



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 735**

**DATA: 07/10/2013**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Insana**

**MATERIA: Tecnica delle Costruzioni Esercitazioni**

**Prof. Allaix**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

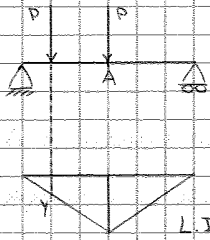
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Argomenti:

(1) Sicurezza strutturale

(2) Linee di influenza → sono dei diagrammi riferiti agli spostamenti di un punto della struttura, a reazioni vincolari, a sollecitazioni. È uno strumento utile per il progettista, per determinare le condizioni più gravose



impalcato di un ponte, forza-peso di un veicolo, in base alla posizione che occupa avremo un \$M\$ diverso → vedo dov'è max → trovo la condizione più gravosa di carico. O faccio tanti conti spostando via via \$P\$ o uso le linee di influenza.  
 ↳ riferite ad una grandezza e ad una ben specifica sezione

Calcoli di Betti  $M_A = P \cdot y$

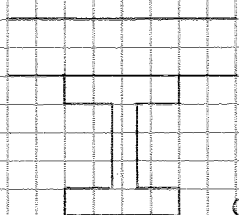
Tracciate le linee di influenza possiamo posizionare le azioni variabili.

(3) Combinazione delle azioni (o fattorizzazione delle azioni)

Negli Eurocodici → regole prefissate:  $G_k \rightarrow \gamma_G G_k$   
 (con \$Q\$ indico le azioni variabili)  $Q_k \rightarrow \gamma_Q Q_k$

Bisognerà capire quando l'azione ha effetto favorevole o sfavorevole e usare il valore corretto di  $\gamma_G$  e  $\gamma_Q$ .

(4) Deformazioni impresse → le azioni si classificano in DIRETTE (carichi concentrati o distribuiti) e INDIRETTE (deformazioni impresse, originate dal ritiro del ds, variazioni di temperatura);



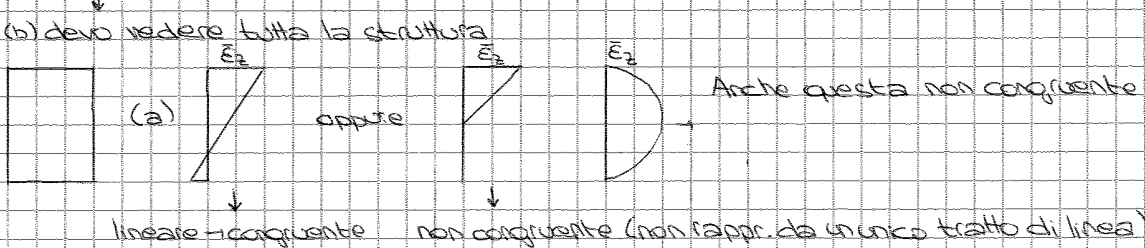
soletta in ds → ritiro → deformazione ...

trave in acciaio → ... anche l'acciaio subisce def. impresse

(a) vedo l'andamento della def. impressa sulla sezione trasversale

le azioni si dividono anche in CONGRUENTI e NON CONGRUENTI e in COMPATIBILI o NON COMPATIBILI CON I VINCOLI

(b) devo vedere tutta la struttura



# Richiami di calcolo delle probabilità

## Riferimenti bibliografici

1. G. Vicario, R. Levi “Calcolo delle probabilità e statistica per ingegneri”, Progetto Leonardo
2. S. Bernstein, R. Bernstein “Calcolo delle probabilità”, Mc Graw-Hill

# 1. Definizione classica

La probabilità  $P(A)$  di un evento  $A$  è definita come il rapporto tra il numero  $N_A$  dei risultati favorevoli (ovvero il numero dei risultati che determinano  $A$ ) e il numero  $N$  dei risultati possibili:

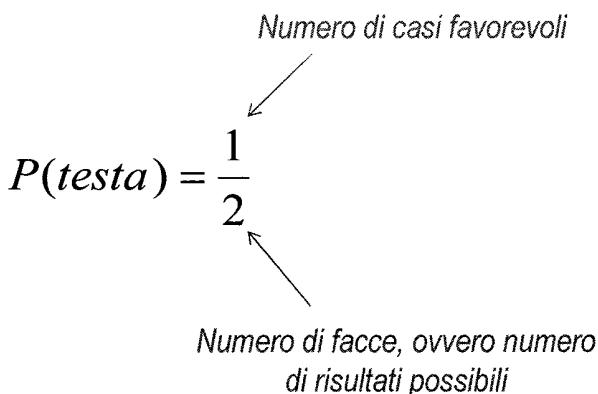
$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

purché i risultati siano ugualmente possibili e mutuamente escludentisi

E' una definizione aprioristica, in quanto la probabilità  $P(A)$  è definita senza far ricorso ad alcuna effettiva prova sperimentale.

**Esempio** Considerato l'esperimento casuale del lancio di una moneta non truccata, il numero dei risultati possibili di un lancio è 2. La probabilità di ottenere "testa" da un singolo lancio è pari a:

$$P(\text{testa}) = \frac{1}{2}$$

*Numero di casi favorevoli*  
  
*Numero di facce, ovvero numero di risultati possibili*

## 2. Definizione frequentista

Si definisce frequenza assoluta  $n_A$ , o semplicemente frequenza, di un evento  $A$  il numero delle volte in cui si è presentato l'evento favorevole.

Si definisce frequenza relativa  $f_A$  il rapporto tra il numero delle volte in cui si è presentato l'evento favorevole e il numero  $N$  delle volte in cui è ripetuto l'esperimento nelle medesime condizioni.

$$f_A = \frac{n_A}{N}$$

OSS: La probabilità dell'evento  $A$  è il limite della frequenza relativa quando il numero  $N$  delle prove tende ad infinito

E' una definizione a posteriori, in quanto la definizione della probabilità  $P(A)$  implica l'ipotesi preliminare che le prove siano ripetute in condizioni identiche.

**Esempio** Considerato l'esperimento casuale del lancio di una moneta non truccata, si vuole stimare la probabilità di ottenere "testa" da un singolo lancio.

Si eseguono  $N=500$  lanci e si calcolano la frequenza assoluta  $n_{TESTA}$  e la frequenza relativa  $f_{TESTA}$ .

Lancio	Risultato	$n_{TESTA}$	$f_{TESTA}$
1	CROCE	0	0
2	TESTA	1	1/2
3	CROCE	1	1/2
4	TESTA	2	1/2
5	CROCE	2	2/5
6	CROCE	2	1/3
7	TESTA	3	2/5
8	TESTA	4	1/2
9	CROCE	4	4/9
10	TESTA	5	1/2

### 3. Definizione soggettivista

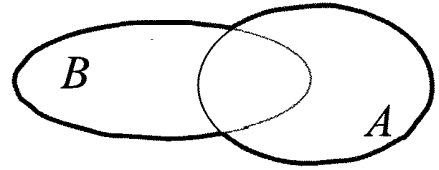
La probabilità di un evento è il grado di fiducia che si ha nel verificarsi di esso.

### 4. Definizione assiomatica

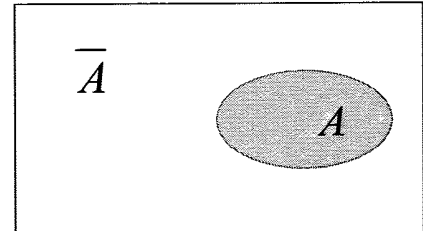
La formalizzazione matematica risale a Kolmogorov (1933)

- Si definisce ***fenomeno aleatorio*** un fenomeno empirico caratterizzato dalla proprietà che la sua osservazione in un insieme fissato di circostanze non conduce sempre agli stessi risultati.
- Si definisce ***spazio campione***  $\Omega$  l'insieme costituito da tutte le possibili osservazioni (tutti i risultati possibili a priori)
- Si definisce ***evento***  $A$  un qualsiasi insieme di risultati  $\omega$ , ovvero un sottoinsieme dello spazio campione  $\Omega$  relativo al medesimo fenomeno aleatorio

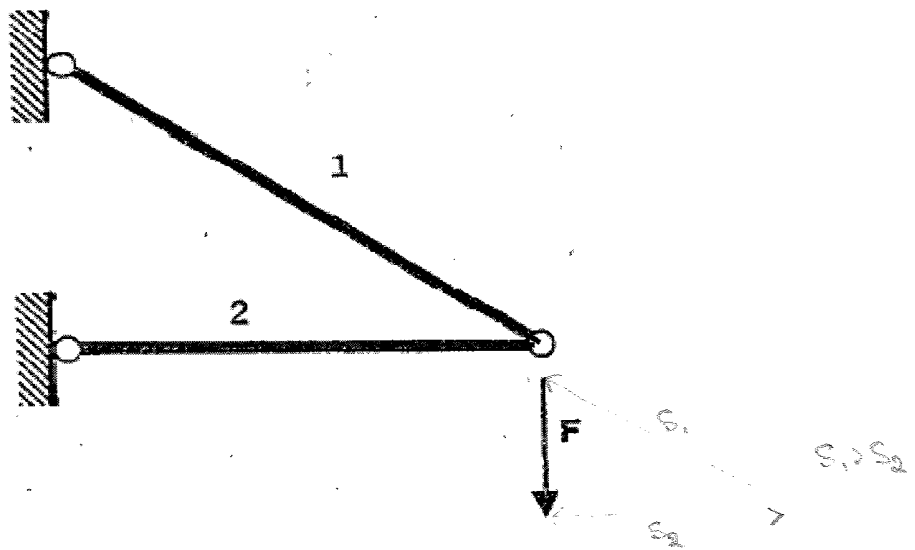
4. Dati due eventi  $A, B \subset \Omega$ , l'insieme è costituito da tutti i risultati  $A \cup B$  che realizzano  $A$  oppure  $B$ .



5. Dato un evento  $A \subset \Omega$ , se esso non si realizza, allora si realizza l'evento complementare  $\bar{A} = \Omega \setminus A$  detto evento negazione dell'evento  $A$ .



**Esempio** Si consideri una struttura costituita da due aste incerniate. Vediamo quale relazione sussiste tra gli insiemi "crollo della struttura", "rottura dell'asta 1" e "rottura dell'asta 2".





## Conseguenze degli assiomi

1.  $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$

Per il primo assioma, vale  $P(\Omega) = P(A_i \cup \bar{A}_i) = 1$

Poichè  $A_i$  e il suo complementare sono incompatibili, facendo ricorso al terzo assioma, si ottiene  $P(A_i) + P(\bar{A}_i) = 1$

2.  $P(\Phi) = 0$

L'insieme vuoto è il complementare di  $\Omega$ , quindi  $P(\Phi) = 1 - P(\Omega)$

3.  $A_i \subset A_j \Rightarrow P(A_i) \leq P(A_j)$

Applicando il terzo assioma agli eventi incompatibili  $A_i$  e  $(A_j \setminus A_i)$ , si ha  $P(A_j) = P(A_i \cup (A_j \setminus A_i)) = P(A_i) + P(A_j \setminus A_i)$ . Poichè l'insieme  $(A_j \setminus A_i)$  non è vuoto per ipotesi, risulta  $P(A_j \setminus A_i) \geq 0$

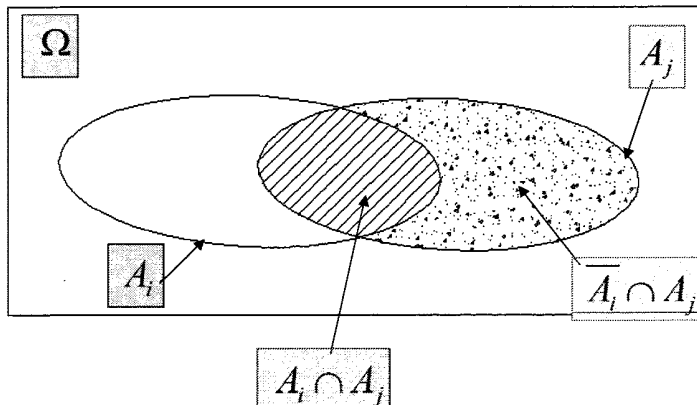
4.  $A_i \cap A_j \neq \Phi \Rightarrow P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cap A_j)$

Questa proprietà è la generalizzazione del secondo assioma per eventi *non incompatibili*.

Si consideri l'evento unione:

$$A_i \cup A_j = A_i \cup (\bar{A}_i \cap A_j)$$

Unione di due eventi incompatibili



### OSSERVAZIONI:

- ❖ Se  $A_i \subset A_j$ , allora  $A_i \cap A_j = A_i$  e quindi:

$$\rightarrow P(A_i | A_j) = \frac{P(A_i)}{P(A_j)} > P(A_i)$$

- ❖ Se  $A_i \supset A_j$ , allora  $A_i \cap A_j = A_j$  e quindi:

$$\rightarrow P(A_i | A_j) = \frac{P(A_j)}{P(A_j)} = 1$$

- ❖ Se  $A_i$  e  $A_j$  sono incompatibili, allora  $A_i \cap A_j = \emptyset$  e quindi:

$$\rightarrow P(A_i | A_j) = 0$$

**Esempio** Si consideri l'esperimento casuale del lancio di due dadi simmetrici ed omogenei, nel quale la somma dei risultati è un numero pari ( $A_j$ ). La probabilità di totalizzare 8 da un singolo lancio è :

Probabilità che si verifichi l'evento  $A_i$  [ $A_i = \{8\} = \{(2+6) \cup (3+5) \cup \dots\}$ ] sapendo che  $A_j$  si è verificato [ $A_j = \{\text{pari}\}$ ].

$$P(A_i | A_j) = \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)}$$

Esempio già svolto

$$P\{8 | \text{pari}\} = \frac{P\{8 \cap \text{pari}\}}{P\{\text{pari}\}} = \frac{P\{8\}}{P\{\text{pari}\}} = \frac{\frac{5}{36}}{0.5} = \frac{5}{18}$$

## Eventi indipendenti

Nel caso di due eventi  $A_i$  e  $A_j$  statisticamente indipendenti valgono le seguenti relazioni:

$$\bullet \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$$\bullet \quad P(A_i | A_j) = P(A_i) \frac{P(A_j)}{P(A_j)} = P(A_i) \quad \text{se } P(A_j) \neq 0$$

$$\bullet \quad P(A_j | A_i) = P(A_j) \frac{P(A_i)}{P(A_i)} = P(A_j) \quad \text{se } P(A_i) \neq 0$$

**OSS:** Il concetto di *indipendenza* è diverso dal concetto di *incompatibilità*: due eventi incompatibili [la cui intersezione è l'insieme vuoto] sono dipendenti statisticamente! Infatti il verificarsi di un evento *esclude* il verificarsi dell'altro.

Se due eventi  $A_i$  e  $A_j$  sono statisticamente indipendenti, allora:

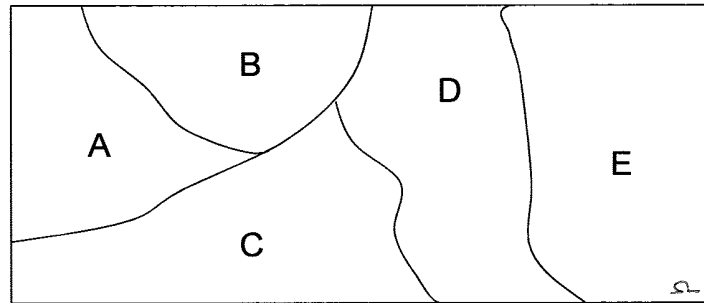
$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i)P(A_j)$$

Dati  $n$  eventi, essi si dicono statisticamente indipendenti se e solo se, per qualunque sottoinsieme  $\{A_p, \dots, A_n\}$  di  $n$  eventi, si verifica la seguente condizione:

$$\rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

- × **Esempio** Un edificio crolla. Le possibili cause di crollo sono:
- A) deterioramento;
  - B) eccessivo sovraccarico;
  - C) esplosione;
  - D) errore di progettazione;
  - E) errore in fase di costruzione.

Si suppone che le cause siano mutuamente escludentisi, ed esaustive



se il crollo avviene per una causa  
non avviene per un'altra  
ed esaustive  
la loro somma è  
che è l'unione dei  
insiemi

Voglio determinare  $P(A; \text{crollo}) \rightarrow$  uso la formula di Bayes  $\rightarrow$  valore  $>$  = causa più probabile  
 $\rightarrow$  sapendo che l'edificio è crollato

Sulla base di analisi effettuate su altri edifici della stessa tipologia,  
Si conosce la probabilità di ciascuna causa:

- $P(A)=0.40$ ;
- $P(B)=0.35$ ;
- $P(C)=0.05$ ;
- $P(D)=0.10$ ;
- $P(E)=0.10$ .

Sulla base di indagini su crolli di edifici della stessa tipologia, si  
conosce la probabilità di crollo condizionale a ciascuna causa:

- $P(\text{crollo} | A)=0.60$ ;
  - $P(\text{crollo} | B)=0.35$ ;
  - $P(\text{crollo} | C)=0.70$ ;
  - $P(\text{crollo} | D)=0.40$ ;
  - $P(\text{crollo} | E)=0.40$ .
- ↳ sapendo che ciascun evento si è verificato*

Si chiede di determinare la causa di crollo **più probabile**.

Applicando la formula di Bayes, si ottiene la probabilità di aver estratto una pallina bianca dall'urna C.

$$P\{C|E\} = \frac{P\{C\} \cdot P\{E|C\}}{P\{E\}}$$

La probabilità di estrarre una pallina bianca da una *qualsiasi* urna è pari a:

$$\begin{aligned} P\{E\} &= P\{(E \cap A) \cup (E \cap B) \cup (E \cap C)\} = \\ &= P\{(E \cap A)\} + P\{(E \cap B)\} + P\{(E \cap C)\} = \\ &= P\{A\}P\{E|A\} + P\{B\}P\{E|B\} + P\{C\}P\{E|C\} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{57}{105} \end{aligned}$$

La probabilità  $P\{E|A\}$  di estrarre una pallina bianca dall'urna A è pari a:

$$P\{E|A\} = \frac{(\text{bianche})_{urnaA}}{(\text{bianche} + \text{nere})_{urnaA}} = \frac{2}{5}$$

In modo analogo si calcolano  $P\{E|B\}$  e  $P\{E|C\}$

$$P\{E|B\} = \frac{(\text{bianche})_{urnaB}}{(\text{bianche} + \text{nere})_{urnaB}} = \frac{4}{5}$$

$$P\{E|C\} = \frac{(\text{bianche})_{urnaC}}{(\text{bianche} + \text{nere})_{urnaC}} = \frac{3}{7}$$

In conclusione:

$$P\{C|E\} = \frac{P\{C\} \cdot P\{E|C\}}{P\{E\}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{57}{105}} = \frac{5}{19}$$

Risultato 1° lancio	Risultato 2° lancio	Valore della variabile X
1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
1	6	7
2	1	3
2	2	4
2	3	5
2	4	6
2	5	7
2	6	8
3	1	4
3	2	5
3	3	6
3	4	7
3	5	8
3	6	9

Risultato 1° lancio	Risultato 2° lancio	Valore della variabile X
4	1	5
4	2	6
4	3	7
4	4	8
4	5	9
4	6	10
5	1	6
5	2	7
5	3	8
5	4	9
5	5	10
5	6	11
6	1	7
6	2	8
6	3	9
6	4	10
6	5	11
6	6	12

Le variabili aleatorie sono classificate in:

- discrete (es. risultato del lancio di un dado, il numero di veicoli che attraversano un incrocio in un'ora,...)
- continue (es. azioni applicate alle strutture, resistenze dei materiali, ...)

## Funzione di densità di probabilità (v.a. continue)

Data una variabile aleatoria  $X$  continua, si definisce la funzione  $f_X(x): \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  tale per cui

$$\rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) \cdot dx$$

è detta *funzione di densità di probabilità* e gode delle seguenti proprietà

1.  $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

L'integrale della funzione di densità di probabilità misura la probabilità che  $X$  assuma valori inferiori o uguali al numero reale  $x$

La quantità elementare  $dP = dF_X(x) = f_X(x) \cdot dx$  misura la probabilità elementare che  $X$  assuma valori nell'intervallo  $(x, x+dx]$

$$\rightarrow P(x < X \leq x + dx) = F_X(x + dx) - F_X(x) = \int_x^{x+dx} f_X(t) dt = f_X(x) dx$$

Dalla definizione di densità di probabilità, si ricava:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

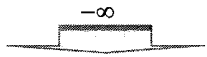
Quindi la funzione densità di probabilità è uguale alla derivata prima della funzione di distribuzione cumulativa della variabile aleatoria.

## Momenti di variabili aleatorie

I momenti sono importanti indicatori di determinate proprietà della generica variabile aleatoria  $X(\omega)$

Si definisce momento di ordine  $q$  di una variabile aleatoria  $X(\omega)$  dotata di funzione di densità di probabilità, la quantità:

$$\rightarrow E\{X^q\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^q f_X(x) dx$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^q| f_X(x) dx$$

per  $q$  intero positivo,  
se esiste finito l'integrale

OSS: Poichè  $f_X(x) \geq 0$ , i momenti di ordine pari sono sempre non negativi.

## Momento del primo ordine - valore atteso (valore medio)

Si definisce valore atteso  $\mu_X$  di una variabile aleatoria  $X(\omega)$  il momento del primo ordine

$$\rightarrow E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

Esso è un parametro di posizione della distribuzione e si può interpretare come il baricentro della distribuzione di probabilità definita dalla funzione di densità di probabilità  $f_X(x)$

### Proprietà del valore atteso: Proprietà di linearità

Date  $n$  variabili aleatorie  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , la media di una loro combinazione lineare è uguale alla combinazione lineare delle medie:

$$E\{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n\} = a_1 E\{X_1\} + a_2 E\{X_2\} + \dots + a_n E\{X_n\}$$

Questa proprietà deriva dalla proprietà di linearità dell'integrale che definisce il valore atteso.



insieme che contiene  
2 o più v.a.

# Vettori aleatori

## Vettori aleatori

Il vettore aleatorio  $\mathbf{X}$  a  $n$  dimensioni è definito come l'insieme  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  di  $n$  variabili aleatorie che opera la trasformazione  $\Omega \rightarrow R^n$  associando ad  $\omega$  l'ennupla:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in R^n$$

# Funzione di distribuzione marginale

Si definisce funzione di distribuzione marginale del vettore aleatorio  $\mathbf{X}$ , la funzione:

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x}) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_{i-1} \cdot dx_{i+1} \dots dx_n = 1$$

integrale di  $f_{\vec{X}}(\vec{x})$  rispetto a tutte le variabili tranne l' $i$ -esima

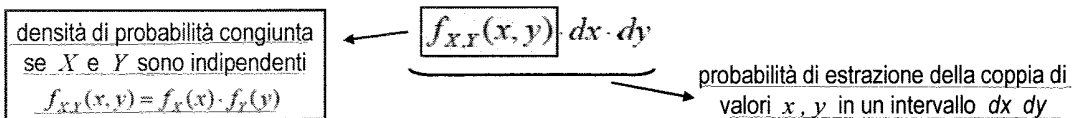
Nell'ambito della sicurezza strutturale conosco  $f$  della tensione di snervamento e dell'altezza utile delle armature, ma non conosco quella congiunta delle due variabili

## Esempio: vettore composto da due variabili $X$ e $Y$

- La funzione di distribuzione cumulativa congiunta si esprime come:

$$F_{X,Y}(x,y) = \text{prob}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

- Funzione di densità di probabilità congiunta



- La probabilità marginale di una variabile (escludendo cioè l'effetto dell'altra) vale

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

integrale di  $f_{X,Y}(x,y)$  rispetto a  $x$

→ tiene conto solo di un legame lineare

Si definisce coefficiente di correlazione, la quantità:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

numero compreso tra -1 e 1

E' una misura dell'interdipendenza **lineare** di due variabili aleatorie.

Se le variabili  $X$  e  $Y$  non sono correlate (linearmente)  $\rho(X, Y) = 0$

Se  $\rho = 0$  non esiste un legame di tipo lineare tra  $X$  e  $Y$ , ma non è detto che non ci sia, può essere quadratico.

Due variabili aleatorie si dicono statisticamente indipendenti se lo sono gli eventi  $(X \leq x)$  e  $(Y \leq y)$ . Vale la seguente relazione:

$$P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$



$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$E\{X^q Y^p\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^q \cdot f_X(x) \cdot dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^p \cdot f_Y(y) \cdot dy$$

È un caso fortunato  
Problema: capire se  
le variabili  $X$  e  $Y$   
sono indip. anche in  
ambito strutturale

Due variabili aleatorie indipendenti sono anche non correlate:

$$E\{XY\} = \mu_X \mu_Y \quad \text{Cov}(XY) = 0$$

ma non è valida l'implicazione inversa.

Se t'anno !!!

# Le distribuzioni e loro applicazione nella modellazione delle caratteristiche dei materiali e delle azioni

## Resistenze dei materiali

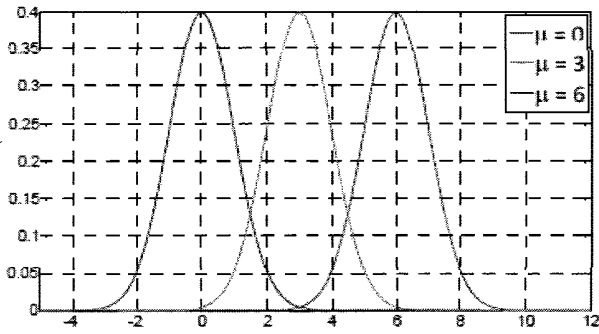
Le distribuzioni utilizzate sono, in generale, la distribuzione normale e la log-normale.

<b>Resistenze:</b>	Coefficiente di variazione	Distribuzione
Compressione CLS	15 %	LN
Trazione acciaio	8 %	LN

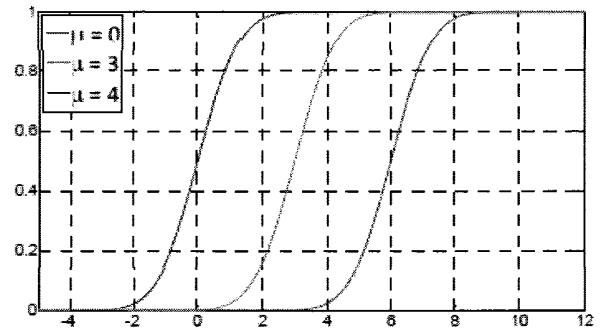
La PDF e la CDF cambiano forma e posizione al variare di  $\mu$  e  $\sigma$



$\mu$  controlla la posizione sull'asse delle ascisse



PDF

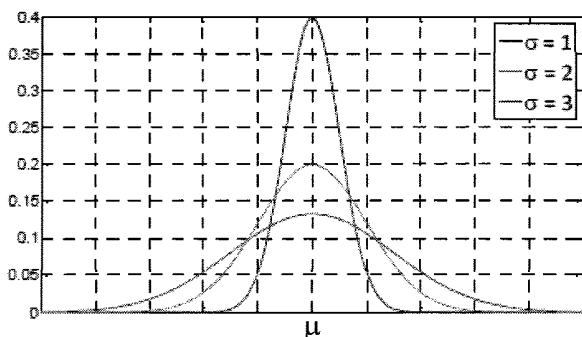


CDF

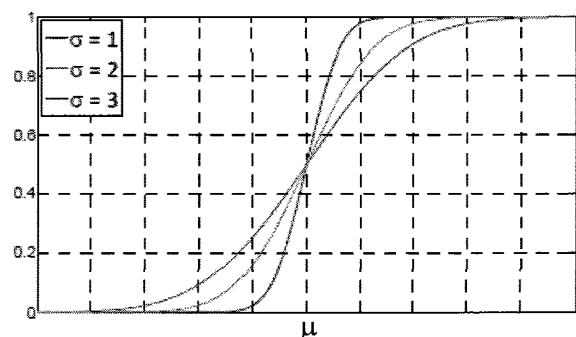
La PDF e la CDF cambiano forma e posizione al variare di  $\mu$  e  $\sigma$



$\sigma$  controlla l'apertura della PDF e la pendenza della CDF



PDF



CDF

Si dimostra che sostituendo  $\sigma = (x-\mu)/z$  nella definizione di  $f_X(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x) \cdot dx = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) \cdot dz$$

$$F_X(x) = \Phi(z)$$

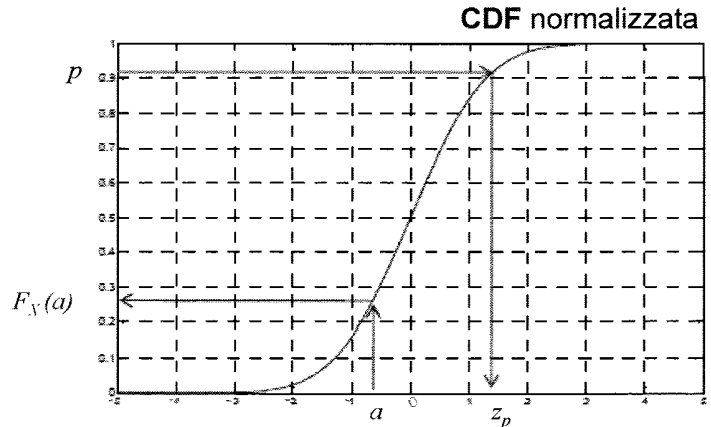
Le probabilità calcolate con la variabile normalizzata  $Z$  sono uguali alle probabilità calcolate con la variabile effettiva  $X$

Essendo la distribuzione  $\varphi(z)$  simmetrica,  $\Phi$  risulta antisimmetrica rispetto al punto  $(0,0.5)$  per cui

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Tenendo conto del cambio di variabile, si può facilmente calcolare i percentili  $x_p$  a partire dai percentili della variabile  $z$

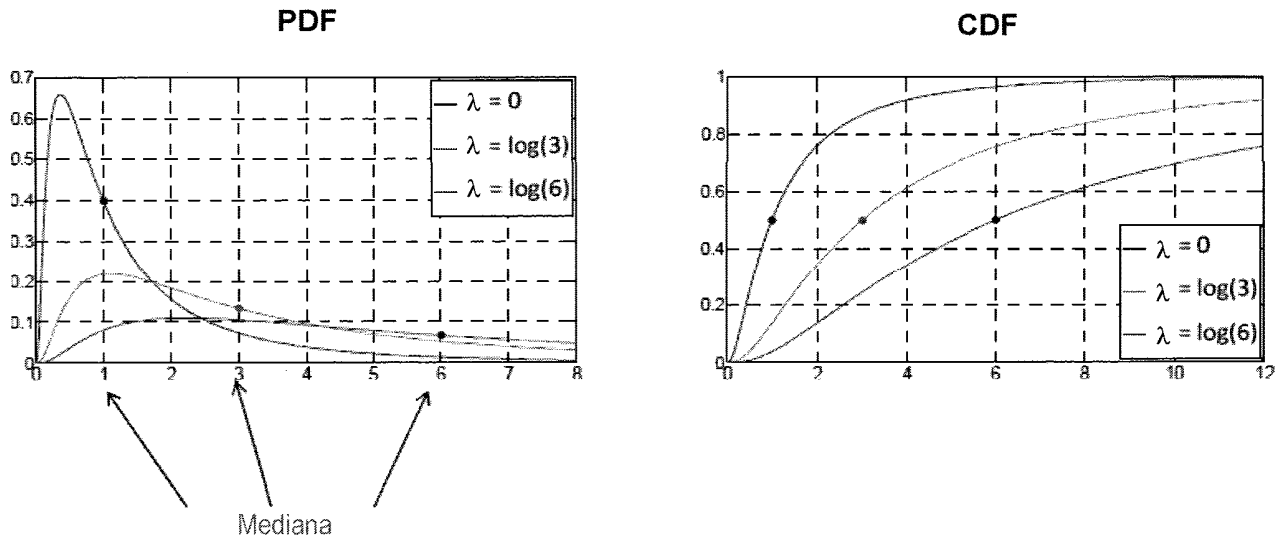
$$x_p = \mu + \sigma \cdot z_p$$



## 2. Distribuzione log-normale $N(\mu_L, \sigma_L)$

Valore medio	$\mu_L$
Deviazione standard	$\sigma_L$
Parametro $\zeta$	$\zeta = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_L^2}{\mu_L^2}\right)}$
Parametro $\lambda$	$\lambda = \ln(\mu_L) - \frac{1}{2}\zeta^2$
Funzione di densità di probabilità (PDF)	$f_X(x) = \frac{1}{\zeta x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$
Funzione di distribuzione cumulativa (CDF)	$F_X(x) = \int_{0^+}^x \frac{1}{\zeta t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t) - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] dt$

Variation of the PDF and the CDF as  $\lambda$  varies for  $\zeta = 1$



## Azioni

Le distribuzioni utilizzate dipendono dal tipo di azione:

Azione	Coefficiente di variazione	Distribuzione
<b>Carichi permanenti:</b>		
Permanente portato	10 %	N
Peso proprio CLS	6 %	N
Peso proprio acciaio	4 %	N
<b>Carichi variabili:</b>	20 %	G

### Distribuzioni di base

Distribution, notation	Probability density function	Domain of X	Parameters	Mean $\mu$	Standard deviation $\sigma$	Skewness $\omega$
Rectangular R(a,b)	$1/(b-a)$	$a \leq x \leq b$	$a$ $b > a$	$(a+b)/2$	$(b-a)/\sqrt{12}$	0
Normal N( $\mu, \sigma$ )	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty \leq x \leq \infty$	$\mu$ $\sigma$	$\mu$	$\sigma$	0
Lognormal, general LN( $\mu, \sigma, \omega$ ) LN( $\mu, \sigma, x_0$ )	$\frac{1}{ x-x_0 \sqrt{\ln(1+c^2)}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{\ln\left \frac{x-x_0}{c}\right \sqrt{1+c^2}}{\sigma}\right)^2 / (2\ln(1+c^2))\right)$	$x_0 \leq x < \infty$ pro $\omega > 0$ , $-\infty < x \leq x_0$ pro $\omega < 0$	$x_0 = \mu - c\sigma$ $\sigma$ $c$	$x_0 + c\sigma$	$\sigma$	$3c+c^3$
Lognormal, zero origin LN( $\mu, \sigma$ )	$\frac{1}{x\sqrt{\ln(1+V^2)}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{\ln\left(\frac{x\sqrt{1+V^2}}{\mu}\right)}{V}\right)^2 / (2\ln(1+V^2))\right)$	$0 \leq x < \infty$	$\mu$ $V = \sigma/\mu$	$\mu$	$V\mu$	$3V+V^3$
Gamma Gam( $\mu, \sigma$ )	$\lambda^k x^{k-1} \exp(-\lambda x) / \Gamma(k)$	$0 \leq x < \infty$	$\lambda = \mu/\sigma^2$ $k = (\mu/\sigma)^2$	$k/\lambda$	$\sqrt{k/\lambda}$	$2/\sqrt{k}$
Beta, general Beta( $\mu, \sigma, \omega, b$ ) Beta( $\mu, \sigma, a, b$ )	$\frac{(x-a)^{c-1}(b-x)^{d-1}}{B(c,d)(b-a)^{c+d-1}}$	$a \leq x \leq b$	$a$ $b > a$ $c \geq 1$ $d \geq 1$	$a + \frac{(b-a)c}{c+d}$	$\frac{(b-a)}{cg+dg}$ , $g = \sqrt{\frac{c+d+1}{cd}}$	$\frac{2g(d-c)}{c+d+2}$ , $g = \sqrt{\frac{c+d+1}{cd}}$
Beta, zero origin Beta( $\mu, \sigma, \omega$ ) Beta( $\mu, \sigma, b$ )	$\frac{(x)^{c-1}(b-x)^{d-1}}{B(c,d)b^{c+d-1}}$	$0 \leq x \leq b$	$b > 0$ $c \geq 1$ $d \geq 1$	$\frac{bc}{c+d}$	$\frac{b}{cg+dg}$ , $g = \sqrt{\frac{c+d+1}{cd}}$	$\frac{2g(d-c)}{c+d+2}$ , $g = \sqrt{\frac{c+d+1}{cd}}$
Gumbel Gum( $\mu, \sigma$ )	$c \exp(-c(x-x_{mod})) - \exp(-c(x-x_{mod}))$	$-\infty \leq x < \infty$	$x_{mod} = \mu - 0,577\sqrt{6}\sigma/\pi$ $c = \pi/(\sqrt{6}\sigma)$	$x_{mod} + 0,577/c$	$\pi/(\sqrt{6}c)$	1,14

### Parametri statistici di funzioni di variabili aleatorie

Function Z	The mean $\mu_z$	Standard deviation $\sigma_z$	Skewness $\omega_z$
$aX+b$	$a\mu_X + b$	$ a \sigma_X$	$\omega_X$ pro $\omega > 0$ , $-\omega_X$ pro $\omega < 0$
$X^2$ *)	$\mu_X^2 + \sigma_X^2$	$2\sigma_X(\mu_X^2 + \mu_X\sigma_X\omega_X)^{1/2}$	$\frac{8\mu_X^3\sigma_X^3(\omega_X + 3V_X)}{\sigma_X^3}$
$\frac{1}{X}$ *)	$\frac{1+V_X^2-V_X^3\omega_X}{\mu_X}$	$\frac{(V_X^2-2V_X^3\omega_X)^{1/2}}{\mu_X}$	$\frac{6V_X^4-V_X^3\omega_X}{\mu_X^3\sigma_X^2}$
$aX+bY+c$	$a\mu_X+b\mu_Y+c$	$(a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2)^{1/2}$	$\frac{a^3\sigma_X^3\omega_X+b^3\sigma_Y^3\omega_Y}{\sigma_Z^3}$
$X+Y$	$\mu_X+\mu_Y$	$(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)^{1/2}$	$\frac{\sigma_X^3\omega_X+\sigma_Y^3\omega_Y}{\sigma_Z^3}$
$X-Y$	$\mu_X-\mu_Y$	$(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)^{1/2}$	$\frac{\sigma_X^3\omega_X-\sigma_Y^3\omega_Y}{\sigma_Z^3}$
$XY$ *)	$\mu_X\mu_Y$	$\mu_X\mu_Y(V_X^2+V_Y^2+V_X^2V_Y^2)^{1/2}$	$\frac{\mu_X^3\mu_Y^3(V_X^3\omega_X+V_Y^3\omega_Y+6V_X^2V_Y^2)}{\sigma_Z^3}$
$\frac{X}{Y}$ *)	$\frac{\mu_X(1+V_Y^2-V_Y^3\omega_Y)}{\mu_Y}$	$\frac{\mu_X(V_X^2+V_Y^2-2V_X^2V_Y^2\omega_Y)^{1/2}}{\mu_Y}$	$\frac{\mu_X^4(V_X^3\omega_X-V_Y^3\omega_Y+6V_Y^2+6V_X^2V_Y^2)}{\mu_Y^3\sigma_Z^3}$

\*) Expressions for parameters of marked functions are approximations only.



### SICUREZZA STRUTTURALE

- definizione
- metodi di valutazione

Quando una struttura è sicura? È un concetto associato alla condizione ultima della struttura.

La sicurezza è il grado di protezione di persone e beni rispetto alle conseguenze del collasso della struttura.

Le strutture devono soddisfare dei requisiti rispetto a condizioni <sup>ultime</sup> di esercizio. non è sufficiente il concetto di sicurezza strutturale, ma serve quello di affidabilità strutturale, che è una proprietà di una struttura.

L'affidabilità è la capacità di soddisfare i requisiti per i quali viene progettata la struttura per un periodo di tempo detto "vita di progetto".

durata minima da garantire per una certa struttura ←  
(edifici → 50 anni, ponti → 100 anni)

Concetti fondamentali = struttura, requisiti, periodo di tempo

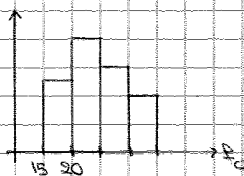
↑ vita di progetto ↑ costo e progetto in modo diverso

Il concetto di affidabilità è più generale, include la sicurezza

Quanto dev'essere sicura una struttura dipende dalle condizioni socio-economiche che, strutture con importanza diversa avranno livelli di sicurezza diversi perché le conseguenze del crollo di una stalla sono inferiori a quelle di un ospedale.

Approccio / deterministico  
/ probabilistico

Metodi probabilistici (concetto di probabilità) → sviluppati sulla base di una serie di evidenze. Tutte le proprietà dei materiali e le azioni hanno un certo livello di casualità, sono grandezze non deterministiche. Realizzo 100 cubi da un unico getto di calcestruzzo e li sottopongo a una prova di compressione: ogni provino darà valori diversi di resistenza a compressione. Li divido in classi e conto il numero di campioni in ogni classe → ottengo l'ISTOGRAMMA delle FREQUENZE



(Suppongo di considerare il lancio di una moneta non truccata. Voglio calcolare la prob. di ottenere il risultato croce. Ho a disposizione un lancio

$$P(\text{croce}) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{0 testa o croce}$$

Se la moneta è truccata (80% casi  $\rightarrow$  croce) non posso usare la def. perché i due risultati devono essere ugualmente possibili. È una def. a priori, posso calcolare la prob. a priori di qualunque prova sperimentale, senza effetti, a priori.

Dado a 6 facce non truccato  $\rightarrow P(\text{numero} \geq 3) = \frac{4}{6} = 0.6\bar{6}$

(Posso considerare il lancio di due dadi  $\rightarrow P(8)$ )

Posso supporre di ottenere 1,1; 1,2; ...; 1,6; 2,1; 2,2; ...; 2,6; ...

Quindi  $N = 36$ . Se sul primo dado ottengo 1, nessun risultato darà 8. Poi:

2,6; 3,5; 4,4; 5,3; 6,2. Allora  $N_A = 5$

$$\left. \begin{array}{l} N = 36 \\ N_A = 5 \end{array} \right\} P(8) = \frac{5}{36}$$

Le condizioni della def. non si verificano sempre, allora si usa la def. ...

### (2) FREQUENTISTA

La stima della prob. di un evento avviene dopo aver effettuato un numero grande di prove  $\rightarrow$  è una def. a posteriori.

(Lancio moneta non truccata, effettuo un numero suff. grande di prove, in funzione del tipo di prova.

$$P(\text{croce})$$

lancio	risultato	$n_{\text{croce}}$	$f_{\text{croce}}$
1	T	0	0
2	T	0	0
3	C	1	1/3
4	T	1	1/4
5	C	2	2/5

$n$ : FREQUENZA ASSOLUTA  $\rightarrow$  n° di volte in cui si è verificato l'evento (croce)

0 rimane costante o tende a crescere.

$f$ : FREQUENZA RELATIVA  $\rightarrow f = \frac{n}{N}$  frequenza assoluta diviso numero prove

$$P(\text{croce}) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{\text{croce}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{\text{croce}}}{N}$$

Questo tipo di def. vale anche se i risultati non sono ugualmente possibili!

$A = \{2\}$  EVENTO ELEMENTARE

$B = \{\text{risultati} \geq 5\} = \{5, 6\}$  EVENTO COMPOSTO (formato da 2 o più risultati)

Un evento è un insieme di risultati ed è un sottoinsieme dello spazio campionario.

Logica d'insieme (cenni)

(1) A implica B ( $A \subset B$ )

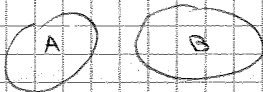


Se si verifica A, si verifica B. Il viceversa non è detto.

$A = \{2\}$

$B = \{\text{pari}\}$

(2) A e B mutuamente escludenti:



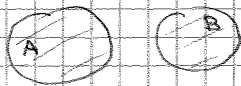
Se si verifica A, non si può verificare B → insiemi che non hanno nessun punto in comune.

(3) A, B non mutuamente escludenti → determino l'evento intersezione  $A \cap B$

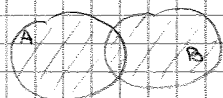


Contiene i risultati che verificano sia A sia B.

(4) A, B eventi qualunque → definisco l'evento unione  $A \cup B$

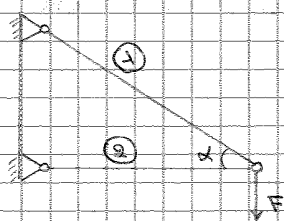


Insieme dei risultati che verificano A oppure B.



$A \cup B$  (eventi qualunque)

Vediamone un'applicazione a problemi di tipo strutturale



struttura formata da 2 aste. Che relazione c'è tra la rottura dell'intera struttura e quella delle singole aste.

Ho 3 eventi: rottura struttura, rottura asta ① o ②

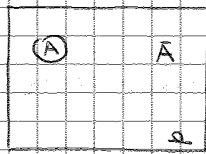
Suppongo che si rompa l'asta ② → la struttura è rotta perché non riesce più a portare la forza F. Ciò vale anche se si rompe l'asta ①.

ROTTURA STRUTTURA = ROTTURA ASTA 1  $\cup$  ROTTURA ASTA 2

Suppongo di non conoscere la relazione tra le due rotture

Lezione III, 21.3.13

( A evento nello spazio campione  $\Omega$ ; tutti i risultati possibili che non realizzano questo evento costituiscono il cosiddetto



evento complementare di A, cioè  $\bar{A}$

( Definiamo il concetto di prob. secondo la def. assiomatica. Dato un evento A è possibile associare una  $P(A)$ , numero reale compreso tra 0 e 1. Per come ho scritto  $P(A)$  secondo la def. assiomatica, bisogna parlare di funzione di probabilità )  
una probabilità tramite

$A \rightarrow P(A) = 0.36$

Nella def. assiomatica, dato un evento posso associare una **funzione di probab.**

**funzione** che soddisfa tre **assiomi** (vanno prese per buone):

- (i)  $P(A) \geq 0$
- (ii)  $P(\Omega) = 1$  prob. associata allo spazio campione  $\Omega$   
il verificarsi di  $\Omega$  implica che l'evento degli altri si può verificare
- (iii)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventi mutuamente escludentisi  $\rightarrow P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Vediamo le conseguenze, dimostrabili con tali assiomi:

- dato un evento A, la prob. del suo complementare  $\bar{A} = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$   
 $\bar{A}$  è tutto ciò che sta al di fuori di A  $\rightarrow \Omega = A \cup \bar{A}$
- Lo dimostro: lo spazio campione è  $\Omega = A \cup \bar{A}$ . A e  $\bar{A}$  sono mutuamente escludentisi  $\rightarrow$  uso il III assioma  $\rightarrow P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$ , ma per il II assioma  $P(\Omega) = 1 \rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \rightarrow$  ricavo  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  c.v.d.
- $P(\emptyset) = 0$  probabilità associata all'insieme vuoto
- $A \subset B$ , A che implica B  $\rightarrow P(A) \leq P(B)$



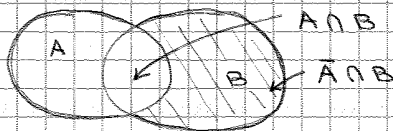
se si verifica A, automaticamente si verifica B

$\rightarrow$  tutto ciò che non sta in A, ma sta in B

$B = A \cup (\bar{A} \cap B)$  sono 2 eventi mutuamente escludentisi  $\rightarrow$  per il III assioma

$P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \rightarrow P(B) \geq P(A)$   
numero tra 0 e 1 per il I assioma  $\rightarrow \geq 0$

- A, B non mutuamente escludentisi  $\rightarrow$  c'è un insieme intersezione, hanno in



comune una serie di risultati

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

dal p.d.v. del ragionamento, i concetti di Associaz. probabilità e area  $\rightarrow$  per calcolare l'area di  $A \cup B$  sommo A e B

ma ho contato due volte l'intersezione  $\rightarrow$  la sottraggo, devo togliere una volta l'area dell'intersezione.

(  $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$  sono eventi mutuamente escludentisi

$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$  per il III assioma

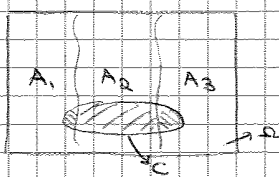
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \neq P(B) \rightarrow \text{I due eventi non sono stat. ind. Il verificarsi}$$

si di A influenza il verificarsi di B.

Due eventi mutuamente escludentisi sono stat. indep. perché se si verifica A, B non si può verificare,  $P(B) = 0$

Probabilità totale

(Suppongo di avere una serie di eventi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mutuamente escludentisi ed esaustivi.



eshaustivi  $\rightarrow$  l'unione di  $A_1, A_2, A_3$  costituisce lo spazio campionario  $\Omega$ , in est. non posso avere altri eventi.  
 mutuam. escl.  $\rightarrow$  non hanno tutti in comune

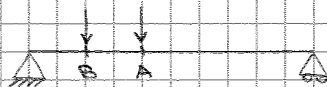
$$P(C) = \sum_{i=1}^n P(C|A_i) \cdot P(A_i)$$

Da dove deriva?  $C = (C \cap A_1) \cup (C \cap A_2) \cup (C \cap A_3) \rightarrow P(C)$  è la somma delle tre probabilità  $\rightarrow P(C) = P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) + P(C \cap A_3)$

$$P(C|A_1) = \frac{P(C \cap A_1)}{P(A_1)} \rightarrow P(C \cap A_1) = P(C|A_1) \cdot P(A_1)$$

Lo stesso vale per gli altri termini. Li sommo e trovo il teorema della P. totale.

Esercizio



trave appoggiata soggetta a un'unica forza verticale che può trovarsi in A o nella sezione B

$P(A) = 0.4$  prob. che si trovi in A e sup-

pongo che sia 0.4. Allora  $P(B) = 0.6$ . I due eventi si escludono a vicenda  $\rightarrow$  l'unione di A e B dà l'intero spazio campionario, cioè A e B sono esaustivi.

Suppongo che  $P(\text{ROTTURA} \times \text{FLESSIONE} | A) = 0.02$

$\hookrightarrow$  sapendo che la forza si trova in A

$$P(\text{ROTTURA} \times \text{TAGLIO} | A) = 0.005$$

La trave si può rompere per flessione o per taglio. Voglio calcolare...

$$\left. \begin{aligned} P(\text{ROTTURA} \times \text{FLESSIONE} | B) &= 0.01 \\ P(\text{ROTTURA} \times \text{TAGLIO} | B) &= 0.01 \end{aligned} \right\} \text{per hp}$$

$$\dots P(\text{ROTTURA}) = ?$$

Lezione IV, 25.3.13

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

A e B indipendenti  $\rightarrow P(B|A) = P(B)$

$P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$  se A e B sono stat. indipendenti

Eventi incompatibili  $\neq$  eventi indipendenti che si verificano l'altro  
 $\rightarrow$  il verificarsi di uno dei due non influenza sulla prob.  
 $\hookrightarrow$  si escludono a vicenda  
 $\rightarrow$  se si verifica B non si verifica A  $\rightarrow P(B|A) = P(\emptyset) = 0$

T, V

$$P(T) = 0.8$$

$$P(D|T) = 0.1$$

$$P(D) = ?$$

$$P(V) = 0.2$$

$$P(D|V) = 0.05$$

$$P(T|D) = ?$$

$\hookrightarrow$  causa del danno = terremoto ma il danno si è verificato!

... Posso calcolare tale probabilità per un edificio che sto progettando, ma il danno non è avvenuto

$$P(D) = P(D|T) \cdot P(T) + P(D|V) \cdot P(V) = 0.09 \quad \text{è il denominatore della Formula}$$

di Bayes

$$P(T|D) = \frac{P(D|T) \cdot P(T)}{P(D)} = \frac{0.08}{0.09} \rightarrow 89\%$$

$$P(V|D) = \frac{P(D|V) \cdot P(V)}{P(D)} = \frac{0.05 \cdot 0.2}{0.09} = 0.11 \rightarrow 11\%$$

la somma è 1

$P(T|D) + P(V|D) = 1$  altrimenti significa che esiste un'ulteriore causa che non ho considerato e che dà il complemento a 1.

Esempio  $\rightarrow$  slide 33-34-35

consentono di descrivere qualcosa che non è definibile a priori. Il mondo è deterministico, ma è qualcosa di casuale

sono **funzioni** che permettono di associare ad ogni risultato dello spazio campione un numero. Così possiamo determinare in modo più efficace delle probabilità. Parleremo di variabili aleatorie REALI:

Una variabile aleatoria  $X$  è una funzione che associa ad ogni risultato  $w \in \Omega$  un numero reale  $x \in \mathbb{R}$

Esempio: lancio di due monete non truccate, definisco la variabile aleatoria  $X = n^\circ$  di volte che si verifica croce. Lo spazio campione (insieme dei possibili risultati) sarà  $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$ . Associa dei numeri reali:

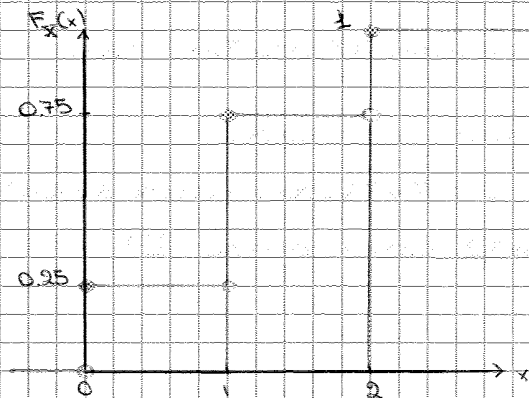
$$TT \rightarrow 0$$

questa è una variabile aleatoria, consente di esprimere i possibili eventi in modo semplice.

$$TC \rightarrow 1$$

$$CT \rightarrow 1$$

$$CC \rightarrow 2$$



(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

(3)  $F_X(x) \geq 0$  perché misura una probabilità, numero tra 0 e 1  
 $F_X(x) = P(X \leq x)$

(4) È una funzione monotona non decrescente, cioè se  $x_1 \leq x_2 \rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$

$$F_X(x_2) = P(X \leq x_2) = \underbrace{P(X \leq x_1)}_{F_X(x_1)} + \underbrace{P(x_1 < X \leq x_2)}_{P \text{ è un numero } \geq 0} \rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1) \text{ c.v.d.}$$

Questo per una variabile aleatoria discreta.

Applicazione (traffico veicolare): monitoro il traffico su un ponte  $\rightarrow$  posso definire una variabile aleatoria che conta il numero di assali dei veicoli che transitano.

$X = n^\circ$  di assali dei veicoli

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$x = 2$

valori $x_i$	Freq. relativa	$P(X = x_i)$
2	0.108	0.108
3	0.058	0.058
4	0.235	0.235
5	0.53	0.53
...		
10	0.0015	0.0015

*(0.53) → valore comune a tutta Europa*

Se conosco  $f$  e  $F$ , so tutto della variabile  $x$ , ma si preferisce associare a  $x$  i cosiddetti momenti  $\mu$  che descrivono meglio  $x$  senza grafici

$E(X^q) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^q f_X(x) dx$  MOMENTO DI ORDINE  $q$  (o parametro posizionale)

$E(X^q) = \sum_{i=1}^n x_i^q f_X(x_i)$  nel caso di funzioni discrete

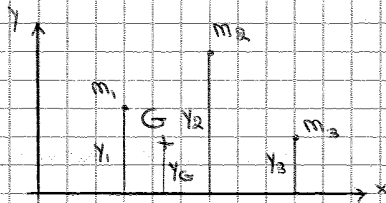
$q=1$  VALORE MEDIO è un parametro di posizione. Al concetto di valore medio si associa il concetto geometrico di baricentro della distribuzione (nel caso di...)

$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$

$\mu_X = \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i)$  per variabili discrete

V.A. DISCRETA  $\rightarrow \mu_X = \sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_X(x_i)}{\sum_{i=1}^n f_X(x_i)}$  questo è il baricentro

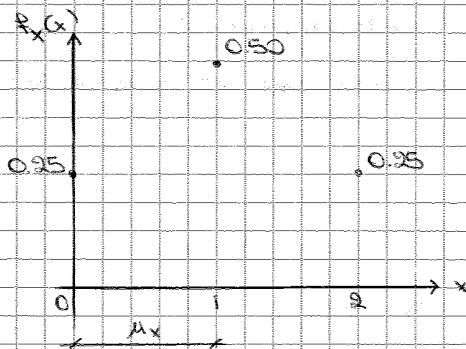
centro di un sistema di masse puntiformi



$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$

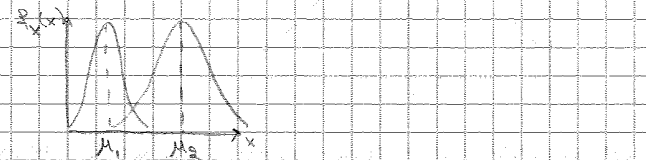
analogia

Riconsidero l'esempio di  $f_X(x) \rightarrow$  è come se  $m_i = f_X(x_i)$ , le  $y_i$  sono  $x_i = 0, 1, 2$



$\mu_X$  rappresenta la distanza del baricentro di  $f_X(x)$  rispetto all'asse verticale

da un'idea della posizione della mia distribuzione



$q=2$  VARIANZA

$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$  momento centrale di ordine 2

rispetto alla media

MOMENTUM

Posso associare il concetto geometrico di INERZIA della distribuzione



Lezione V, 26.3.13

\* ... differenza: se varianza piccola, valori concentrati attorno al valore medio → \*  
 in corrispondenza del valore medio  
 brusca variazione di pendenza; se varianza grande ( $\sigma$ ), per valori  $< \mu$ , il valore della funzione di distribuzione cumulativa sarà  $>$  (vedi esempio con  $\bar{X} \rightarrow F_Y(y) > F_X(x)$ )  
 curva più morbida, parte già con valori più alti

$$C.O.V. = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

Dà un'idea della dispersione della variabile  $X$  aleatoria in studio.

Esempio:

$X \rightarrow$   $\text{cov}(X) \approx 5\%$  ( $\sigma_X = 5\% \mu_X$ )  
 L'ens. di snerv. dell'acciaio

resistenza acciaio

$Y \rightarrow$   $\text{cov}(Y) \approx 15\%$   
 L'ens. a comp. del cls

geom.  $\rightarrow$   $\sigma$  cls ( $>$  variabilità)

Nota cov e  $\mu$ , ricavo  $\sigma_X$

Considero due strutture, in una  $R$  è funzione diretta di  $F_1$ , nell'altra di  $F_2$

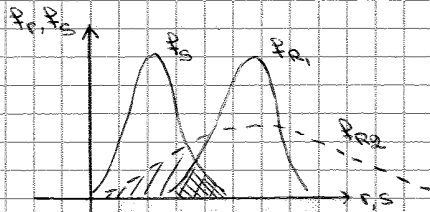
STRUTTURA 1:  $R_1 = R_1(F_1)$

STRUTTURA 2:  $R_2 = R_2(F_2)$  → correlato → può assumere R bassi con  $P \neq 0$

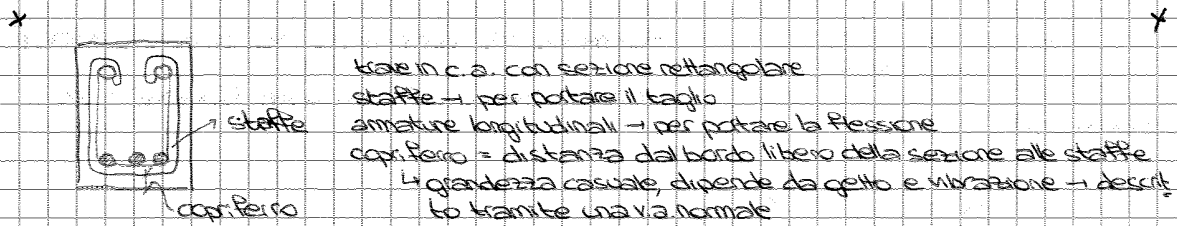
$S$  variabile casuale che rappresenta la sollecitazione

$$P_R = P(R \leq S)$$

Mi aspetto  $P_{R_1} < P_{R_2}$



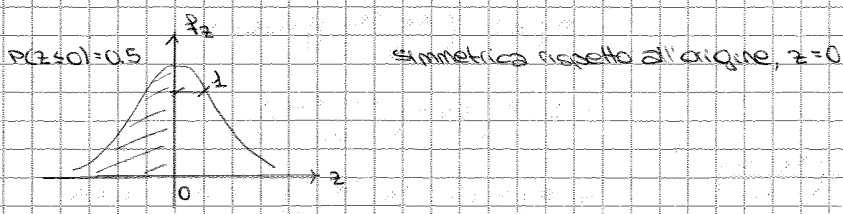
$R_2 \rightarrow$   $>$  dispersione  $\rightarrow$   $>$  area di sovrapposizione  $\rightarrow$   $P_{R_2}$



variabile di integrazione (x è già estremo di integrazione)

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dt$$

Se  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ , derivo la variabile  $Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$  che è ancora normale ma  $\begin{cases} \mu=0 \\ \sigma=1 \end{cases}$   
 →  $Z \sim N(0, 1)$



Questo passaggio è comodo perché se voglio calcolare:

$$P(X \leq \bar{x}) = F_x(\bar{x}) = P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x}\right) = P(Z \leq \bar{z})$$

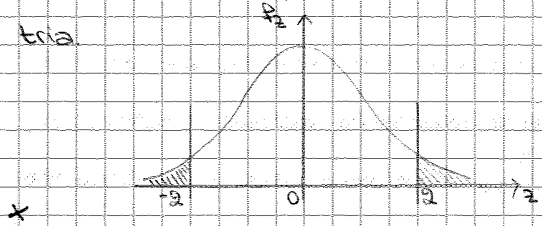
$$F_x(\bar{x}) = P(Z \leq \bar{z}) = F_z(\bar{z})$$

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$  suppongo di avere una variabile X distribuita normalmente e voglio calcolare  $F_x(\bar{x})$  → è sufficiente conoscere  $F_z(z)$   
 Vedi slide 72

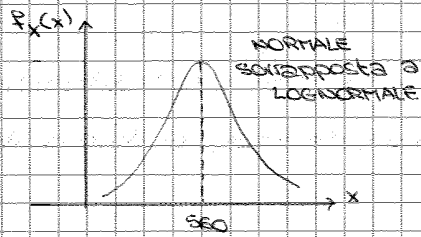
Esempio: acciaio S550 →  $f_{yk} = 500$  MPa comunemente utilizzato per le barre d'armatura  
 es. d'esame  
 ↳ valore caratteristico  
 $f_y \rightarrow X \sim N(560, 30)$  cov =  $\frac{30}{560} = 0.053 \approx 5\%$   
 ↳ varianza ridotta

$P(X \leq 500) = ?$   
 $P(X \leq 500) = P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{500 - \mu_x}{\sigma_x}\right) = P(Z \leq \frac{500 - 560}{30}) = P(Z \leq -2)$

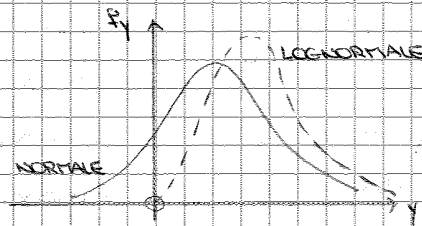
Prendo la tabella p. 72 ma -2 non è contemplato dalla tabella → sfrutto la simmetria.



$P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F_z(2)$   
 Ora posso usare la tabella  $1 - 0.9772$   
 ma non è in accordo con la def. ↳  $0.0538$   
 data di valore caratteristico



acciaio  $\rightarrow \mu$  elevata e cov piccolo  
 $\rightarrow P(F_y < 0) \sim 0 \rightarrow$  differenza impercettibile



vedo la diff. solo una variabile con  
 valor medio molto piccolo

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_x = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2\right)} \\ \lambda_x = \ln(\mu_x) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_x^2 \end{cases}$$

in laboratorio con molte prove sperimentali trovo  $\sigma_x$

e  $\mu_x \rightarrow$  posso ricavare  $\tilde{\sigma}_x$  e  $\lambda_x$

5500

$F_y \rightarrow X \sim LN(550, 30)$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_x = 0.053 \sim \text{c.o.v. se dispersione bassa} \\ \lambda_x = 6.33 \end{cases}$$

$P(X \leq 500) = ?$

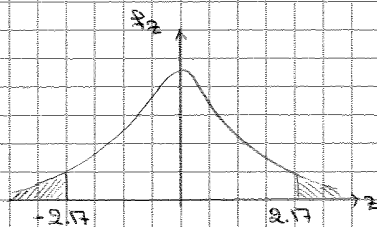
Definisco  $z = \frac{\ln(x) - \lambda_x}{\tilde{\sigma}_x}$

$\ln(x)$  ha distr. normale  $\rightarrow z$  ha distr. normale  $\rightarrow z \sim N(0, 1)$

$\sim$  per indicare la distribuzione, non appri.

$$\begin{aligned} P(X \leq 500) &= P(\ln(x) \leq \ln(500)) = P\left(\frac{\ln(x) - \lambda_x}{\tilde{\sigma}_x} \leq \frac{\ln(500) - \lambda_x}{\tilde{\sigma}_x}\right) = P\left(z \leq \frac{\ln(500) - 6.33}{0.053}\right) \\ &= P(z \leq -2.17) = F_z(-2.17) \end{aligned}$$

Sfrutto la simmetria di  $z$



$$\begin{aligned} P(z \leq -2.17) &= P(z \geq 2.17) = 1 - P(z \leq 2.17) = 1 - 0.9850 = \\ &= 0.0150 \end{aligned}$$

Lezione VI, 4.4.'13

Riprendiamo l'esercizio. Il momento flettente diventa una variabile aleatoria perché

$$M = \frac{q l^2}{8} \text{ ma } q \text{ è v.a.}, M = f(q) \rightarrow M \text{ è v.a.}$$

$$F_M(m) = P(M \leq m) = P\left(\frac{q l^2}{8} \leq m\right) = P\left(q \leq \frac{8m}{l^2}\right) = F_q\left(\frac{8m}{l^2}\right)$$

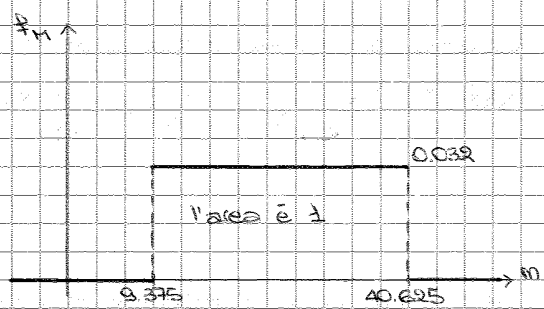
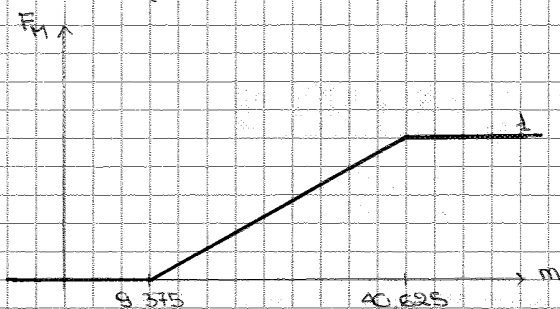
Faccio questo passaggio per ricondurre alla scrittura  $F_q(q) = P(q \leq \bar{q})$

Dove c'è  $q$ , sostituisco  $\frac{8m}{l^2}$

$$F_M(m) = \begin{cases} 0 & \frac{8m}{l^2} \leq 3 \\ 0,1 \left(\frac{8m}{l^2} - 3\right) & 3 \leq \frac{8m}{l^2} \leq 13 \\ 1 & \frac{8m}{l^2} \geq 13 \end{cases} \rightarrow F_M(m) = \begin{cases} 0 & m \leq \frac{3l^2}{8} \\ 0,1 \left(\frac{8m}{l^2} - 3\right) & \frac{3l^2}{8} \leq m \leq \frac{13l^2}{8} \\ 1 & m \geq \frac{13l^2}{8} \end{cases}$$

Ora sostituisco i numeri per vedere i valori numerici entro cui la funzione densità di prob. sarà  $\neq 0$

$$F_M(m) = \begin{cases} 0 & m \leq 9,375 \text{ kNm} \\ 0,032m - 0,3 & 9,375 \leq m \leq 40,625 \text{ kNm} \\ 1 & m \geq 40,625 \text{ kNm} \end{cases} \text{ Disegno } F \text{ e } f \text{ che è la derivata.}$$



Definisco valore medio e varianza di questa distribuzione.

$$\mu_M = \frac{9,375 + 40,625}{2} = 25 \text{ kNm} \text{ è il baricentro della distribuzione}$$

$$\sigma_M^2 = \frac{(40,625 - 9,375)^2}{12} = \underline{81,38} \text{ (kNm)}^2 \text{ l'unità di misura è il quadrato di quella della media}$$

Altro modo per calcolare  $\mu_M$ : (vedi slide)

$$M = \frac{q l^2}{8} \text{ } M \text{ è una v.a.} \rightarrow \mu_M = \mu_q \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{8 \cdot 25}{8} = 25 \text{ kNm} \text{ numericamente torna}$$

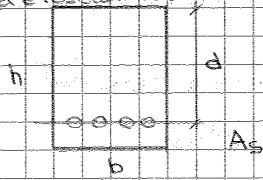
↳ coefficiente

Ciò è vero se vale la seguente proprietà: suppongo di avere le variabili

- $X$  con  $\mu_X, \sigma_X^2$
  - $Y = ax + b$  (comb. lin. di  $X$ )
- $\rightarrow \mu_Y = a\mu_X + b$

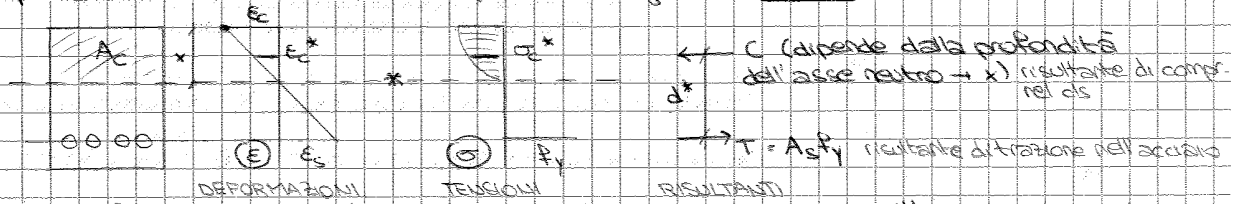
Vediamo ora l'elasticità riguardante il lato delle resistenze  
Resistenze

Trave appoggiata in c.a. con sezione rettangolare, armata con armatura tesa  
 Obiettivo → verifica di sicurezza → confronto grandezze omogenee  
 → per le resistenze → Uso il momento resistente (prima usavo il momento sollecit. <sup>sollecitazione</sup>)  
 tante). Quanto vale?..

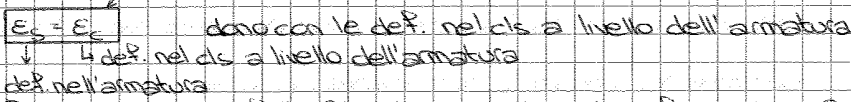


La trave è soggetta a flessione

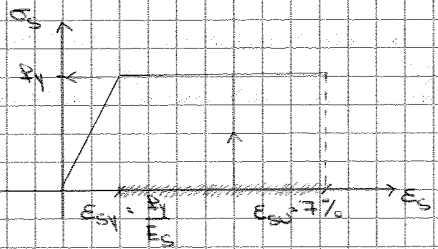
1) I hp: conservazione delle sezioni piane → diagramma lineare delle deformazioni



2) II hp: perfetta aderenza tra acciaio e cls → le deformazioni nell'armatura coincidono con le def. nel cls a livello dell'armatura

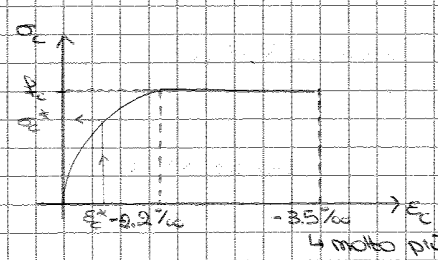


Per ora abbiamo fatto 2 hp che riguardano le deformazioni. Ora → 2 hp sulle leggi costitutive Per l'acciaio → diagramma σ-E di tipo elasto-plastico



di tipo elasto-plastico → primo tratto elastico lineare fino alla tensione di snervamento, secondo tratto orizzontale  
 ↳ in corrispondenza di cui ho la def. di snerv.  $\epsilon_{sy}$   
 $E_s \approx 200.000 \text{ MPa}$      $f_y \approx 500 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{cost} \rightarrow \epsilon$  cresce fino al valore di rottura  
 Termina ad un valore di def. dell'ordine del 7%

3) III hp: CLS in COMPRESSIONE → legge parabola-rettangolo: primo tratto parabolico fino a una def. dell'ordine del 2% (segno - perché siamo in compr.), poi tratto rettilineo fino a una def. di -3.5%. Chiamo l'ordinata  $f_c$  resistenza a compressione del cls



NB: def. ultima in acciaio → 7% → def. plastiche ideali cls → 3.5%  
 ↳ molto più piccola dell'acciaio

4) IV hp: trascuro la resistenza a trazione del cls  
 Voglio calcolare il momento resistente in una trave in c.a. soggetta solo a flessione.

Assumo  $\epsilon_c = -3.5\%$  (par alla def. ultima). Voglio fornire duttilità →  $\epsilon_s$  sarà tra  $\epsilon_{sy}$  e 7% →  $\sigma_s$  sarà  $f_y$  nell'acciaio.  
 $E_s = f_y$  tens. di snerv.   
  $E_c$  mod. elastico dell'acciaio

Passo da un diagramma di def. a uno di tensioni \*  
 ↳ lo trovo dalle leggi costitutive dei materiali disegnati sopra che a loro data  $\sigma$  qual è  $\epsilon$  corrispondente

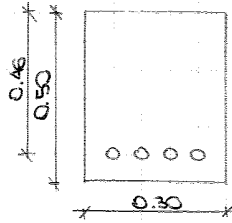
Fissiamo striscia  $\epsilon_c^*$  → legge costitutiva →  $\sigma_c^*$ . Lo faccio V fibra  
 $\epsilon_c^*$  è compresa tra 0 e 3.5% → entro nel diagramma del cls, salgo ed esco con  $\sigma_c^*$  di tensione  
 Ho ipotizzato  $\epsilon_c^* < 2\%$  vicino al lembo superiore che è il più compresso avrà  $\epsilon_c^*$  che corrisponde al tratto rettilineo del diagramma  $\sigma, \epsilon$  → esco con una tensione pari a  $f_c$

Questo è un caso specifico. La progettazione di sezioni in c.a. è più complicata: in funzione dell'entità del momento flettente applicato, la conf. ultima in termini di def. potrebbe essere ≠. Flessione + sforzo normale (sezione pressoinflessa) → campi di validità ben specifici!

Vale per lo schema considerato

Ciò che è importante da questo esempio è:

$f_y$  grandezza aleatoria → anche  $M_R$ , funzione di  $f_y$ , lo è.



$A_s: 4 \varnothing 16$   
↓ ↓  
n° barre diametro (mm)

$$A_s = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 804 \text{ mm}^2$$

Suppongo che la tens. di snerv. abbia distr. normale  
 $f_y \sim N(560, 30)$

Qual è la distribuzione di  $M_R$ ?

Aviamo visto questa proprietà:

$X, Y = ax + b$  è il nostro caso perché  $M_R = A_s f_y \cdot 0.9d$

↓                    ↓  
Y                    X                    b=0

$f_y(y) = f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$  nota  $f_x(x)$  posso ottenere  $f_y(y)$

espressione della distr. normale (normalizzata per  $f_y$ )  
 $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right] \longrightarrow f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu_x\right)^2}{\sigma_x^2}\right] \frac{1}{|a|}$

$M_R = \boxed{A_s \cdot 0.9d} f_y$

$a = 804 \cdot 0.9 \cdot 460 = 332856 \text{ mm}^3 \quad b = 0$

Ci interessano valor medio e deviazione standard di  $M_R$ , a di là di  $f_y(y)$

Poiché  $M_R$  è una f. lineare di  $f_y$ :

$\mu_{M_R} = (A_s \cdot 0.9d) \mu_{f_y} = 332856 \cdot 560 = 186399360 \text{ Nmm} = 186.4 \text{ kNm}$

per la proprietà

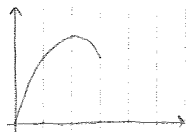
più comodo perché i carichi, se unif. distribuiti, sono espressi in kN/m

$\sigma_{M_R} = (A_s \cdot 0.9d) \sigma_{f_y} = 332856 \cdot 30 = 9985680 \text{ Nmm} \approx 10 \text{ kNm}$

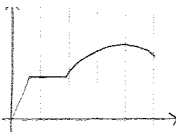
calcolo il coefficiente di variazione di  $M_R$ :

$\text{cov}_{M_R} = \frac{\sigma_{M_R}}{\mu_{M_R}} = \frac{A_s \cdot 0.9d \sigma_{f_y}}{A_s \cdot 0.9d \mu_{f_y}} = \text{cov}_{f_y}$  perché  $M_R$  era una funzione lineare di  $f_y$ , che è l'unica v.a., quindi l'unica fonte di incertezza su  $M_R$ . L'incertezza sulle proprietà di resistenza dei materiali.

Tanta incertezza ho su  $f_y$ , tanta ne ho su  $M_R$  → si riflette sull'incertezza della resistenza della sezione trasversale.



CLS



ACCIAIO

da vedere su ordini di grandezza ≠

$$M_S = \frac{qL^2}{8}$$

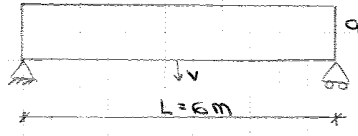
l → deterministica; q → aleatoria  
 incertezza su  $M_S$  deriva da quella su q

$$M_R = A_S f_y \cdot 0.9d$$

se struttura in c.a. incertezza su  $M_R$  deriva da quella su  $f_y$   
 q non c'entra con la resistenza del materiale

se q e  $f_y$  sono ind. lo sono anche  $M_R$  e  $M_S$

→ funzione di dens. di prob. congiunta è il prodotto delle due funzioni marginali.  
 Quando le strutture diventano iperstatiche non si può più dire che R e S sono indip. tra loro.  
 Vedo per ogni v.a. qual è l'origine della sua incertezza.



$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$I = 5790 \text{ cm}^4$$

$$q \sim N(12 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, 2.4 \frac{\text{kN}}{\text{m}})$$

$$P(v \geq \frac{L}{250}) = ?$$

L è una condizione di esercizio

v è funzione di q → v è una v.a. → può assumere con continuità una serie di valori  
 ↓  
 v.a. → non essendo noto v deterministicamente esiste una prob. che superi quel valore limite accettabile

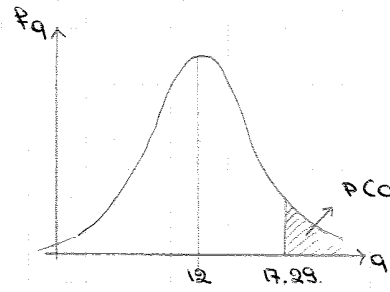
Metodo di livello 3

$$v = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

ho fatto comparare la v.a. q

per usare  $F_q(q)$

$$P\left(\frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \geq \frac{L}{250}\right) = P\left(q \geq \frac{L}{250} \frac{384}{5} \frac{EI}{L^4}\right) = P(q \geq 17.29) = 1 - P(q \leq 17.29)$$



$$P(q \geq 17.29) = P(v \geq L/250)$$

Passo a variabili standardizzate

$$= 1 - P(q - \mu_q \leq 17.29 - \mu_q) = 1 - P\left(\frac{q - \mu_q}{\sigma_q} \leq \frac{17.29 - \mu_q}{\sigma_q}\right) = 1 - P\left(\frac{q - \mu_q}{\sigma_q} \leq 2.2\right)$$

$$= 1 - P(z \leq 2.2) = 1 - 0.9861 = 0.0139 = 1.39\% = P(v \geq L/250)$$

z ~ N(0, 1) → ora posso usare la tabella

È sensato come numero (dev' essere ~ 10<sup>-2</sup>)

la struttura crolla quando R < S

Se ho sollecitazioni e resistenze → SLU. Nell'esempio invece → SLE.  
 Per ora ho risolto il problema ricorrendomi alle variabili di base (q). Ma si può valutare l'incertezza sul momento sollecitante sapendo quella sul carico (es. visto) → non battere. → v

Risolto in un altro modo:

$$P\left(v \geq \frac{L}{250}\right) \quad v = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} = q \left(\frac{5}{384} \frac{L^4}{EI}\right)$$

funzione lineare di q → anche v ha una distribuzione normale...

SLU  $\rightarrow 10^7$  ( $P_R = 10^{-5} = 10^{-6}$ )

SLE  $\rightarrow N = 1000$  (mi aspetto una  $P_R$  di  $10^{-2}$ )

$N_R = 0$  <sup>contatore</sup> numero di volte che  $q \leq 0 \rightarrow$  incremento di 1 ogni volta che non sono nel dominio di successo

CICLO DI SIMULAZIONI

- (1) generazione di un numero casuale per ogni variabile aleatoria ( $q, EI$  nel nostro caso)
- (2) valutazione della funzione di stato limite  $q$  (funzione di  $q, EI$ )  
 $\hookrightarrow q = \frac{L}{250} - v$
- (3) se  $q \leq 0 \rightarrow N_R = N_R + 1$

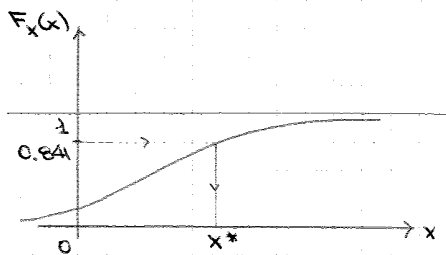
FINE CICLO

$P_R = \frac{N_R}{N}$

Quando uso il metodo Montecarlo, sto usando una definizione frequentista.  $N_R$  volte sono nel dom. di insuccesso

1ª simulazione

$r_a = 0.243 \rightarrow q_1$  <sup>valore del carico alla 1ª simulazione</sup>  
 $r_b = 0.841 \rightarrow ei_1$  } valori casuali da impiegare in questa simulazione



Conosco  $F_X(x)$  perché è un dato di input perché conosco le distr. di  $q$  e  $EI$   
 $0 < r_a, r_b < 1$  per poter usare  $F_X(x)$

Tante simulazioni  $\rightarrow$  si usa il computer (Excel, Matlab)  $\rightarrow$  ordinate  $\rightarrow$  intercello  $F_X(x)$   $\rightarrow$  esco con il valore casuale  $x^*$ . Si sfrutta la capacità del computer di generare valori tra 0 e 1

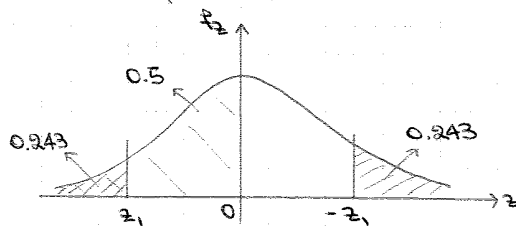
GENERAZIONE DI  $q_1$

$F_q(q_1) = P(q \leq q_1) = 0.243$

$q$  è una variabile a distribuzione normale  $\rightarrow$  passo a variabile standardizzata  
 $\rightarrow$  tabella  $\rightarrow$  vedo in corrispondenza di quale  $z$  ho quel valore di  $F_q(q)$ .

$P\left(\frac{q - \mu_q}{\sigma_q} \leq \frac{q_1 - \mu_q}{\sigma_q}\right) = P\left(z \leq \frac{q_1 - 12}{2.4}\right) = P(z \leq z_1) = 0.243$  l'incognita è  $q_1$

La tabella parte da 0.5  $\rightarrow$  sfrutto la simmetria



area a sx di 0  $\rightarrow 0.5 \rightarrow z_1 < 0$   
 Quindi  $P(z \leq z_1) = P(z \leq -z_1) = 1 - P(z \leq z_1) = 0.243$   
 $\rightarrow P(z \leq -z_1) = 0.757 \rightarrow -z_1 = \dots$  tabella



Metodo di livello 2

della struttura

- MVFOSM
  - AFOSM
- } metodo per valutare l'affidabilità  $\checkmark$  reliability method  
 FORM (approssimazione del I ordine della funzione di S.L  $\rightarrow$  linear)  
 first order

MVFOSM: sviluppo in serie di Taylor di  $g$  centrato nel valore medio della distribuzione delle singole variabili aleatorie

Indico  $g$  con  $z$

$$z = g(x) = g(\mu_x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\mu_x} (x_i - \mu_{x_i})$$

Avendo fatto questa approssimazione, introduco l'indice di affidabilità  $\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z}$

$$\mu_z = g(\mu_x)$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\mu_x} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

medio su tutte le variabili che ci sono

$$g(q, EI) = \frac{L}{250} - \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \quad (q \sim N(12, 2.4) \frac{kN}{m}) \quad EI \sim N(12159, 607.95) kNm^2$$

$$\text{Calcolo } \mu_z = \frac{L}{250} - \frac{5}{384} \frac{\mu_q L^4}{\mu_{EI}} = \frac{6000}{250} - \frac{5}{384} \frac{12 \cdot 6000^4}{12159 \cdot 10^9} = 7.34 \text{ mm}$$

$$\sigma_z^2 = \left( \frac{\partial g}{\partial q} \right)^2 \sigma_q^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial EI} \right)^2 \sigma_{EI}^2 = (-1.39)^2 \cdot 2.4^2 + (1.37 \cdot 10^{-12})^2 \cdot 607.95^2 = 11.13 \text{ mm}^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial q} = -\frac{5}{384} \frac{L^4}{EI} \Big|_{\mu_{EI}} = -\frac{5}{384} \frac{6000^4 \text{ mm}^4}{12159 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2} = -1.39 \frac{\text{mm}^3}{\text{N}}$$

$$\sigma_z = 3.34 \text{ mm}$$

$$\frac{\partial g}{\partial EI} = -\frac{5}{384} qL^4 \left( -\frac{1}{EI^2} \right) \Big|_{\mu_q, \mu_{EI}} = 1.37 \cdot 10^{-12}$$

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{7.34}{3.34} = 2.2$$

assunzione che  $z$  sia a distr. normale

$$P(g(x) \leq 0) = P(z \leq 0) = P\left( \frac{z - \mu_z}{\sigma_z} \leq -\frac{\mu_z}{\sigma_z} \right) = 1 - 0.989 = 0.0109 \sim 10^{-2}$$

$\downarrow$   $N(0,1)$   $\beta = 2.2$

La stima di  $\beta$  cambia se descrivo  $g$  in modi diversi per lo stesso problema fisico.

$$g = \frac{L}{250} - v \rightarrow \beta = 2.2$$

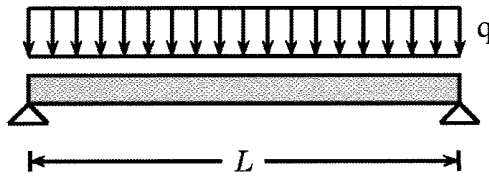
$$g = \left( \frac{L}{250} \right)^2 - v^2 \rightarrow \beta = 2.61$$

$\rightarrow$  risultati fortemente influenzati dalla def. analitica di  $g$

AFOSM: risolve questo problema <sup>di dipendenza del risultato da  $g$</sup>  facendo una semplice trasf. di variabili  
 ip:  $X$  a distr. normale  $\rightarrow$  ricavo  $X'$  normale std  
 $X \rightarrow X' = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \sim N(0,1)$

Riformulo il problema della sicurezza in termini delle variabili  $X'$ . Suppongo di avere un problema descritto da 2 sole v.a. e questa sia la funz. di S.L.

## Analisi di affidabilità di una struttura nelle condizioni di esercizio



### Dati:

- $L = 6$  m
- $q$ :  $N(12, 2.4)$  kN/m
- $EI$ :  $N(12159, 608)$  kNm<sup>2</sup>

Si vuole calcolare la probabilità che lo spostamento verticale in mezzzeria superi il valore limite  $L/250$ .

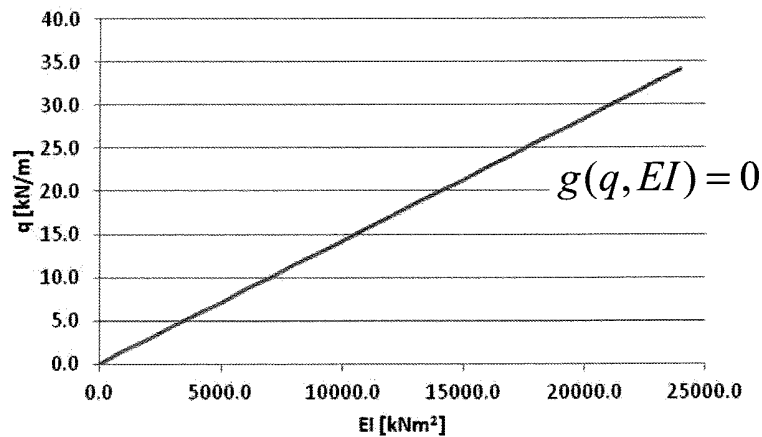
D.L. Allaix

Politecnico di Torino - Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Edile e Geotecnica,  
Corso di "Tecnica delle Costruzioni"

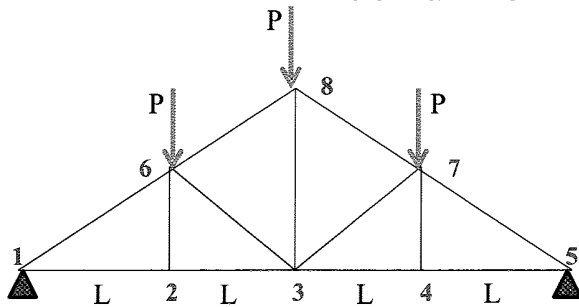
## Soluzione con il metodo AFOSM

- Si scrive l'espressione della funzione di stato limite  $g(q, EI)$ :

$$g(q, EI) = \frac{L}{250} - \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$



## Analisi di affidabilità di una struttura nelle condizioni ultime



### Dati:

- $L = 2 \text{ m}$
- $A_{23} = 1742 \text{ mm}^2$
- $P: N(22, 4.4) \text{ kN}$
- $f_y: N(265, 18) \text{ N/mm}^2$

Si vuole calcolare la probabilità che lo sforzo normale  $S_{23}$  nell'asta 2-3, dovuto alle forze  $P$ , sia maggiore o uguale alla resistenza offerta dall'elemento strutturale.

D.L. Allaix

Politecnico di Torino - Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Edile e Geotecnica<sub>1</sub>  
Corso di "Tecnica delle Costruzioni"

## Approccio di livello III

- La probabilità che ci interessa calcolare è:

$$P_R = P(R_{23} \leq S_{23})$$

- Si scrive lo sforzo  $S_{23}$  in funzione delle forze  $P$ :

$$S_{23} = \frac{3}{2} \frac{P}{\text{tg}(\alpha)}$$

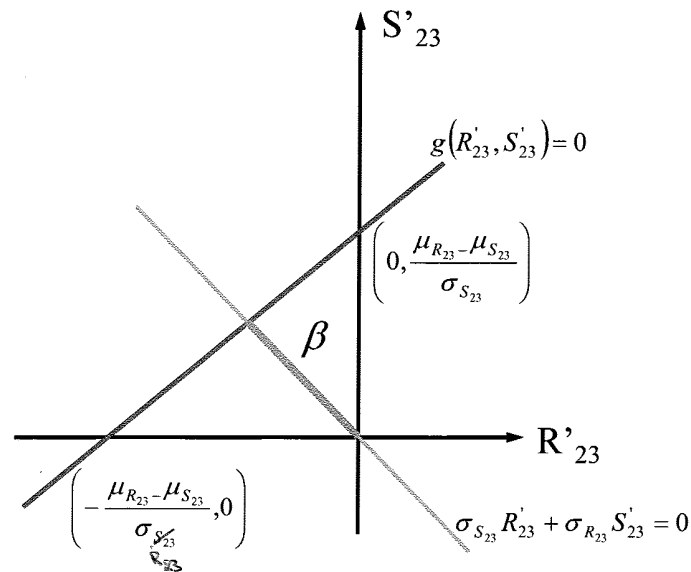
- Si scrive la resistenza  $R_{23}$  in funzione dell'area della sezione trasversale  $A_{23}$  e della tensione di snervamento  $f_y$ :

$$R_{23} = A_{23} f_y$$

D.L. Allaix

Politecnico di Torino - Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Edile e Geotecnica<sub>2</sub>  
Corso di "Tecnica delle Costruzioni"

## Approccio di livello II – metodo AFOSM



D.L. Allaix

Politecnico di Torino - Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Edile e Geotecnica,  
Corso di "Tecnica delle Costruzioni"

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = 4.01$$

dove:

$$\mu_Z = A_{23} \mu_{fy} - \frac{3}{2} \frac{\mu_P}{\operatorname{tg}(\alpha)} = 226.82 \text{ kN}$$

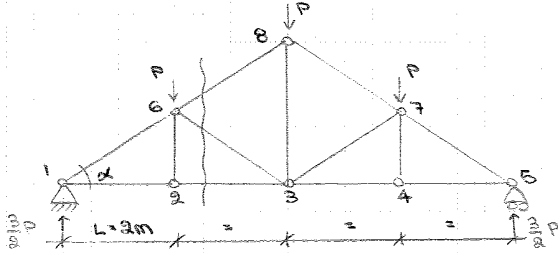
$$\sigma_Z = \sqrt{\left(A_{23} \sigma_{fy}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_P}{\operatorname{tg}(\alpha)}\right)^2} = 56.47 \text{ kN}$$

$$P_R = P(R_{23} \leq S_{23}) = \Phi(-\beta) = 2.95 \cdot 10^{-5}$$

D.L. Allaix

Politecnico di Torino - Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Edile e Geotecnica,  
Corso di "Tecnica delle Costruzioni"

SLU: carichi di un capomonte industriale



$P \sim N(22, 6.6) \text{ KN}$

$f_y \sim N(265, 18) \text{ N/mm}^2$

modello probabilistico

Sono parametri tipici di acciaio S235 utilizzato in carpenteria metallica

$f_{yk}$  valore caratteristico della tensione di snervamento

parte inferiore → corrente che sarà teso  
elementi

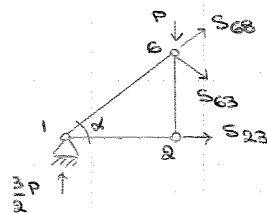
$\alpha = 8^\circ$

$P(S_{23} \geq R)$

str. reticolare incompressibile alle estremità, forze sono nei nodi → sforzi normali in 4 elementi

sarà una forza assiale di trazione perché riguarda il corrente inferiore che è teso

$R = A_{23} \cdot f_y$   
 $1382 \text{ mm}^2$



Metodo di Ritter: sezione che interessa 3 aste di cui 2 confluiscono in un nodo

$\sum M = -\frac{3}{2} P \cdot x + S_{23} \cdot x \cdot \text{tg} \alpha = 0$

$S_{23} = \frac{3P}{2} \cdot \frac{1}{\text{tg} \alpha} = 10.67 P$

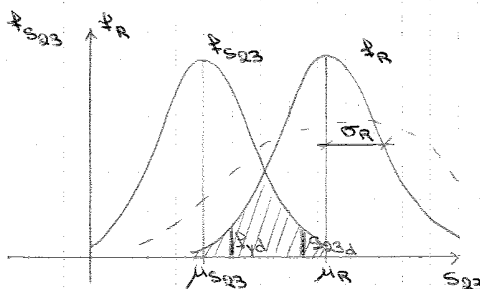
Metodo di Mellor

funzione densità di prob. congiunta

$P(S_{23} \geq R) = P_R \int_{S_{23}} f_{S_{23}, R}(s_{23}, r) ds_{23} dr$  per def. di  $P_R$

v.a. perché dipendono rispettiv. da P e  $f_y$ , ma P e  $f_y$  sono a distr. normale

Quando si progetta, si vuole una str. sicura →  $P_R$  sta a dx di  $f_{S_{23}}$ . In virtù di questo, quando conosco i valori di calcolo delle proprietà del materiale:



$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s(\gamma_1)}$  coda di sx (resistenze)

$S_{23,d} = \gamma_Q S_{23,k}$  coda di dx (azioni)

Idea qualitativa di  $P_R$ : associo a area di sovrapposizione

↑ area ↑  $P_R$  ma l'area non è la  $P_R$  infatti \*

--- se aumenta l'incertezza su R (si abbassa e si allarga) cresce l'area di sovrapposizione →  $P_R$  è cresciuta.  $\sigma_R$  gioca un ruolo importante su  $P_R$ . Analogamente, se fisso  $\sigma_R$  e  $\mu_R$  si riduce →  $P_R$  tracia a sx → aumenta l'area → aumenta  $P_R$

to  $P_R$

Risoluzione:

$Z = R - S_{23}$

a distr. normale, perché lo erano R e  $S_{23}$

$P_R = P(R \leq S_{23}) = P(R - S_{23} \leq 0) = P(Z \leq 0)$

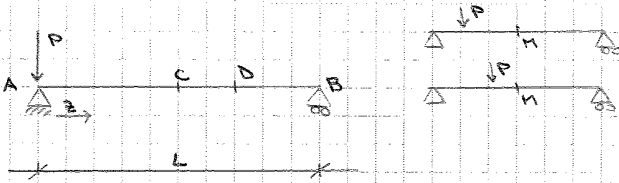
$\mu_Z = \mu_R - \mu_{S_{23}} = A_{23} \mu_{f_y} - 10.67 \mu_P = 1382 \text{ mm}^2 \cdot 265 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 10.67 \cdot 22 \cdot 10^3 \text{ N} = 131.42 \text{ KN}$

**LINEE DI INFLUENZA**

Edificio di civile abitazione: peso proprio

neve, vento, sovraccarichi dovuti all'uso della struttura

Le azioni variabili  $Q$  possono occupare posizioni diverse sulla struttura.



così tutte le situazioni sono coperte

Il progettista deve mettersi nelle condizioni peggiori → le linee di influenza lo aiutano a disporre i carichi variabili.

La linea di influenza di un determinato effetto (spostamento - vert., assiale, rotaz.; reazione vincolare, caratteristiche della sollecitazione) è un diagramma le cui ordinate, lette sotto le diverse posizioni del carico, rappresentano il valore dell'effetto indotto da un carico mobile unitario.

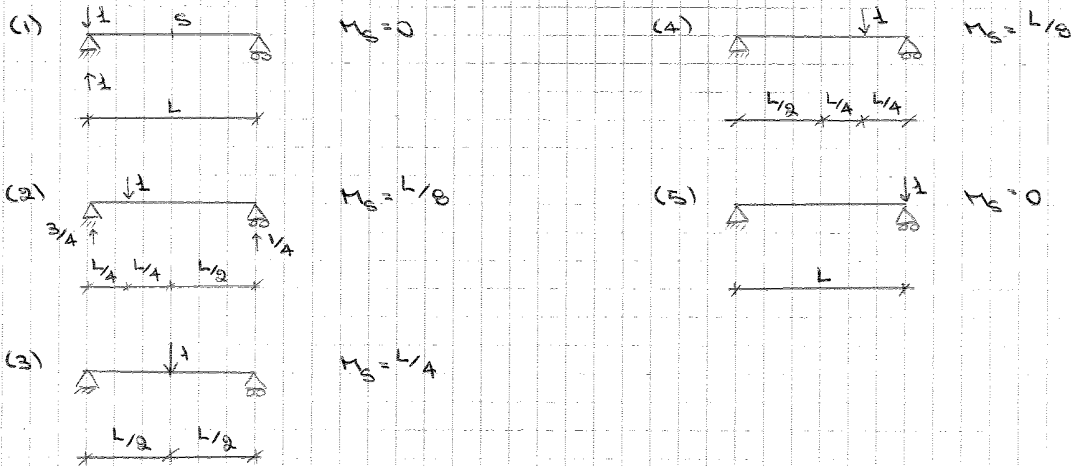
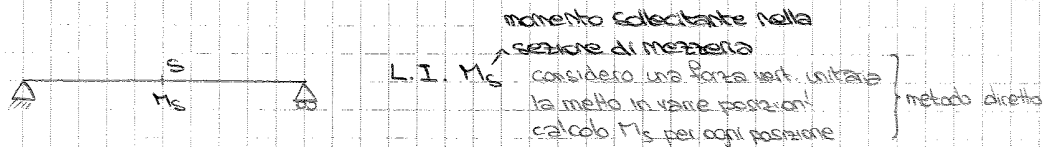
Es: L.I. spostamento verticale in mezzanella

devo definire l'effetto e... il pts della struttura considerato

L.I. cambia da A a B e da struttura a struttura

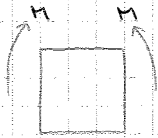
Es: L.I.  $R_v$  in A

Es: L.I. momento flettente nella sezione C

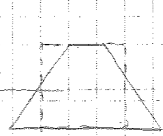




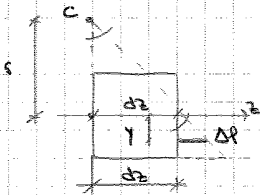
**LINEA ELASTICA**



cerchio soggetto a momento flettente M



asse longitudinale della struttura  
si deforma così (schematicamente) per effetto di M



Considero la metà di dx  
la deformata interseca y in C, attorno a cui avviene la rotazione  
r = raggio di curvatura = distanza tra C e s.r. yz

Fibra a profondità generica y → Δl

$$\frac{\Delta l}{y} = \frac{ds}{r}$$

sono nella parte neg. delle y

$$\frac{\Delta l}{ds} = -\frac{y}{r} = \epsilon_z$$

Moltiplico E per E per E → ottengo σ

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = -\frac{E \cdot y}{r}$$

ε<sub>z</sub> deformazione in direzione longitudinale  
(variazione di lunghezza di una fibra a profondità y rispetto a z, rispetto alla lunghezza iniziale della fibra)

Scrivo due eqz di equilibrio

$$N_z = \int_A \sigma_z dA = -\frac{E}{r} \int_A y dA = 0 \rightarrow \text{momento statico nullo} \rightarrow yz \text{ baricentrico}$$

cerchio solo inflesso

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = -\frac{E}{r} \int_A y^2 dA = -\frac{EI_x}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \text{curvatura} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

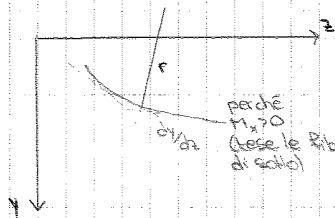
I<sub>x</sub> momento d'inerzia baricentrico della sezione



Devo mettere in relazione la curvatura a y. È stato calcolato: (non interessa come)

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \pm \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (\text{denom} \rightarrow 1)$$

Devo capire il segno.



M<sub>x</sub> > 0 (hp) → r < 0

perché M<sub>x</sub> > 0 (tese le fibre di sotto)

$$\frac{dy}{dz} \downarrow \quad \frac{d^2 y}{dz^2} < 0$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{M_x}{EI_x} = \pm \frac{d^2 y}{dz^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

<0    - (>0) <0

per avere coerenza di segno, il segno di d<sup>2</sup>y/dz<sup>2</sup> dev'essere +



$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$

$\frac{d^2 \eta_A}{dz^2} = -\frac{F_A}{2EI_x} z$

Integro + da curvatura a rotazione

$\frac{d\eta_A}{dz} = -\frac{F_A}{2EI_x} \frac{z^2}{2} + C_1$

Integro + da rotazione a spostamento

$\eta_A(z) = -\frac{F_A}{4EI_x} \frac{z^3}{3} + C_1 z + C_2$

$\eta_A = 1$

nel punto  $z = \frac{l}{2}$   $\frac{d\eta_A}{dz} = 0$  perché è un caso particolare (str. caricata assialmente)

(1)  $z=0$   $y=0 \rightarrow C_2=0$

$\frac{l}{2} \leq z \leq l$

$\frac{d^2 \eta_A}{dz^2} = -\frac{F_A}{2EI_x} (l-z)$

$\frac{d\eta_A}{dz} = -\frac{F_A}{2EI_x} (lz - \frac{z^2}{2}) + C_3$

$\eta_A(z) = -\frac{F_A}{2EI_x} (l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}) + C_3 z + C_4$

ed è la str. una trave incastrata alla sinistra spostamento

(2)  $z = \frac{l}{2}$   $y_{sx} = y_{dx} \rightarrow -\frac{F_A}{2EI_x} \frac{l^3}{48} + C_1 \frac{l}{2} = -\frac{F_A}{2EI_x} (\frac{l^3}{8} - \frac{l^3}{48}) + \frac{l}{2} C_3 + C_4 \rightarrow C_1 \frac{l}{2} = C_3 \frac{l}{2} + C_4 + \frac{F_A l^3}{24EI_x}$

(3)  $z = \frac{l}{2}$   $\frac{dy_{sx}}{dz} = \frac{dy_{dx}}{dz} \rightarrow -\frac{F_A}{2EI_x} \frac{l^2}{8} + C_1 = -\frac{F_A}{2EI_x} (\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{8}) + C_3 \rightarrow C_1 = C_3 - \frac{F_A l^2}{8EI_x}$

(4)  $z = l$   $y=0 \rightarrow 0 = C_4 + C_3 l - \frac{F_A}{2EI_x} (\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}) \rightarrow C_4 = -C_3 l + \frac{F_A l^3}{6EI_x}$

Ricavo  $C_3$ :

$C_3 \frac{l}{2} - \frac{F_A l^3}{16EI_x} = C_3 \frac{l}{2} - C_3 l - \frac{F_A l^3}{6EI_x} - \frac{F_A l^3}{24EI_x} \rightarrow C_4 = -\frac{F_A l^3}{48EI_x}$

Sostituisco  $C_4$  nella (4):

$C_3 l + \frac{F_A l^3}{6EI_x} - \frac{F_A l^3}{48EI_x}$

$C_1 = \frac{F_A l^2}{6EI_x} + \frac{F_A l^2}{6EI_x} - \frac{F_A l^2}{8EI_x} - \frac{F_A l^2}{24EI_x}$

(1)  $0 = 0 + 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$   $C_2$

(3)  $-\frac{F_A}{2EI_x} \frac{l^2}{8} + C_1 = -\frac{F_A}{2EI_x} (\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{8}) + C_3 \rightarrow C_1 = C_3 + \frac{F_A}{2EI_x} l^2 (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}) = C_3 + \frac{F_A l^2}{8EI_x} (-\frac{1}{8})$

(2)  $-\frac{F_A}{12EI_x} \frac{l^3}{8} + C_1 \frac{l}{2} = C_4 + C_3 \frac{l}{2} - \frac{F_A}{2EI_x} (\frac{l^3}{8} - \frac{l^3}{48}) \rightarrow C_1 \frac{l}{2} = C_4 + C_3 \frac{l}{2} + \frac{F_A l^3}{24EI_x} (-\frac{1}{24})$

(4)  $0 = C_4 + C_3 l - \frac{F_A}{2EI_x} (\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}) \rightarrow C_4 = -C_3 l + \frac{F_A l^3}{6EI_x} (+\frac{1}{6})$

$C_3 \frac{l}{2} + \frac{F_A l^3}{8EI_x} (-\frac{1}{16}) = C_4 + C_3 \frac{l}{2} + \frac{F_A l^3}{24EI_x} (-\frac{1}{24}) \rightarrow C_4 = \frac{F_A l^3}{24EI_x} (-\frac{1}{48})$   $C_4$

$\frac{F_A l^2}{8EI_x} (-\frac{1}{48}) = -C_3 \frac{l}{2} + \frac{F_A l^2}{24EI_x} (+\frac{1}{6}) \rightarrow C_3 = \frac{F_A l^2}{24EI_x} (\frac{3}{8})$   $C_3$

$C_1 = \frac{F_A l^2}{24EI_x} (\frac{13}{48})$   $C_1$

$\eta_A(z) = -\frac{F_A}{12EI_x} z^3 + \frac{F_A l^2}{24EI_x} (+\frac{3}{8}) z$

$\eta_A(z) = -\frac{F_A}{24EI_x} (l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}) + \frac{F_A l^2}{24EI_x} (+\frac{3}{8}) z + \frac{F_A l^3}{24EI_x} (-\frac{1}{48})$

$$\eta_A(z = \frac{1}{10}l) = \frac{F_A l^3}{EI} \cdot 0.020$$

Obiettivo: calcolare  $\eta_B$  dovuto a  $P, 2P, 3P$

$$F_A \eta_B = \sum F_B \eta_a$$

$$P \cdot \eta_A(\frac{2}{10}l) + 2P \cdot \eta_A(\frac{3}{10}l) + 3P \cdot \eta_A(\frac{4}{10}l) = P \frac{F_A l^3}{EI} (0.012 + 0.034 + 0.060) = P \frac{F_A l^3}{EI} \cdot 0.106$$

$$\frac{F_A \eta_B}{EI} = P \frac{F_A l^3}{EI} \cdot 0.106 \rightarrow \eta_B = \frac{P l^3}{EI} \cdot 0.106$$

spostamento nella sezione di mezzanera dovuto alle forze  $P, 2P, 3P$

L'entità di  $F_A$  non ha alcun effetto sullo spostamento  $\eta_B$ .

$$F_A \eta_B = \sum F_B \eta_a$$

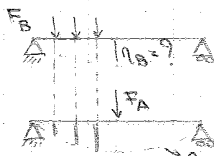
$\eta_B$ : effetto incognito	}	lavoro	obiettivo, ciò che voglio calcolare $\rightarrow$ lo conosco, so cosa devo calcolare
$F_A$ : sistema esplorativo			dev'essere una grandezza che compie lavoro per l'effetto incogn.
$F_B$ : causa data	}	lavoro	$F_B$ è la causa dell'effetto incognito $\eta_B \rightarrow$ lo conosco
$\eta_a$ : funzione di influenza			entra in gioco la linea di influenza

Nota l'effetto incognito, so qual è il sistema esplorativo (è il sito di partenza)

Nell'es  $\left\{ \begin{array}{l} \eta_B \text{ spost. verticale in mezzanera} \\ F_A \text{ dev'essere una forza verticale in mezzanera per compiere lavoro con } \eta_B \end{array} \right.$

Cambiando  $\eta_B$ , cambia  $F_A$ .  
 perché devono compiere lavoro insieme.  
 Conosco le cause date che devono compiere lavoro con la funzione di influenza.

Nota  $F_B$ , conosco anche  $\eta_A$ , perché devono compiere lavoro insieme.  
 Legame tra F.I. e L.I.



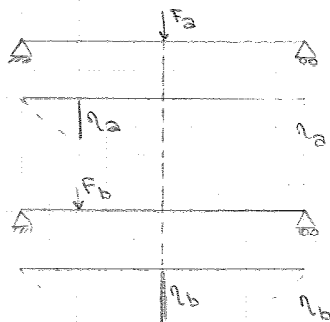
$\eta_A$ : funzione di influenza  
 L.I. dello spost. verticale in mezzanera per forze verticali (non per coppie) (qui non posso scrivere  $F_B \eta_B = \sum F_B \eta_a$  perché ho delle coppie!)  
 L.I. dipende da c.d., dalla tipologia di carico ma la traccia conta sempre come i carichi sono distribuiti alla dir.

Il grafico della funzione di influenza è la linea di influenza di  $\eta_B$  (effetto incognito)

per forze verticali  $F_B$  (causa data)

L.I. dello spost. vert. in mezzanera la ottengo come la deformata  $\eta_A$  della struttura, ottenuta applicando una forza vert. nella mezzanera della struttura

Per semplicità suppongo che  $F_B$  sia costituito da una sola forza verticale.



Per Betti:

$$F_a \eta_b = F_b \eta_a$$

Scelgo  $F_a = F_b = 1$  (corollario di Maxwell) del th di Betti

$\rightarrow \eta_a = \eta_b$  questa è la def. di L.I. perché se  $\eta_a = \eta_b$ , la L.I. di un determinato effetto è un diagramma le cui ordinate, lette sotto le diverse posizioni del carico, sono il valore dell'effetto dovuto a un carico verticale viaggiante.

Se E.I. è uno scal. vert., per calcolare la sua L.I. basta introdurre una forza  $F_a$  nella sezione in cui voglio calcolare lo spost. e tracciare la deformata.