 283{,}98\ kN \\ +13696{,}7 + 56796 - 0{,}2S - 9S = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P = 279{,}3\ kN \\ S = 4684{,}7\ N \end{cases}$

LEZIONE

LAVORO DI UNA MOLLA



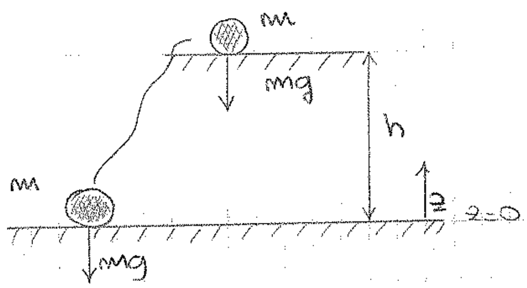
$F_{molla} = -Kx$

con k = rigidezza della molla $\Rightarrow N/m$

$$L_{molla} = -\int_{x_1}^{x_2} (kx)\,dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

L'energia potenziale elastica è data da $\Delta E_{pel} = -L_{molla} = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$
= energia di cui si carica la molla

LAVORO DELLA FORZA PESO

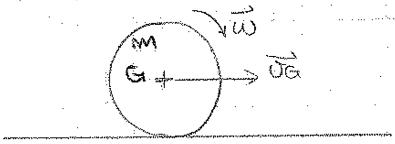


$$L_{Fpeso} = -\int_0^h mg\,dz = -E_{pg} = -mgh$$

$[L_{peso}] = J$

un carico sospeso ha un'energia immagazzinata potenziale che si sprigiona quando il carico inizia a scendere

$$E_{cinetica} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$



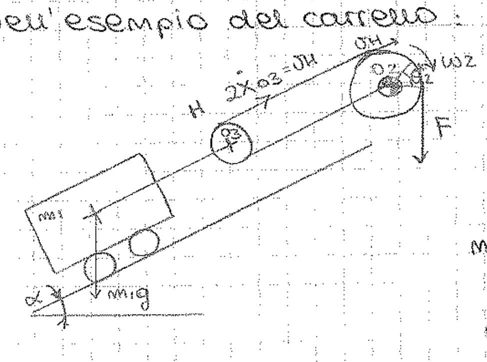
PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$L_{Fest} + L_{Fint} = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pel}$$

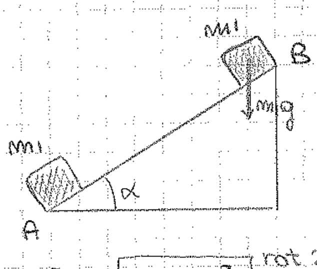
L_{Fest} → NO F peso
NO F inerzia

L_{Fint} → attrito

Nell'esempio del carrello:



$F_{est} = F \Rightarrow L_{fest} = F\theta_2^*$



$h = AB \operatorname{sen}\alpha$

$E_{pgA} = 0$ (i)
$E_{pgB} = m_1 g h$ (f)
$\Big\} E_{pg}$

$E_{cinA} = 0$ $\quad E_{cinB} = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \overbrace{\frac{1}{2} I_O \omega_2^2}^{rot\ 2}$ $\quad \Delta E_{cin}$

Quindi $r_2^* F(\theta_2^*) = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2} I_O \omega_2^2 + m_1 g h$
$\quad \hookrightarrow M\theta_2^*$

TERNA PRINCIPALE DI INERZIA: è una terna di simmetria dove lungo un asse si ha un I_{max} e lungo l'altro un I_{min}

Se questa terna è fissata nel baricentro, è una terna CENTRALE DI INERZIA

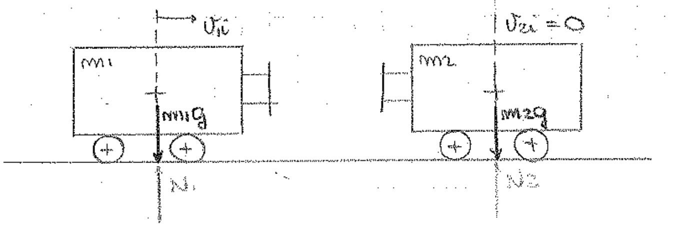
Se la terna centrale di inerzia è $[\lambda; \mu; \nu] \Rightarrow \vec{K}_G = I_\lambda p \vec{\lambda} + I_\mu q \vec{\mu} + I_\nu r \vec{\nu}$

dove p = componente di ω lungo λ: $\vec{\omega} \times \vec{\lambda}$

q = componente di ω lungo μ: $\vec{\omega} \times \vec{\mu}$

r = componente di ω lungo ν: $\vec{\omega} \times \vec{\nu}$

Considero due carrelli:



$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0$

$\Rightarrow$ conservazione quantità di moto

$Q_i = Q_f$

$Q_i = m_1 v_{1i}$

$Q_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$ nel caso in cui ci sia un urto elastico tra i due carrelli $\rightarrow$ i carrelli si urtano ma non rimangono attaccati

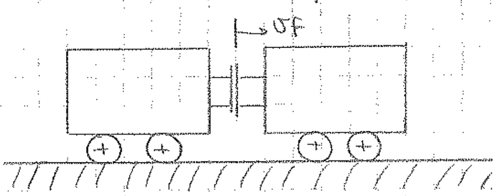
Quindi $m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$; ma non conosco v_{1f} e v_{2f}

$T_i \rightarrow T_f$ si ha conservazione dell'energia cinetica

$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$ (incognite v_{1f} e v_{2f})

Mettendo a sistema ricavo v_{1f} e v_{2f}

Nel caso in cui dopo l'urto i due carrelli rimangono attaccati



$\sum_i F_{est,i} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow Q = cost$

$\Rightarrow$ conservazione quantità di moto

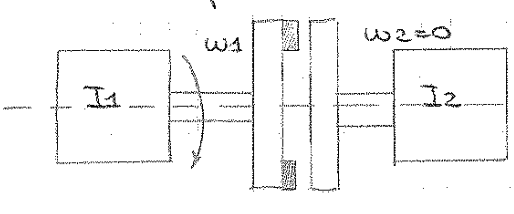
$\left.\begin{array}{l} Q_i = m_1 v_{1i} \\ Q_f = (m_1 + m_2) v_f \end{array}\right\}$ URTO ANAELASTICO (dissipazione di energia)

Quindi $v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$

In questo caso però $\Delta E \neq 0$ poiché viene dissipata dell'energia

$\Delta E_{cin} = E_{cinf} - E_{cini} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$ = energia dissipata dall'urto dei due carrelli

Stessa cosa può avvenire nel caso di rotazioni.



$I_1 \Rightarrow I_1 + I_2$

URTO ANAELASTICO

$v_i = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f = 709,41 \ m/s$

a) → b) urto anelastico e energia dissipata

$\Rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_i^2 = 15067,9 \ J$

ESERCITAZIONE 3

Il rotore ha come terna di riferimento: $[\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}]$ (terna solidale) ruota insieme al rotore attorno all'asse $\vec{k}$ con una velocità ang ω

1) È una terna di simmetria
2) È una terna PRINCIPALE di INERZIA
3) È centrata nel baricentro e quindi è anche terna CENTRALE di INERZIA

Il rotore ruota attorno a $\vec{k}$ che non è l'asse principale di inerzia producendo una coppia di inerzia $\Rightarrow \vec{k} \neq \vec{\mu}$ dove $\vec{\nu}$ è l'asse del rotore

Coppia di inerzia: $M_{in G} = -\frac{dK_G}{dt}$ con K_G espresso nella terna centrale

$\vec{K_G} = I_\lambda p \vec{\lambda} + I_\mu q \vec{\mu} + I_r r \vec{\nu}$

$$\text{con} \begin{cases} p = \omega \times \vec{\lambda} \\ q = \omega \times \vec{\mu} \\ r = \omega \times \vec{r} \end{cases}$$

Tutto va riferito a questa terna: $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ devo esprimere $\vec{k}$ in funzione degli altri versori:

$\vec{k} = \lambda \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha \vec{\nu}$

$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \omega \operatorname{sen}\alpha \vec{\lambda} + \omega \cos\alpha \vec{\nu}$

$p = \vec{\omega} \times \vec{\lambda} = \omega \operatorname{sen}\alpha + 0$ essendo $\vec{\lambda} \times \vec{\mu} = 0$

$q = \vec{\omega} \times \vec{\mu} = 0$

$r = \vec{\omega} \times \vec{\nu} = \omega \cos\alpha$

$K_G = [I_\lambda \omega \operatorname{sen}\alpha] \vec{\lambda} + 0 + [I_\nu \omega \cos\alpha] \vec{\nu}$ (posso calcolare cop inerzia)

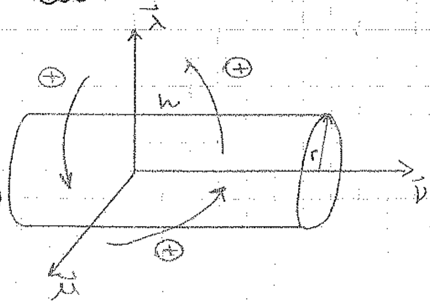
$I_\lambda, I_\nu, \omega, \alpha$ sono costanti

Rispetto a questa terna i momenti sono costanti → devo fare solo la derivata dei versori cotanti

$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\lambda}$ (relazione di Poisson)

ω deve essere la velocità angolare della terna

$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\lambda} = \omega \cancel{\operatorname{sen}\alpha \lambda \wedge \lambda} + \omega \cos\alpha \vec{\nu} \wedge \vec{\lambda} = \omega \cos\alpha \vec{\mu}$



$\vec{\nu} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\mu}$

$\frac{d\vec{\nu}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\nu} = \omega \operatorname{sen}\alpha \vec{\lambda} \wedge \vec{\nu} + \omega\cos\alpha \cancel{\vec{\nu} \wedge \vec{\nu}} =$
$= \omega \operatorname{sen}\alpha \vec{\lambda} \wedge \vec{\nu} = -\omega \operatorname{sen}\alpha \vec{\mu}$

LEZIONE

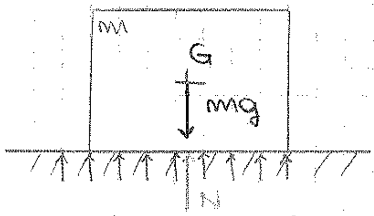
ATTRITO (libro Belforte)

Tre categorie:

- attrito statico o di aderenza
- attrito radente o di strisciamento (attrito al perno)
- attrito volvente

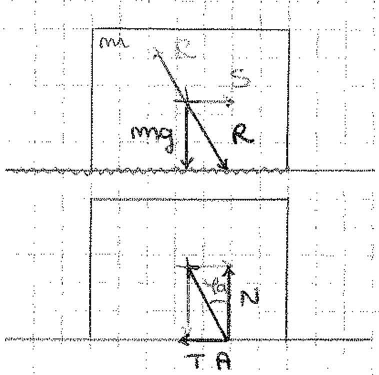
1- ATTRITO STATICO o DI ADERENZA: ($v=0$)

Se il corpo ha un'unica possibilità di movimento



↑ distribuzione unif. delle forze di pressione $N=\int_A p\,dA$ bilancia la forza peso e passa per G

Se applico una forza di trazione



la $v=0$ poiché S viene contrastata da tutte le asperità superficiali del terreno

R ha come reazione quella del terreno R, che può essere scomposta in N e T

La verticale per A non passa più per G

T = componente tangenziale di attrito di aderenza è una forza reattiva opposta alla possibile direzione di moto

Forze di attrito: incognite, reattive, opposte alle direzioni del moto, fenomeni non lineari

R = reazione del terreno è legata ad N e T; N e T sono qui legate dalla legge dell'attrito di aderenza ($v=0$)

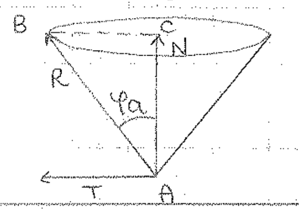
$$T \le f_a N$$

con f_a = coefficiente di attrito di aderenza

f_a dipende dalla natura dei corpi a contatto e dallo stato delle superfici

MODELLO GEOMETRICO: CONO DI ATTRITO DI ADERENZA

$\varphi_a = N\hat{;}R$ = angolo di aderenza



N ⊥ superficie di contatto

essendo $T \le f_a N$

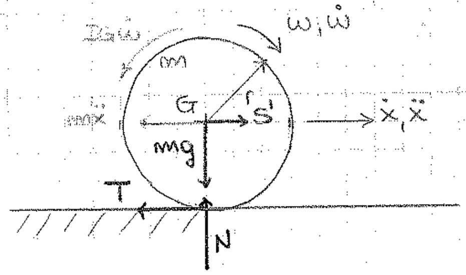
$T_{lim} = f_a N$

Se considero il triangolo ABC: $T_{lim} = N \operatorname{tg}\varphi_a$

$T_{lim} = f_a N \Rightarrow N \operatorname{tg}\varphi_a = f_a N \Rightarrow f_a = \operatorname{tg}\varphi_a$

In realtà sia f che fa dipendono dalla temperatura dell'ambiente e da quella della zona di contatto.

Considero un sistema con 1/2 GdL : RUOTA CONDOTTA o TRASCINATA



il terreno reagisce con una componente normale N e una forza di attrito tangenz. T

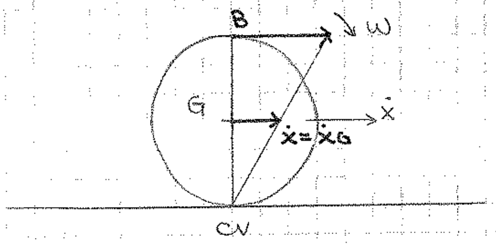
$\xrightarrow{+}$ $S' - m\ddot{x} - T = 0$
$\uparrow +$ $N - mg = 0$
$G)^+$ $I_G\dot{\omega} - Tr = 0$

$$\begin{cases} T = m\ddot{x} - S' \\ N = mg \\ I_G\dot{\omega} = Tr \end{cases}$$

Essendo 4 le incognite devo ricavare una 4ª equazione → devo vedere se l'attrito è di aderenza o di strisciamento

RUOTA → 1GdL se $\dot{x}$ e ω ($\ddot{x}$ e $\dot{\omega}$) sono legate → PURO ROTOLAMENTO
↘ 2GdL se $\dot{x}$ e ω ($\ddot{x}$ e $\dot{\omega}$) sono indipendenti → NO PURO ROTOL. STRISCIAMENTO

1°) 1GdL → puro rotolamento → attrito di aderenza



$\dot{x}_G = v_{CV} + \omega\vec{k} \wedge (G - CV) \Rightarrow \dot{x}_G = \omega r$

$\dot{x}_B = v_{CV} + \omega\vec{k} \wedge (B - CV) \Rightarrow \dot{x}_B = \omega(2r)$

$\dot{x}_G = \dot{x} = \omega r$ in G vale anche per $\ddot{x}_G$

$\ddot{x}_G = \ddot{x} = \dot{\omega} r$ → condizioni di puro rotolamento ⇒ 1GdL ⇒ aderenza

Quindi in questo caso la 4ª equazione è: $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\omega} r & \text{(in puro rotol.)} \\ T \leq f_a N \end{cases}$

Se invece trovo $T > f_a N$ → NON aderenza → NO PURO ROTOLAMENTO → $\dot{x} \neq r\omega$ e $\ddot{x} \neq \dot{\omega} r$

ciò vuol dire che ho strisciamento e quindi posso usare la legge di attrito di strisciamento come 4ª eq: $T = fN$

(2GdL → $\dot{x}$ e ω sono SLEGATE)

2.13) $v_1 = 2\,km/h$ $\quad v_2 = 1\,km/h$ $\quad v_3 = 1{,}5\,km/h$ $\quad \Delta E = ?$

$m_1 = 65 \cdot 10^3\,kg$ $\quad m_2 = 50 \cdot 10^3\,kg$ $\quad m_3 = 75 \cdot 10^3\,kg$ $\quad v_d = ?$

Essendo l'urto anelastico ed essendo $\sum F_{esti} = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow$ $Q = cost$

$Q_i = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_3 v_3$

$Q_f = (m_1 + m_2 + m_3) v_d$

$\Rightarrow Q_i = Q_f$

$m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_3 v_3 = (m_1 + m_2 + m_3) v_d$

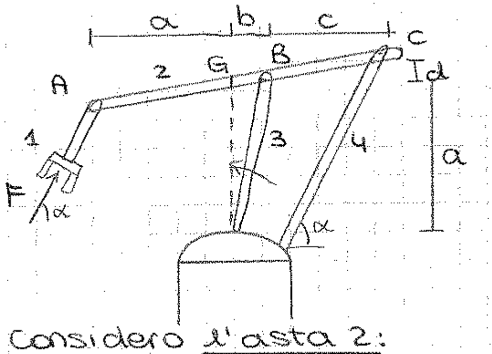
$$v_d = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}355\,km/h$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3) v_d^2 = -227402{,}6\,J$$

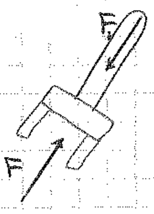
$\Delta E_{persa} = E_f : E_i = 0{,}95\%$

2.7) $m = 25\,kg$ $\quad a = 0{,}75\,m$ $\quad b = 0{,}25\,m$ $\quad c = 0{,}5\,m$ $\quad d = 0{,}1\,m$ $\quad \alpha = 60°$

$F_{co} = ?$ $\quad R_B = ?$ $\quad CM = ?$



Considero il corpo 1:

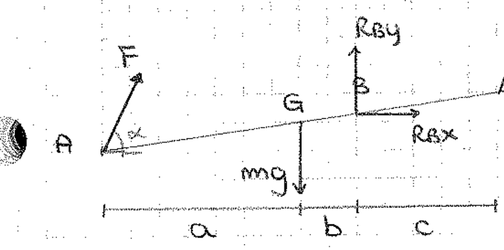


corpo soggetto a due sole forze

$|F| = |F_1|$ $\quad F \parallel F_1$ verso opposto

$\alpha F_1 = 60°$

Considero l'asta 2:

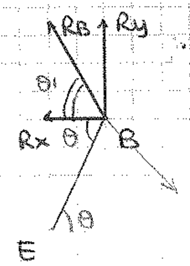


All'equilibrio:

$$\begin{cases} \xrightarrow{+} F\cos\alpha + R_{Bx} + F_{co}\cos\alpha = 0 \\ \uparrow + \; F\,sen\alpha - mg + R_{By} + F_{co}\,sen\alpha = 0 \\ B\circlearrowright^{+} -F\,sen\alpha(a+b) + F\cos\alpha(2d) + mg\,b + \\ \quad + F_{co}\,sen\alpha(c) - F_{co}\cos\alpha(d) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50 + R_{Bx} + F_{co}(0{,}5) = 0 \\ 86{,}6 - 245 + R_{By} + 0{,}866 F_{co} = 0 \\ -86{,}6 + 10 + 61{,}25 + 0{,}433 F_{co} - 0{,}05 F_{co} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{Bx} = -70\,N \\ R_{By} = +123{,}7\,N \\ F_{co} = 40\,N \end{cases}$$

$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = 142{,}2\,N$



$R_B \perp (BE) = CM$

$BE = \sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}79\,m$

$\theta = arctg\left(\frac{a}{b}\right) = 71{,}56°$

$\theta_1 = arctg\left(\frac{R_{By}}{R_{Bx}}\right) = 60{,}5°$

$R_B \perp = R_B \cos(\alpha_1) = 106{,}4\,N$

$\alpha_1 = (60 - (90 - \theta)) = 41{,}56° =$

$CM = R_B \perp (BE) = 84\,Nm$

Durante la rotazione ω si genera una $\vec{Q}$ tg al cerchio di attrito al perno di raggio ρ_P => ATTRITO NEL VINCOLO DI CERNIERA

$\vec{Q}$ è la reazione vincolare in O'

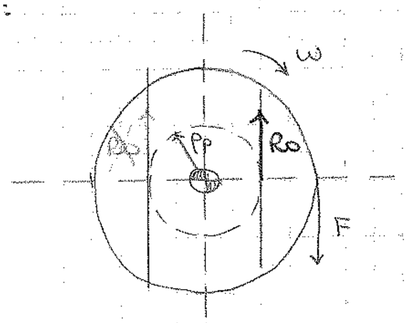
CONDIZIONI ATTRITO AL PERNO

1) $\vec{Q}$ tg al cerchio di attrito
2) $\vec{Q}$ opposta a $\vec{\omega}$
3) $\vec{Q}$ deve rispettare l'equilibrio del perno $[\vec{Q} \parallel \vec{F}, |\vec{Q}| = |\vec{F}|]$

1) Separare le parti del sistema
2) Tracciare il cerchio di attrito sulle cerniere
3) Stabilire D; V di $\vec{Q}$ in base alle 3 condizioni

- $\vec{Q}$ è la reazione vincolare nella cerniera e segue l'attrito al perno
- l'attrito al perno non sposta da O' né peso né inerzie

Es:



Ro verde non va bene poiché non si oppone a ω

Ro non è applicata più al centro ma tg al cerchio di attrito

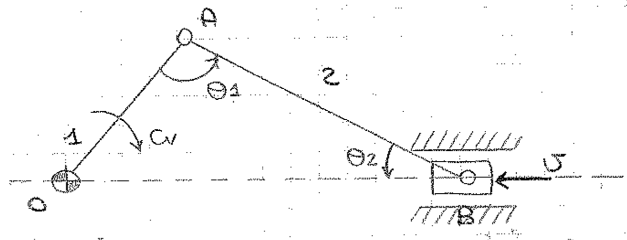
Ro compare SOLO nel pezzo staccato, non nell'assemblato

R = raggio del tamburo

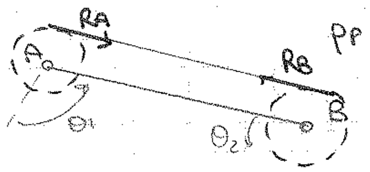
$\rho_P = r_P \operatorname{sen} \varphi_P$

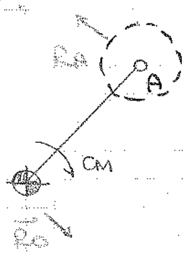
SISTEMA BIELLA-MANOVELLA con attrito in A e B

θ_1 aumenta, θ_2 diminuisce



Considero la biella AB:





2ª regola equilibri:

$\vec{R_A} \parallel \vec{R_O}$

$\vec{R_A}$ è opposta a CM

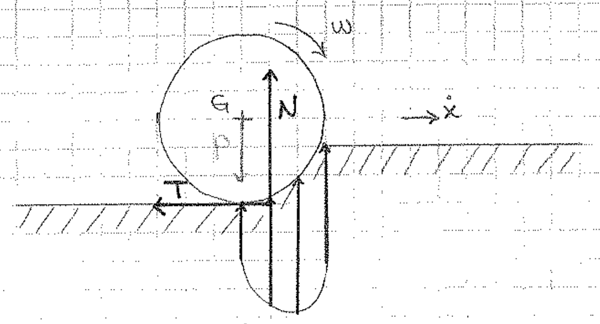
Quindi su AB RA è diretta da A verso B → RA (tg a ρ_P)

RB deve essere lungo la stessa retta di azione e tg a ρ_P

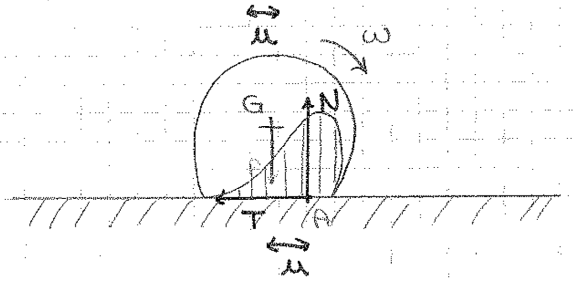
RA deve essere opposta a ω e quindi a θ_1

RB deve essere opposta a RA ma anche discorde a θ_1 quindi la soluzione scelta non va bene

ATTRITO VOLVENTE (resistenza al rotolamento)



N è spostata rispetto alla forza peso di una quantità u = parametro di attrito volvente



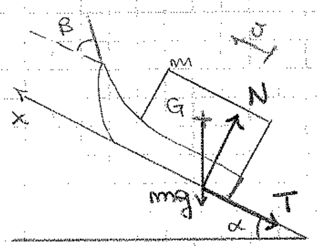
r = raggio del rullo

$G)^+ \quad Nu = Tr \rightarrow T = \left(\frac{u}{r}\right) N = f_v N$

$f_v = \frac{u}{r}$ = coefficiente di attrito volvente

ESERCITAZIONE 4:

1)



$m = 500\,kg$

$\alpha = 30\%$

$f = 0{,}2$

$v = cost$

Calcolare f_{min} e β che mi permette di dare questa forza.

Ipotizzando di staccare la cassa dal terreno:

$\overset{+}{\leftarrow} \quad K\cos\beta - T - mg\,sen\alpha = 0$

$\uparrow^+ \quad K sen\beta - mg\cos\alpha + N = 0$

$T = fN$

$$\boxed{\alpha = 30\% \rightarrow tg\alpha = \frac{30}{100} \rightarrow \alpha = 16{,}69°}$$

3 equazioni con 4 incognite → posso ricavare K in funzione di β e derivandola ottengo il valore minimo

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha - K sen\beta \\ T = mg\,sen\alpha + K\cos\beta \\ T = fN \end{cases} \qquad \begin{cases} N = mg\cos\alpha - K sen\beta \\ fmg\cos\alpha - fK sen\beta = K\cos\beta - mg\,sen\alpha \\ T = fN \end{cases}$$

$$K(\beta) = \frac{fmg\cos\alpha + mg\,sen\alpha}{\cos\beta + f sen\beta}$$

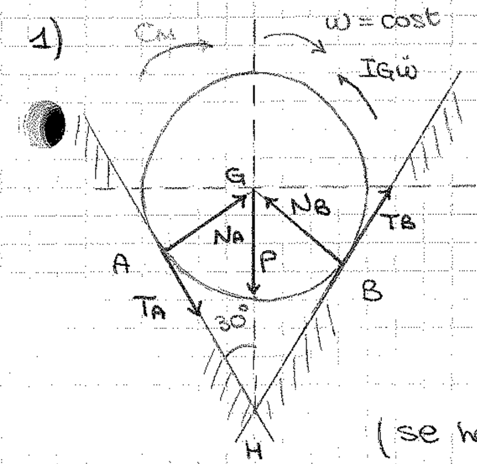
Dobbiamo massimizzare il denom. $G(\beta)$ in modo tale da rendere min il $K(\beta)$

$\frac{dG(\beta)}{d\beta}$ max $= -sen\beta + f\cos\beta = 0 \rightarrow f = tg\beta = tg\varphi \rightarrow \beta = \varphi = arctg f = 11{,}31°$

$\frac{d^2G(\beta)}{d\beta} < 0$ per $0 \leq \beta \leq 90°$ (se $\beta > 90°$ la slitta scenderebbe)

$K_{MIN}(\beta) = 2{,}3\ kN$

LEZIONE

1) 

$d = 30\,mm$ $\theta = 30°$ $\omega = cost$

$h = 100$ giri/min $m = 100\,kg$

$$\begin{cases} \rho_i = 0{,}2\,m \\ f = 0{,}25 \\ \varphi = 14° \end{cases}$$

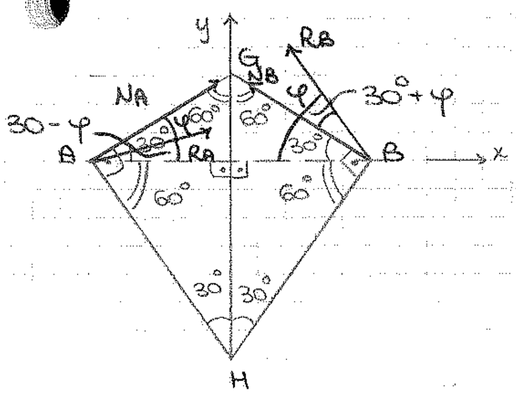
ρ_i = raggio di inerzia del rullo

$I_G = m\rho_i^2 = 100\,kg\,(0{,}2\,m)^2 = 4\,kg\,m^2$

(se ho ρ_i vuol dire che il corpo non ha un'uniformità geometrica anche a livello della massa)

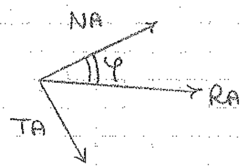
N, T vanno specificate rispetto a A e B; se $\omega = 0$ $T_A = T_B = 0$, $N_A = N_B$ poiché il peso si distribuisce tra le due normali

Considero AGBH:

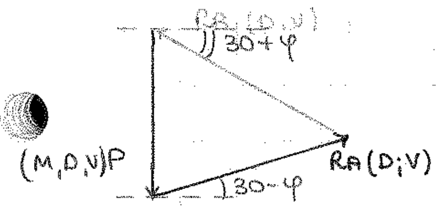


N_A ed N_B sono inclinate di 30°

Nel caso di attrito la risultante R_A tra N_A e T_A è inclinata di φ rispetto a N



Costruendo il triangolo delle forze:



Equilibrio: $\vec{P} + \vec{R_A} + \vec{R_B} = 0$

Dal triangolo di forze:

$$\begin{cases} \uparrow + \quad R_A \operatorname{sen}(30-\varphi) + R_B \operatorname{sen}(30+\varphi) - P = 0 \\ \xrightarrow{+} \quad R_A \cos(30-\varphi) - R_B \cos(30+\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A = 814{,}8\,N \\ R_B = 1088{,}88\,N \end{cases}$$

Da queste posso ricavare N, T: $T = R \operatorname{sen}\varphi$; $N = R\cos\varphi$

Equaz. mom. rispetto a G:

$G \circlearrowleft + \quad C_M - T_A \frac{d}{2} + T_B \frac{d}{2} = 0 \rightarrow C_M - \frac{d}{2}(R_A + R_B)\operatorname{sen}\varphi = 0$

$C_M = \frac{d}{2}(R_A + R_B)\operatorname{sen}\varphi = 6{,}9\,Nm$

2) Calcolare la potenza dissipata esprimendola in Kcal/h

- C_M = azione motrice
- $C_r = (T_A + T_B)\,d/2$ azione resistente (attrito)
- inerzia (non esiste poiché $\dot\omega = 0$ essendo $\omega = cost$)

$N = 69367{,}17\ N$

$f_a N = 13873{,}4\ N$

$T = 24967{,}17\ N > f_a N \rightarrow$ strisciamento $\rightarrow \begin{cases} T = fN \\ \ddot{x} \neq r\dot{\omega} \end{cases}$

quindi ω è errata!

se $T = fN$: $\alpha = 45^\circ$ ricalcolo tutto

$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 3{,}05$ rad/s

$\ddot{x} = (mg\sin\alpha - T)/m = 5{,}89\ m/s^2$

$T = fN = 0{,}15 N = 0{,}15 (69367{,}17 N)$

$N = mg\cos\alpha = 69367{,}17\ N$ (era corretta poiché indipendente da ω)

Il rullo percorre 200 m → quanti giri fa?

$x(t) = \cancel{x(0)} + \cancel{\dot{x}_0 t} + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{\ddot{x}}} = \sqrt{\frac{2s}{\ddot{x}}}$

se $\alpha = 10^\circ$ $t = 21{,}3\ s$

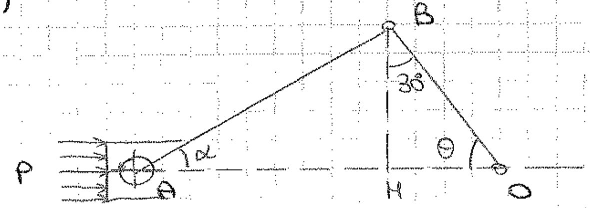
se $\alpha = 45^\circ$ $t = 8{,}24\ s$

$\theta(t) = \ddot{\theta}\frac{t^2}{2}$

se $\alpha = 10^\circ \rightarrow \theta^*(21{,}3 s) = \frac{\theta^*}{2\pi} = 63{,}68$ giri

se $\alpha = 45^\circ \rightarrow \theta^*(8{,}24 s) = \frac{\theta^*}{2\pi} = 16{,}48$ giri

2.16)



$p = 100\ kPa$

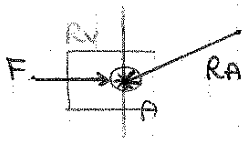
$d = 40\ mm$

$OB = 42{,}5\ mm$

$AB = 107{,}5\ mm$

$C_1, R_A, R_B, R_O = ?$

Considero il corpo 1:



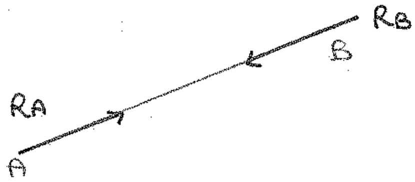
$p = \frac{F}{S} \rightarrow F = pS = 100000\,(\pi r^2) = 125{,}66\ N$

Corpo soggetto a 3 forze: 3ª regola equilibrio

$A \equiv$ punto stella

$BH = OB\cos 30° = 0{,}0368\ m$

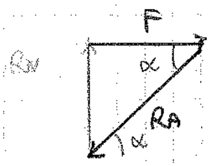
$AB\,\text{sen}\,\alpha = BH \rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{BH}{AB}\right) = 20°$



Costruisco dunque il triangolo delle forze:

$|R_A|$ non è noto, è nota solo la direzione;

$|R_V|$ non è noto, è nota solo la direzione



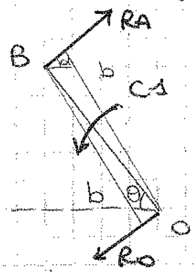
F è nota in M, D, V.

$R_A\cos\alpha = F \rightarrow R_A = F/\cos\alpha = 133{,}72\ N = |R_B| = |R_O|$

$R_V = R_A\,\text{sen}\,\alpha = 45{,}74\ N$

Conosco quindi $|R_A| = |R_B|$ e le loro direzioni

Considero la manovella OB: asta soggetta a due forze e una coppia → 2ª regola equilibri

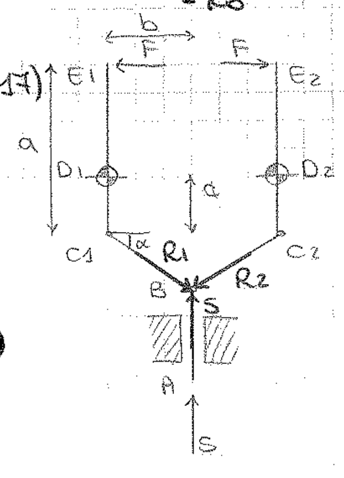


$C_1 = R_A b = 5{,}6\ Nm$

$b = OB\,\text{sen}\,80° = 0{,}0418\ m$

$O\hat{B}R_A = 80°$

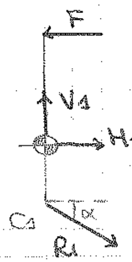
2.17)



$a = 50\ cm \quad b = c = 20\ cm \quad \alpha = 45° \quad F = 5N$

$S = ? \quad D_1 = ? \quad D_2 = ?$

$\vec{S} = \vec{R_1} + \vec{R_2} \qquad |S| = R_1\,\text{sen}\,\alpha + R_2\,\text{sen}\,\alpha$



All'equilibrio:

$\xrightarrow{+}\ H_1 + R_1\cos\alpha - F = 0$

$+\uparrow\ V_1 - R_1\,\text{sen}\,\alpha = 0$

$C_1)^{+}\ Fa - H_1 c = 0$

$\begin{cases} R_1 = (F - H_1)/\cos\alpha = -10{,}6N \\ V_1 = -7{,}5N \\ H_1 = \frac{Fa}{c} = 12{,}5N \end{cases}$

$R_1 = R_2 = -10{,}6N, \quad H_1 = H_2 = 12{,}5N$

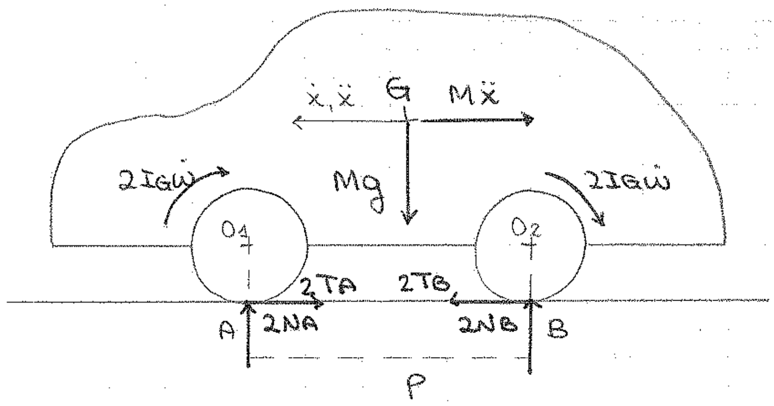
LEZIONE

Martedì - Mercoledì 3 ore
Venerdì 3 ore

2.14) lungo y: $\begin{cases} Q_{iy1} = m_1(0) = 0 \\ Q_{iy2} = m_2(v + v_{rel}) = m_2 v_{rel} = m_2 r\omega \end{cases}$

$\theta = 60°$ $\begin{cases} Q_{fy1} = 0 \\ Q_{fy2} = m_2(v + v_{rely}) = m_2 r\omega\cos\theta \end{cases}$

2)



$M = 1360\ kg$

$P = Mg = 13341{,}6\ N$

$p = 2{,}3\ m$

$r = 0{,}325\ m$

$x_G = 1{,}3\ m$ $z_G = 0{,}72\ m$

$f = 0{,}2$ $f_a = 0{,}55$

$m_r = q = 10\ kg$

$\rho_i = 0{,}2\ m$ $R_B = ?$

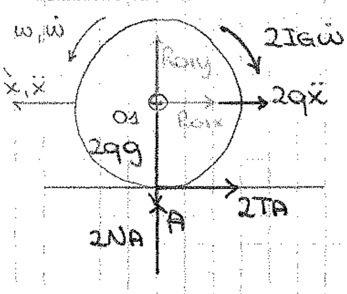
$C_{rmax} = ?$, $\ddot{x}_{max} = ?$, $R_A = ?$

Sulla ruota $I_G = m\rho_i^2 = 0{,}4\ kg\,m^2$ (ruota)

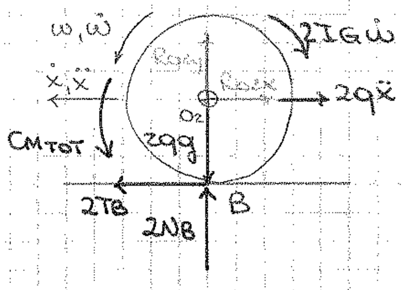
Motrici = ruote posteriori

Diagrammi di corpo libero delle ruote:

Assale anteriore



Assale posteriore



Nelle ruote posteriori TB si oppone a Cm, Cm è totale perché comprende le due ruote

Sull'assemblato non considero pesi e inerzie alla traslazione poiché considero la massa totale; non si vede nemmeno Cm poiché sono momenti scambiati all'interno della struttura

1) $O_1 \curvearrowleft^{+}$ $-2I_G\dot{\omega} + 2T_A r = 0$

2) $O_2 \curvearrowleft^{+}$ $-2I_G\dot{\omega} - 2T_B r + C_{MTOT} = 0$

3) $T_B = f_a N_B$ (aderenza limite)

4) $\ddot{x} = r\dot{\omega}_{max}$ (puro rotolamento)

5) $+\uparrow$ $2N_A + 2N_B - Mg = 0$

6) $\overset{+}{\rightarrow}$ $2T_A - 2T_B + M\ddot{x} = 0$

7) $A \curvearrowleft^{+}$ $-2I_G\dot{\omega} - 2I_G\dot{\omega} - Mgx_G - M\ddot{x}z_G + 2N_B p = 0$

$\ddot{x}_{max} = 3{,}66\ m/s^2$

$\dot{\omega}_{max} = 11{,}26\ rad/s^2$

$T_A = 13{,}86\ N$

$T_B = 2502{,}66\ N$

$N_B = 4550{,}29\ N$

$N_A = 2120{,}51\ N$

$C_{MTOT} = 1635{,}73\ Nm$

$\ddot{x}_{max} = 3{,}66\ m/s^2$ Su ogni ruota $C_{MAX} = \frac{C_{MTOT}}{2} = 817{,}868\ Nm$

Poichè $p_p = r_p \operatorname{sen}\varphi = OH \operatorname{sen}\beta$

$$R = OH \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{\rho}{OH} = \frac{\rho}{R}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

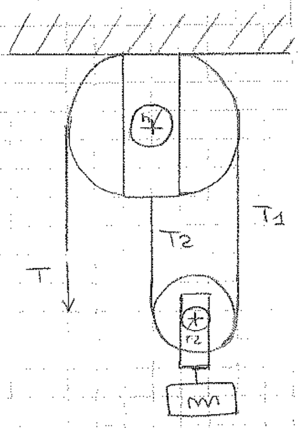
Quindi $$F = mg\,\frac{\cancel{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\cos\beta + \cos\frac{\alpha}{2}\frac{\rho}{R}\cancel{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\cos\beta - \cos\frac{\alpha}{2}\frac{\rho}{R}\cancel{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}} \approx mg\,\frac{1+\frac{\rho}{R}\cos\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\rho}{R}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

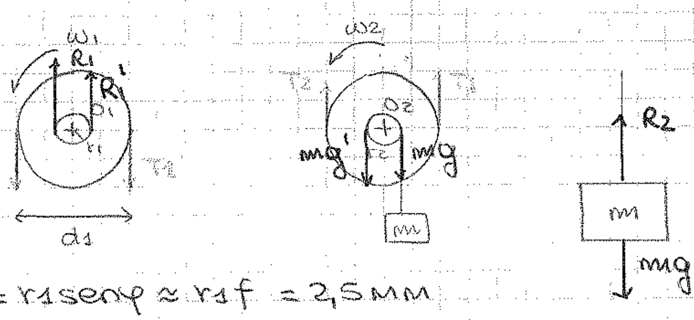
ma $\rho = r\operatorname{sen}\varphi \rightarrow F = mg\,\dfrac{1+\frac{r}{R}\operatorname{sen}\varphi\cos\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{r}{R}\operatorname{sen}\varphi\cos\frac{\alpha}{2}}$

4) $d_1 = 180$ mm $\quad d_2 = 90$ mm $\quad r_1 = 10$ mm $\quad r_2 = 6$ mm $\quad f = 0,25$

$m = 200$ kg $\quad T, T_1, T_2 = ?\quad$ se: 1) $\omega = \text{cost} \uparrow \quad$ 2) $\omega = \text{cost} \downarrow$

Separando i due componenti:





$\rho_1 = r_1 \operatorname{sen}\varphi \approx r_1 f = 2,5$ mm

$\rho_2 = r_2 \operatorname{sen}\varphi \approx r_2 f = 1,5$ mm

All'equilibrio: $\quad R_2 = mg$

$$\begin{aligned}
&O_1)^+ \quad T\frac{d_1}{2} - T_1\frac{d_1}{2} - R_1\rho_1 = 0 \\
&O_2)^+ \quad -T_2\frac{d_2}{2} + T_1\frac{d_2}{2} - mg\rho_2 = 0 \\
&+\uparrow \quad R_1 - T - T_1 = 0 \\
&+\uparrow \quad T_2 + T_1 - mg = 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{cases}
0,09T - 0,09T_1 - 0,0025R_1 = 0 \\
-0,045T_2 + 0,045T_1 - 2,94 = 0 \\
T + T_1 = R_1 \\
T_1 + T_2 = mg = 1960
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
T_1 = 1960 - T_2 \\
-0,045T_2 - 0,045T_2 + 88,2 - 2,94 = 0 \\
T + T_1 = R_1 \\
0,09T - 0,09T_1 - 0,0025R_1 = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
T_2 = 947,33\ \text{N} \\
T_1 = 1012,7\ \text{N} \\
T = R_1 - 1012,7 = 1070,5\ \text{N} \\
0,09R_1 - 91,14 - 91,14 - 0,0025R_1 = 0
\end{cases}$$

$R_1 = 2083,2$ N

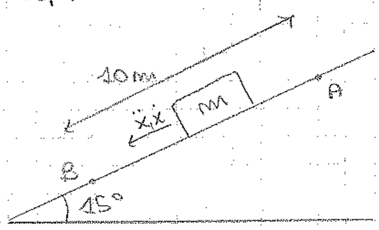
Caso 2: Cambiano i punti di applicazione delle forze di attrito dei perni

$T = 897$ N

$T_1 = 948$ N

$T_2 = 1014$ N

3.5)



$d = 10$ m $\quad m = 50$ kg $\quad \theta = 15°$

$v_A = 4$ m/s $\quad f = 0,3$

$v_f^2 - v_0^2 = 2a(x_f - x_0) = 2ad$

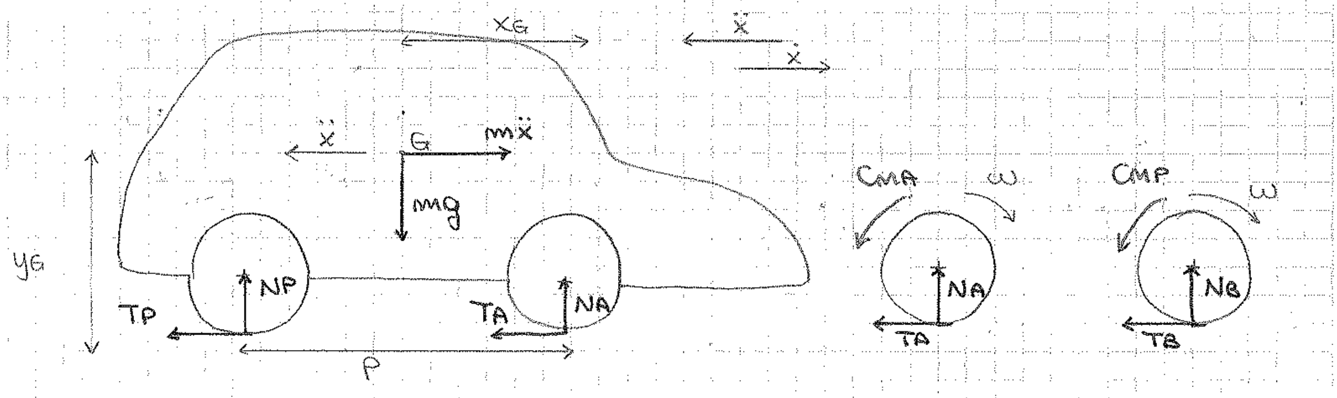
$v_B^2 = v_A^2 + 2ad$

3.7) Ruote = condizioni di aderenza limite

Modello bidimensionale: solo due ruote

$p = 2{,}5\,m$ $\quad x_G = 1{,}4\,m$ $\quad Y_G = 0{,}8\,m$ $\quad r = 0{,}32\,m$ $\quad m = 1000\,kg$

$f_a = 0{,}75$ $\quad V_o = 100\,km/h$ $\quad x_f = ?$ $\quad C_M = ?$



$V_f = 0$ poiché l'auto sta frenando e dunque si ferma

$T_A = f_a N_A$

$T_P = f_a N_P$

All'equilibrio:

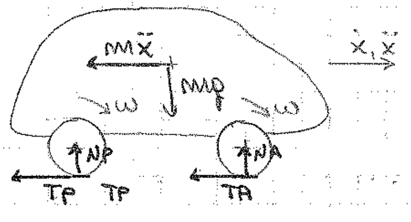
$$\begin{cases} N_P + N_A = mg = 9800\,N \\ T_P + T_A = m\ddot{x} \\ T_A = f_A N_A \\ T_P = f_A N_P \\ (A)^{\curvearrowleft}\ mg x_G - m\ddot{x} y_G - N_P p = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_P + N_A = 9800\,N \rightarrow N_A = 6664\,N \\ T_P + T_A = 0{,}75(9800) = 1000\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = 7{,}35\,m/s \\ T_A = 0{,}75\,N_A = 4998\,N \\ T_P = 0{,}75\,N_P = 2352\,N \\ 13720 - 5880 = 2{,}5\,N_P \rightarrow N_P = 3136\,N \end{cases}$$

$C_{MP} = 752{,}6\,Nm$

$C_{MA} = 1600\,Nm$

$V_f^2 - V_o^2 = 2a(x - x_o) = 2a x_f \rightarrow x_f = \frac{V_o^2}{2a} = 52{,}5\,m$

Oppure considero $\ddot{x} \rightarrow$



$N_P + N_A = mg$

$T_P + T_A$

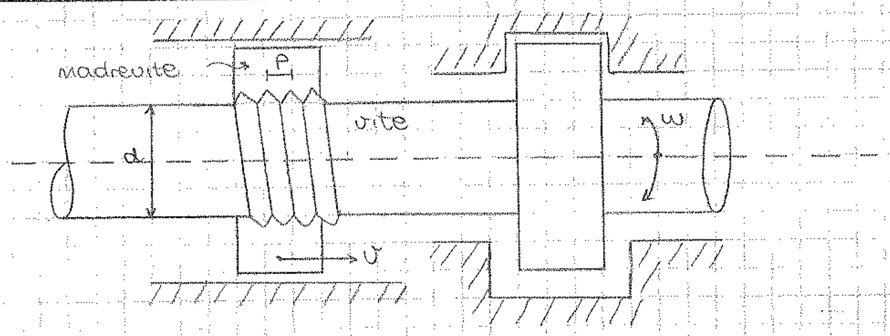
3.8) Se le ruote strisciano sul terreno $\quad f = 0{,}4$

$$\begin{cases} T_A = f N_A \\ T_P = f N_P \\ N_A + N_P = mg \\ T_A + T_P = m\ddot{x} \\ mg x_G - m\ddot{x} y_G - N_P p = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_A + N_P = 9800\,N \rightarrow N_A = 5566{,}4\,N \\ 0{,}4(9800) = 1000\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = 3{,}92\,m/s^2 \\ T_A = f N_A = 2226{,}6\,N \qquad C_{MA} = 712{,}5\,Nm \\ T_P = f N_P = 1693{,}4\,N \qquad C_{MP} = 542\,Nm \\ N_P = 4233{,}6 \end{cases}$$

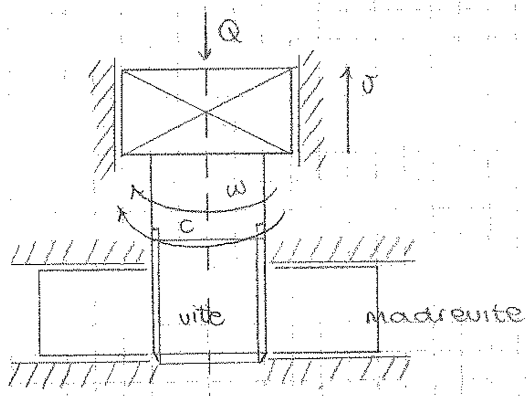
$x_f = \frac{V_o^2}{2\ddot{x}} = 98{,}4\,m$

LEZIONE

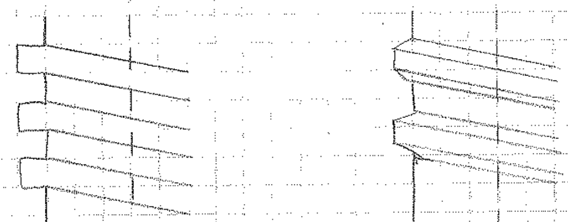
Sistemi vite-madrevite - COPPIA ELICOIDALE



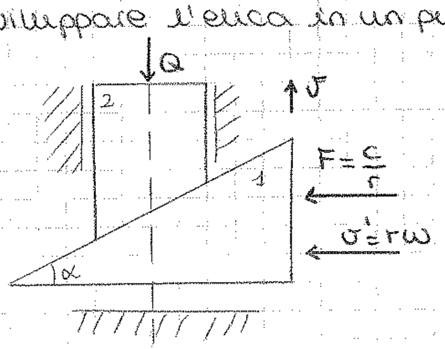
p = passo della filettatura
d = diametro medio della vite
velocità di rotazione della vite e traslazione della madrevite
si può trasformare il primo nel secondo e viceversa



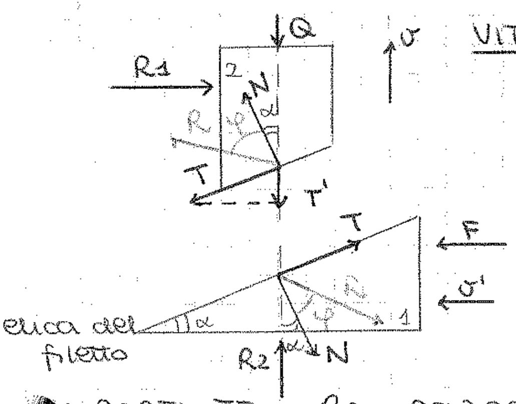
C, ω riferiti alla madrevite
Q, v riferiti alla vite
PROFILO RETTANGOLARE   TRAPEZIA



Per sviluppare l'elica in un piano si usa un piano inclinato



1 madrevite
2 vite
r = raggio medio vite
CUNEI EQUIVALENTI



VITE: la proiezione T' deve essere opposta a v
$\hat{\varphi}$: $\hat{N,R}$ = angolo di attrito di strisciamento
α = angolo di inclinazione del filetto ed è sempre compreso tra N e l'asse
R1 = componente normale al piano = reazione prismatica della vite

MADREVITE: R2 = reazione sul cuneo-madrevite del telaio

Cuneo 2: $+\uparrow \quad -Q + R\cos(\alpha+\varphi) = 0$

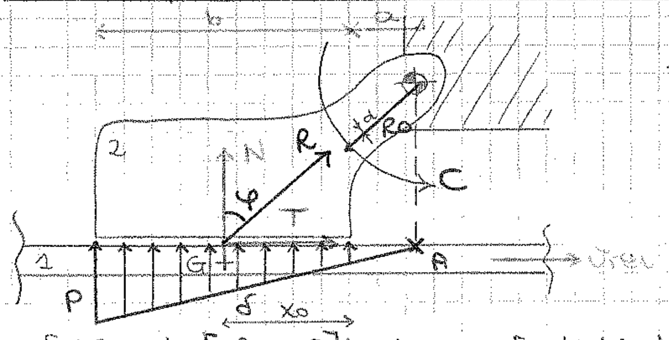
$\xrightarrow{+} \quad R_1 - R\,\mathrm{sen}(\alpha+\varphi)$

4) freno a tamburo o a ceppo ad accostamento libero (∞ ip. usura)

5) freni a disco: - ad accostamento rigido
- ad accostamento semirigido
- ad accostamento libero

} Hp. usura

1) freno a pattino ad accostamento rigido ⇒ 1GdL



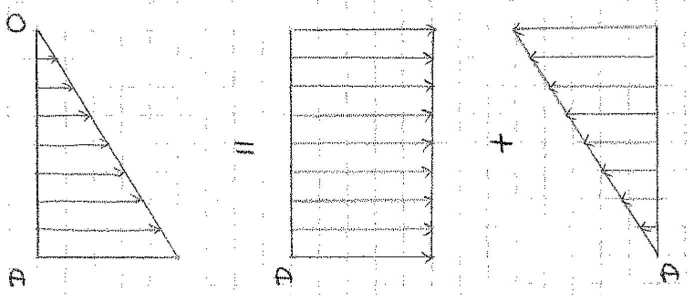
1: nastro

2: pattino

C = tiene applicato il pattino sul nastro e permette di fermarlo

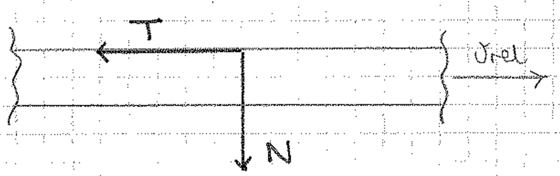
$\delta dA = k\,[f p dA]\,v_{rel} \rightarrow \delta = k(fp)v_{rel}$

la coppia C produce una rotazione attorno ad O



traslazione lungo il nastro

$v_{rel} = cost \rightarrow \delta \equiv p$



Perché T è concorde con Vrel?

Sul nastro è discorde in realtà

R e Ro generano una coppia opposta a Cm

$C = Rd$

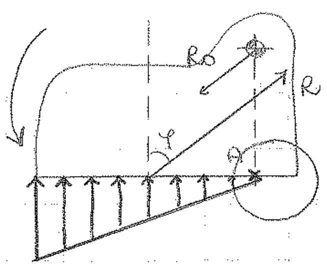
$R = \dfrac{T}{\operatorname{sen}\varphi} = \dfrac{N}{\cos\varphi}$

$|R| = |R_o|$ conoscendo le pressioni di contatto ricaviamo N, R, C.

$N x_o = \int_a^{a+b} (p\,dA)\,x = \int_a^{a+b} p\,\overbrace{dx\cdot 1}^{dA}\,x$ con $N = p\,dA$

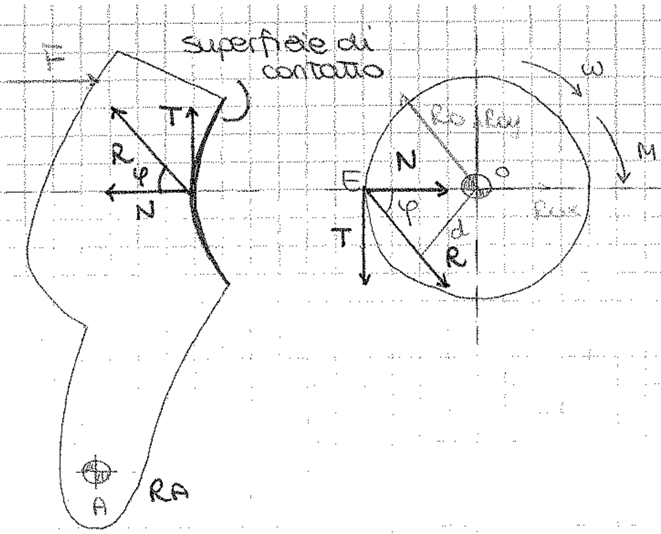
Da questa ricaviamo N, R, C:

Se:



pattino parzializzato
(c'è una zona che non lavora)

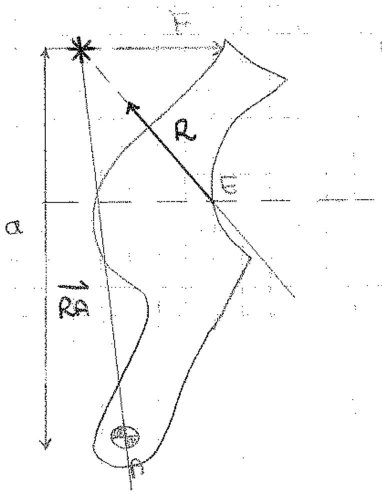
R∥Ro → AUTOIMPUNTAMENTO



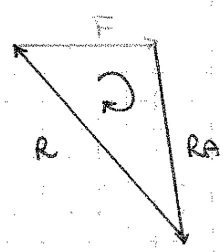
R e Ro formano una coppia che si oppone a M

Scegliamo di non usare l'ipotesi dell'usura, ma di ipotizzare che N e T siano applicate in E (asse del tamburo) e tangenti al tamburo

Il ceppo ricade nella 3ª regola degli equilibri



$\vec{F}+\vec{R}+\vec{RA}=0$

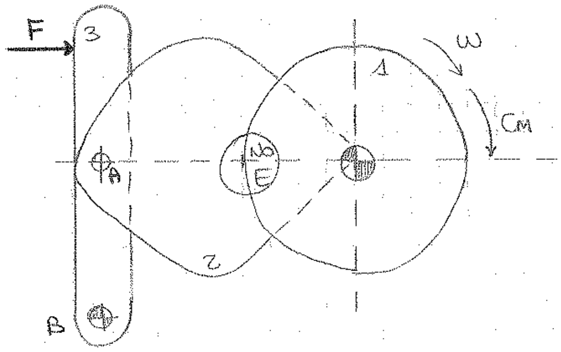


$O \circlearrowright^{+} \quad M - Rd = 0 \rightarrow R$

$A \circlearrowright^{+} \quad Fa - Rb = 0 \rightarrow F$

Coppia frenante ostacola il moto

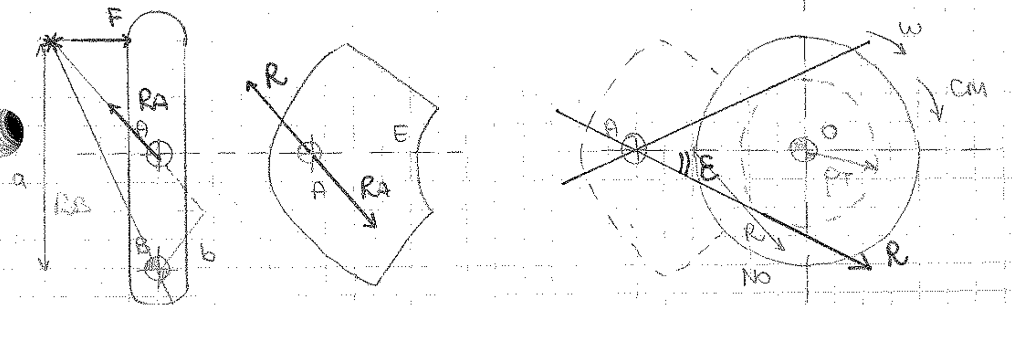
4) FRENO A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO LIBERO



1: tamburo

2: ceppo (2GdL)

3: leva

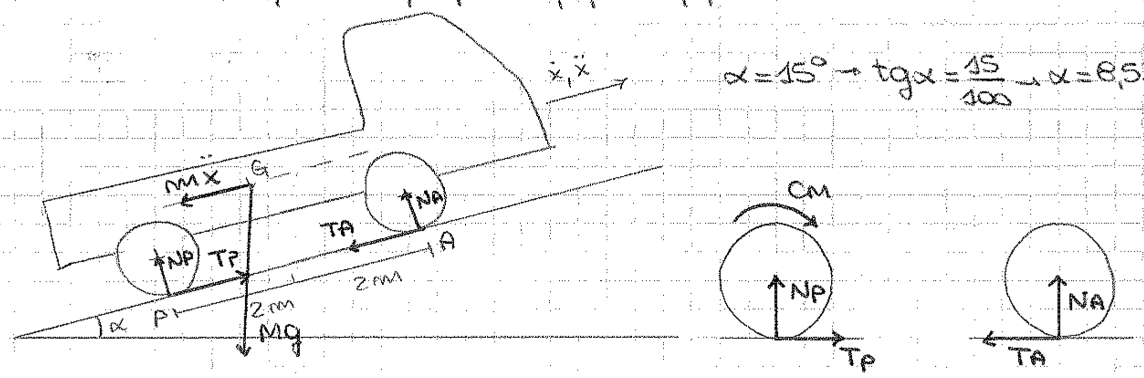


Esercizi cap. 3

3.11) $V_f = 40\,km/h$ $d = 50\,m$ $M = 5000\,kg$ $\alpha = 15\%$

Calcolare $N_A = ?$, $T_A = ?$, $N_P = ?$, $T_P = ?$, $f_a = ?$

$\alpha = 15\% \rightarrow tg\alpha = \frac{15}{100} \rightarrow \alpha = 8{,}53°$



$+\uparrow \; N_P + N_A = Mg\cos\alpha$

$\overset{+}{\rightarrow} \; T_P - T_A - m\ddot{x} - mg\,sen\alpha = 0$

$P \circlearrowleft^{+} \; m\ddot{x}(0{,}8) + mg\,sen\alpha(0{,}8) - mg\cos\alpha(2) + N_A(4) = 0$

$G \circlearrowleft^{+} \; T_P(0{,}8) - N_P(2) + N_A(2) - T_A(0{,}8) = 0$

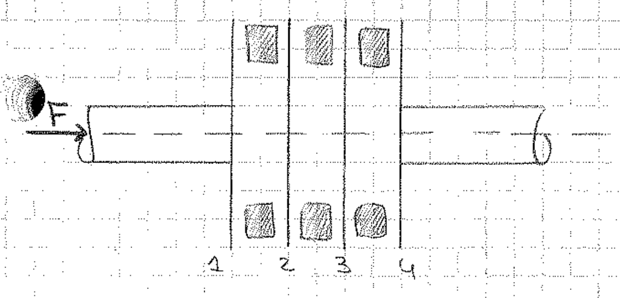
$$\begin{cases} N_P + N_A = 48507{,}42\,N \\ T_P - T_A = 13425\,N \\ N_A = 21{,}57\,kN \\ T_P(0{,}8) - N_P(2) + 43140 - T_A(0{,}8) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_A = 21{,}57\,kN \\ N_P = 26{,}94\,kN \\ T_A = 0 \\ T_P = 13{,}42\,kN \end{cases}$$

$V_f = 40\,km/h = 11{,}1\,m/s$

$V_f^2 = 2a(x - x_0) = 2\ddot{x}d \rightarrow \ddot{x} = \frac{V_f^2}{2d} = 1{,}23\,m/s^2$

f_{amin}: $T_P = f_{amin} N_P \rightarrow f_a = \frac{T_P}{N_P} = \frac{13{,}42\,kN}{26{,}94\,kN} = 0{,}5$

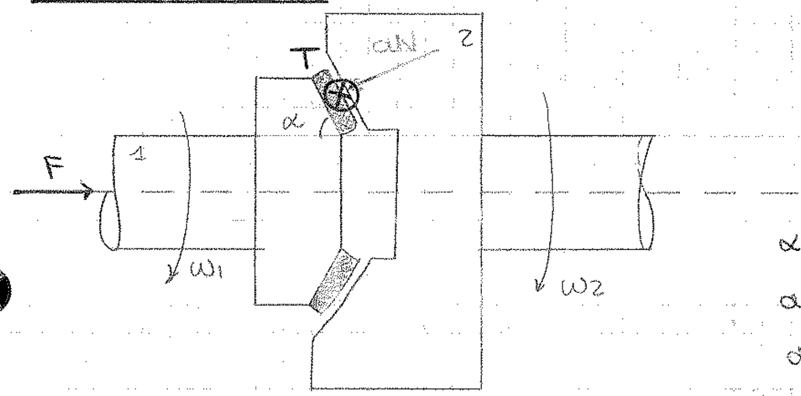
- Frizioni piane multiple



$n° = n°$ superfici di contatto (3)

$C_{friz.} = n f F \left(\frac{r_e + r_i}{2}\right)$

- Frizione conica



$p = \frac{k'}{r}$

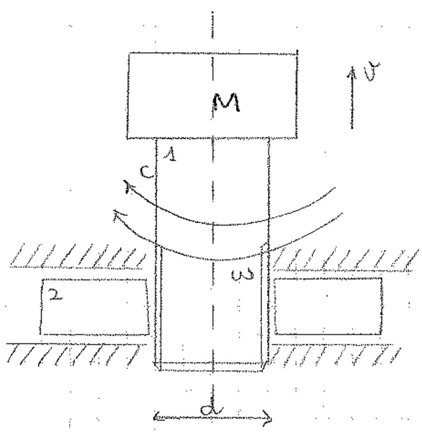
$C_{friz.} = \frac{fF}{sen\alpha} \frac{(r_e + r_i)}{2}$

α produce un aumento (effetto alla geometria) del coefficiente di attrito di strisciamento

Freni: convertono energia cinetica in calore

SISTEMA VITE-MADREVITE

Es:



1 vite

2 madrevite

$M = 100\ kg$

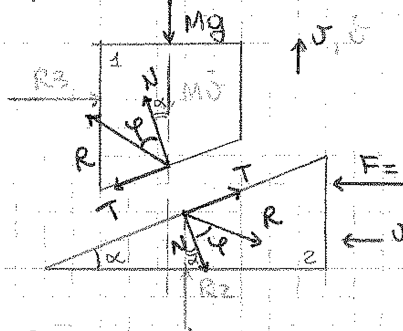
$d = 30\ mm$ $\quad \alpha = 30°$ $\quad r = 15\ mm$

$f = 0,1$

$\varphi = 5,7°$

$C = ?$ $\quad$ 2°) $\dot{v} = ?$ se $C' = 5Nm > C$

1° caso) $v = cost$



$F = \frac{C}{R}$

All'equilibrio:

$$\begin{cases} 1)\ +\uparrow\ R\cos(\varphi+\alpha) - Mg = 0 \\ \pm\ R3 - R sen(\varphi+\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2°)\ \pm\ R sen(\varphi+\alpha) - F = 0 \\ +\uparrow\ R2 - R\cos(\varphi+\alpha) = 0 \end{cases}$$

$Mg = R\cos(\varphi+\alpha) \rightarrow R = Mg / \cos(\alpha+\varphi)$

$F = R sen(\varphi+\alpha) = C/r \rightarrow C = rR sen(\varphi+\alpha) = Mgr\, sen(\alpha+\varphi)/\cos(\varphi+\alpha)$

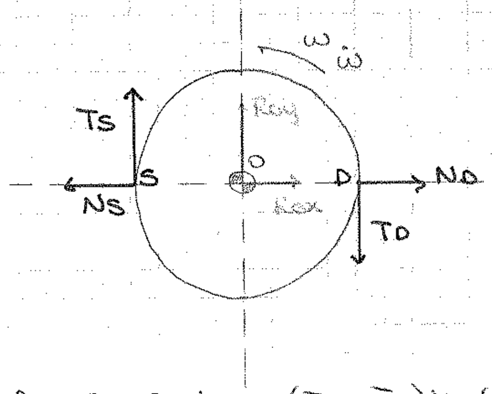
Quindi $C = Mrg\, tg(\varphi+\alpha) = 2,25\ Nm$

$\xrightarrow{+}$ $(m+m_c)\ddot{x} + T_{Btot} + T_A = 0 \rightarrow T_B = (m+m_c)(-\ddot{x})$

$+\uparrow$ $N_{Atot} + N_{Btot} - (m+m_c)g = 0$

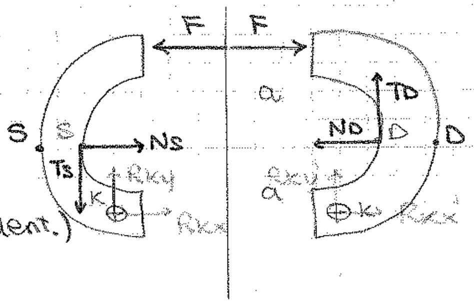
$\frac{M_{fr}}{2} = \frac{T_B}{r} = 2400\ Nm$ (sulla singola ruota)

Applico tale momento sul freno



TAMBURO FRENO

Non applico il momento frenante poiché è quello dato dalle due T (Ts e To)



(N e T stanno in S, D poiché ceppi interni)

$$\begin{cases} M_{fr} = 2400\ Nm = (T_S + T_D)r \quad \text{(ident.)} \\ K \circlearrowleft^{+} \quad \underline{F}(2a) - N_S a + T_S(r) = 0 \\ K' \circlearrowleft^{+} \quad -F(2a) + T_D r + N_D a = 0 \\ T_S = f N_S \\ T_D = f N_D \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} T_S &= F\frac{2af}{a-rf} = \\ T_D &= F\frac{2af}{rf+a} \end{aligned}\right\} \text{le ricavo dalle 4 ultime e le sostituisco alla 1}^a$$

$$F = M_{fr}\frac{a^2 - r^2f^2}{4a^2fr} = 6875\ N$$