NUMERO: 717

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Cocomazzi

MATERIA: Analisi MAtematica II + Esercizi
Prof. Serra

03-10-12

PRIMA LEZIONE ANALISI II

LIBRI DI TESTO

Bacciotti: Integrali multipli e serie SEMPLICE

Canuto Tabacco Analisi Mat. II DIFFICILE

ESERCIZI

Lancelotti: Esercizi di Analisi Mat II ALCUNI ES. DIFFICILISSIMI

http://didattica-online.polito.it

ESAME

SCRITTO
- ESERCIZI
  - QUIZ
  - TRADIZIONALI
- DOMANDE DI TEORIA

enrico.serra@polito.it

ORALE facoltativo

RICHIAMI

$\mathbb{R}^n$ spazio n-dimensionale $\quad x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$\mathbb{R}^2 \quad P(x;y)$

$\mathbb{R}^3 \quad P(x;y;z)$

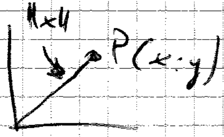
$\|x\|$ norma di $x \in \mathbb{R}^n$

"lunghezza di x"

"distanza di x dall'origine"

$\mathbb{R}^n \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$

$\mathbb{R}^2 \quad \|x\| = \sqrt{x^2+y^2}$

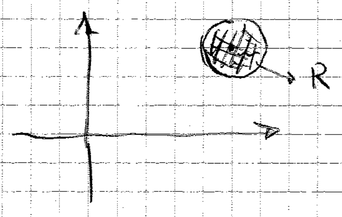


$R > 0 \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < R\}$$

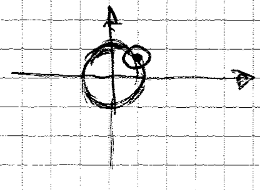
Intorno sferico di x_0 di raggio R

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < R$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 193

$A = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1 \}$

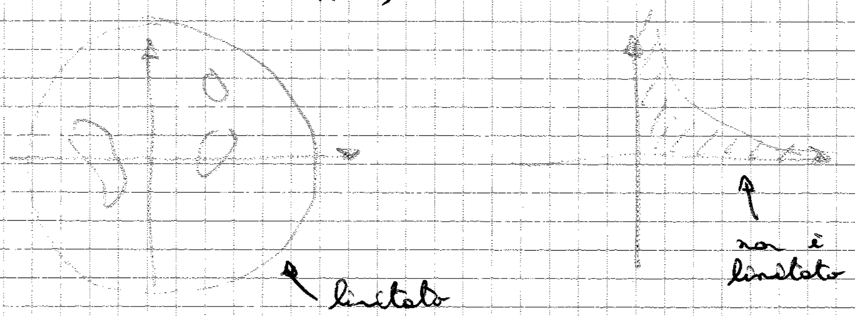


La frontiera di A è sempre la circonferenza di centro origine e raggio 1.

bordo di A $\qquad \partial A$

<u>Def</u> $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice <u>limitato</u> se $\exists\, B_R(0)$ tale che

$$A \in B_R(0)$$



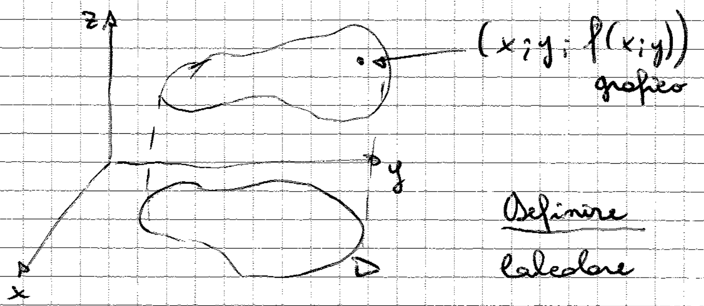
<u>Def</u> Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ che è sia
- chiuso
- limitato

si dice <u>compatto</u>

Introduzione Integrali doppi

$D \subset \mathbb{R}^2$ compatto

$f : D \to \mathbb{R}$ continua

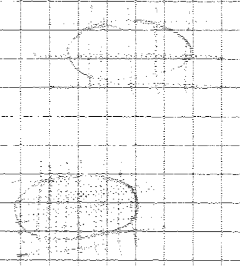


<u>Definire</u>
<u>Calcolare</u>

Il volume del solido "sotto" il grafico di f.

$$\delta = \max_{j,k} (\Delta x_k, \Delta y_j)$$

$$\delta \to 0$$



Se f è continua e
D è compatto

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(c_k, d_j)\, \Delta x_k\, \Delta y_j$$

esiste ed è finito

Questo valore si chiama integrale doppio di f su D

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\iint_D f(x;y)\, dx\, dy$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DOPPIO

$f, g : D \to \mathbb{R}$ continue

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

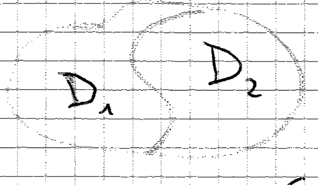
1) LINEARITÀ

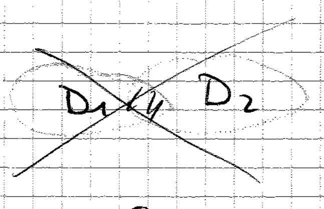
$$\int_D (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))\, dx\, dy = \alpha \int_D f(x;y)\, dx\, dy + \beta \int_D g(x;y)\, dx\, dy$$

2) Additività rispetto al dominio

$D = D_1 \cup D_2$ $\qquad$ D_1, D_2 compatti

$D_1 \cap D_2$ abbia area nulla





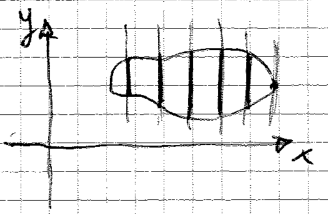
$$\int_D f(x;y)\, dx\, dy = \int_{D_1} f(x;y)\, dx\, dy + \int_{D_2} f(x;y)\, dx\, dy$$

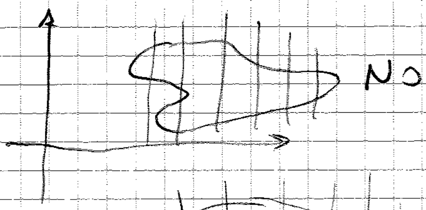
04-10-12

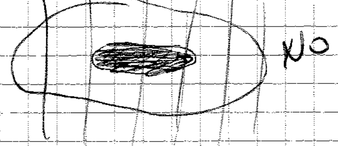
SECONDA LEZIONE ANALISI II

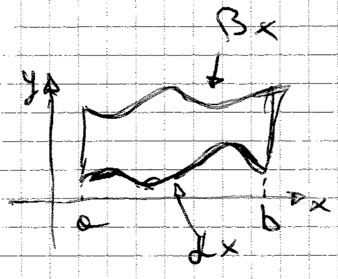
- Calcolo di Integrali doppi
- Formule di riduzione e Integrali iterati

1) Dominio "verticalmente convesso"
"semplice in y"









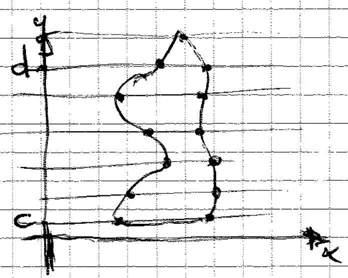
$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

FORMULA DI RIDUZIONE

$$\int_D f(x;y)\,dx\,dy = \boxed{\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x;y)\,dy \right) dx}$$

Bisogna integrare due volte, prima con y e poi con x. Si sommano le varie fette del solido.

2) Dominio orizzontalmente convesso

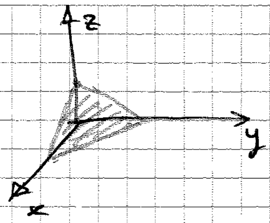


È un dominio verticalmente convesso se scambio gli assi x e y.

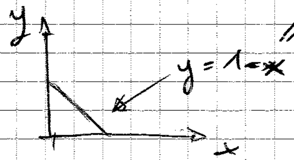
$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

FORMULA DI RIDUZIONE

$$\int_D f(x;y)\,dx\,dy = \boxed{\int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x;y)\,dx \right) dy}$$



Volume di un tetraedro.



$\Rightarrow x = 1-y$

ORIZZ. CONVESSO

$$D = \{(x;y) \mid c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$

$$D = \{(x;y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1-y\}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} 1-x-y \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left[x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_0^{1-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \left[1-y - \frac{1}{2}(1-y)^2 - y(1-y) \right] \right\} dy =$$

$$= \int_0^1 1 - 2y + y^2 - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2}y^2 \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2}y^2 \, dy =$$

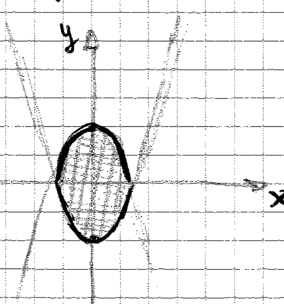
$$= \left[\frac{1}{2}y - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{6}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

ESEMPIO

Calcolare ~~integrale~~ $\iint_D 3y + e^x \, dx\, dy$

Dove

D regione compresa tra le curve $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$



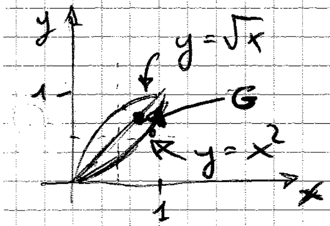
$$D = \{(x;y) \mid -1 \le x \le 1,\ x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$$

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2-1}^{1-x^2} 3y + e^x \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{3}{2}y^2 + y e^x \right]_{x^2-1}^{1-x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 \cancel{\frac{3}{2}[1-x^2]^2} + [1-x^2]e^x - \cancel{\frac{3}{2}[x^2-1]^2} - [x^2-1]e^x \, dx =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 193

ES



$$m(x;y) = xy$$

$$D \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \right.$$

$$\text{massa totale} = \int_D m(x;y)\,dx\,dy = \int_D xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^5 \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$x_G = \frac{1}{\text{massa totale}} \int_D m(x;y)\,x\,dx\,dy =$$

$$= 12 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy \right) dx =$$

$$= 12 \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = 12 \int_0^1 \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2}\,dx$$

$$= 12 \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{14}x^7 \right]_0^1 = 12 \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{14} \right]$$

$$= 6 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right]$$

$$= 6 \left[\frac{7-4}{28} \right] = \boxed{\frac{18}{28}} = \boxed{\frac{9}{14}} \Leftarrow x_G$$

$$y_G = \frac{1}{\text{massa totale}} \int_D m(x;y)\,y\,dx\,dy$$

$$y_G = 12 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy \right) dx = 12 \int_0^1 \left[\frac{xy^3}{3} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= 12 \int_0^1 \frac{x^{5/2}}{3} - \frac{x^7}{3}\,dx = 4 \int_0^1 x^{5/2} - x^7\,dx = 4 \left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^8 \right]_0^1$$

$$4\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8} \right) = 4 \left(\frac{16-7}{56} \right) = \boxed{\frac{9}{14}} \Leftarrow y_G \qquad (x_G;y_G) = \left(\frac{9}{14}; \frac{9}{14} \right)$$

Cambiamento di variabili negli integrali doppi

Siano D e D' due domini di integrazione

Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1,

tale che $\varphi(D') = D$

Supponiamo che φ sia invertibile
che lo Jacobiano, $\det J\varphi \neq 0$ su D

Allora data una funzione f continua su D

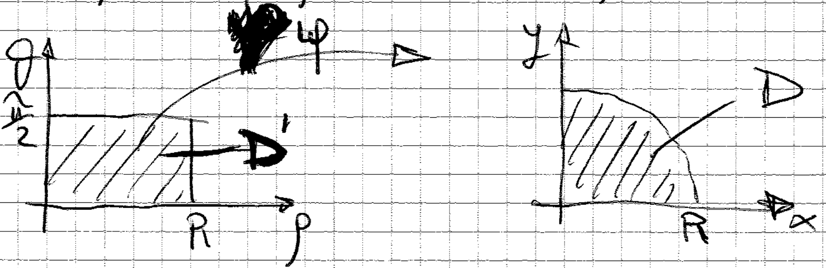
$$\int_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_{D'} f(\overbrace{x(u;v);y(u;v)}^{\varphi(u;v)})\underbrace{\left|\det J\varphi(u;v)\right|}_{\text{"fattore correttivo"}}\,du\,dv$$

$$D' = \varphi^{-1}(D)$$

COORDINATE POLARI

$x = \rho\cos\vartheta$
$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$

$$\varphi(\rho,\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$



Matrice Jacobiana

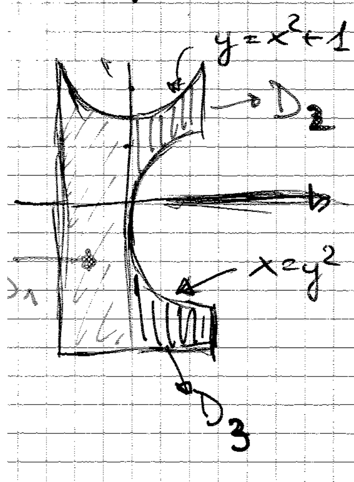
$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det J\varphi(\rho,\vartheta) = \rho\cos^2\vartheta + \rho\,\mathrm{sen}^2\vartheta = \rho$$

$$\int_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_{D'} f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

10-10-12

Terza Lezione Analisi II



Se $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$

$$\int_D f = \int_{D_1} f_1 + \int_{D_2} f_2 + \dots + \int_{D_n} f_n =$$

$f=1$

$$\int_{D_1} f\,dx\,dy + \int_{D_2} f\,dx\,dy + \int_{D_3} f\,dx\,dy$$

$D_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0,\ -1 \le y \le x^2+1\}$

$D_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1;\ \sqrt{x} \le y \le x^2+1\}$

$D_3 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1;\ -1 \le y \le -\sqrt{x}\}$

$$\to \int_{D_1} dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{x^2+1} dy\right)dx = \int_{-1}^{0}\Big[y\Big]_{-1}^{x^2+1}dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left[x^2+\cancel{1}-\cancel{1}\right]dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \left(0-\left(-\frac{7}{3}\right)\right) = \boxed{\frac{7}{3}}$$

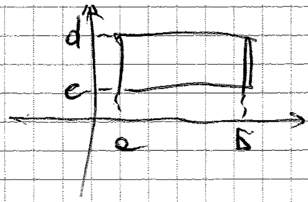
$$\to \int_{D_2} dx\,dy = \int_{0}^{1}\left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2+1} dy\right)dx = \int_{0}^{1}\left(x^2+1-\sqrt{x}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+x-\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+1-\frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\to \int_0^1\left(\int_{-1}^{-\sqrt{x}} dy\right)dx = \int_0^1\left[-\sqrt{x}+1\right]dx = \left[-\frac{2x^{3/2}}{3}+x\right]_0^1 = -\frac{2}{3}+1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\int_D dx\,dy = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{7}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

1



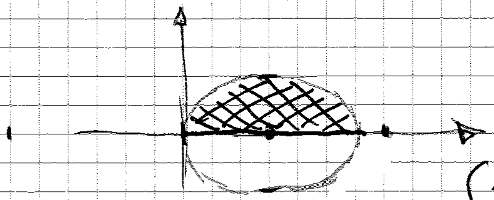
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x;y)\, dy \right) dx \quad \text{oppure} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x;y)\, dx \right) dy$$

Tema d'esame

$$\int_D y^2\, dx\, dy \qquad D = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4(x-3)^2 + 9y^2 \leq 36,\ y \geq 0 \}$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

$$y \geq 0$$



COORDINATE "ELLITTICHE"

$$\begin{cases} x = 3 + 3\rho\cos\vartheta \\ y = 2\rho\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 3\cos\vartheta & -3\rho\,\text{sen}\,\vartheta \\ 2\,\text{sen}\,\vartheta & 2\rho\cos\vartheta \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x-3 = 3\rho\cos\vartheta \\ y = 2\rho\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 9\rho^2\cos^2\vartheta \Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{9} = \rho^2\cos^2\vartheta \\ y^2 = 4\rho^2\,\text{sen}^2\vartheta \Rightarrow \dfrac{y^2}{4} = \rho^2\,\text{sen}^2\vartheta \end{cases}$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq \rho^2(\underbrace{\text{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta}_{1})$$

$$\rho \leq 1 \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\rho \in [0;1] \qquad \vartheta\, [0;\pi]$$

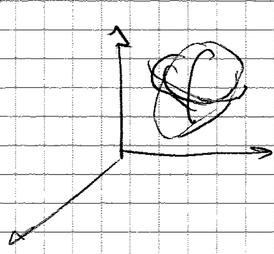
$$\boxed{3\pi}$$

Integrale triplo

dominio in $\mathbb{R}^3$

Ω

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$

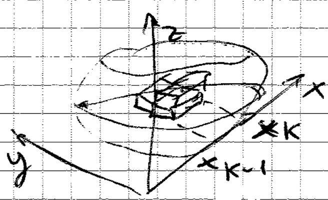


$f \; \Omega \to \mathbb{R}$

$f(x;y;z)$

Densità di massa, densità di carica

Con l'integrale triplo si trova la massa totale o la carica totale



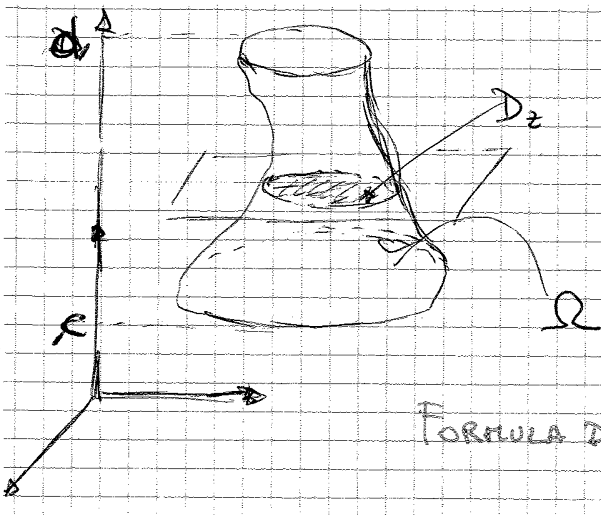
$$f(a_i; b_j; c_K)\, \Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_K$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_i \sum_J \sum_K f(a_i, b_J, c_K)\, \Delta x_i, \Delta y_J, \Delta z_K$$

Se f è continua su Ω il limite esiste ed è finito

Si chiama integrale triplo di f su Ω

$$\int_\Omega f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz$$



FORMULA DI INTEGRAZIONE PER STRATI

$$\int_\Omega f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \left(\int_{D_z} f(x;y;z)\,dx\,dy \right) dz$$

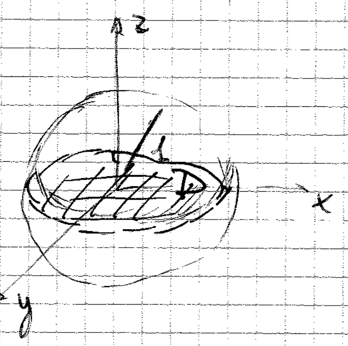
$$D_z \subset \mathbb{R}^2$$

$$\int_\Omega dx\,dy\,dz = \text{Volume di } \Omega$$

ES.

$$\int_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \{(x;y;z)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

$$(x;y)\in D, \quad \alpha(x;y)\le z\le \beta(x;y)$$



$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$z^2=1-x^2-y^2 \qquad \alpha(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \beta(x;y)=-\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$$

$$\int_\Omega f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_{\alpha(x;y)}^{\beta(x;y)} f(x;y;z)\,dz \right) dx\,dy$$

2 $$= \int_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz \right) dx\,dy =$$

Se $f(x;y;z)$ su Ω, è una densità (di massa, carica)

$$\int_\Omega f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \text{massa (carica) totale}$$

G baricentro di Ω $\qquad$ $m(x;y;z)$ è la densità di massa

$G(x_G; y_G; z_G)$

$$x_G = \frac{\int_\Omega x\, m(x;y;z)\,dx\,dy\,dz}{\int_\Omega m(x;y;z)\,dx\,dy\,dz}$$

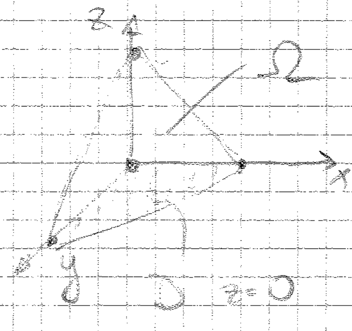
massa totale

$m = 1 \qquad x_G = \dfrac{\int_\Omega x\,dx\,dy\,dz}{\text{Volume}}$

ES

$$\int_\Omega x\,dx\,dy\,dz$$

Ω è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$ $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$



$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

$x + y + z \leq 1$

$$\int_D \left(\int_0^{1-x-y} x\,dz \right) dx\,dy = \int_D x \left(\Big[z \Big]_0^{1-x-y} \right) dx\,dy$$

$$= \int_D x(1-x-y)\,dx\,dy = \int_D x - x^2 - xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x - x^2 - xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy - x^2 y - \frac{xy^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$4\quad = \int_0^1 (x-x^2)(1-x) - \frac{1}{2}x(1-x)^2\,dx = \int_0^1 x - \cancel{x^2} - x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3 + \cancel{x^2}\,dx$$

Cambi di Variabile negli Integrali Tripli

$\Phi : D' \to D \qquad D', D \subset \mathbb{R}^3$

$\qquad\qquad\qquad (u,v,w) \quad (x,y,z)$

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

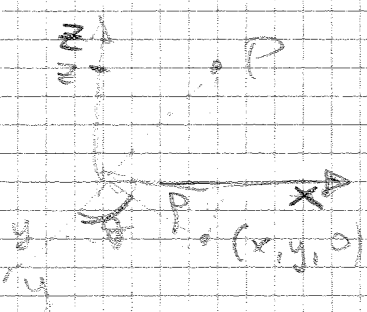
$$J\Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$\det J\Phi(u,v,w)$ "Le Jacobiano"

FORMULA DEL CAMBIO DI VARIABILI

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{D'} \overbrace{f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)}^{g(u,v,w)} \cdot \underbrace{\det J\Phi(u,v,w)}_{h(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$

COORDINATE CILINDRICHE



P in coordinate cilindriche

(ρ, θ, z)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad z \in \mathbb{R}$$

$$J(\Phi)(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J\Phi(\rho,\theta,z) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

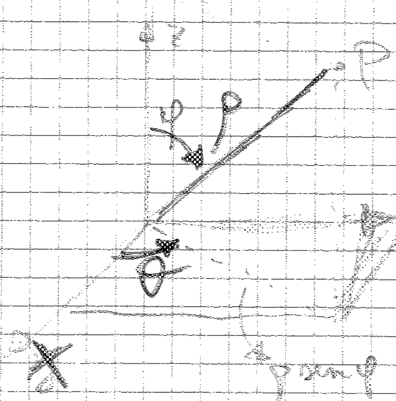
CONVIENE USARE COORDINATE CILINDRICHE quando il dominio è un dominio di rotazione intorno asse z.

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{\rho^2}^{\rho} \rho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\; z\; dz\right) d\rho\right) d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{2}\right] d\rho\right) d\vartheta$$

CONTINUA...

COORDINATE SFERICHE $\Rightarrow$ si usano quando il dominio è una sfera o una semisfera.



$P(\rho, \vartheta, \varphi)$

ϑ = longitudine

φ = colatitudine

$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta \qquad \rho \geq 0$

$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta \qquad \vartheta \in [0; 2\pi]$

$z = \rho\cos\varphi \qquad \varphi \in [0; \pi]$

ρ = cost $\Rightarrow$ sfera

ϑ = cost $\Rightarrow$ semipiano

φ = cost $\Rightarrow$ cono

Jacobiano in coordinate sferiche

$\det J\,\Phi(\rho, \vartheta, \varphi) = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$

ES

$\int_\Omega x^2+y^2+z^2\; dx\, dy\, dz \qquad \Omega = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\; 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$

$x^2+y^2+z^2 \leq 1$ sfera piena di centro O e raggio 1

$z \geq 0$

8 $\quad z \leq \sqrt{x^2+y^2}$ cono $\rightarrow$ z "sotto il cono"

17-10-12

QUINTA LEZIONE ANALISI II

vettore velocità = vettore tangente = $\gamma'(t)$

↓

tangente al sostegno della curva.

CURVA SEMPLICE se γ è iniettiva su un intervallo aperto (a, b)

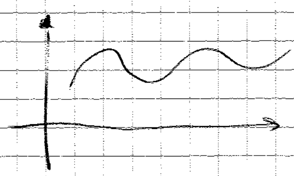
$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \forall t \in (a, b)$$

Lunghezza di una curva

$$\gamma \in (a, b) \to \mathbb{R}^n$$

Lunghezza γ

$$l = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$



filo metallico

densità di massa = x

Integrale curvilineo di I° specie

(integrale di una funzione lungo una curva)

si definisce integrale di f lungo γ

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int$$

~~Esercitazione~~

18-10-12

Sesta Lezione Analisi II

Integrali curvilinei di 1ª specie

Integrali di funzioni scalari lungo una curva

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \gamma(t) = \left(t^2, e^{-t}, \log(1+t^2)\right)$$

$$\gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x; y; z) = x^2 + y^2 \cdot z$$

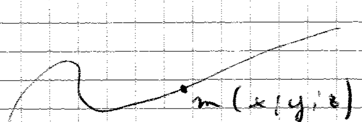
$$f(\gamma(t)) = t^2 + e^{-2t} \cdot \log(1+t^2)$$

$$\gamma'(t) = \left(2t, -e^{-t}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \left(4t^2 + e^{-2t} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\right)^{1/2}$$

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^1 \left(t^2 + e^{-2t} \log(1+t^2)\right) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

Se si pensa γ come un filo con densità di massa $m(x, y; z)$



$$\int_\gamma m(x; y; z) \, ds = \text{massa totale}$$

II

$$y_G = \frac{\int_\gamma m\, y\, ds}{\int_\gamma m\, ds} =$$

$$\int_\gamma ds = \pi R \qquad \gamma(t) = (R \cos t, R \operatorname{sen} t)$$

$$t \in [0; \pi]$$

$$\int_\gamma y\, ds \qquad \gamma'(t) = (-R \operatorname{sen} t, R \cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = R$$

$$\int_\gamma y\, ds = \int_0^\pi R \operatorname{sen} t \cdot R\, dt = R^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2R^2$$

$$G\left(0; \frac{2R}{\pi}\right)$$

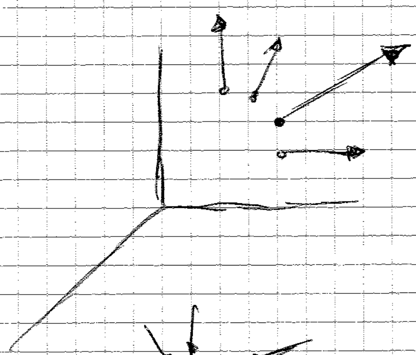
Integrali curvilinei di 2^a specie

Integrali lungo curve di campi vettoriali

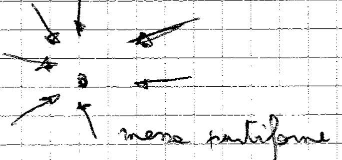
Campo vettoriale

$$A \subset \mathbb{R}^n \qquad F: A \to \mathbb{R}^n$$

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

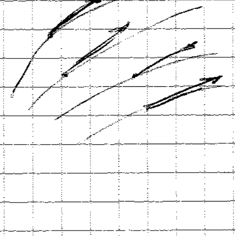


$$F(x;y;z) = (F_1(x;y;z), F_2(x;y;z), F_3(x;y;z))$$



Linee di flusso

curve tali che in ogni punto di ogni curva F è il vettore tang. alla curva.



ES

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad F(x;y;z) = (e^x;\ x+y;\ y+z)$

$\gamma: [0;1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (t, t^2, t^3)$

Calcolo $\int_\gamma F \cdot dP \qquad \int_\gamma F \cdot \tau \, ds$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$F(\gamma(t)) = (\underbrace{e^t}_{e^x}, \underbrace{t+t^2}_{x+y}, \underbrace{t^2+t^3}_{y+z})$$

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (e^t, t+t^2, t^2+t^3) \cdot (1, 2t, 3t^2)$$

$$= e^t + (t+t^2)(2t) + (t^2+t^3)(3t^2)$$

$$= e^t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5$$

$$\int_0^1 e^t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5 \, dt = \left[e^t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^6 \right]_0^1$$

$$= e + \frac{2}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5} + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{-1} = \boxed{e + \frac{19}{15}}$$

$\int_\gamma F \cdot dP$ = il lavoro compiuto da forza F lungo lo spostamento γ

OSS

L'integrale di prima specie

$$\int_\gamma f \, ds$$

non dipende dalla parametrizzazione di γ

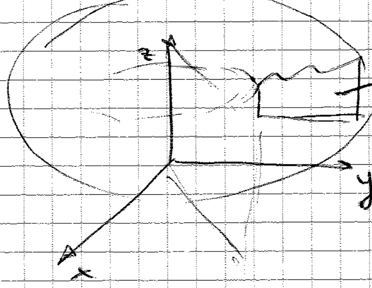
dipende solo dal sostegno

$$B(\gamma)\cdot\gamma' = (-\text{sen}\, t, \cos t, 0)\cdot(-\text{sen}\, t, \cos t, 0)$$

$$= \text{sen}^2 t + \cos^2 t + 0 = 1$$

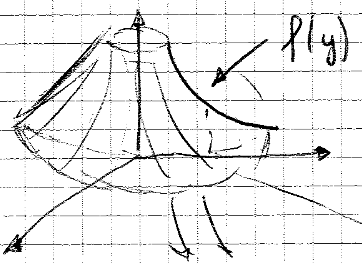
$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_0^{2\pi} 1\, dt = \boxed{2\pi}$$

Volume di solidi di rotazione



D nel piano yz

Calcolare il volume del solido dato la sezione



$z = f(y)$

$(0; y; 0)$

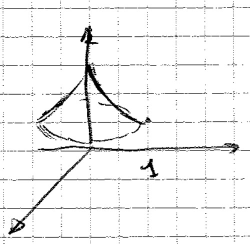
tutti distano z dal centro

$\sqrt{x^2+y^2} = z$

Eq. sup. $\quad z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$x = 0 \qquad z = f\left(\sqrt{y^2}\right) =$

$= f(|y|) = f(y)$



$z = e^{-y}$

$z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

(1) $\boxed{\mathrm{Vol}(\Omega) = 2\pi \int_D y \, dy \, dz}$ Volume del solido ottenuto ruotando D attorno all'asse z

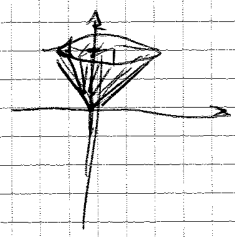
$$\mathrm{Vol}(\Omega) = 2\pi \cdot \text{area } D \cdot y_G = \boxed{2\pi y_G \cdot \text{area } D}$$

TEOREMA DI GULDINO

Il volume è il prodotto dell'area della sezione per la lunghezza della circonferenza di raggio y_G.

Ripasso generale

$$\int_D z \, dx \, dy \, dz \qquad \Omega = \left\{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z \le 1,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2} \right\}$$



$$D = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

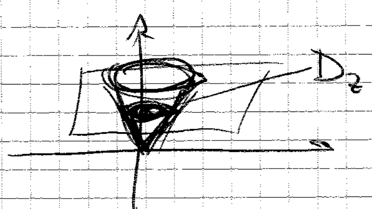
I modo × FILI

$$\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \le 1;\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \right\}$$

$$\int_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z \, dz \right) dx \, dy = \int_D \frac{1}{2} z^2 \Big]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dx \, dy$$

$$\ldots = \frac{\pi}{4}$$

II × STRATI



$$0 \le z \le 1$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z^2 = x^2+y^2$$

$$D_z \quad (x;y) \,/\, x^2+y^2 \le z^2$$

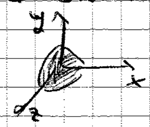
$$\int_0^1 \left(\int_{D_z} z \, dx \, dy \right) dz$$

* $\int_{D_z} dx \, dy = \pi z^2$ area del cerchio di raggio z.

24-10-12

Settima Lezione Analisi II

es. 29 "del I° ottante"



$x>0$
$y>0$
$z>0$

• Campi conservativi

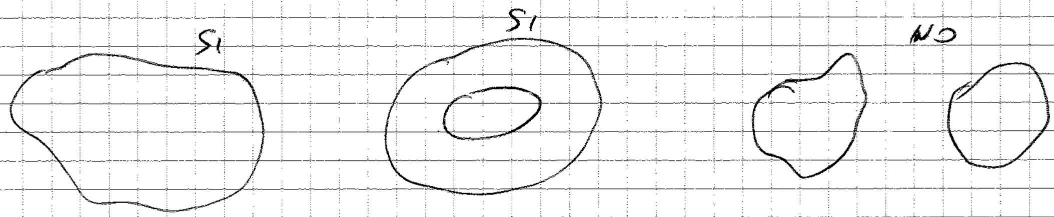
$F: A \to \mathbb{R}^3$ $\qquad (F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

A aperto

A connesso

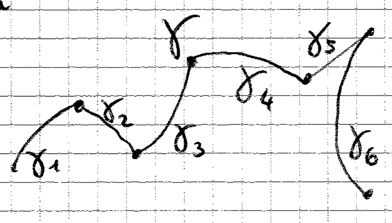
"connesso per archi"

dati 2 punti in A esiste sempre una curva che li connetta tutta in A



connesso $\propto$ "fatto di un solo pezzo".

"curve": regolari a tratti



Def. Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto connesso

Sia $F: A \to \mathbb{R}^3$ un campo

$$F(x;y;z) = (F_x(x;y;z), F_y(x;y;z), F_z(x;y;z))$$

Si dice che F è conservativo (in A)

se $\exists\ U: A \to \mathbb{R}$ (scalare)

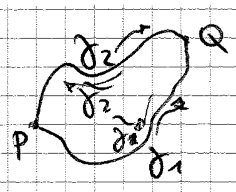
tale che $\bar{\nabla} U = F$ in A

$\partial U_x(x;y;z) = F_i(x;y;z)$

$\partial U_y(\ \ ) = F_j$

$\partial U_z(\ \ ) = F_k$

③ ⇒ ②



$\tilde{\gamma}_2$ è γ_2 in verso opposto

$$\int_{\gamma_1} F\,dp + \int_{\tilde{\gamma}_2} F\,dp = 0$$

$$\int_{\gamma_1} F\,dp - \int_{\gamma_2} F\,dp = 0$$

② ⇒ ① abbastanza difficile

Rispondiamo alla domanda 1

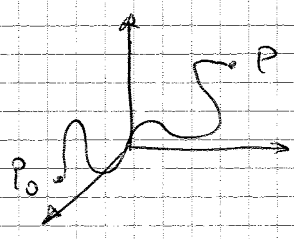
Come ricostruire il potenziale

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conservativo

Fissiamo un punto qualunque $P_0(x_0, y_0, z_0)$

Prendiamo un punto generico $P(x, y, z)$

Sia γ una qualunque curva da P_0 a P



Esiste un potenziale U

$$\int_\gamma F\,dp = U(P) - U(P_0)$$

$$U(x, y, z) = \underbrace{\cancel{U(x_0, y_0, z_0)}}_{\text{costante}} + \int_\gamma F\,dp$$

$$U(x; y, z) = \int_\gamma F\,dp$$

$F(x; y; z) = (2xy\,\mathrm{sen}\,z,\ x^2\,\mathrm{sen}\,z,\ x^2 y \cos z)$

F è conservativo

$P_0 = (0; 0, 0)$

$P = (x; y; z)$

1. Fissare $P_0 \in A$
2. Prendere $P \in A$ generico
3. Prendere $\gamma : [a,b] \to A$

$$\gamma(a) = P_0$$

$$\gamma(b) = P$$

4. $U(x,y,z) = \int_\gamma F \, dP$

Espressione diretta (Valore in $\mathbb{R}^3$) 2° metodo

$\mathbb{R}^2$ F conservativo

$$\nabla U = F$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \Rightarrow \text{integro in } x$$

$$U(x;y) = \int F_1(x;y)\,dx + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{dy} = F_2 \qquad \boxed{\frac{\partial}{dy}\left(\int F_1(x;y)\,dx + C(y)\right) = F_2}$$

permette di trovare C

$$F(x;y) = (2x \cdot \cos y, \; -x^2 \operatorname{sen} y + 4y^3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \cos y \quad \text{integro in } x$$

$$U(x;y) = x^2 \cos y + C'(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \begin{cases} -x^2 \operatorname{sen} y + C'(y) \\ F_2 = -x^2 \operatorname{sen} y + 4y^3 \end{cases}$$

$$-x^2 \cancel{\operatorname{sen} y} + C'(y) = -x^2 \cancel{\operatorname{sen} y} + 4y^3$$

$$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4$$

25-10-12

OTTAVA LEZIONE ANALISI II

Domanda 2

Come riconoscere se un campo è conservativo?

Vedere se un campo non è conservativo è molto più facile.

$F \in C^1$ $\quad A \subset \mathbb{R}^2$

$A \subset \mathbb{R}^3$

Teo. di Schwarz $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad C^2$

$$\partial x_i \, \partial x_j \, f = \partial x_j \, \partial x_i \, f$$

Se $F: A \to \mathbb{R}^3 \quad C^1$ A aperto, connesso

Se F è conservativo

$F = \overline{\nabla} U$

$F_x = \partial x U \qquad F_y = \partial y U$

F è $C^1 \Rightarrow U$ è C^2

$$\partial x (\partial y U) = \partial y (\partial x U)$$
$$\partial x \partial z U = \partial z \partial x U$$
$$\partial y \partial z U = \partial z \partial y U$$

$$\partial y U = F_2 \qquad \partial x U = F_1$$

$$\partial x F_2 = \partial y F_1 \quad \Big\| \quad \partial x F_3 = \partial z F_1$$
$$\partial y F_3 = \partial z F_2$$

Se F è conservativo e C^1

$$\partial x F_2 - \partial y F_1 = 0$$

$$\partial x F_3 - \partial z F_1 = 0$$
$$\partial y F_3 - \partial z F_2 = 0$$

<u>Def</u> Sia $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo C^1

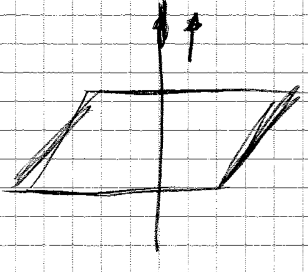
Il campo

$(\partial y F_3 - \partial z F_2 ; \partial z F_1 - \partial x F_3 ; \partial x F_2 - \partial y F_1)$ Si chiama "rotore di F"

"rot F"

1

Campo magnetico generato da una corrente rettilinea



$$B = B(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} ; \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

$$B : \mathbb{R}^2 / \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^1$$

$$\text{rot } B = 0 \Rightarrow \partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

B è irrotazionale

$$\int_\gamma B \, dP = 2\pi$$

$\gamma \rightarrow$ circonf. raggio 1

NON è vero che irrotazionale $\Rightarrow$ conservativo

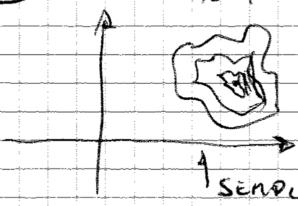
Perché F sia conservativo bisogna considerare sia F ($\text{rot } F = 0$) che il dominio.

$\text{dom } B = \mathbb{R}^2 / \{0\}$

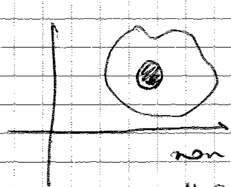
proprietà topologica

Def Sia A aperto in $\mathbb{R}^n$ (connesso).
Si dice che A è semplicemente connesso se ogni curva chiusa in A può essere deformata in un punto stando sempre in A.

ES $\mathbb{R}^2$ sempl connesso

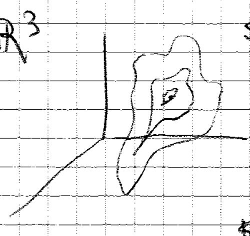


SEMPL. CONNESSO

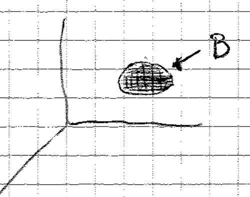


non sempl. connesso "ha dei buchi"

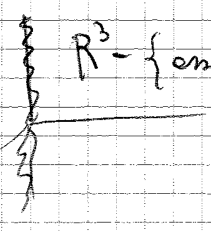
$\mathbb{R}^3$



SEMPL. CONNESSO



$\mathbb{R}^3 - B$ è semplicemente connesso.



$\mathbb{R}^3 - \{\text{asse } z\}$ NON SEMPLICEMENTE FINITO

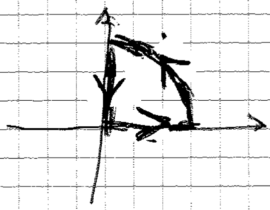
3

Esempio Calcolare $\int_\gamma F\,dP$ dove

$F(x;y) = (x^2+y;\ e^y - x)$

e γ è il bordo dell'insieme D

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ x^2+y^2 \leq 1\}$



Si usa Green

$$\oint_\gamma F\,dP = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

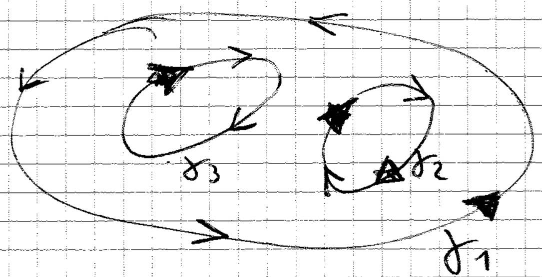
$\partial_x F_2 = -1 \qquad \partial_y F_1 = 1$

$\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = -2$

$$\oint_\gamma F\,dP = \int_D -2\,dx\,dy = -2 \cdot \text{area}(D) = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

Si generalizza GREEN

a regioni il cui bordo è costituito da più curve di Jordan.



$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

GREEN VALE ANCORA IN QUESTA FORMA

$$\int_{\gamma_1} F\,dP + \int_{\gamma_2} F\,dP + \int_{\gamma_3} F\,dP = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Le curve devono essere percorse in modo da lasciare D a sinistra.

Tema d'esame 26/6/12

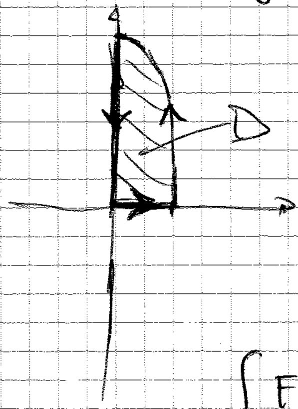
Utilizzando GREEN, calcolare

$$\int_\gamma F\,dP \quad \text{dove } \gamma \text{ è il bordo di } D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 9x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$

orientato "positivamente" = in senso antiorario

= lasciando il dominio a sinistra

$$F(x;y)=\left(e^{x^2}-y,\ \frac{x^4}{4}+e^y\right)$$



$x^2+\frac{y^2}{9}=1$ ellisse

$x\ge 0$

$y\ge 0$

$$\int_\gamma F\,dP=\int_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\int_\gamma F\,dP=\int_D (x^3+1)\,dx\,dy$$

COORDINATE ELLITTICHE

$x=\rho\cos\theta$

$y=3\rho\,\cancel{\text{sen}}\,\theta$

$$x^2+\frac{y^2}{9}=\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\text{sen}^2\theta$$

$$x^2+\frac{y^2}{9}=\rho^2$$

$$0\le\rho\le 1$$

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

Jacobiano

$$\int_\gamma F\,dP=\int_D(x^3+1)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(\rho^3\cos^3\theta+1)\,3\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 3\rho^4\cos^3\theta\,d\rho\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 3\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\left[\frac{3}{5}\rho^5\right]_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta+\frac{\pi}{2}\left[\frac{3\rho^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta+\frac{3}{4}\pi$$

7

(3) Per $a=3$ calcolo $\int_\gamma F\,dP$

$$F(x;y) = (x+y;\ ax) \qquad F(x;y) = (\cancel{x}+y;\ 3x)$$

$$\int_\gamma F\,dP = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\int_{\gamma} F\,dP = \int_D 2\,dx\,dy$$

$$= 2\int_D dx\,dy = 2\ \text{area}\ D = \boxed{2\left(\log 4 - \frac{3}{4}\right)}$$

(4) Det a t.c. F sia conservativo

D è semplicemente connesso.

Per quali $a \in \mathbb{R}$ $\operatorname{rot} F = 0$

$$F(x;y) = (\cancel{x}y;\ ax)$$

$$\operatorname{rot} F = a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$F(x;y) = (x+y;\ x)$ è conservativo

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = x+y$$

Integro in x

$$U(x;y) = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$$

$$U = \frac{x^2}{2} + xy + C(y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = x$$

$$\cancel{\frac{\partial U}{\partial y} = x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + C'(y)$$

$$C'(y) + \cancel{x} = \cancel{x}$$

$$C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = K \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{U(x;y) = \frac{x^2}{2} + xy + K}$$

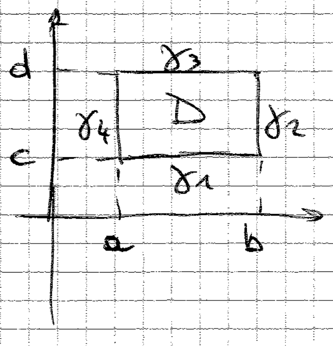
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 193

$$-\int_D y \, dx\, dy = -\int_0^{\pi/3} \int_3^{6\cos\vartheta} \rho \,\mathrm{sen}\,\vartheta \, \rho \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_3^{6\cos\vartheta} \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\vartheta \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= -\frac{99}{8}$$

ES. Dimostrazione del teorema di Green nel caso di un rettangolo.



γ è bordo di D

$$\oint_\gamma F\,dP = \int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,dx\,dy$$

Parametrizzazione γ

$\gamma_1(t) = (t, c) \qquad t \in [a, b]$

$\gamma_2(t) = (b, t) \qquad t \in [c, d]$

$\gamma_3(t) = (-t; d) \qquad t \in [-b, -a]$

$\gamma_4(t) = (a, -t) \qquad t \in [-d, -c]$

$\gamma_1'(t) = (1, 0)$

$\gamma_2'(t) = (0; 1)$

$\gamma_3'(t) = (-1; 0)$

$\gamma_4'(t) = (0; -1)$

$$\int_\gamma F\,dP = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$$\int_{\gamma_1} F\,dP = \int_a^b F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (F_1(t, c), F_2(t, c)) \cdot (1; 0)\,dt$$

$$= \int_a^b F_1(t, c)\,dt = \int_{\gamma_1} F\,dP$$

$$\int_{\gamma_2} F\,dP = \int_c^d (F_1(b, t), F_2(b, t))(0, 1)\,dt =$$

$$= \int_c^d F_2(b; t)\,dt$$

$$\int_{\gamma_3} F\,dP = \int_{-b}^{-a} (F_1(-t; d), F_2(-t; d))(-1, 0)\,dt =$$

$$= -\int_{-b}^{-a} F_1(-t; d)\,dt =$$

$t = -s$

$t = -b \Rightarrow s = b$

$t = -a \Rightarrow s = a \qquad ds = -dt$

$$= -\int_b^a F_1(s; d)\,(-ds) = -\int_a^b F_1(s; d)\,ds = \int_{\gamma_3} F\,dP$$

2

Campi vettoriali e forme differenziali

Notazione diversa molto usata nelle applicazioni (fisica)

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo

$F(x;y;z) = (F_1(x;y;z), F_2 \dots)$

Prendiamo γ regolare $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$$\int_\gamma F\,dP = \int_a^b \Big(F_1(x(t), y(t), z(t)) + F_2(x(t), y(t), z(t)) + F_3(x(t), y(t), z(t)\Big)\,dt$$

$$\boxed{\int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t))\, \underbrace{x'(t)\,dt}_{dx}} + \int \quad \underbrace{y'(t)\,dt}_{dy}$$

$$= \int_\gamma F\,dP = \int_\gamma F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x;y;z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz$$

$$\underbrace{F_1(x,y;z)\,dx + F_2(x;y;z)\,dy + F_3(x,y;z)\,dz}$$

forma differenziale

1-forma differenziale

Es $\gamma(t) = (t; t^2; \frac{1}{t})$ $\quad t \in [1;2]$

$$\omega = e^{xz}(xz + yz)\,dx + e^{xz}\,dy + (x^2 + xy)\,dz$$

Calcolare $\int_\gamma \omega = \int_\gamma F\,dP$

$\gamma'(t) = (1, 2t, -\frac{1}{t^2})$

$dx = x'(t)\,dt = 1 \cdot dt$

$dy = y'(t)\,dt = 2t\,dt$

$dz = z'(t)\,dt = -\frac{1}{t^2}\,dt$

4

$F(x;y) = (-y;0)$ $\qquad \partial_x F_2 = 0$

$\partial_y F_1 = -1$

$$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,dx\,dy$$

$$-\int_\gamma y\,dx = \int_D dx\,dy \qquad \text{Area}(D) = -\int_\gamma y\,dx$$

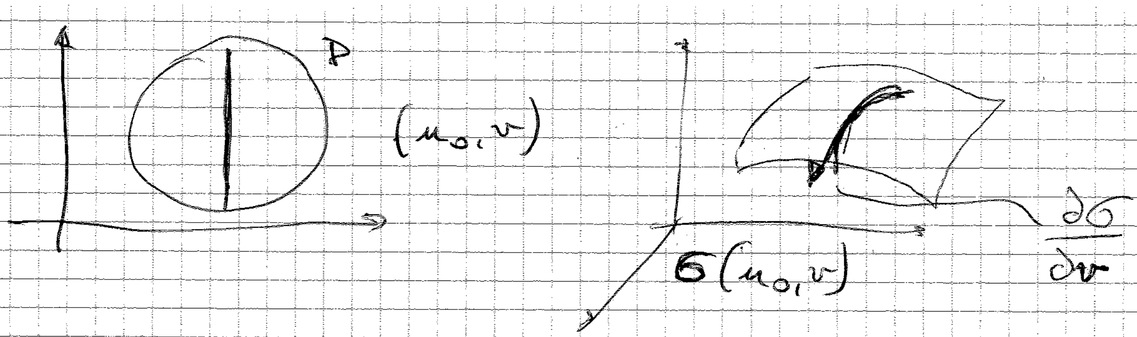
$$\boxed{\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx}$$

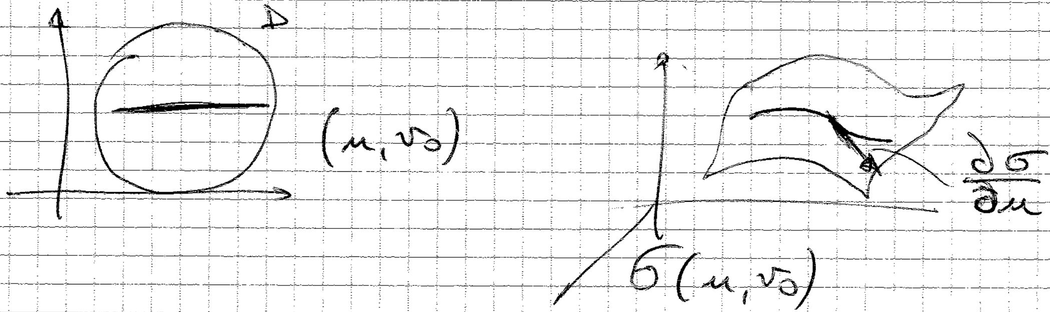
Terminologia corrente

Vettori VS 1-forme

VETTORI (campi)	1-forme
$F = (F_1, F_2, F_3)$ campo	$\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ 1-forma differenziale
$\int_\gamma F\,dP$ integrale curvilineo (2ª specie del campo)	$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ integr. della forma ω lungo γ
conservativo $F = \nabla U$	ω "esatta"
F irrotazionale $\text{rot}\,F = 0$	ω "chiusa"
F conservativo $\Downarrow$ F irrotazionale	ω "esatta" $\Downarrow$ ω "chiusa"
F irrotazionale su D semplice connesso	ω chiusa su D

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 193





$$\sigma(u, v_0) = \left(x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0) \right)$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ sono i due vettori che generano il piano tangente a Σ_1 in (u_0, v_0)

Def Il vettore normale a Σ_1 in (u_0, v_0)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$$

prodotto vettoriale

$N(u_0, v_0)$

σ si dice regolare

- σ è C^1
- $\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ sono linearmente indipendenti in ogni "punto" interno.

$$\begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \\ \partial_u z & \partial_v z \end{pmatrix}$$ ha rango 2 in ogni punto

2

Area $\simeq \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

$$\underbrace{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}_{\|N(u,v)\|} \underbrace{\Delta u \, \Delta v}_{du \, dv}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 193

$$\int_D \|N(u,v)\| \, d\varphi \, d\theta$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\varphi \, \mathrm{sen}\,\theta, -\mathrm{sen}\,\varphi)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (-\mathrm{sen}\,\varphi \, \mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,\varphi \cos\theta, 0)$$

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (\mathrm{sen}^2\varphi \cos\theta, \mathrm{sen}^2\varphi \, \mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)) =$$

$$= (\mathrm{sen}^2\varphi \cos\theta, \mathrm{sen}^2\varphi \, \mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi)$$

$$\|N(u,v)\|^2 = \mathrm{sen}^4\varphi \cos^2\theta + \mathrm{sen}^4\varphi \, \mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^2\varphi \cos^2\varphi$$

$$= \mathrm{sen}^4\varphi (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) + \mathrm{sen}^2\varphi \cos^2\varphi =$$

$$= \mathrm{sen}^4\varphi + \mathrm{sen}^2\varphi \cos^2\varphi = \mathrm{sen}^2\varphi (\mathrm{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$= \boxed{\mathrm{sen}^2\varphi}$$

$$\|N(u,v)\| = \sqrt{\mathrm{sen}^2\varphi} = \boxed{\mathrm{sen}\,\varphi}$$

$$\int_D \mathrm{sen}\,\varphi \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,\varphi \, d\varphi \right] d\theta = 2\pi \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi} = 2\pi [2] = \boxed{4\pi}$$

- Integrali di superficie di I^e specie (funzioni)

Data una superficie $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$

σ regolare $\quad \left(\sigma \; C^1 \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial u} \neq \frac{\partial \sigma}{\partial v} \text{ non paralleli}\right)$

È data una funzione $f(x, y, z)$ continua sul sostegno Σ di σ

<u>Def</u> Integrale di superficie di I^e specie di f su Σ

$$\int_\Sigma f \, d\sigma = \int_D f(\sigma(u,v)) \, \|N(u,v)\| \, du \, dv$$

Esercizio Calcolare

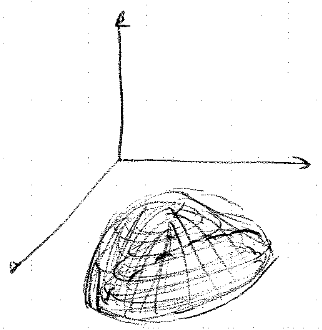
$$\int_\Sigma f \, d\sigma \quad \text{dove}$$

$$f(x;y) = \frac{y+1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+4y^2}}.$$

Σ è la parte del paraboloide ellittico

$$z = -\frac{x^2}{4} - y^2$$

sopra al piano $z = -1$



$$-1 \leq z \leq 0$$

$$z = -\frac{x^2}{4} - y^2$$

$$-1 = -\frac{x^2}{4} - y^2 \qquad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ ellisse}$$

$\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ D ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$

$$\sigma(x,y) = \left(x, y, \frac{-x^2}{4} - y^2\right)$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}$$

$$\nabla g(x,y) = \left(-\frac{x}{2}, -2y\right) \qquad \|\nabla g\|^2 = \frac{x^2}{4} + 4y^2$$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + 4y^2}$$

$$\int_\Sigma f \, d\sigma = \int_D \underbrace{\frac{y+1}{\cancel{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+4y^2}}}}_{f} \underbrace{\cancel{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+4y^2}}}_{\|N\|} \, dx\,dy$$

$$\int_D x\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 2\}$$

$$x=\rho\cos\vartheta \qquad 0\leq\rho\leq\sqrt{2}$$

$$y=\rho\sin\vartheta \qquad 0\leq\vartheta\leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\rho\cos\vartheta\sqrt{1+4\rho^2\cos^2\vartheta+4\rho^2\sin^2\vartheta}\;\rho\,d\rho\,d\vartheta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\cos\vartheta\sqrt{1+4\rho^2}\;d\rho\,d\vartheta=\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\vartheta$$

$$=\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta}_{0}\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho=0$$

versore normale

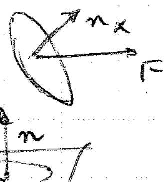
$$n(u,v)=\frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}$$

Def L'integrale di flusso di F attraverso Σ
(integr. di sup. di 2ª specie di F attraverso Σ)

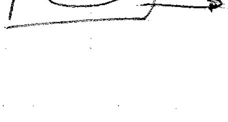
$$\int_\Sigma \underbrace{F\cdot n}_{\text{prodotto scalare}}\,d\sigma=\int_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot n(u,v)\,d\sigma$$

$$=\int_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}\|N(u,v)\|\,du\,dv$$

$$\boxed{=\int_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot N(u,v)\,du\,dv}$$



$\int (F\cdot n)$ componente di F parallela a n



$F\cdot n=0$

$F(x;y;z) = (\cos(xz), xy, z)$

$N(x;y) = (0, 1, 1)$

$F \cdot N = (\cos(x \overset{(1-y)}{\cancel{z}}), xy, \overset{g(x;y)}{1-y}) \cdot (0,1,1)$

$F \cdot N = (\cos((x(1-y)), xy, 1-y) \cdot (0,1,1)$

$\boxed{= xy + 1 - y}$

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_D xy + 1 - y \, dx\, dy$$

$$\int_0^1 \int_0^1 xy + 1 - y \, dx\, dy = \frac{3}{4}$$

$\left[\frac{x^2 y}{2} + x - xy\right]_0^1$

$\int_0^1 \frac{y}{2} + 1 - y$

$\left[\frac{y^2}{4} + y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1$

$\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1+4-2}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

$=$

CAMBIO PARAMETRIZZAZIONE

$\sigma(u,v)$ $\quad$ $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$

$\varphi : D' \to D$

$(u,v) = \varphi(\alpha, \beta)$

$\sigma(u,v) = \sigma(\varphi(\alpha,\beta))$

$\sigma \circ \varphi : D' \to \overset{\mathbb{R}^3}{\Sigma}$

$\tilde{\sigma}(\alpha, \beta)$ ha lo stesso sostegno di σ

L'integrale di I° specie non cambia per cambi di parametro

L'integrale di II° specie non cambia se le 2 parametrizzazioni inducono lo stesso versore normale.

Altrimenti cambia segno.

$\int F \cdot \underline{\underline{n}}$

8

$f(x;y;z) = x^2 z$ $\qquad z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

$f(x,y,g(x,y)) = x^2\sqrt{4-x^2-y^2}$

$$\int_\Sigma f\,d\sigma = \int_D x^2 \cancel{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,\frac{2}{\cancel{\sqrt{4-x^2-y^2}}}\,dx\,dy$$

$$= 2\int_D x^2\,dx\,dy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\cos^2\vartheta\,\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\,[1] = 2\pi$$

Eseguire in altri modi

II) utilizzare la parametrizzazione polare Σ con ρ, ϑ

III) Usare le coordinate sferiche (φ, ϑ)

$$\int\cos\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \sin\vartheta\cos\vartheta - \int\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta\,d\vartheta$$

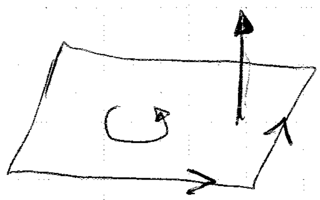
$$\int\cos^2\vartheta\,d\vartheta = \sin\vartheta\cos\vartheta + \int 1-\cos^2\vartheta\,d\vartheta$$

$$2\int\cos^2\vartheta\,d\vartheta = \sin\vartheta\cos\vartheta + \vartheta$$

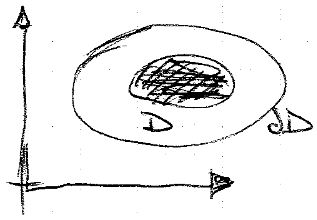
$$= \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta$$

$$(0+\pi-0-0) = \pi$$

La normale è orientata in modo che



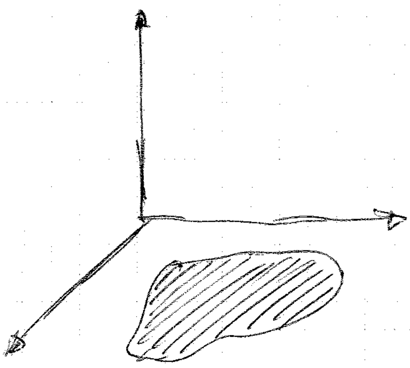
la normale è orientata come la punta di una vite che si avvita in senso positivo



$$\oint_{\partial D} F\,dP = \int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,dx\,dy$$

$$\sigma(x;y) = (x;y;0)$$

$$\Sigma = D$$



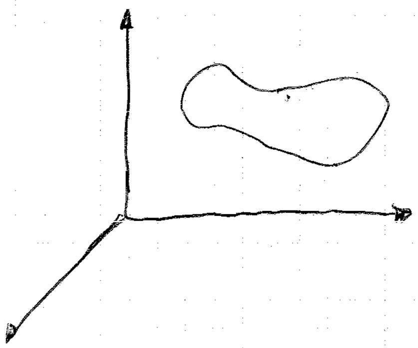
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = \text{rot}\, F$$

$$\text{rot}\, F = (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,\vec{K}$$

$$\int_D \text{rot}\, F\, n\, d\sigma = \int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,dx\,dy$$

$$\bar{K}\cdot\bar{K} = 1$$



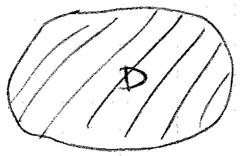
$$\oint_\gamma F\,dP$$

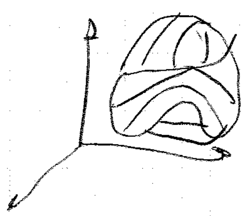
$$\gamma = \partial\Sigma$$

prendo Σ in modo che

$$\partial\Sigma = \gamma$$

$$\oint_{\gamma = \partial\Sigma} F\cdot dP = \int_\Sigma \text{rot}\, F\, n\, d\sigma$$





$\mathbb{R}^3$ (Vale in $\mathbb{R}^n$ ~~la~~ $\forall n$)

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo vettoriale C^1

Def Si chiama divergenza di F

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{dx} + \frac{\partial F_2}{dy} + \frac{\partial F_3}{dz}$$

$$\operatorname{div} F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\left(F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i \right)$$

Teorema (della divergenza, o di Gauss)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di integrazione

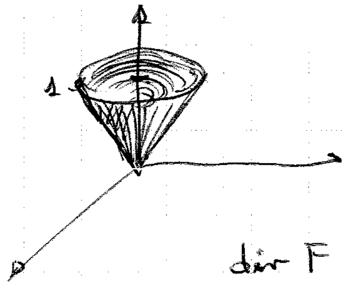
Sia $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 su un aperto contenente Ω

Allora

$$\int_{\partial\Omega} F\, n\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz$$

FLUSSO di F

ESEMPIO Calcolare il flusso di $F(x;y;z) = (2x+z^2, 3, e^y)$ uscente da $\Omega = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$



$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz$$

$$\operatorname{div} F = (2; 0, 0)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = 2\int dx\,dy\,dz = 2 \text{ Vol cono} = 2\frac{\pi}{3}$$

$$= \nabla g F + g \operatorname{div} F$$

$$\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F$$

$$\int_\Omega \nabla g F + g \operatorname{div} F = \int_\Omega \operatorname{div}(gF)$$

$$= \int_{\partial\Omega} g F n \, d\sigma$$

$$\int_\Omega \nabla g F \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} g F n \, d\sigma - \int_\Omega g \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$$

Integrazione per parti in $\mathbb{R}^3$

$$\int_a^b g' f = [fg]_a^b - \int_a^b f' g$$

$F = (f, 0, 0)$ $\qquad \nabla g = (\partial_x g, \partial_y g, \partial_z g)$

$$\int_\Omega f \partial_x g \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} g f n \, d\sigma - \int_\Omega g \, \partial_x F \, dx\,dy\,dz$$

6

;

$S_n = a_0 + a_1 + \dots a_n$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

S_n è una successione di numeri reali

$\lim_{n\to\infty} S_n$
- $= S \in \mathbb{R}$ si dice che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente a S. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$
- $= +\infty$ si dice che la serie diverge positivamente.
- $= -\infty$ si dice che la serie diverge negativamente.
- non esiste: si dice che la serie è indeterminata o oscillante

ESEMPI

$r \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} r^k$ serie geometrica di ragione r

$a_k = r^k \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{r^{k+1}}{r^k} = r$

$r = \frac{1}{2} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

È facile calcolare le ridotte $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$

$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$

$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$
$\qquad - r - r^2 - r^3 - \dots - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}$

$$\boxed{S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}} \qquad r \neq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se } |r| < 1 \\ +\infty & \text{se } r \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

Blocco "K" ho 2^K termini $\geq \frac{1}{2^{K+1}}$

somma $\geq 2^K \frac{1}{2^{K+1}} \geq \frac{1}{2}$

Sto sommando più di infinite volte $\frac{1}{2}$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} = +\infty$$

Stabilire il carattere di una serie

Vuol dire

Stabilire se la serie converge / diverge / indeterminata

$$\sum_{K=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{K}\right)^K$$

Se la serie converge, $\lim_{K \to +\infty} a_K = 0$

$$\lim_{K \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{K}\right)^K = e^{-1} \neq 0$$

$\Rightarrow$ la serie (diverge) non converge

OSS Il carattere di una serie non cambia se cambio o tolgo della serie un numero finito di termini

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_K \quad \begin{matrix}\text{convergente} \\ \text{divergente}\end{matrix} \quad \sum_{K=n+1}^{\infty} a_K$$

ESEMPIO

$$\sum_{K=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{K}\right)$$

$$a_K = \log\left(1 + \frac{1}{K}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} a_K = \lim_{n \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{K}\right) = 0$$

$S_1 = \log 2$

$S_2 = \log 2 + \log \frac{3}{2}$

1. $S_3 = \log 2 + \log 3/2 + \log 4/3$

$S_4 = \log 2 + \log 3/2 + \log 4/3 + \log 5/4$

$S_4 = \cancel{\log 2} + \cancel{\log 3} - \cancel{\log 2} + \cancel{\log 4} - \cancel{\log 3} + \log 5 - \cancel{\log 4}$

$S_4 = \log 5$

La serie di Mengoli converge a 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}} = 1$$

q carica puntiforme nell'origine in $\mathbb{R}^3$

Il campo generato da q è

$$E(r) = \varepsilon_0 q \frac{\bar{r}}{\|r\|^2} \qquad r=(x;y;z) \qquad \|r\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Il flusso di E uscente da una superficie Σ attorno a O, non dipende da Σ

$$\int_\Sigma E\, n\, d\sigma = \text{costante non dipende da } \Sigma$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \qquad x \in \mathbb{R}^3 \qquad x = r$$

$$E(x) = \varepsilon_0 q \frac{x}{\|x\|^2} \qquad \|E(x)\| = \frac{1}{\|x\|^2}$$

① $\operatorname{div} E(x) = 0 \qquad \forall x \neq 0$

Un campo a divergenza nulla si chiama solenoidale

$$\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

$$\operatorname{rot} E = \nabla \times E$$

$$\operatorname{div} E = \nabla \cdot E$$

campo radiale $\qquad x = (x_1, x_2, x_3)$

$$F(x) = \phi(\|x\|)\, x$$

$$\operatorname{div}(gF) = \nabla g\, F + g \operatorname{div} F$$

$$\operatorname{div}(\phi(\|x\|)\, x) = \nabla(\phi\|x\|) \cdot x + \phi(\|x\|) \operatorname{div}(x)$$

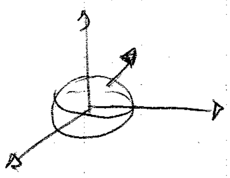
$$= \phi'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \cdot x + 3\phi(\|x\|)$$

Se oriento la $\underbrace{n_2}_{n}$ come la n_1

$$\int_{\Sigma_1} E\, n_1\, d\sigma = \int_{\Sigma_2} E\, n\, d\sigma$$

Il flusso non dipende dalla superficie uscente

Calcoliamo il flusso su una superficie comoda Σ sfera di raggio 1



$$\int_\Sigma E\, n\, d\sigma = \varepsilon_0 q \int_\Sigma \frac{x}{\|x\|}\, n\, d\sigma = \varepsilon_0 q \int_\Sigma x \cdot n\, d\sigma$$

Che cos'è n su una sfera di raggio 1.

$n(x) = x \qquad \|x\| = 1$

$$\varepsilon_0 q \int_\Sigma x \cdot x\, d\sigma = \varepsilon_0 q \underbrace{\int_\Sigma d\sigma}_{\text{Area } \Sigma} = \varepsilon_0 q\, 4\pi$$

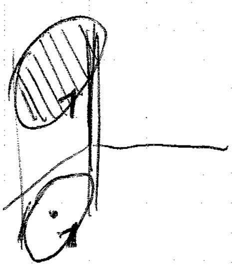
$E = \varepsilon_0 q \frac{x}{\|x\|^3}$ flusso $\varepsilon_0 q\, 4\pi$

ES Calcolare il lavoro del campo

$F(x; y; z) = (z; x; y)$

nello spostare un punto lungo la curva interna del cerchio $2x^2 + y^2 - 6x = 0$ orientata in modo che la proiezione della curva sul piano xy sia antiorario

(Usare il teorema del rotore)



$$2x^2 + y^2 - 6x = 0$$

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{4}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{2}{9} y^2 = 1$$

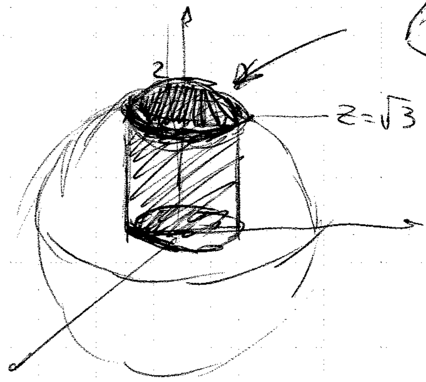
$$z = 3 - x$$

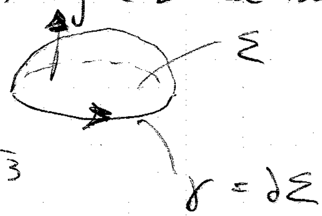
Calcolare il flusso del rotore di F

$$F(x;y;z) = (z;x;y)$$

attraverso la porzione di sfera $x^2+y^2+z^2=4$

interna al cilindro $x^2+y^2 \le 1$ nel semispazio $z \ge 0$, orientata verso l'alto





$$\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \oint_\gamma F \, dP$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow z^2 = 3 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}$$

$z=\sqrt{3}$

$x^2+y^2=1$

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{3}) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$

$$\int_\gamma F\,dP = \int_0^{2\pi} \underset{(z;x;y)}{(\sqrt{3}, \cos t, \operatorname{sen} t)} \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \overset{0}{-\sqrt{3}\operatorname{sen} t} + \cos^2 t \, dt = \pi$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=100}^{\infty} a_n$ hanno lo stesso carattere anche se non hanno la stessa somma.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{99} a_n}_{\text{numero}} + \sum_{n=100}^{\infty} a_n$$

converge / diverge se e solo se converge / diverge

Serie a termini positivi

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad a_n > 0 \quad \forall n$

Teorema Una serie a termini positivi
o converge
o diverge positivamente

Dim

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \qquad S_N > 0 \quad \forall N$$

$$S_{N+1} = a_0 + a_1 + \quad + a_n + a_{n+1}$$

$$= S_N + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_N$$

La somma delle ridotte è crescente

$$S_N \leq S_{N+1} \quad \forall N$$

Allora $\lim_{N \to \infty} S_N \begin{cases} \text{finito } a > 0 \\ +\infty \end{cases}$

(teorema sulle successioni, vedi Analisi I)

S_N crescente

$$\lim_{n \to \infty} S_N = \sup_N S_N$$

2