



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 716

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Castagneri

MATERIA: Meccanica delle Macchine

Prof. Eula

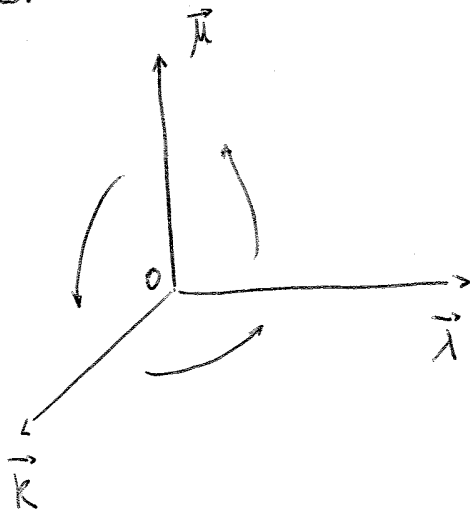
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

5/3/20

MECCANICA DELLE PARTICELLE (o con recuperazioni) (1)
27/4 dalle 16:30



Generica terna destrorsa

$$\vec{l} \wedge \vec{\mu} = \vec{k}$$

$$\vec{\mu} \wedge \vec{l} = -\vec{k}$$

$$\vec{\mu} \wedge \vec{k} = \vec{l}$$

$$\vec{l} \wedge \vec{k} = -\vec{\mu}$$

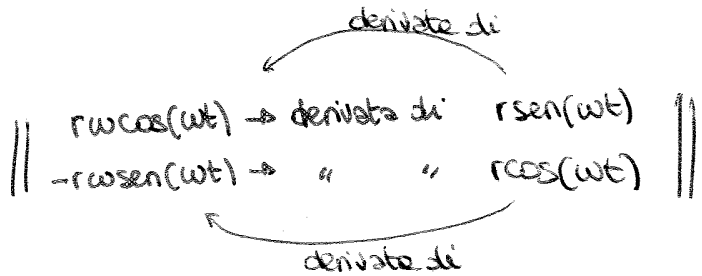
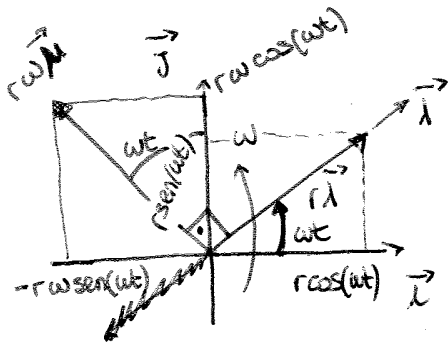
$$\vec{k} \wedge \vec{l} = \vec{\mu}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{\mu} = -\vec{l}$$

$$\frac{d(\vec{r}_l)}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{r}_l)$$

derivata di un vettore rotante nel piano

(NO DIMOSTRAZIONE RICHIESTA)



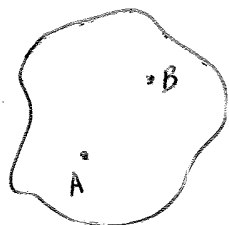
$$\Downarrow$$

$$\frac{d(\vec{r}_l)}{dt} = r \omega \vec{\mu} = r \omega (\vec{k} \wedge \vec{l}) = \omega \vec{k} \wedge \vec{r}_l$$

CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

↳ ripassare da FISICA

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO



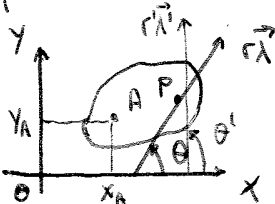
AB = costante

LAVORIAMO NEL PIANO

GdL (gradi di libertà)

↳ minimo numero di parametri indipendenti necessari a descrivere il sistema

Nel piano un C.R. ha 3 GdL



GdL $\begin{cases} x_A \\ y_A \\ \theta \text{ (coord. angolare)} \end{cases}$

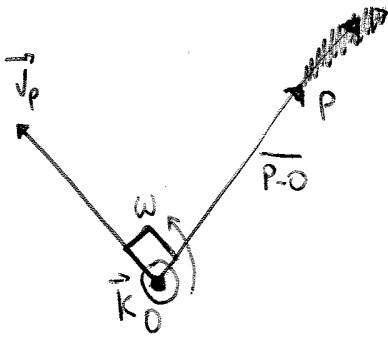
\vec{r}_l : retta orientata passante per un punto qualsiasi (P)

$$\theta' = \theta + \alpha \neq \theta$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

velocità angolare del corpo rigido nel piano (rad/s)

$\omega \vec{k} \wedge (\vec{P}-O) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ → Graficamente ruota $\vec{P}-O$ di 90°



Avevamo trovato che: $\vec{v}_p = r\omega\vec{\mu}$

$(\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{k})$ terne destrorse

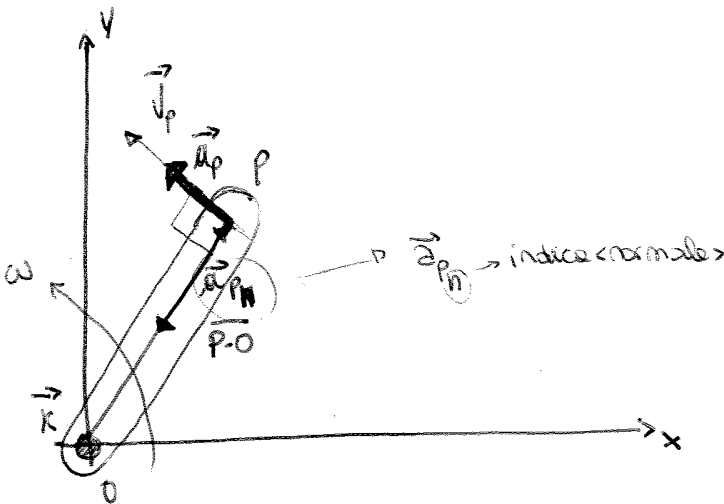
$$\vec{a}_p = \frac{d(r\omega\vec{\mu})}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \vec{\mu} + r\omega \frac{d\vec{\mu}}{dt} = r\dot{\omega}\vec{\mu} + r\omega[\omega\vec{k} \wedge \vec{\mu}] =$$

$$= r\dot{\omega}[\vec{k} \wedge \vec{\lambda}] + r\omega^2[-\vec{\lambda}] = \dot{\omega}\vec{k} \wedge (r\vec{\lambda}) - r\omega^2\vec{\lambda} =$$

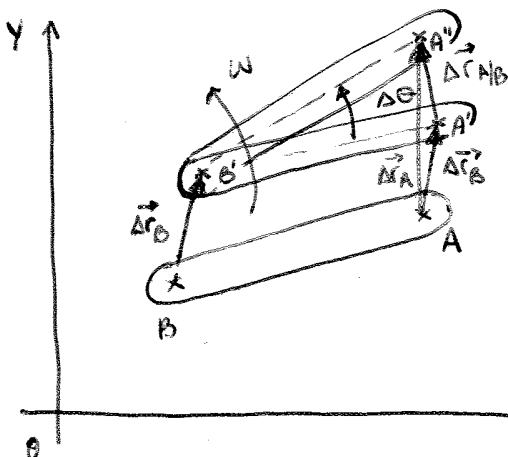
$$= \dot{\omega}\vec{k} \wedge (r\vec{\lambda}) - \omega^2(r\vec{\lambda}) = \boxed{\dot{\omega}\vec{k} \wedge (\vec{P}-O) - \omega^2(\vec{P}-O) = \vec{a}_p}$$

↑
accelerazione
tangenziale

↑
accelerazione
centripeta o normale
(sarà sempre negativa)



ROTOTRASLAZIONE => MOTO PIANO GENERICO



$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B + \Delta \vec{r}_{A/B}$$

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \theta (AB)$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \omega \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{B})$$

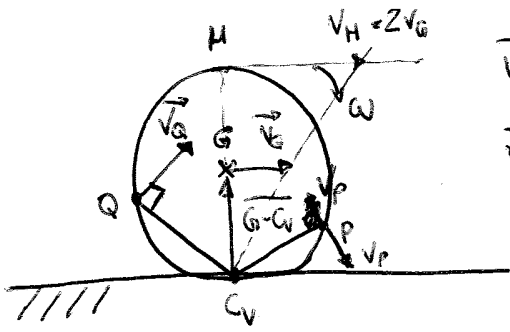
velocità di A rispetto a B

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{v}_{A/B} = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B$$

$$\vec{v}_B = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_{A/B} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{B})$$

Formula fondamentale della cinematica

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$



$$\vec{v}_G = \omega \vec{K} \wedge (\overline{G-C_v})$$

$$\vec{v}_H = \omega \vec{K} \wedge (\overline{H-C_v})$$

$$\vec{v}_Q = \omega \vec{K} \wedge (\overline{Q-C_v})$$

CATENA CINEMATICA: più c.r. vincolati tra loro da coppie cinematiche (vincoli)

- CAT. CINEMATICA:
-) semplice: se i corpi rigidi hanno una o più coppie cinematiche ciascuno
 -) composte: se esiste in essa almeno un corpo rigido con tre coppie cinematiche
 -) chiusa: se ogni c.r. ha almeno due coppie cinematiche
 -) aperte: se esiste un c.r. con una sola coppia cinematica

MECCANISMI: se esiste nella catena cinematica un corpo rigido fisso (telaino) - Hanno almeno un GdL.

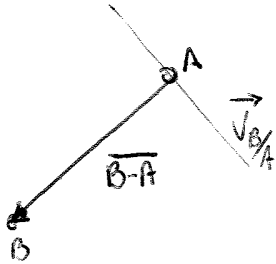
Se il meccanismo ha zero GdL diventa una STRUTTURA

VINCOLI GEOMETRICI

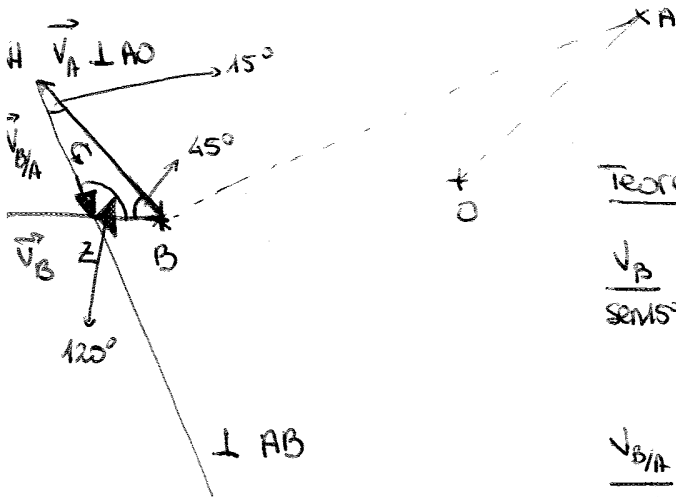
		GdL	GdV (gradi di vincoli)	
Correlo		(2)	(1)	
Cerniera piana		(1)	(2)	
Pattino		(1)	(2)	
Incastro		(0)	(3)	

$$\vec{v}_B = \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{O}) + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$$

M	?	<u>NOTA</u>	$\omega_2 (AB)?$
D	anzz.		$\perp (BA)$
V	?		?



CALCOLO DELLE INCORNITE \Rightarrow Triangolo delle velocità



Teorema seni

$$\frac{v_B}{\sin 15^\circ} = \frac{v_A}{\sin 20^\circ} \Rightarrow v_B = 9,86 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_{B/A}}{\sin 45^\circ} = \frac{v_A}{\sin 20^\circ} \Rightarrow v_{B/A} = 26,33 \text{ m/s}$$

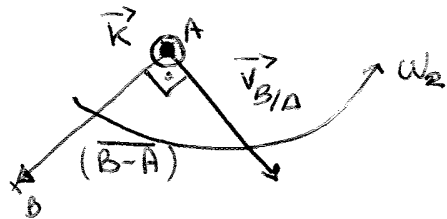
$$v_{B/A} = \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$$

$$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{AB} = 44,15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

\perp piano (\vec{k})

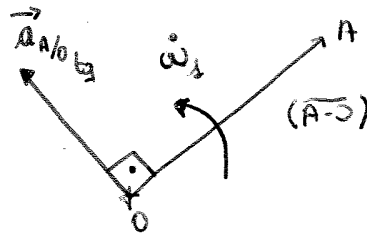
\curvearrowright antiorario

M	} ω_2
D	
V	



$$\vec{a}_{A/B_2} = \omega_1 K \wedge (\overline{A-O})$$

$$\begin{array}{l} M \\ D \\ V \end{array} \left| \begin{array}{l} \dot{\omega}_1 (\overline{A-O}) = 2.10 \text{ m/s}^2 \\ \perp \overline{A-O} \\ \dot{\omega}_1 \end{array} \right.$$



$$2) \underline{AB}: \vec{a}_B = \underbrace{[\vec{a}_{A/O_n} + \vec{a}_{A/O_{B_2}}]}_{\vec{a}_A} + \underbrace{[\vec{a}_{B/A_n} + \vec{a}_{B/A_{B_2}}]}_{\vec{a}_{B/A}}$$

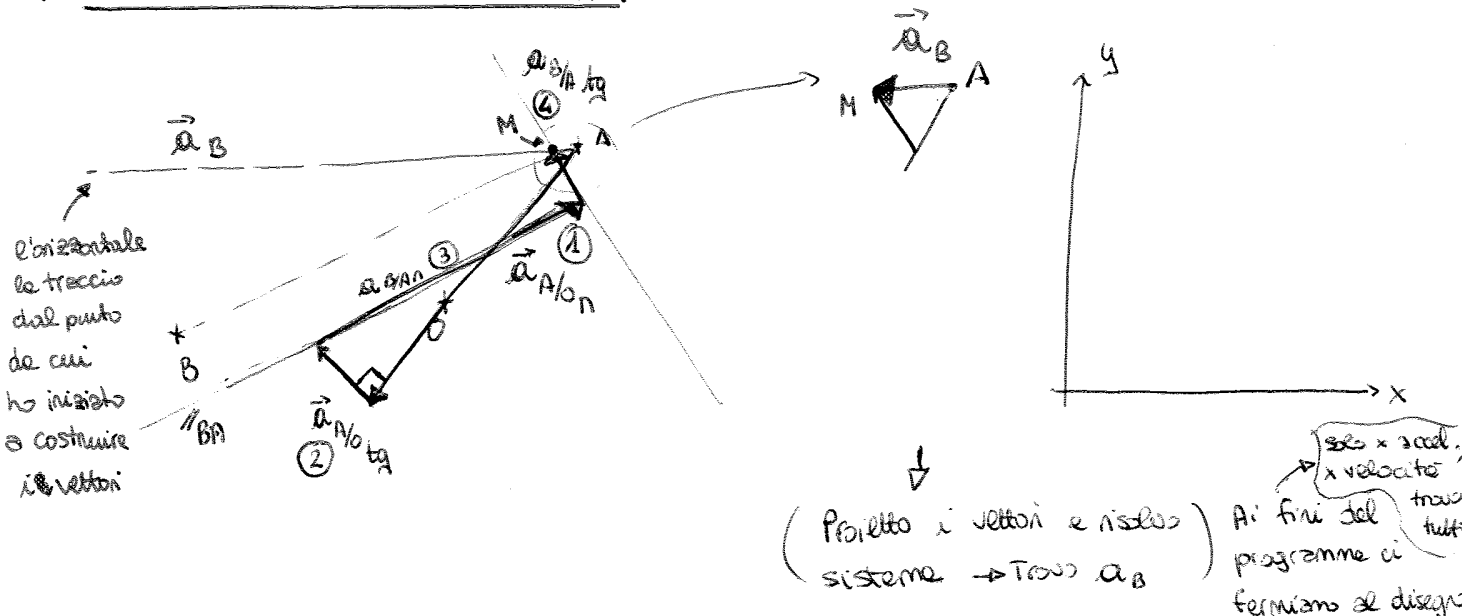
$$\vec{a}_B = \left[-\omega_1^2 (\overline{A-O}) + \dot{\omega}_1 \vec{K} \wedge (\overline{A-O}) \right] + \left[-\omega_2^2 (\overline{B-A}) + \dot{\omega}_2 \vec{K} \wedge (\overline{B-A}) \right]$$

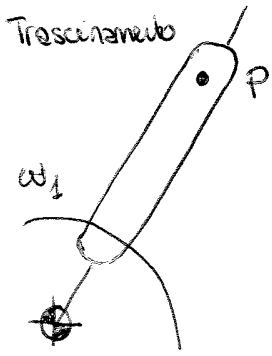
$\begin{array}{l} M \\ D \\ V \end{array} \left \begin{array}{l} ? \\ \text{viale} \\ ? \end{array} \right.$	<p><u>NOTA</u></p>	<p><u>NOTA</u></p>	$\begin{array}{l} \omega_2 (BA) = ? \\ \perp BA \\ \dot{\omega}_2 ? \end{array}$
---	--------------------	--------------------	--

$$\vec{a}_{B/A_n} = -\omega_2^2 (\overline{B-A})$$

$$\begin{array}{l} M \\ D \\ V \end{array} \left| \begin{array}{l} \omega_2^2 (BA) = 1.132,26 \text{ m/s}^2 \\ \text{lungo } AB \\ \text{da } B \text{ verso } A \end{array} \right.$$

→ POLIGONO DELLE ACCELERAZIONI



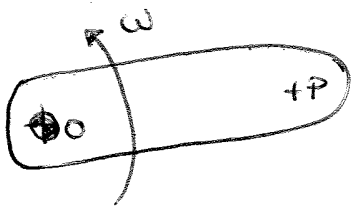


→ Moto di trascinamento: rotazione intorno a O_1 (fisso) del corpo 2

⇒ Relativo e trascinamento persenti contemporaneamente nel corpo 2

CORPO 1

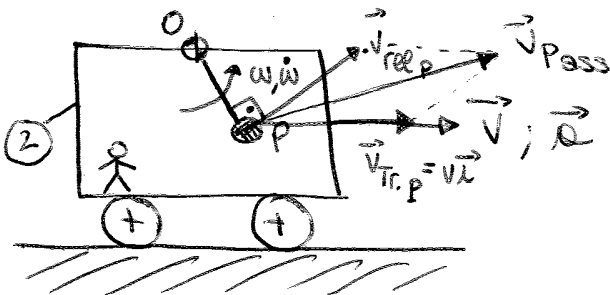
Relativo + trascinamento = assoluto



Assoluto

→ Moto assoluto: rotazione di P intorno ad O (fisso)

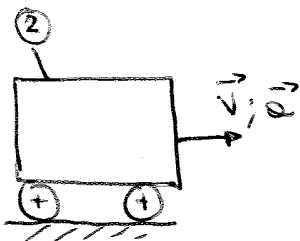
ALTRO ESEMPIO DI ~~PER~~ MOTO COMPOSTO



Moto relativo: (interno al sistema ~~2~~ 2); rotazione intorno ad O

$$\vec{v}_{rel P} = \vec{v}_0 + \omega \vec{K} \wedge (\vec{P} - \vec{O})$$

(per l'osservatore nel carrello, O è fisso)

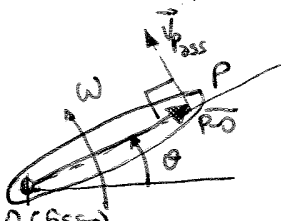


Moto di trascinamento: traslazione del carrello in orizzontale

13/03/2012 → continuazione gli 10

Partiamo da corpo 1 (conosciamo gli ω)

1) P_0

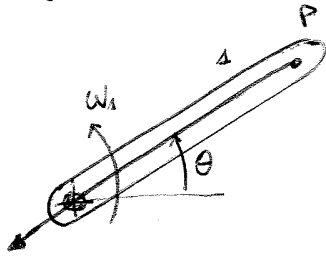


$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_{P_{ass}} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{P/O}$$

$$\vec{v}_{P_{ass}} = \omega \vec{K} \wedge (\vec{P} - \vec{O})$$

1) PO



$$\dot{\omega} = 0$$

$$\vec{a}_{Pass} = \vec{a}_O + \vec{a}_{P/O_n} + \vec{a}_{P/O_{rot}}$$

$$\vec{a}_{Pass}$$

$$\vec{a}_{Pass} = -\omega^2(\overline{PO}) + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\overline{P-O})$$

M | $\omega^2 PO = 1394,7 \text{ m/s}^2$

D | lungo PO

V | da P verso O

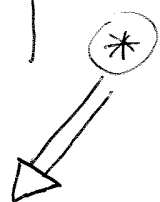
2) PO₂ : MOTO COMPOSTO

$$\vec{a}_{Pass} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_C$$

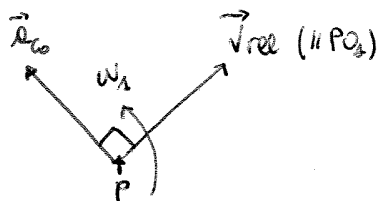
$$\vec{a}_{Pass} = \vec{a}_{P/O_n} = \pm a_{rel} \vec{\lambda} + \left[\frac{a_{O_2}}{r} - \omega_1^2(\overline{P-O_2}) + \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (\overline{P-O_2}) \right]_{tr} + 2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{a}_{P/O_n} = \vec{a}_{Pass} = \pm a_{rel} \vec{\lambda} + \left[-\omega_1^2(\overline{P-O_2}) + \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (\overline{P-O_2}) \right]_{tr} + 2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$$

M		?	$\omega_1^2 PO_2 = 2338 \text{ m/s}^2$?	$2\omega_1 v_{rel} = 3528,9 \text{ m/s}^2$
D	NOTA	lungo $\vec{\lambda}$	lungo PO ₂	$\perp PO_2$	$\perp \vec{v}_{rel}$
V		?	da P \rightarrow O ₂	ω_1 ?	



$$\vec{a}_C = 2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$$



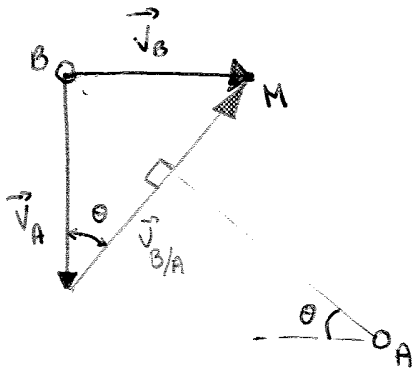
Costruzione Poligono delle velocità \rightarrow

1) AO: $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \omega_1 \vec{K} \wedge (\vec{A}-\vec{O})$

M | $\omega_1 AD = 2 \text{ m/s}$
 D | $\perp AD$
 V | $\omega_1 \uparrow$

2) AB: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_2 \vec{K} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$
 \neq $\frac{\vec{v}_{B/A}}{\perp BA}$

3) BC: $\vec{v}_B = \vec{v}_C + \omega_3 \vec{K} \wedge (\vec{B}-\vec{C})$
 $\perp BC$



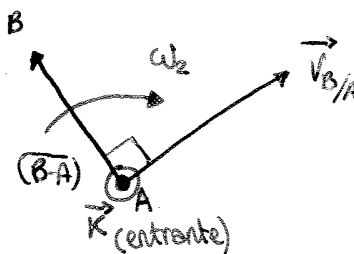
$\text{sen } \theta = \frac{d}{AB} = 0,5 \Rightarrow \theta = 30^\circ$

$v_B = v_A \tan \theta = 1,15 \text{ m/s}$

$v_{B/A} = v_A / \cos \theta = 2,31 \text{ m/s}$

$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{AB} = 11,55 \text{ rad/s}$

$\vec{v}_{B/A} = \omega_2 \vec{K} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$

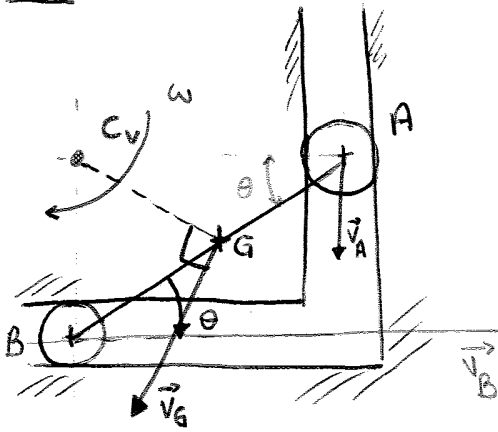


ES. 4

AD ≠ cost

NOTO COMPOSTO { Relativo (quello che avviene dentro sistema) → traslazione lungo aste
 Trascinamento → rotazione del corpo (z) intorno a O (ω)
 Assoluto → Traslazione verticale del corpo (4)

ES.2



$AB = \text{cost} \Rightarrow$ NOTO SETTORICE

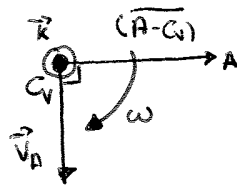
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{A/C_v} = \omega \vec{k} \wedge (\overline{A-C_v})$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{B/C_v} = \omega \vec{k} \wedge (\overline{B-C_v})$$

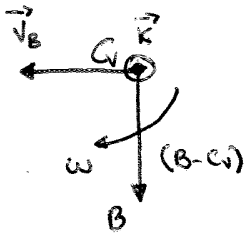
$AC_v = AB \cos \theta = 0,173 \text{ m}$

$BC_v = AB \sin \theta = 0,10 \text{ m}$

$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = 11,56 \text{ rad/s}$



$v_B = \omega (BC_v) = 1,156 \text{ m/s}$



$AG = \frac{AB}{2}$

$GC_v^2 = AC_v^2 + AG^2 - 2 (AC_v)(AG) \cos \theta$

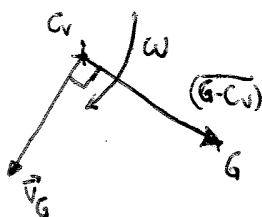
$GC_v = \sqrt{\dots} = 0,0999 \text{ m}$

$\vec{v}_G = \vec{v}_{C_v} + \omega \vec{k} \wedge (\overline{G-C_v})$

$\omega (GC_v) = 1,154 \text{ m/s}$

$\perp GC_v$

ω

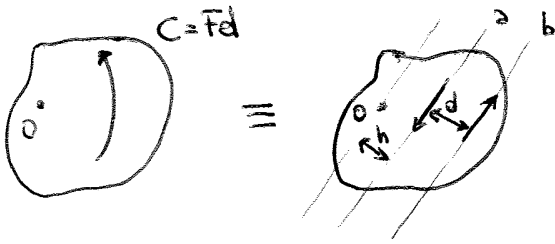


$$M_o = \vec{F}(d+h) - \vec{F}(h) = \vec{F}d \Rightarrow \text{Effetto di sola rotazione}$$

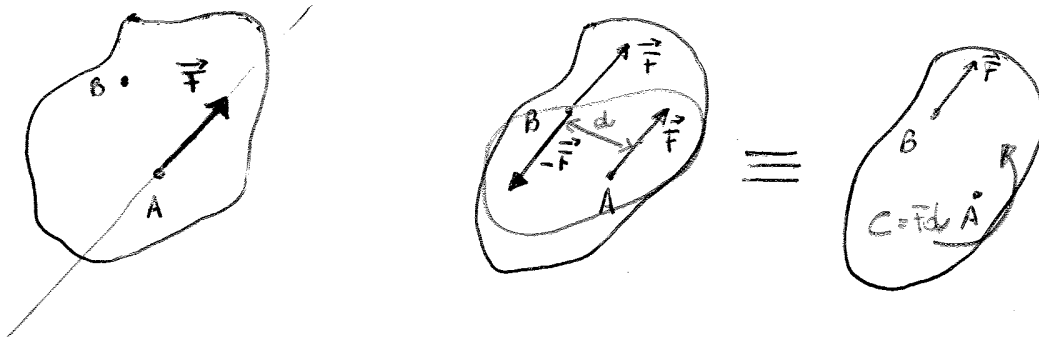
↑
identità

↳ Coppie di forze (dipende da F e dalle distanze al tra le forze)

→ Non dipende da $O \Rightarrow$ vettore libero

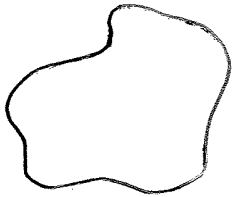


MOMENTO DI TRASPORTO



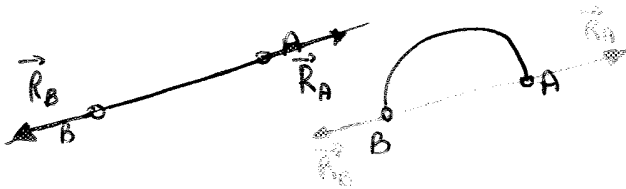
3 REGOLE BASE DEGLI EQUILIBRI (lavorare sulle risultanti)

1) C.R. soggetto a 2 forze

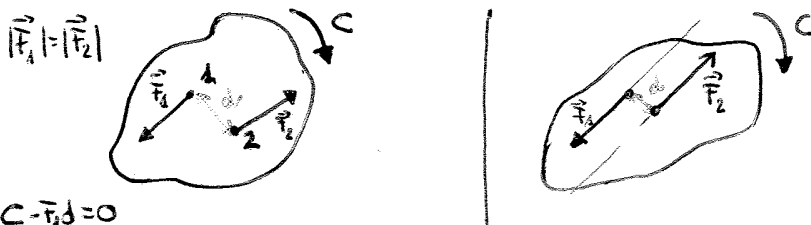


- 1) equilibrio TRASLAZIONE
forze uguali ed opposte ($H;V$)
- 2) equilibrio alla ROTAZIONE
stessa retta di azione (D)

ASTA SCARICA (trascuro il peso)



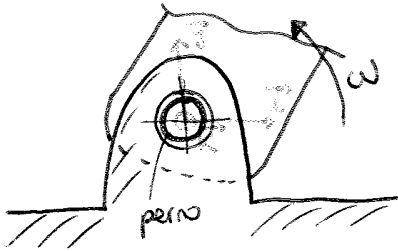
2) C.R. soggetto a 2 forze + 1 coppia



$$\left. \begin{matrix} V_x \neq 0 \\ V_y = 0 \\ \omega_z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 \text{ GdV} \quad \left| \quad \begin{matrix} \text{SENZA} \\ \text{ATTRITO} \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_z \neq 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{REAZIONI} \\ \text{VINCOLARI TRA} \\ \text{GUIDA E PERNO} \end{matrix}$$

b) Coppia rotoidale o cerniere



$$\left. \begin{matrix} V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ \omega_R \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2 \text{ GdV}$$

$$\omega_R \neq 0 \Rightarrow 1 \text{ GdL}$$

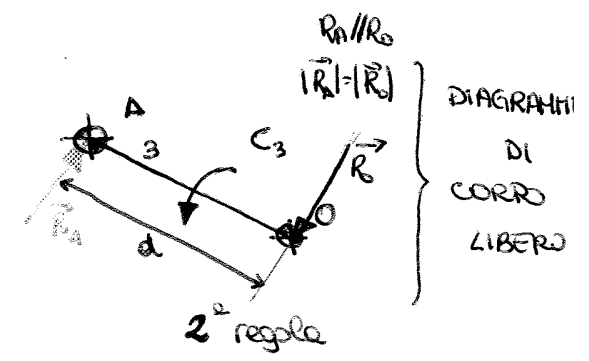
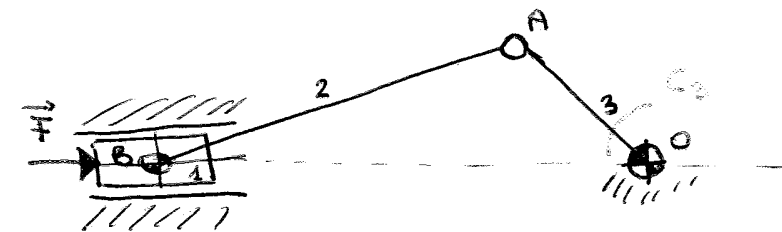
$$\vec{R} \left(\begin{matrix} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_k = 0 \end{matrix} \right) \begin{matrix} \text{REAZIONI} \\ \text{VINCOLARI} \end{matrix}$$

(una reaz. vincolare risultante scomponibile lungo x e y)

EQUILIBRIO STATICO DI BIELLA MANOVELLA

(NO RESI
NO ATTRITO)

→ calcola C_3 in modo che il sistema rimanga in equilibrio



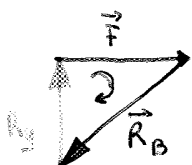
$\vec{F}; \vec{R}_B; R_y$
↓
(della guida)

1^a Regola

$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B|$

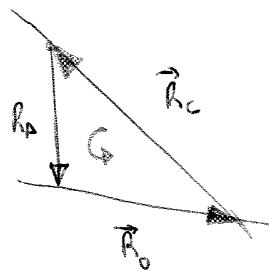
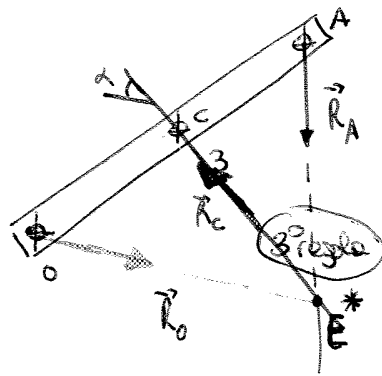
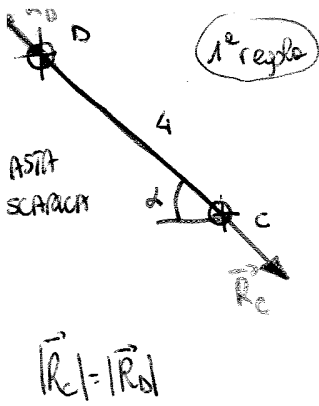
↳ Passando da corpo 1 a corpo 2 cambia verso (azione/reazione)

3^a Regola

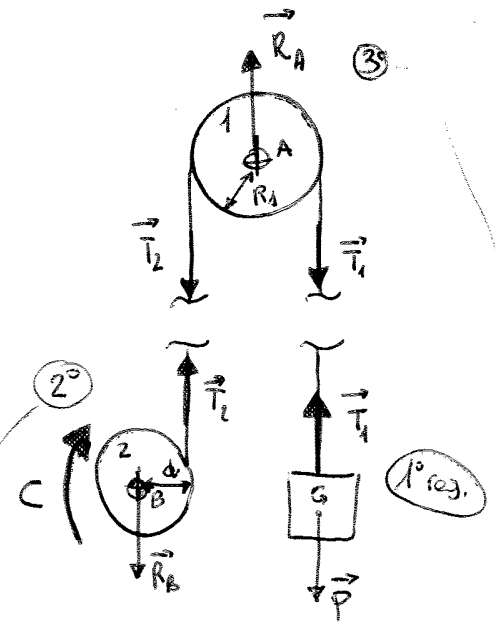


$\vec{F} + \vec{R}_B + R_y = 0$

DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO



$\vec{R}_o + \vec{R}_c + \vec{R}_c = 0$



$T_1 = P$

$R_A = T_1 + T_2 \Rightarrow R_A = 2T_1$

$T_1 R_1 - T_2 R_1 = 0$ (eq. alla rotaz.)

$T_1 = T_2$

3^a REGOLA

* $\rightarrow \infty$

2^a REGOLA

$\vec{R}_B //$ e opposta a \vec{T}_2

$|\vec{R}_B| = |\vec{T}_2|$

$d = R_2$

$C = R_2 T_2$

3 LEGGI DI NEWTON O DELLA DINAMICA

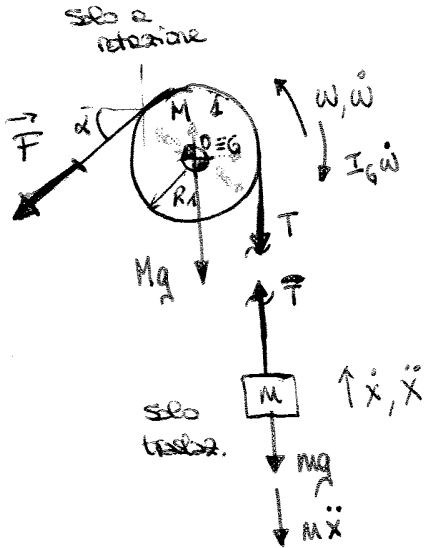
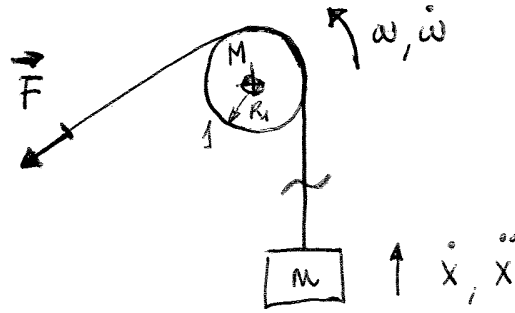
1) Una particella resta a riposo o in moto ret. uniforme se la risultante delle forze applicate ad essa è zero

2) L'accelerazione di una particella è proporzionale alla somma di tutte le forze esterne applicate

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est_i} = m\vec{a}$ ($m \rightarrow [Kg]$)

m: massa \rightarrow resistenza o l'inerzia della particella e modificare la sua velocità

:sempio



$$I_G \ddot{\omega} = 0$$

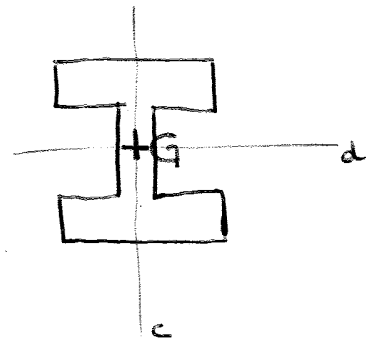
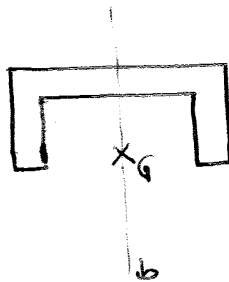
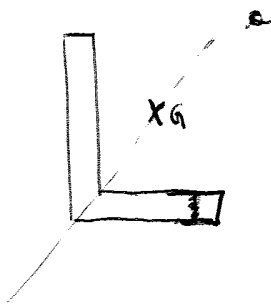
$$x\vec{i})^+ - T \cos \alpha + R_{0x} = 0$$

$$y\vec{j})^+ + R_{0y} - Mg - T - F \sin \alpha = 0$$

$$O)^+ FR_1 - TR_1 - I_G \ddot{\omega} = 0$$

BARICENTRO C.R. NEL PIANO

- Asse di simmetria
- 2 assi di simmetria $\Rightarrow G$ si trova sulle loro intersezione



1) Sistemi discreti

$$X_G = \frac{\sum x_i m_i}{M_{Tot}} = \frac{S_y}{M_{Tot}}$$

$$Y_G = \frac{\sum y_i m_i}{M_{Tot}} = \frac{S_x}{M_{Tot}}$$

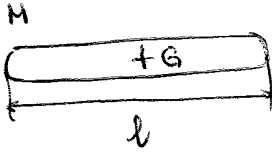
$\left. \begin{matrix} S_y \\ S_x \end{matrix} \right\} \text{Momenti statici}$

$$I_x + I_y = \int_M r^2 dm = I_0 = MR^2/2$$

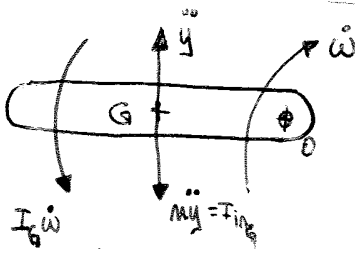
DISCO → CORPO ASSIALE SIMMETRICO

$$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \boxed{\frac{MR^2}{4}}$$

Momenti d'inerzia diametrali del disco omogeneo



$$\boxed{I_G = \frac{Ml^2}{12}}$$
 sbarretta



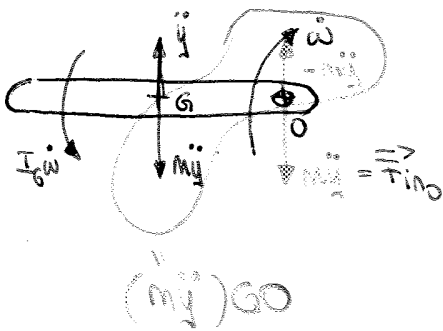
$$I_G = \frac{ml^2}{12}$$

vettore libero

$$O \uparrow^+ (m\ddot{y})(GO) + \overbrace{I_G \dot{\omega}}^{\text{vettore libero}} + \dots = 0 \quad \text{OK}$$

$$(O \uparrow^+ (m\ddot{y})(GO) + \cancel{I_G \dot{\omega}} + \dots = 0) \quad \text{NO}$$

TRASPORTO TUTTO IN O



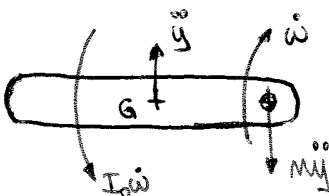
$$\vec{y} = \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{G} - \vec{O}) = \vec{a}_{tgG}$$

$$\ddot{y} = \dot{\omega} (GO)$$

$$[I_G + m(GO)^2] \dot{\omega} = I_0 \dot{\omega} \quad (\text{Per teorema di Huyghens})$$

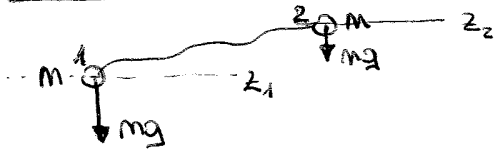
$$I_G = \frac{ml^2}{12}$$

$$I_0 = I_G + m(GO)^2 \Rightarrow \text{Trasporto di un momento d'inerzia}$$



$$O \uparrow^+ I_0 \dot{\omega} + \dots = 0 \quad \text{OK}$$

AVVIO NUM 1447 152



$$L_{F_{\text{peso}}} = \int_{z_1}^{z_2} \vec{F}_p \cdot d\vec{z} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz$$

$$z_2 - z_1 = h$$

$$= \boxed{-mgh}$$

$$E_{\text{pot}g} = -L_{F_{\text{peso}}} = mgh$$

BILANCIO ENERGETICO

$$L_{\text{est}} + L_i = \Delta E_c + \Delta E_{\text{pel}} + \Delta E_{\text{Pg}}$$

dipendono dal percorso

dipendono dallo stato iniziale e finale

L_{est} = lavoro delle F. esterne (tranne reazioni di inerzia e del peso)

$$\Delta E_c \Rightarrow \Delta v \Rightarrow \ddot{x}$$

$$\Delta \omega \Rightarrow \ddot{\omega}$$

↑↑

(lavoro delle azioni di inerzia)

$$\Delta E_{\text{Pg}} \Rightarrow L_{F_{\text{peso}}}$$

L_i = lavoro delle forze interne (legato agli attriti)

$$\Delta E_c = \left[\frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \right]_f - \left[\frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \right]_i$$

$$\Delta E_{\text{pel}} = \left[\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) \right]_f - \left[\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) \right]_i$$

$$\Delta E_{\text{Pg}} = [mgz_2]_f - [mgz_1]_i = mgh$$

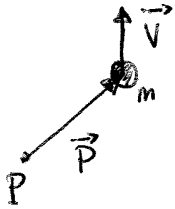
~~AVVIO NUM 1447 152~~

$$L_{\text{est}} = 0 \quad L_i = 0$$

$$\Delta E_c + \Delta E_{\text{pel}} + \Delta E_{\text{Pg}} = 0$$

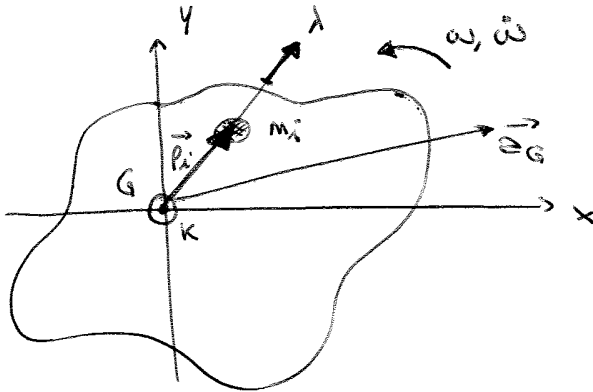
principio di conservazione dell'energia

||| Principio di conservazione dell'energia



$$\vec{K}_P = \vec{p} \wedge \vec{Q} = \vec{p} \wedge (m\vec{v})$$

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER UN C.R. NEL PIANO



$$\begin{aligned} \vec{K}_G &= \sum_{i=1}^n r_i \vec{\lambda} \wedge (m_i \vec{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n r_i \vec{\lambda} \wedge m_i [\omega \vec{k} \wedge r_i \vec{\lambda}] \\ &= \sum_{i=1}^n (r_i^2 m_i) \omega [\vec{\lambda} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{\lambda})] \end{aligned}$$

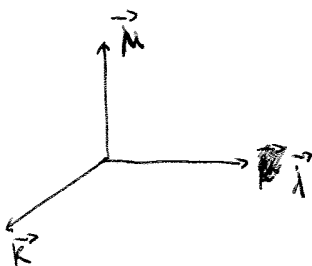
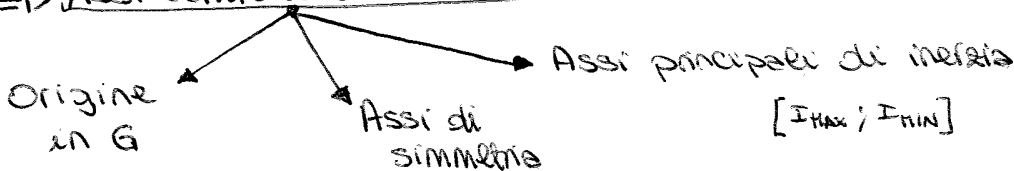
$$\vec{K}_G = \underbrace{\sum_{i=1}^n (r_i^2 m_i)}_{I_G} \omega \vec{k} = I_G \omega \vec{k}$$

NEL PIANO

$$\begin{aligned} \vec{Q} = m\vec{v}_G &\longrightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = m\vec{a}_G \\ \vec{K}_G = I_G \omega \vec{k} &\longrightarrow \frac{d\vec{K}_G}{dt} = I_G \dot{\omega} \vec{k} \end{aligned}$$

\vec{K} nello spazio

- => G o ad 1 punto fisso
- => Assi centrali di inerzia



$$\vec{K}_G = I_p \omega \vec{p} + I_q \omega \vec{q} + I_r \omega \vec{r}$$

omega ass del corpo

$$\begin{cases} p = \omega_{ass} \times \vec{p} \\ q = \omega_{ass} \times \vec{q} \\ r = \omega_{ass} \times \vec{r} \end{cases}$$

$\rightarrow Q_i = Q_f$



$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

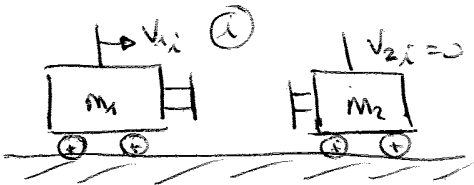
$L_{rest} = 0 \quad L_i = 0 \quad \Delta E_{pot} = 0 \quad \Delta E_{pell} = 0$



$\Delta E_c = 0$

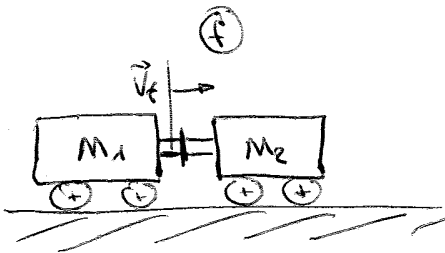
$\left[\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \right]_f - \left[\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \right]_i = 0$

URTO ANELASTICO : esiste dissipazione di energia



$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{rest} = 0$

$\vec{Q} = cost$



DOPO L'URTO

$\left\{ \begin{aligned} \vec{Q}_i &= m_1 \vec{v}_{1i} \\ \vec{Q}_f &= (m_1 + m_2) \vec{v}_f \end{aligned} \right.$



$\vec{Q}_i = \vec{Q}_f$



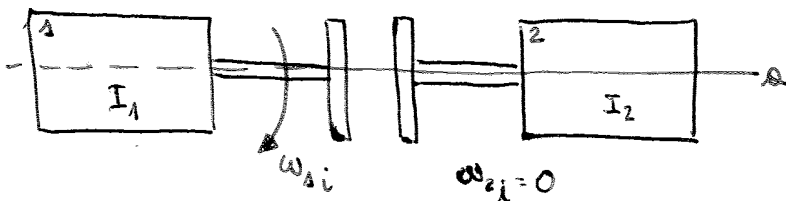
$m_1 \vec{v}_{1i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$

Energia persa nell'urto

$L_{rest} + L_i = \cancel{\Delta E_c} + \cancel{\Delta E_{pot}} + \cancel{\Delta E_{pell}}$

$L_i = \Delta E_c = \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 \right]_f - \left[\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \right]_i$

$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$



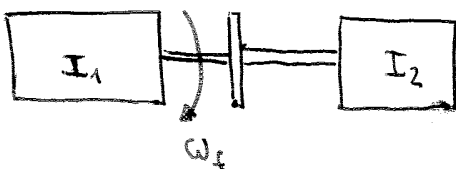
$\alpha \uparrow \sum_{i=1}^n \vec{K}_{rest,i} = 0$

$\vec{K}_2 = cost$

$\vec{K}_i = I_1 \vec{\omega}_{1i}$

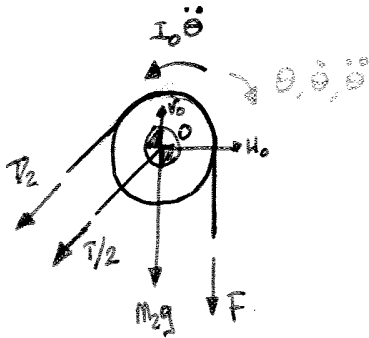
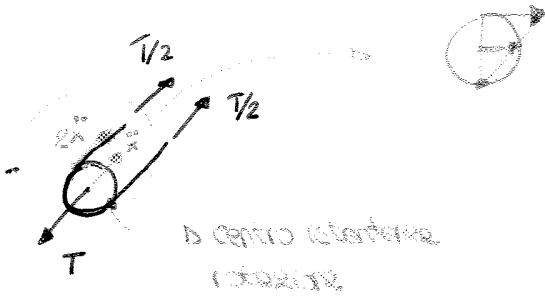
$\vec{K}_f = (I_1 + I_2) \vec{\omega}_f$

DOPO L'INNESTO



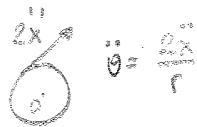
$K_i = K_f$
 $I_1 \vec{\omega}_{1i} = (I_1 + I_2) \vec{\omega}_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1 \omega_{1i}}{I_1 + I_2}$

$$\rightarrow m_1 \ddot{x} + m_1 g \sin \alpha = T$$



$$\rightarrow \frac{I}{2} \cdot r + I_0 \ddot{\theta} = Fr \quad (r: \text{raggio})$$

$$m_1 (\ddot{x} + g \sin \alpha) \cdot \frac{r}{2} + I_0 \ddot{\theta} = Fr$$



$$I_0 = \frac{m_2 r^2}{2}$$

$$\Rightarrow m_1 (\ddot{x} + g \sin \alpha) \frac{r}{2} + \frac{m_2 r^2}{2} \cdot \frac{2 \ddot{x}}{r} = Fr$$

$$m_1 (\ddot{x} + g \sin \alpha) \cdot \frac{1}{2} + m_2 \ddot{x} = F$$

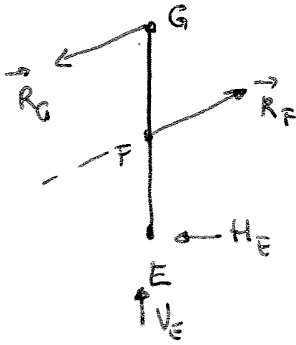
$$\ddot{x} \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) = F - \frac{m_1 g \sin \alpha}{2}$$

$$\ddot{x} = \frac{2F - m_1 g \sin \alpha}{m_1 + 2m_2} = 4.33 \text{ m/s}^2$$

$$s = \frac{1}{2} \ddot{x} t^2$$

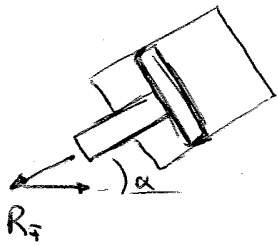
$$t = \sqrt{2s/\ddot{x}} = 0.954 \text{ s}$$

$$v = \ddot{x} t = 4.2 \text{ m/s}$$



$$R_G \cdot \overline{GE} \cdot \cos \alpha = R_F \cdot \overline{FE} \cdot \cos \alpha$$

$$R_F = \frac{R_G \cdot \overline{GE}}{\overline{FE}} = 2 R_G = \boxed{60 \cdot 560 \text{ N}}$$



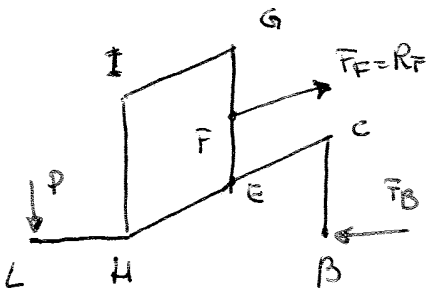
$$p \cdot A = R_F$$



$$A_2 = \frac{\pi (\phi_2^2 - \phi_1^2)}{4} = 8,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$p_2 = \frac{R_F}{A_2} = 7 \cdot 133,573 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ (Pascal)}$$

$$p_2 = 71,4 \text{ bar} = \left(\frac{7 \cdot 133,573}{10^5} \right)$$



$$P \cdot (\overline{LH} + \overline{CH} \cos \alpha) - R_F \cos \alpha \overline{FE} - \overline{F_B} \cdot \overline{BC} = 0$$

$$\rightarrow \overline{F_B} = 236,188 \text{ N}$$

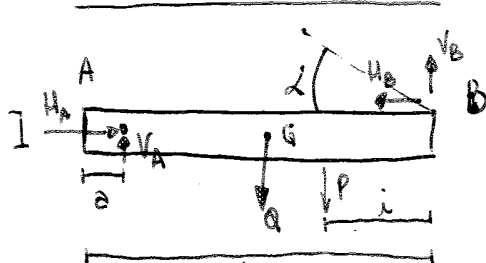


$$F_B = p_1 A_1$$

$$A_1 = \frac{\pi \phi_1^2}{4} = 0,0201 \text{ m}^2$$

$$p_1 = \frac{F_B}{A_1} = 11747,077 \text{ Pa} \approx \boxed{117,5 \text{ bar}}$$

★ Braccis di supporto



$$P = 100 \text{ N}$$

$$a = 0,12 \text{ m}$$

$$b = 5 \text{ m}$$

$$l = 1,5 \text{ m}$$

$$h = 0,5 \text{ m}$$

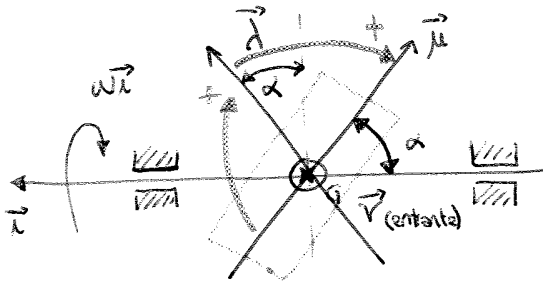
$$m = 95 \text{ Kg/m}$$

25/03/2012 (oggi è domenica e potremo un'ora di lezione) T

(20)

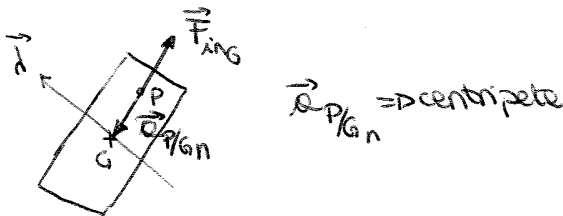
LEZIONE DEL 25/4: recupero VENERDÌ 27/4 dalle 14:30 alle 17:30 aula 5S

ROTORE INCLINATO



$\omega = \text{cost}$

1) \vec{F}_{ing} = forza di inerzia CENTRIFUGA



MASSA ROTORE IN G:

$\vec{F}_{\text{ing}} = m(\omega^2)(\vec{G}-\vec{G}_n)$

TERNA CENTRALE DI INERZIA:

- G
- Assi principali di inerzia (I_{max} I_{min})
- Assi di simmetria $\Rightarrow (\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$

ASSE ROTORE: $\vec{\lambda}$

ASSI DIAMETRALI: $\vec{\mu}$ e $\vec{\nu}$

$I_{\lambda} = \frac{MR^2}{2}$ R = raggio rotore

$I_{\mu} = I_{\nu} = \frac{I_{\lambda}}{2} = \frac{MR^2}{4}$

ASSE DI ROTAZIONE \vec{z} :

$\Rightarrow M \dot{\vec{K}}_G = - \frac{d\vec{K}_G}{dt}$

$\vec{K}_G = I_{\lambda} p \vec{\lambda} + I_{\mu} q \vec{\mu} + I_{\nu} r \vec{\nu}$

$\begin{cases} p = \vec{\omega} \cdot \vec{\lambda} = \omega \sin \alpha \\ q = \vec{\omega} \cdot \vec{\mu} = -\omega \cos \alpha \\ r = \vec{\omega} \cdot \vec{\nu} = 0 \end{cases}$

$\vec{\omega} = (\omega \sin \alpha) \vec{\lambda} - (\omega \cos \alpha) \vec{\mu}$

$\vec{K}_G = I_{\lambda} (\omega \sin \alpha) \vec{\lambda} - I_{\mu} (\omega \cos \alpha) \vec{\mu}$

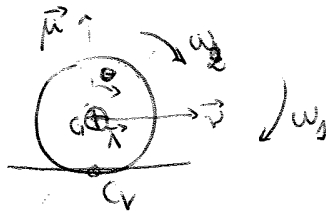
$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = I_{\lambda} (\omega \sin \alpha) \frac{d\vec{\lambda}}{dt} - I_{\mu} (\omega \cos \alpha) \frac{d\vec{\mu}}{dt}$

$[\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}] \Rightarrow \vec{\omega}$

$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\lambda} = (\omega \sin \alpha) \vec{\lambda} \wedge \vec{\lambda} - (\omega \cos \alpha) \vec{\mu} \wedge \vec{\lambda} = +\omega \cos \alpha \vec{\nu}$

$$\frac{dK_G}{dt} = I_\lambda [\omega_1 \sin \alpha - \omega_2] \frac{d\vec{\lambda}}{dt} + [\omega_1 \cos \alpha] \frac{d\vec{\mu}}{dt}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega}_{\text{terme}} \wedge \vec{\lambda} = \omega_1 \vec{k} \wedge \vec{\lambda} = [\omega_1 \sin \alpha \vec{\lambda}] \wedge \vec{\lambda} + [\omega_1 \cos \alpha \vec{\mu}] \wedge \vec{\lambda} = -\omega_1 \cos \alpha \vec{v} \\ \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega}_{\text{terme}} \wedge \vec{\mu} = \omega_1 \vec{k} \wedge \vec{\mu} = [\omega_1 \sin \alpha \vec{\lambda}] \wedge \vec{\mu} + [\omega_1 \cos \alpha \vec{\mu}] \wedge \vec{\mu} = \omega_1 \sin \alpha \vec{v} \end{cases}$$



$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = I_\lambda [\omega_1 \sin \alpha - \omega_2] [-\omega_1 \cos \alpha \vec{v}] + (I_\lambda / 2) [\omega_1 \cos \alpha] [\omega_1 \sin \alpha \vec{v}]$$

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = -I_\lambda \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{v} + I_\lambda \omega_2 \omega_1 \cos \alpha \vec{v} + \frac{I_\lambda}{2} \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{v} = -\frac{I_\lambda}{2} \omega_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{v} + I_\lambda \omega_1 \omega_2 \cos \alpha \vec{v}$$

$$\vec{M}_{\text{ing}} = -\frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

$$\vec{F}_{\text{ing}} = m (\omega_1^2 R) \vec{\lambda}$$

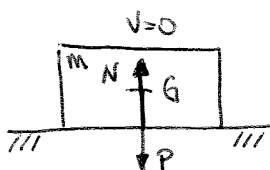
↑
massa ruota

TIPICI DI ATRITO

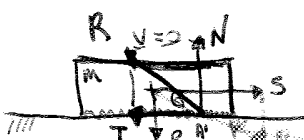
- 1) Attrito statico o di aderenza
- 2) Attrito radente o di strisciamento
- 3) Attrito volvente

ATRITO: nelle zone di contatto tra i corpi si generano delle forze di attrito opposte al moto ed incognite.
Le forze di attrito influenzano l'equilibrio dei corpi

1) ATRITO STATICO O DI ADERENZA



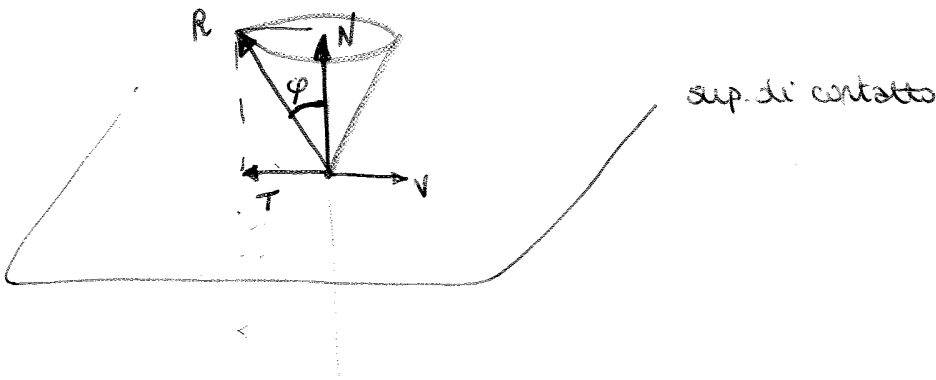
$$P = mg \quad N = P \Rightarrow N = mg$$



R e R hanno stessa retta d'azione (anche se del disegno non sembra)

rugosità superficiale

MODELLO GEOMETRICO DI UNO STRISCIO



In strisciamento: $v \neq 0$

$|T = fN|$ $f = \text{cost} = \text{coeff. attrito di strisc.}$

MODELLO MATEMATICO

Dal caso di attrito di striscio:

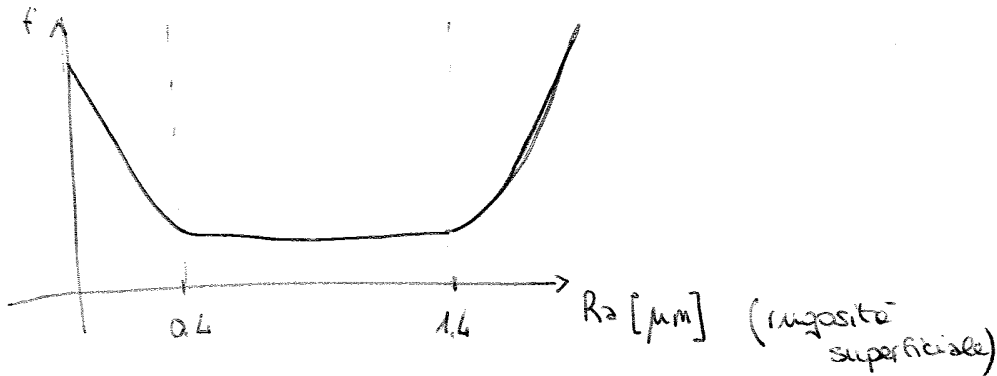
$\hat{Q}: R; N$

$|T = (\tan \phi) N|$ $|\tan \phi = f|$

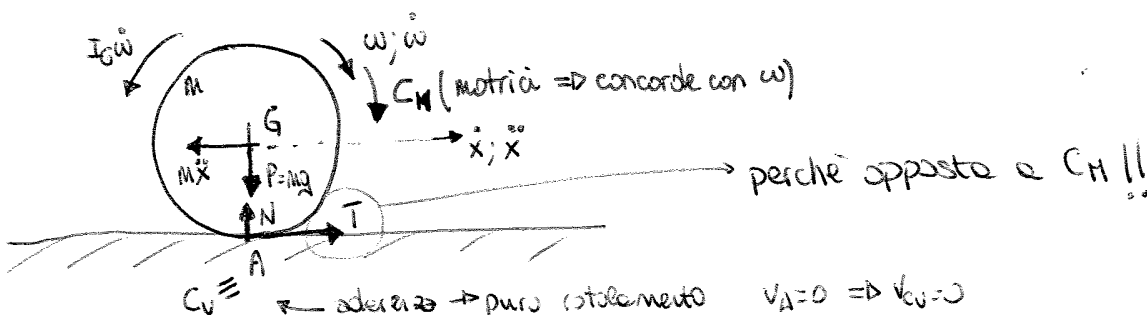
3/04/2012

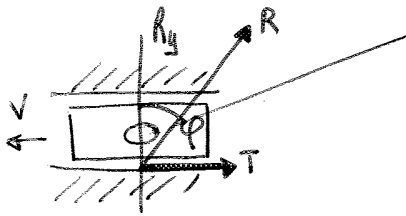


$f_s \leftrightarrow f$ STICK SLIP \rightarrow un po' striscia, un po' si ferma

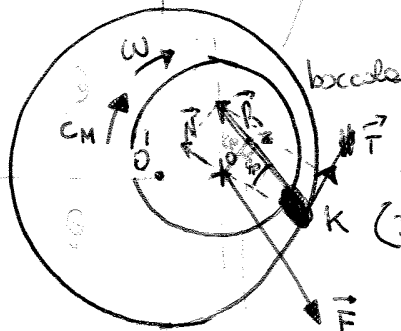


1) RUOTA ROTACE:





ATIRITO AL PERNO



ATIR. DI STRISC.

(Dovrebbe essere il punto di contatto, ma il disegno è fatto male)

ϕ_p : angolo di attrito di strisciamento nel perno

$$\vec{R} \parallel \vec{F}$$

$$f_p = t_{\phi_p}$$

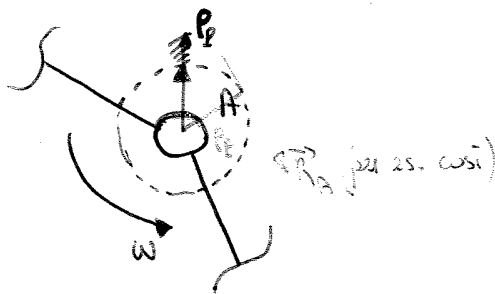
$$OZ = r_p = OR \sin \phi_p = f_p \sin \phi_p$$

$$r_p = r_p \sin \phi_p$$

r_p : raggio del cerchio di attrito al perno

r_p : raggio del perno

CONSEGUENZE DELL'ATIRITO AL PERNO PER LE REAZIONI VINCOLARI DI UNA CERNIERA



$$r_p ; f_p$$



$$r_p = r_p \sin \phi_p$$

\vec{R}_A = risultato reaz. vincolare in A

1) $\vec{R}_A \Rightarrow$ deve essere sempre tg. al cerchio di attrito al perno

2) $\vec{R}_A \Rightarrow$ deve " opposte al moto della cerniera A (ω)

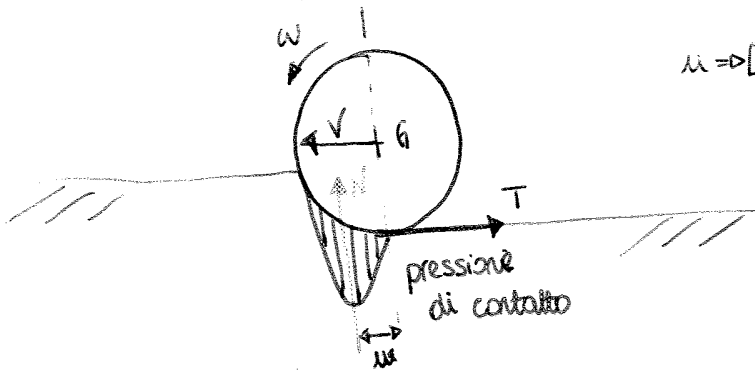
3) $\vec{R}_A \Rightarrow$ rispettare l'equilibrio dei corpi in cui è coinvolta la cerniera

ATTRITO VOLVENTE

(24)

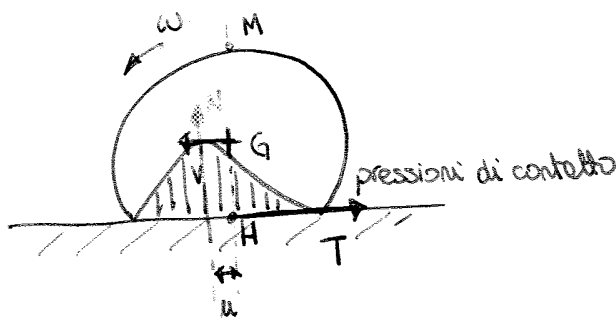
CAUSE $\left\{ \begin{array}{l} \text{corpi non perfettamente rigidi} \\ \text{superfici non perfettamente lisce} \\ \text{deformazioni non perfettamente elastiche} \end{array} \right.$

1) TERRENO DEFORMABILE (es: ruota nella neve)



$\mu = D[M]$: parametro di attrito volvente

2) RUOTA DEFORMABILE (es: ruote sgrinfia)



$$G \downarrow \quad Nu = Tr$$

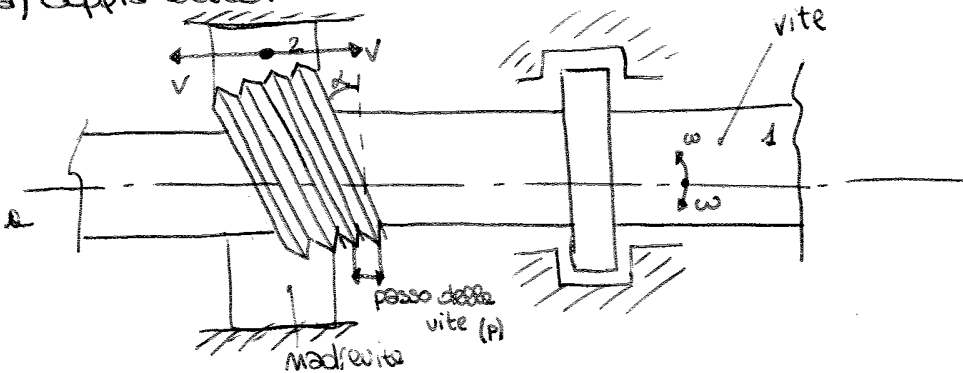
$$T = \left(\frac{M}{r}\right) N = \epsilon_v N$$

ϵ_v : coeff. attrito volvente

$$GH < GR = r$$

SISTEMA VITE-MADREVITE

a) Coppia elicoidale

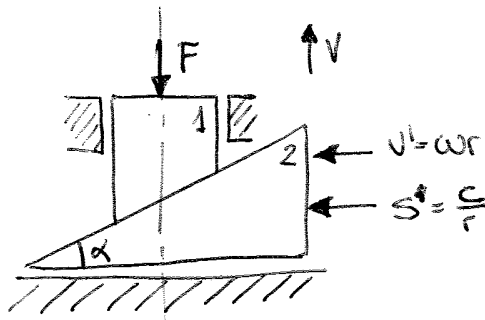


α : angolo di inclinazione del filetto

$$v = \frac{p}{t} \quad \omega = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega}$$

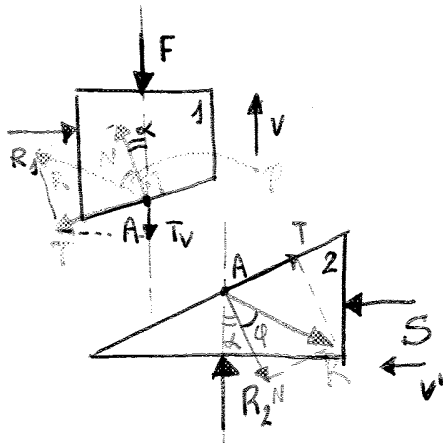
$$\Rightarrow v = \left(\frac{p}{2\pi}\right) \omega$$

SISTEMA VITE - MADREVITE



1: vite
2: madrevite

// Scorre: legare F e S



Vincoli senza attrito

(Per I: assegno un verso a T e vedo se la sua proiezz. verticale ~~è~~ opposta a v')

$\hat{\phi}$: N; R

$\hat{\alpha}$: N; asse vite

① $\uparrow^+ R \cos(\alpha + \phi) = F$

② $\rightarrow^+ R \sin(\alpha + \phi) = S$

$\frac{S}{F} = \frac{R \sin(\alpha + \phi)}{R \cos(\alpha + \phi)} \Rightarrow S = F \tan(\alpha + \phi)$

$\frac{C}{r} = F \tan(\alpha + \phi)$

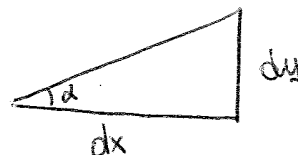
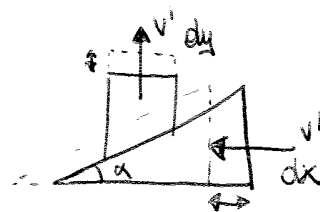
$C = r F \tan(\alpha + \phi)$

$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{Fv}{C\omega}$

$\eta = \left(\frac{Fv}{Sv'} \right) = \left(\frac{1}{\tan(\alpha + \phi)} \right) (\tan \alpha)$

$\Rightarrow \eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \phi)}$

$\hat{\alpha} \Rightarrow v \neq v'$ sempre



$dy = dx \tan \alpha$

$v = v' \tan \alpha$

ATTIRIO SU UNITÀ DI USURA

$dN \Rightarrow p dA$ p : pressione di contatto

a) I_p : pressione uniforme

b) I_p : ipotesi dell'usura o di Reye

ESPRESSIONI DELL'USURA: Il volume di materiale asportato per attrito nell'unità di tempo è proporzionale al lavoro fatto dalle forze di attrito nelle stesse unità di tempo

(SAPERE X)
(ESAME 666)

$$dV = \int dA = K \frac{dL_{attrito}}{dt} = K \frac{(dT ds)}{dt} \rightarrow V_{rel} \text{ con cui } ds \text{ è proporzionale}$$

(deve)
 $\frac{dh}{dt}$

$$\boxed{\int dA = K [f dN] V_{rel} = K [f p dA] V_{rel}}$$

$S = \frac{dh}{dt}$ = spessore di materiale asportato per attrito nell'unità di tempo

TIPICI DI FRENI

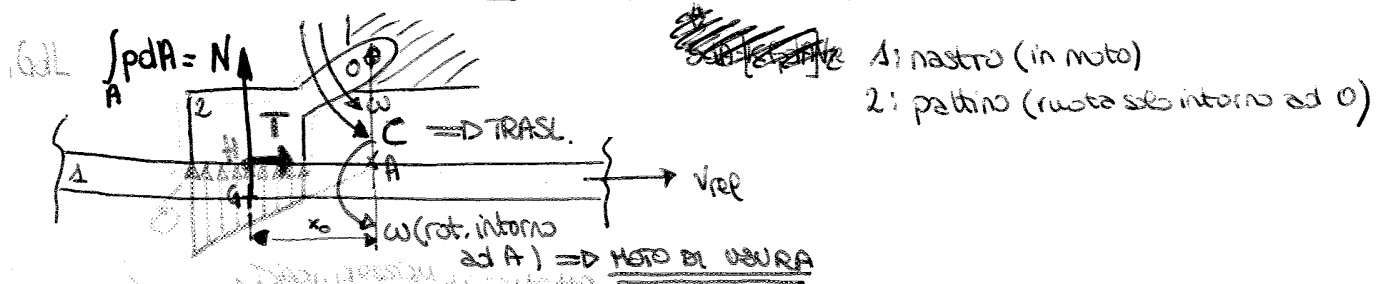
a) Freni a pattino $\left\{ \begin{array}{l} \text{ad accostamento rigido} \\ \text{ad accostamento libero} \end{array} \right.$

b) Freni a ceppo (o a tamburo) $\left\{ \begin{array}{l} \text{ad accostamento rigido} \\ \text{ad accostamento libero} \end{array} \right.$

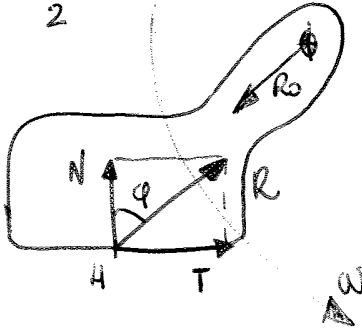
c) Freni a disco $\left\{ \begin{array}{l} \text{ad accostamento } \cancel{\text{rigido}} \text{ rigido} \\ \text{ad accostamento semi-rigido} \\ \text{ad accostamento libero} \end{array} \right.$

d) Freni a nastro

* Freno a pattino ad acc. rigido $\Rightarrow I_p \text{ usura} \Rightarrow S dA = K [f p dA] V_{rel}$



CAS PARTICOLARE /



$$|R| = |R_0|$$

$$R // R_0$$

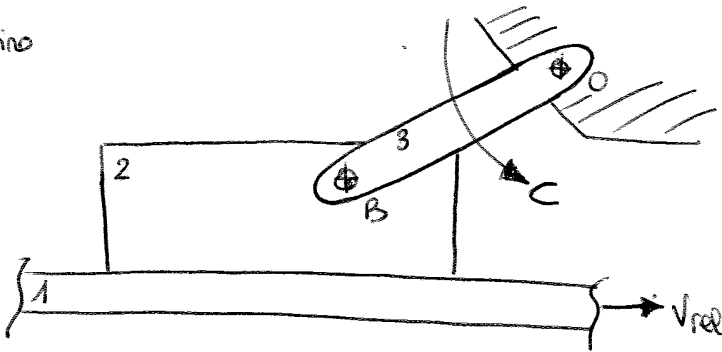
R e R₀ tendono ad impuntare automaticamente il pattino contro il nastro (non c'è bisogno di C)

⇓
AUTOIMPUNTAMENTO

FRENO A PATTINO AD ACC. LIBERO

2: pattino

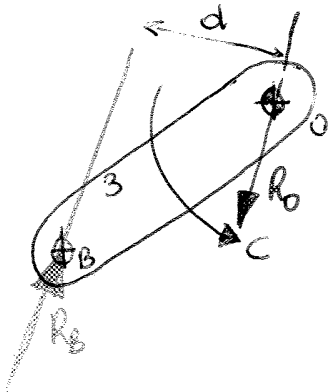
2GDL



ACC. LIBERO: a priori il moto di eccostamento è incognito



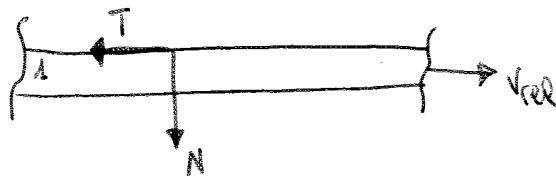
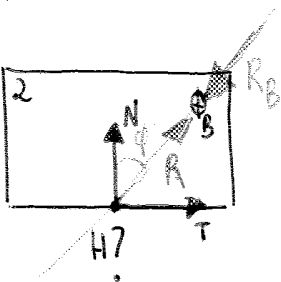
Si comincia da equilibri di forze



$$|R_B| = |R_C|$$

$$R_B // R_C$$

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow C - R_B d = 0 \Rightarrow R_B = \frac{C}{d}$$



1° regola

$$K_0^- = m_1 v L$$



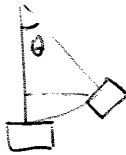
$$K_0^+ = (m_1 + m_2) v_f L$$



$$m_1 v L = (m_1 + m_2) v_f L$$

$$E_i = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 \quad \text{Subito dopo urto}$$

$$E_f = (m_1 + m_2) g h = L g (m_1 + m_2) (1 - \cos \theta)$$



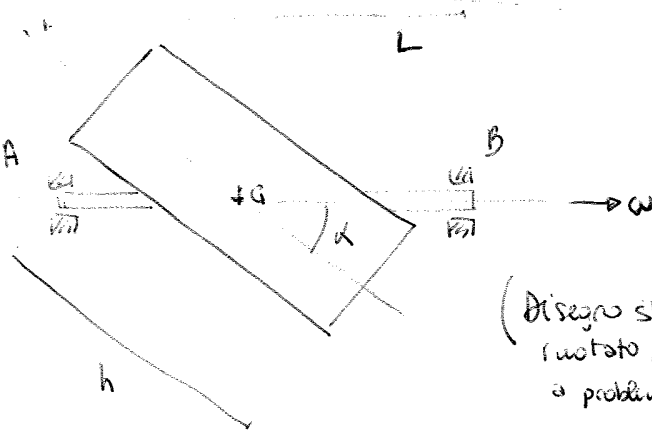
$$\text{con } h = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta)$$

$$E_i = E_f \rightarrow \text{trovo } v_f \rightarrow \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = L g (m_1 + m_2) (1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow m_1 v L = (m_1 + m_2) v_f L \rightarrow \text{trovo } v = 7.99 \text{ m/s}$$

$$v_f = \sqrt{2 L g (1 - \cos \theta)}$$

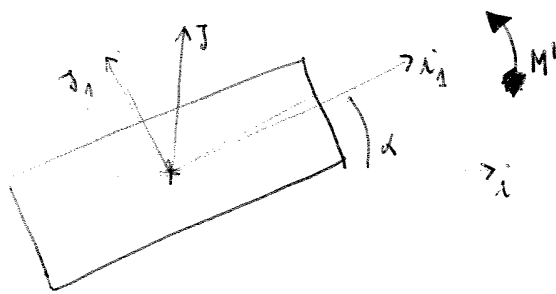
10)



(Disegno schematico: ruotato rispetto al problema)

- $\alpha = 1^\circ$
- $\omega = 157 \text{ rad/s}$
- $\phi = 0.3 \text{ m}$
- $h = 0.5 \text{ m}$
- $L = 0.6 \text{ m}$

$$v = \frac{(m_1 + m_2) \sqrt{2 L g (1 - \cos \theta)}}{m_1}$$



$x, y, z \rightarrow \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
 $x_1, y_1, z_1 \rightarrow \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$

$$M' = - \frac{d\vec{K}}{dt}$$

$$\vec{K} = A p \vec{i}_1 + B q \vec{j}_1 + C r \vec{k}_1$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{i} = \underbrace{\omega \cos \alpha}_{p} \vec{i}_1 - \underbrace{\omega \sin \alpha}_{q} \vec{j}_1 + \underbrace{0}_{r} \vec{k}_1$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = A \cdot \dot{p} \cdot \vec{i}_1 + A p \frac{d\vec{i}_1}{dt} + B \dot{q} \cdot \vec{j}_1 + B q \frac{d\vec{j}_1}{dt}$$

$$\omega = \text{cost} \rightarrow \dot{p}, \dot{q} = 0$$

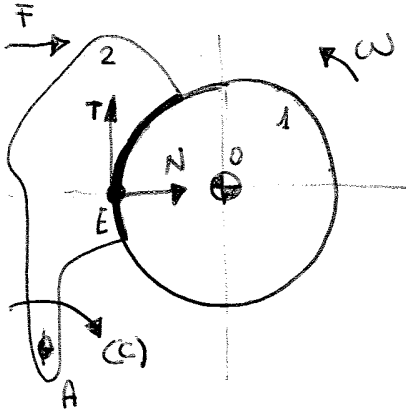
13/01/2012

(2)

FRENI A TAMBURO (o a ceppi) AD ACCOSTAMENTO RIGIDO

N.B: NON utilizziamo ipotesi di usura!

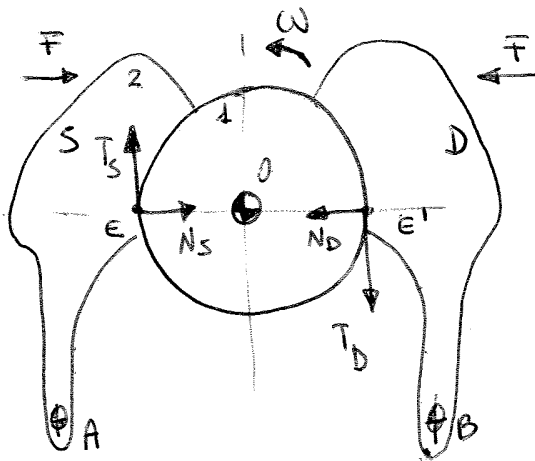
I) Ceppo singolo ed esterno



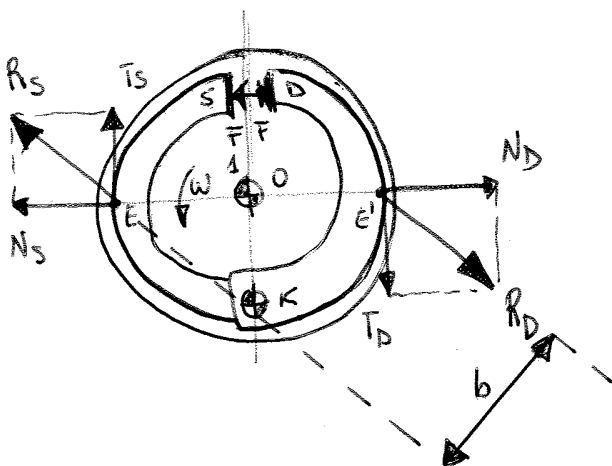
1: tamburo
2: ceppo (1 GdL)

Ipotesi: N e T sulle linee dei ceppi e sulle superficie del tamburo

II) Due ceppi esterni



III) Due ceppi interni



Momento frenante:

$$M_{fren} = (R_S + R_D) b = (T_S + T_D) r_t$$

[sono identiche e NON equilibri]

METODI DI STUDIO

4) Tamburo \Rightarrow Perno }
 Ceppo \Rightarrow Boccole } \rightarrow Tracciamo il cerchio di attrito del tamburo

\Downarrow
 $R_T = r_T \sin \varphi$

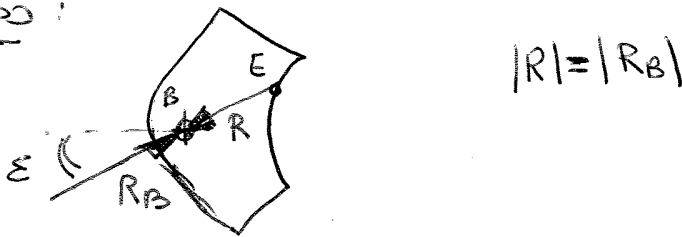
2) Metto in equilibrio ceppo e tamburo, con "regole di attrito al perno".
 (La distanza tra \vec{R} ed \vec{R}_B è esattamente e_T)

EQUILIBRIO TAMBURO

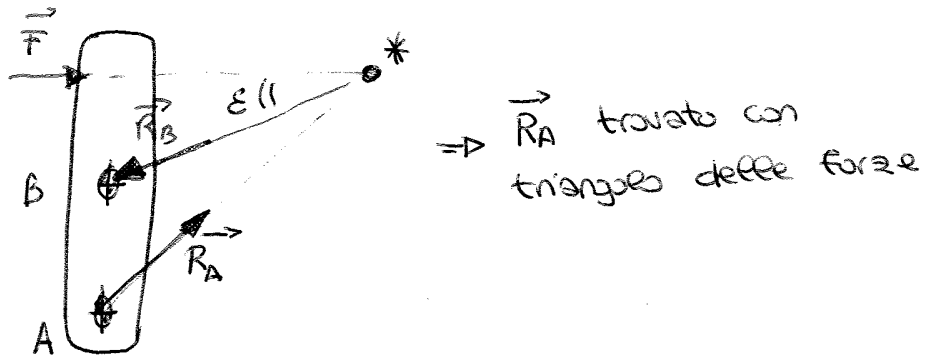
$\left\{ \begin{array}{l} M_{fren} = R e_T \text{ [identità]} \\ \vec{R} // \vec{R}_B, |\vec{R}| = |\vec{R}_B| \end{array} \right.$

$\uparrow \circlearrowleft : C_H - I_G \ddot{\omega} - R e_T = 0$

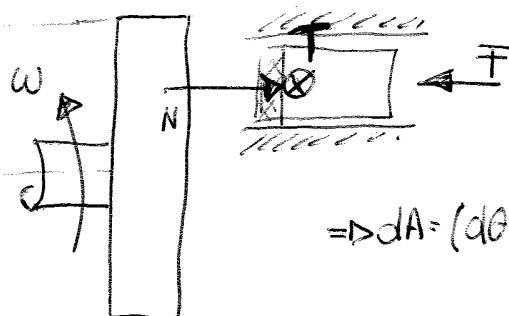
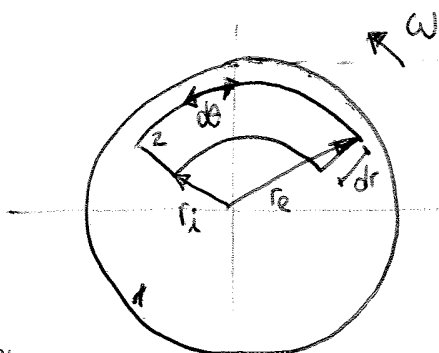
EQUILIBRIO AL CEPPO



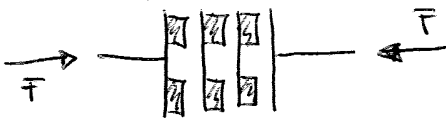
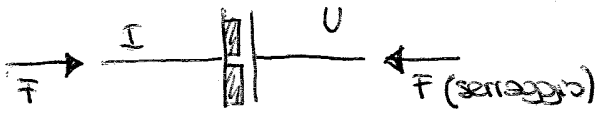
EQUILIBRIO ALLA UOVA



FRENI A DISCO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO



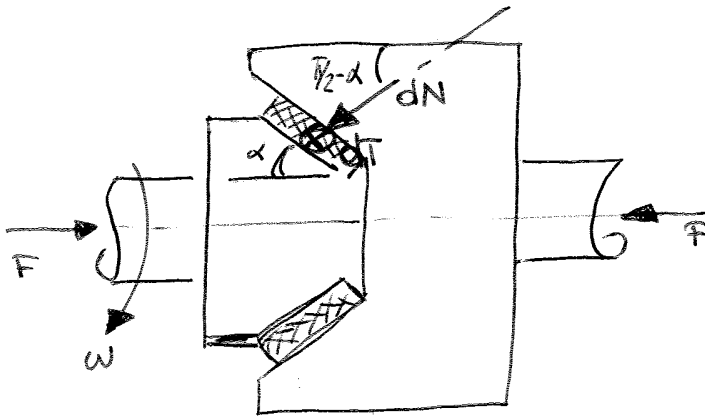
1: disco
 2: pastiglia



$N = N^{\circ}$ sup. di contatto

$$M_{fric} = nF \left(\frac{re + ri}{2} \right)$$

Frizione conica

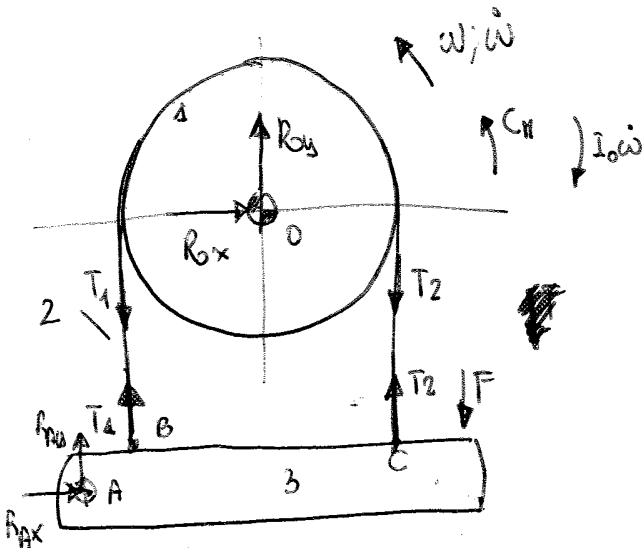


$$\bar{F} = \int_A dN \underbrace{\left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}_{\text{sen} \alpha}$$



$$M_{fric} = \frac{f}{\text{sen} \alpha} \bar{F} \cdot \frac{re + ri}{2}$$

FRENO A NASTRO



- 1: tamburo
- 2: nastro ($v=0$)
- 3: leva

$$\circlearrowleft : C_H - I_0 \ddot{\omega} - T_2 r_e + T_1 r_e = 0$$

$$C_H - I_0 \ddot{\omega} - \underbrace{(T_2 - T_1) r_e}_{M_{fric}} = 0$$

A) $F(HA) - T_2(AC) - T_1(AB)$

\Rightarrow deflusce eq. dei flessibili $\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = e^{f \theta^*}$ RAD

θ^* : ang. strisciamento



$\theta^* = \theta_{slip}$ (ampliamento)

CINGHIE

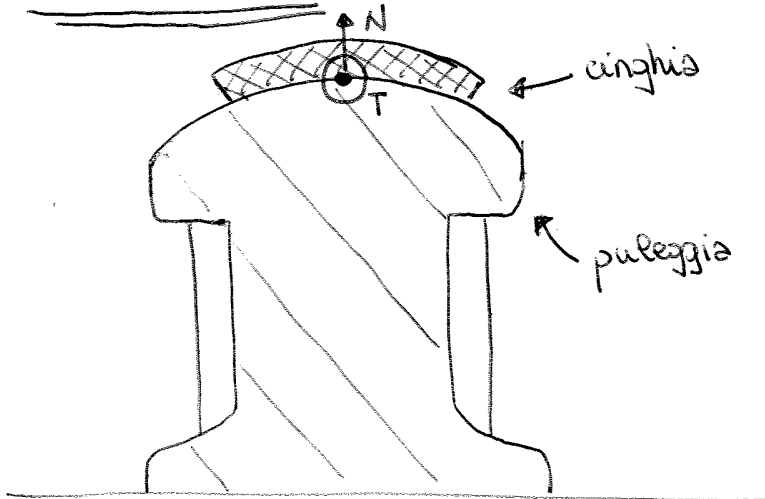
- Trasmissione di moto anche a grandi distanze
- Smorza le vibrazioni
- Rapporto di trasmissione non costante

I) C. PIANE

II) C. TRAPEZIA

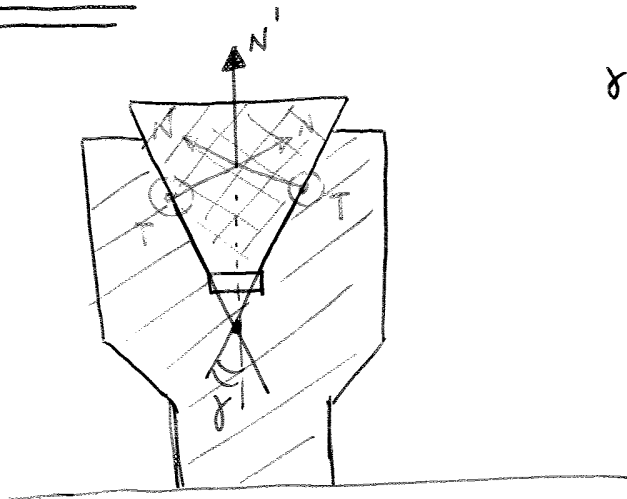
III) C. DENTATE (solo Laboratorio)

I) CINGHIA PIANA



$$T = f \cdot N$$

II) CINGHIA TRAPEZIA



γ : angolo semiapertura c. trapezia

$$\begin{cases} N' = 2N \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 2N \text{sen} \gamma \\ T_{tot} = 2fN = f \frac{N'}{\text{sen} \gamma} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{tot} = \left(\frac{f}{\text{sen} \gamma}\right) \cdot N \rightarrow \Delta f'$$

$$\Rightarrow T_{tot} = f' N'$$

;) P. CINEMATICO

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

↳ in aderenza

(33)

RAPPORTO DI TRASMISSIONE

$$\frac{\omega_i}{\omega_u} = i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{R_2}{R_1} \quad \left[\text{approssimato poichè considerato } v = v_0 \left(1 + \frac{T}{ES} \right) \right]$$

$$i = f(T_1, T_2) \neq \text{costante}$$

$$\begin{matrix} \uparrow O_1 \\ C_M - F_1 \dot{\omega}_1 - (T_1 - T_2) R_1 = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Motore} \quad \text{Inerzia} \quad \text{Resistente} \end{matrix}$$

[la cinghia rende il contributo con $(T_1 - T_2)$ da "RESISTENTE" a "MOTORE"]

$$\begin{matrix} \uparrow O_2 \\ (T_1 - T_2) R_2 - C_R - I_2 \dot{\omega}_2 = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \rightarrow \\ \text{Motore} \quad \text{Resistente} \quad \text{Inerzia} \end{matrix}$$

$$\dot{\omega}_1 = 0, \dot{\omega}_2 = 0$$

$$\boxed{\eta} = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_R \omega_2}{C_M \omega_1} = \frac{(T_1 - T_2) R_2 \omega_2}{(T_1 - T_2) R_1 \omega_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

se $\begin{cases} V_1 = V_2 \text{ (NO DISSIPAZIONE)} \Rightarrow \eta = 1 \text{ (ideale)} \\ V_1 = v_0 \left(1 + \frac{T_1}{ES} \right) \\ V_2 = v_0 \left(1 + \frac{T_2}{ES} \right) \end{cases} \Rightarrow \eta = \frac{v_0 \left(1 + \frac{T_2}{ES} \right)}{v_0 \left(1 + \frac{T_1}{ES} \right)} < 1, \quad [T_2 < T_1]$

METODI PER TENSIONARE UNA CINGHIA

- 1) Metodo GALOPPINO
- 2) Metodo TENDITORE
- 3) Metodo FORZA INERZIALE

5) RAFFORZAMENTO INERZIALE (intesa per intesa originale...
 primo e estendendo poi l'interesse tra pulegge)

(34)

giogo



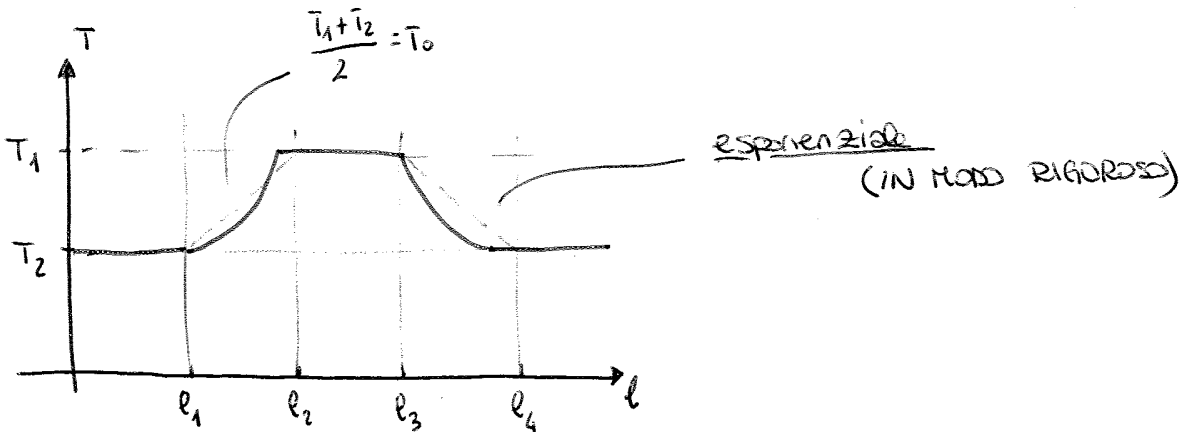
c. fermo: $\Delta l_0 = \frac{T_0}{ES} [2l + l_3 + l_4]$

c. in funzione: $\Delta l_1 = \frac{T_1}{ES} l_1$, $\Delta l_3 = \left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right) \frac{1}{ES} l_3$

$\Delta l_2 = \frac{T_2}{ES} l_2$, $\Delta l_4 = \left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right) \frac{1}{ES} l_4$

$\Rightarrow \Delta l_0 = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = \frac{T_1}{ES} l + \frac{T_2}{ES} l + \left(\frac{T_1 + T_2}{2ES}\right) (l_3 + l_4) = \frac{T_1 + T_2}{2ES} [2l + l_3 + l_4]$

$\Delta l_0 = \frac{T_0}{ES} [2l + l_3 + l_4] \rightarrow \boxed{T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}}$ TENSIONE DI RAFFORZAMENTO INIZIALE



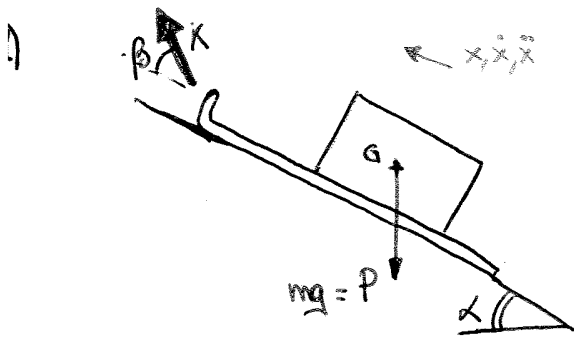
NB: tratto esponenziale arriva a T_1 prima di l_3 e torna a T_2 prima di l_4
 \Rightarrow aderenza iniziale prima

$v = v_0 \left(1 + \frac{T}{ES}\right)$ $E = \text{modulo di Young}$

$l = l_0 \left(1 + \frac{T}{ES}\right)$

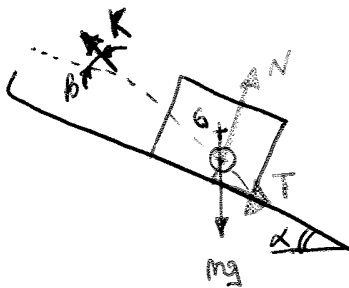
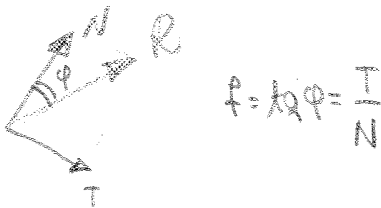
$\frac{l}{l_0} - 1 = \frac{T}{ES}$, $\frac{l - l_0}{l_0} = \left(\frac{T}{ES}\right) \Rightarrow \epsilon = \frac{l}{l_0} - 1$ $\frac{\Delta l}{l_0} = \epsilon$

21/04/2012 - ESERCIZIONE (HUNTER)



$m = 500 \text{ kg}$
 Pendenza del 30%
 $f = 0.2$
 $\tan \alpha = 0.3$
 $\alpha = 16,7^\circ$

Determino con quale forza K e ~~angolo~~ β in modo che K sia minima perche' la slitta si possa muovere con velocità costante



N, T, mg, K devono passare tutte per lo stesso punto per equilibrio di momento

$$\begin{cases} N - mg \cos \alpha + K \sin \beta = 0 \\ -mg \sin \alpha - T + K \cos \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N = mg \cos \alpha - K \sin \beta \\ mg \sin \alpha + fN = K \cos \beta \end{cases}$$

\Downarrow

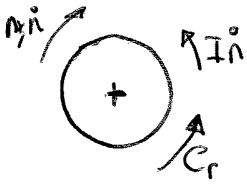
$$mg \sin \alpha + f(mg \cos \alpha - K \sin \beta) = K \cos \beta$$

$$K(\cos \beta + f \sin \beta) = mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

$$K = \frac{mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta} \Rightarrow \text{Per trovare } K_{\min} \text{ derivo rispetto a } \beta$$

$$\frac{dK}{d\beta} = 0 \Rightarrow -\sin \beta + f \cos \beta = 0 \rightarrow \tan \beta = f = 0.2 \Rightarrow \beta = 11,21^\circ$$

$$K = 2'303 \text{ N}$$



$$C_r + I \ddot{\alpha} = 0$$

$$\ddot{\omega} = - \frac{C_r}{I} = - \frac{C_r}{m r_i^2}$$

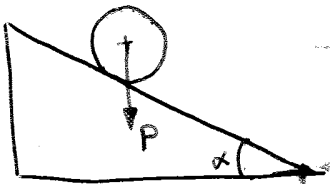
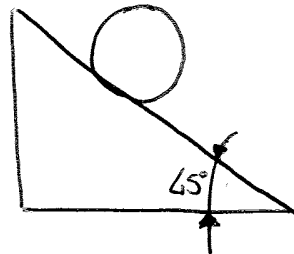
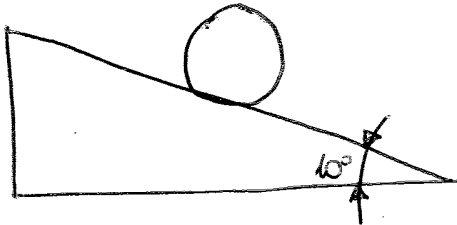
$$\omega = - \frac{C_r}{m r_i^2} t + c$$

$$t=0 \quad \omega = \omega_0 \rightarrow n = 100 \text{ pir/min}$$

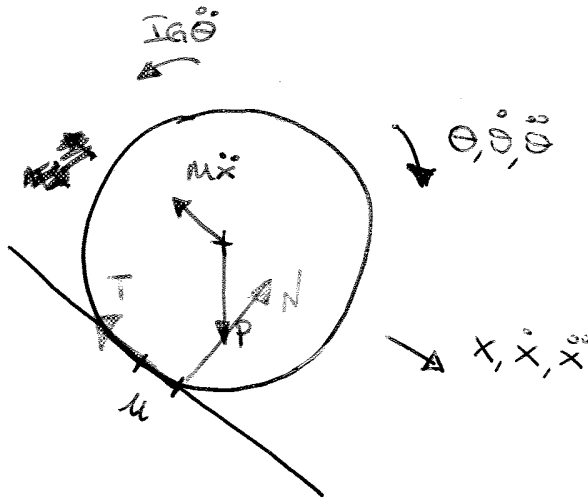
$$t=T \quad \omega = 0$$

$$T = \frac{m r_i^2}{C} \omega_0 = 6,04 \text{ s}$$

3)



2500 N
=>



$$\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \quad T + m \ddot{x} = P \sin \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \uparrow \end{array} \right. \quad N = P \cos \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \quad I_G \ddot{\theta} = T \frac{d}{2} - N u$$

Ipotesi di rotolamento puro:

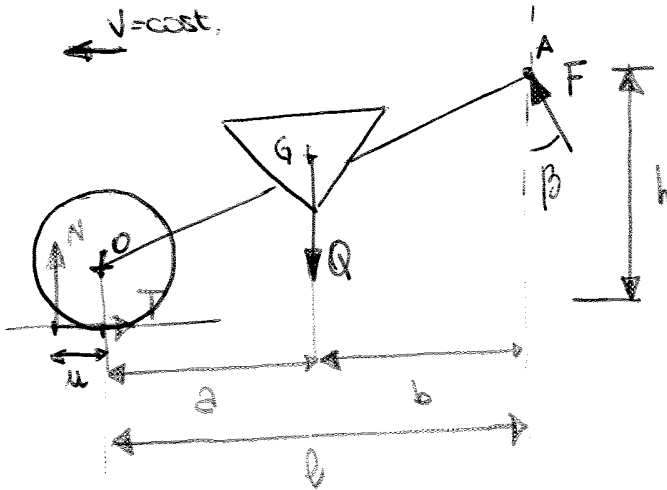
$$\ddot{x} = \ddot{\theta} \frac{d}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = P \cos \alpha \\ T = -m \ddot{x} + P \sin \alpha \\ I_G \ddot{\theta} = (-m \ddot{x} + P \sin \alpha) \frac{d}{2} - P \cos \alpha u \\ \ddot{\theta} \frac{d}{2} \end{array} \right.$$



4)

(31)



F che devo applicare
e B in modo che la
carnice scivoli a
velocità costante

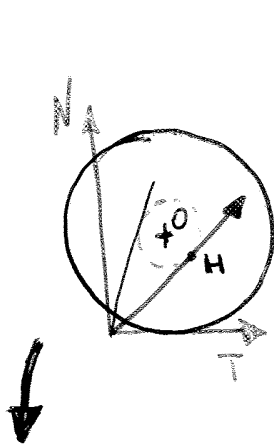
c'è attrito solvente

$$\begin{aligned} \rightarrow & T = F \sin \beta \\ \uparrow & N + F \cos \beta = Q \\ \leftarrow & T h - N(l+u) + Qb = 0 \end{aligned}$$

3 eq. 4 incognite (T, F, beta, N)

NON BASTANO

Vedo a guardare ruota



$\uparrow H \quad T \frac{d}{2} = N(u+r) \rightarrow T = \frac{2N(u+r)}{d} \quad \parallel \quad 4^{\text{a}} \text{ eq. che cerco}$

Ruota condotta → Nella ruota condotta è proprio l'attrito che
me lo manda avanti; ecco perché ho scelto
quella tangente e non l'altra

(Nella ruota motrice invece l'attrito si oppone al moto)

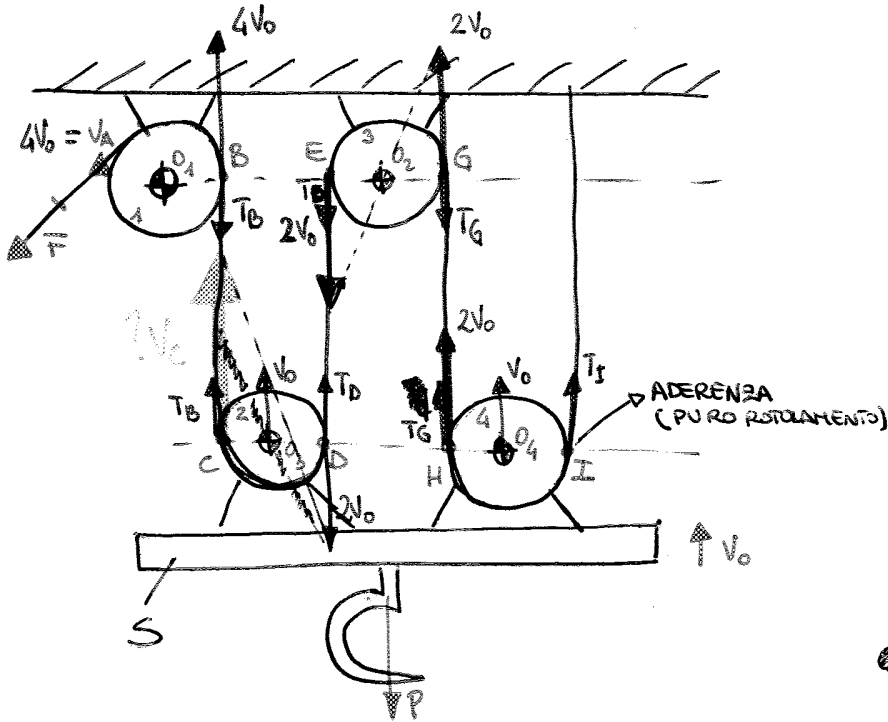
⇒ Risolvo il sistema di 4 eq. → Trovo:

$$\begin{aligned} N &= 340,8 \text{ N} \\ T &= 22,15 \text{ N} \\ F &= 444,5 \text{ N} \\ \beta &= \arcsin 2,86^\circ \end{aligned}$$

11/07/2012

30

PARANCO DI SOLEVAIMENTO (FUN)



F = forza motrice

P = carico

S = bozzaella

v_0 = velocità di salita del carico

1 e 3 : pul. fisse

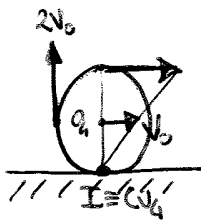
2 e 4 : pul. mobili

(1, 2, 3, 4 raggi uguali)

OK

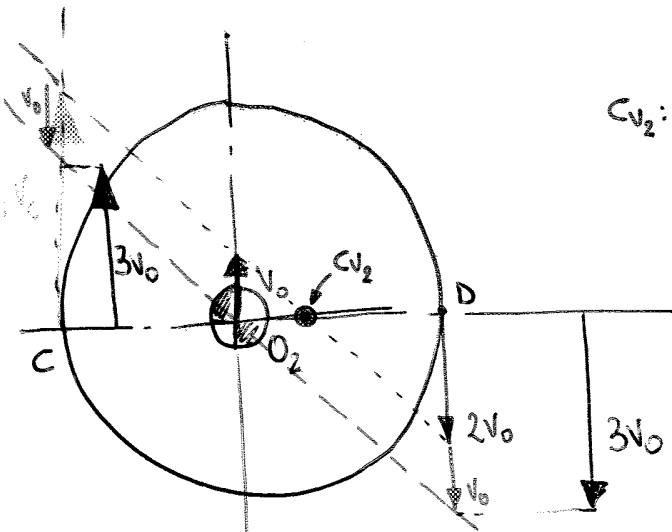
- a) Analisi cinematica (voglio legare v_A a v_0)
- b) Analisi tensioni
- c) Rendimento totale

- a) $O_1 \equiv C_4$
- $O_3 \equiv C_2$
- $I \equiv C_4$



O_4 si muove con la stessa velocità del carico (v_0), perché è vincolato a esso (Idem per O_3)

C_2 : punto a velocità nulla

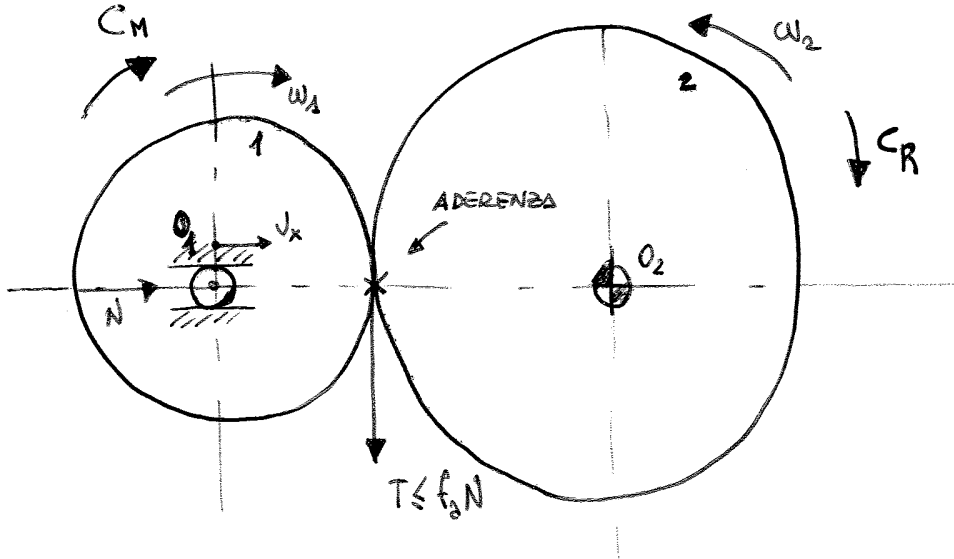


$$v_c = 3v_0 + v_0 = 4v_0$$

TRASMISSIONE CON RUOTE DENTATE

a) Trasmissioni basate sull'attrito
(Cinghie, funi, vite-madrevite, ruote di frizione)

↑
"anello di passaggio"



$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \stackrel{?}{=} \text{cost.}$$

- CINGHIE DENTATE
- CATENE ($i_{medio} = \text{cost.}$)
- RUOTE DENTATE



TIPICI DI RUOTE DENTATE

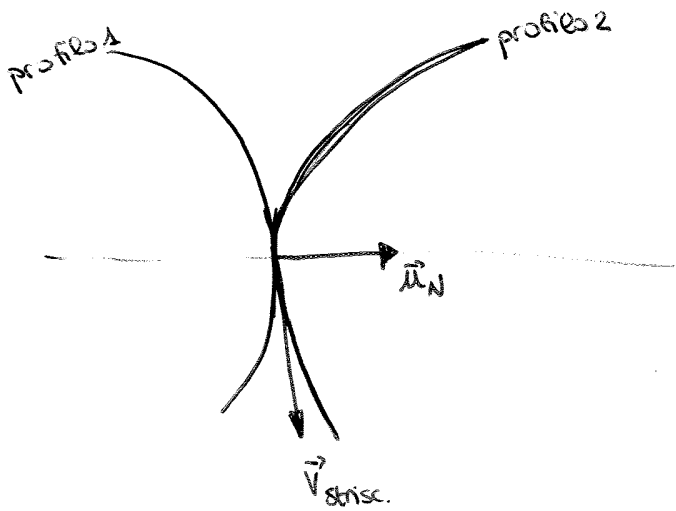
1) Assi paralleli:

- R. CILINDRICHE A DENTI DIRITTI
(interne o esterne) $i = 1 \div 5$
max 10
- R. CILINDRICHE A DENTI EUCOIDALI
 $i = 1 \div 5$
max 10

2) Assi concorrenti

- PUNTE CONICHE A DENTI DIRITTI
 $i = 1 \div 10$

PR. ADEV. DI CERCHIO => PROFILI CONIUGATI:

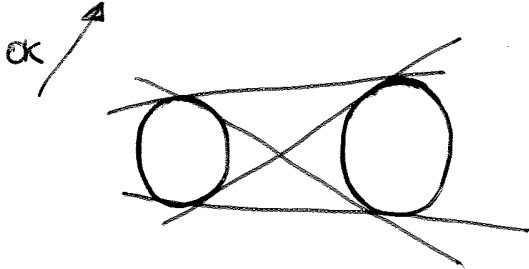


I profili devono avere ~~la~~ ^{le} stesse componente normale (v_N) di velocità. In caso contrario, o si urtano o si compenetrano => generando condizioni di interferenza tra i denti

(Riferimento pag. 162)

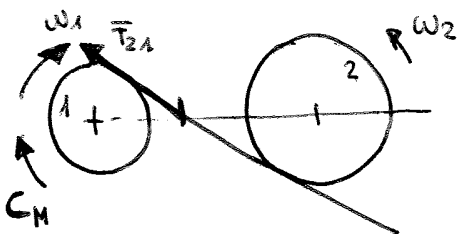
1) Le tangenti ai cerchi di base sono le normali cui profili coniugati, quindi ai denti

2) E' 4 tg: 2 interne e 2 esterne ← NON VAN BENE

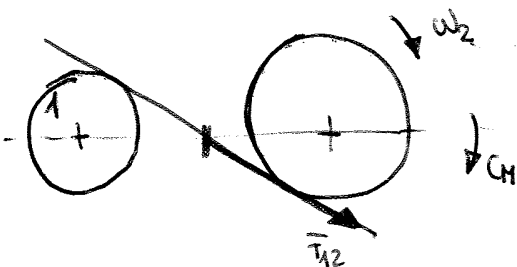


3) Tg interne: dipende da quale ruota è motrice e dal verso di ω

Hp: avere sempre una sola coppia di denti in presa



T_{21} opposte a C_M => le tg. che consideriamo è corretta



$p = \text{passo circolare medio (media di } p_1, p_2, p_3, \dots)$

PROPORZIONAMENTO MODULARE

$$m = \text{modulo} = \frac{P}{\pi} \quad [\text{mm}]$$

$$Q = m$$

$$d = 1,25 m$$

$$p z_1 = 2\pi r_1$$

↙ ↘ raggio primitivo costante

n° denti ruote

$$m = \frac{2\pi r_1}{z_1 \pi} = \frac{2 r_1}{z_1}$$

$$\Delta O_1 H_1 C_{V12} : r_{b1} = r_1 \cos \alpha$$

RAPPORTO DI TRASMISSIONE

$$m = \frac{2 r_1}{z_1} = \frac{2 r_2}{z_2}$$

$$C_{V2} \rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \text{cost.}$$

VARIAZIONE DELL'INTERASSE A CAUSA DEI GIOCHI

$$a) O_1 O_2 : i = \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{r_{b2}}{\cos \alpha} \right) \left(\frac{\cos \alpha}{r_{b1}} \right) = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

$$b) O_1' O_2' : i' = \frac{r_2'}{r_1'} = \left(\frac{r_{b2}}{\cos \alpha'} \right) \left(\frac{\cos \alpha'}{r_{b1}} \right) = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = i$$

8/05/2012 (Esercitazione 5)

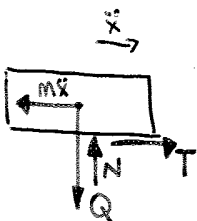
$$1) \dot{x} = \ddot{x} t + v_0$$

$$v_0 = 13,33 \text{ m/s}$$

$$\Delta t \rightarrow \dot{x} = 0 \rightarrow \Delta t = -\frac{v_0}{\ddot{x}} = 4,63 \text{ s}$$

$$\ddot{x} = 3 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta x = \ddot{x} \frac{t^2}{2} + \dot{x} t \rightarrow \Delta x = 32,2 \text{ m}$$

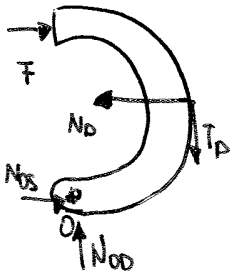


$$T \leq f_0 N$$

condizione limite $T = f_0 N$

$$N = Q \Rightarrow m \ddot{x} = f_0 Q \rightarrow f_0 = \frac{m \ddot{x}}{Q} = \frac{Q}{Q} \ddot{x} \cdot \frac{1}{Q} = \frac{\ddot{x}}{3} = 0,308$$

ca. ceppo destro



$$\sum \mathcal{M} = F \cdot 2a - N_D a + T_D \frac{D}{2} = 0$$

$$F \cdot 2a - R_D \cos \varphi a + R_D \sin \varphi \frac{D}{2} = 0$$

$$R_D = \frac{F \cdot 2a}{a \cos \varphi - \frac{D}{2} \sin \varphi}$$

$$M' = (R_D + R_S) \cdot \rho$$

$$M' = \rho \cdot 2aF \left(\frac{1}{a \cos \varphi + \frac{D}{2} \sin \varphi} + \frac{1}{a \cos \varphi - \frac{D}{2} \sin \varphi} \right)$$

$$M' = \rho a F \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{2a \cos \varphi}{a^2 - (\frac{D}{2} \cdot F)^2} \right)$$

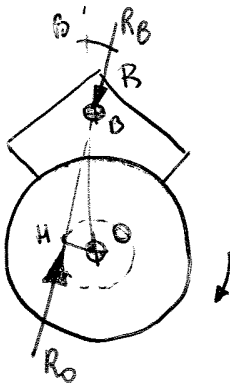
to di il testo!

$$M' = \frac{4 \rho a}{\cos \varphi} \cdot F \cdot \frac{2a}{a^2 - (\frac{D}{2} F)^2}$$

$$F = \frac{M'}{4 \rho a} \cdot (a^2 - (\frac{D}{2} F)^2)$$

$$F = \frac{M'}{4 \rho a^2} (a^2 - (\frac{D}{2} F)^2) = 6852 \text{ N}$$

2) Eq. tamburo + ceppo



R_B, R_O

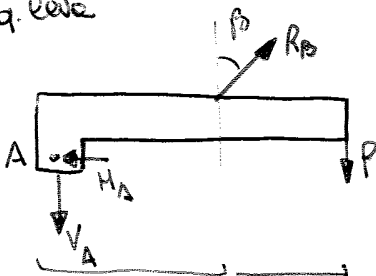
Non vedo la coppia frenante perché è una coppia interna

$$\tan \beta = \frac{e}{H + \frac{d}{2}} \rightarrow (\text{OBH})$$

$$\beta = 14,32^\circ$$

$$\varphi = \tan^{-1} f = 31,80^\circ \rightarrow e = \frac{d}{2} \tan \varphi = 4,085 \text{ cm}$$

Eq. leva



$$\sum \mathcal{M} = -P(a+b) + R_B \cos \beta \cdot a - R_B \sin \beta \cdot b = 0$$

$$R_B = \frac{P(a+b)}{a \cos \beta - b \sin \beta} = 332 \text{ N}$$

(43)

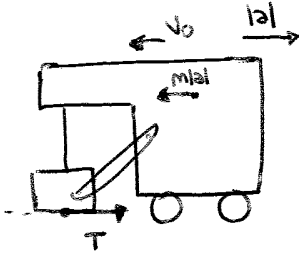
4) $60 \text{ km/h} = 16,67 \text{ m/s} = v_0$

$a = 3 \text{ m/s}^2$

$v = at + v_0$

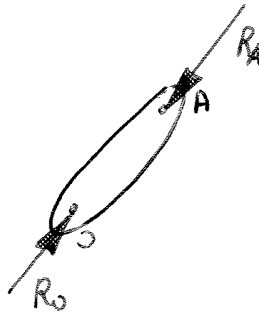
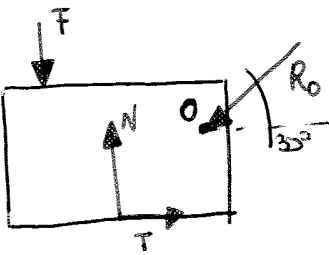
$\Delta t \quad v = 0 \quad \Delta t = -\frac{v_0}{a} = 5,56 \text{ s}$

$\Delta x = \frac{1}{2} (-a)t^2 \quad \Delta x = 46,3 \text{ m}$

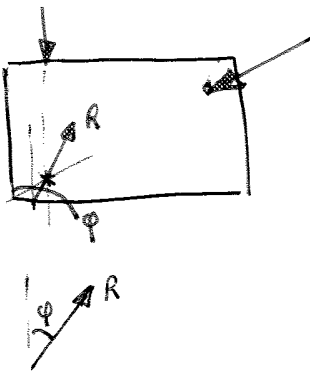


$T = ma = 4500 \text{ N}$

Eq. pattino

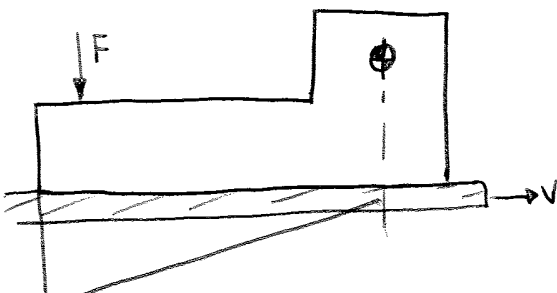


$$\begin{cases} \rightarrow T = R_0 \cos 35^\circ \rightarrow R_0 = \frac{T}{\cos 35^\circ} = 5196 \text{ N} \\ \uparrow N = F + R_0 \sin 35^\circ \rightarrow F = N - R_0 \sin 35^\circ = 21'086 \text{ N} \\ T = fN \rightarrow N = T/f = 23'684 \text{ N} \end{cases}$$



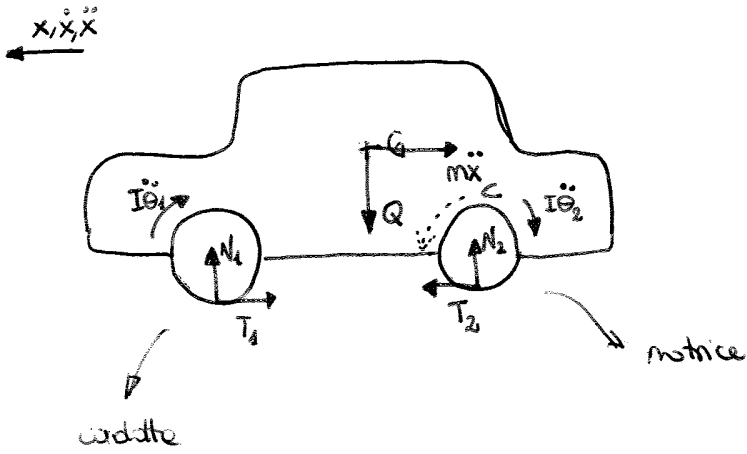
Disegno giusto

6)



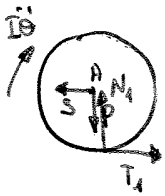
forza frenante T?

ESERCITAZIONE 4 (AUTO IN PARCHING)



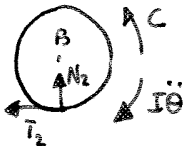
C non ha veleno (è interna)

$$\begin{cases} \rightarrow & T_1 - T_2 - m\ddot{x} = 0 \\ \uparrow & N_1 + N_2 - Q = 0 \\ \curvearrowright & -N_1 x_G + T_1 z_G + N_2 (p - x_G) - T_2 z_2 - I_G (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = 0 \\ & \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 \quad (\text{presumo di sia aderente}) \end{cases}$$



A) $I\ddot{\theta} = T_1 r$

$I = 0,8$
 $2mr^2 =$

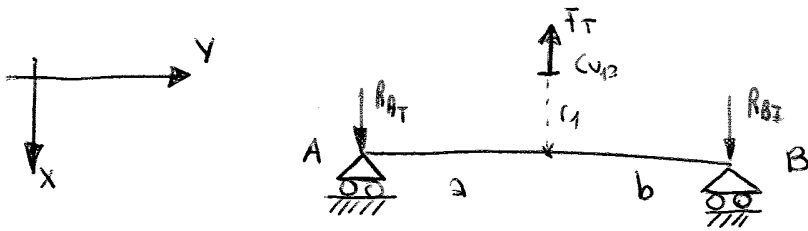
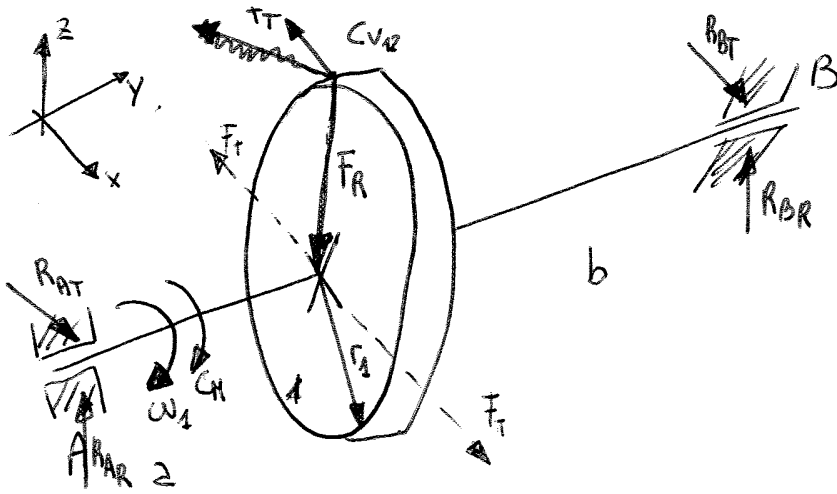


$T_2 = f_2 N_2$
 $\ddot{x} = p/2 \ddot{\theta}$ } condizione aderenza ruote posteriori

$T_1 \leq f_3 N_1$ } condiz. aderenza ruote anteriori

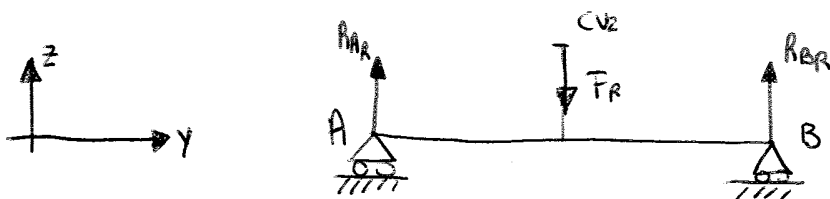
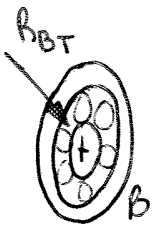
$\theta = 11,26$

Risolve eq.



$$\sum M_A^+ = F_T \cdot a - R_{BT} \cdot (a+b) = 0$$

$$\sum M_B^+ = R_{AT} \cdot (a+b) - F_T \cdot b = 0$$



$$\sum M_A^+ = -F_R \cdot a + R_{BR} \cdot (a+b) = 0$$

$$\sum M_B^+ = F_R \cdot b - R_{AR} \cdot (a+b) = 0$$

la ruota più piccola non può scendere sotto un determinato numero di denti

INGRANAGGIO ROCCHETTO - DENTIERA

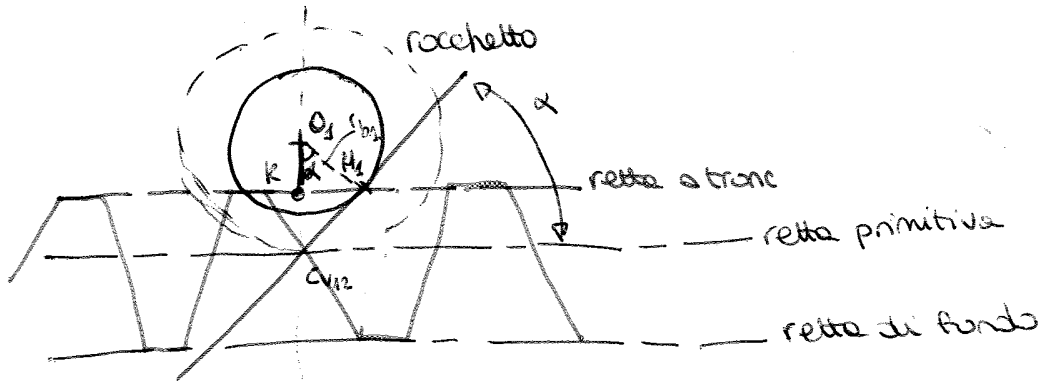
(46)

ROCCHETTO: ruota che si impegna con la dentiera

DENTIERA: ruota limite dove: $r \rightarrow \infty$

circ \rightarrow rette

profiles denti \rightarrow trapezio



Il sistema trasforma il moto rotatorio del rocchetto in modo traslatorio della dentiera

$$O_1 C_{V12} = O_1 K + K C_{V12}$$

$$r_1 = r_{b2} \cos \alpha + m$$

$$\parallel$$

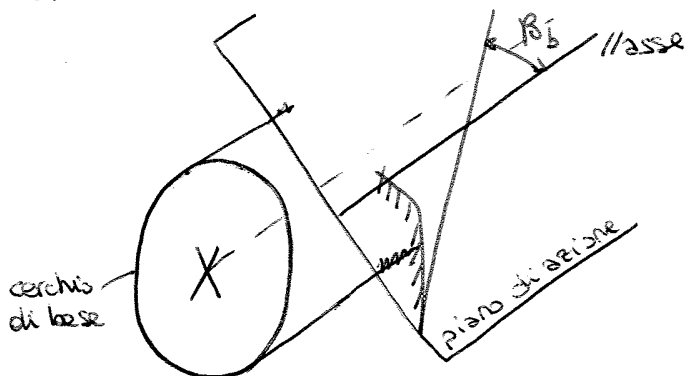
$$r_1 \cos \alpha$$

$$r_1 = r_1 \cos^2 \alpha + m \rightarrow m = r_1 (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$m = r_1 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{2f_1}{z_1} = r_1 \sin^2 \alpha \rightarrow z_{1 \text{ minimo}} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

RUOTE DENTATE CIL. A DENTI ELICOIDALI



β_b : ^{di inclinazione dell'elica} angolo del dente sul cilindro di base

Il profilo del dente si genera dalle rette inclinate di β_b facendo rotolare senza strisciare il piano di azione sul cilindro di base

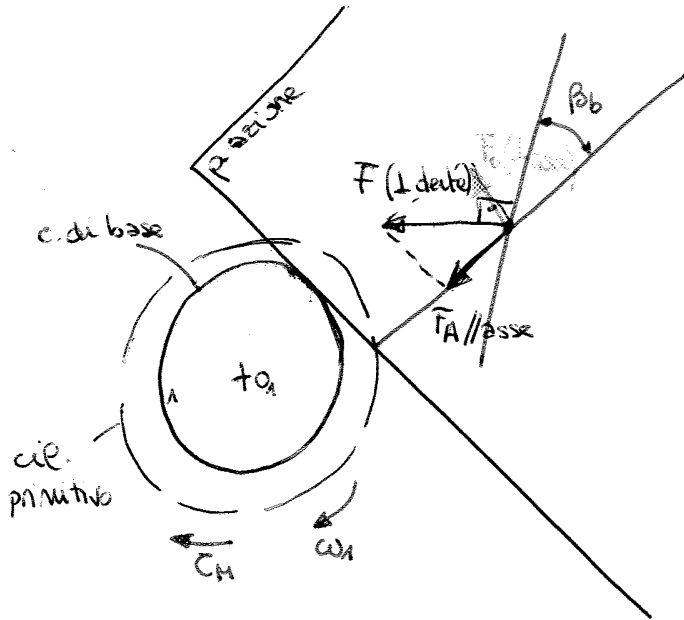
a) Sezione con piano perpendicolare all'asse delle ruote dando profili ad esecente di cerchio

b) sezioni con cilindri coassiali e quelli base della eliche dei denti

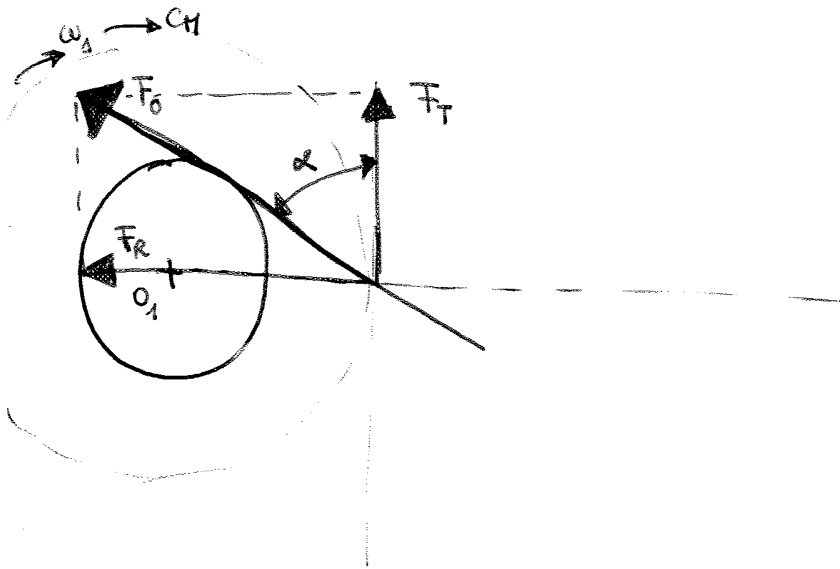
a) + b) sup. del dente ad ELICOIDE

FORZE SCAMBIATE IN R.C.D. ELIC.

- Hp → No ATRITO (solo $F \perp$ dente)
- Hp → 1 sola coppia di denti in presa
- Hp → pto di contatto $\cong \frac{1}{2}$ ruota



sezione frontale (piano L'asse)



$$F_0 = F \cos \beta_b$$

$$F_A = F \sin \beta_b \text{ (componente assiale)}$$

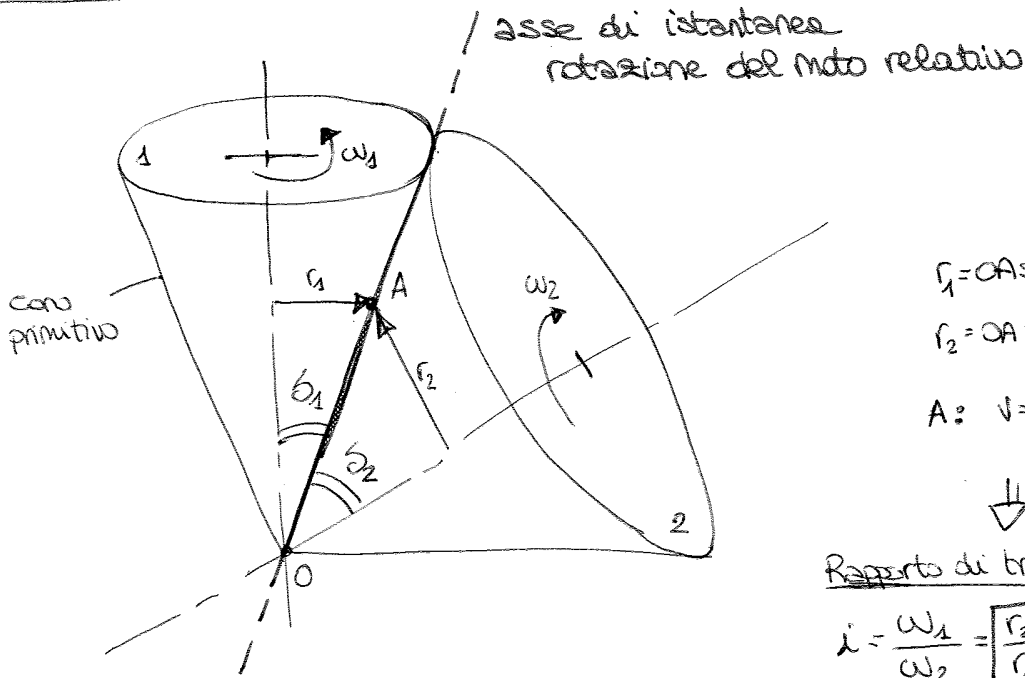
$$F_T = F_0 \cos \alpha = (F \cos \beta_b) \cos \alpha$$

$$F_R = F_0 \sin \alpha = (F \cos \beta_b) \sin \alpha$$

16/05/2012

(48)

RUOTE CONICHE (DENTI DIRITTI)



$$r_1 = OA \sin \delta_1$$

$$r_2 = OA \sin \delta_2$$

$$A: v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

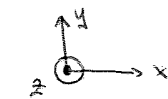
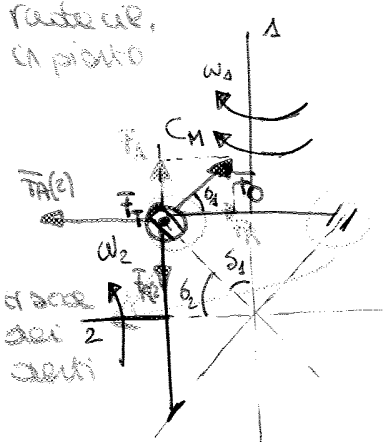
↓
Rapporto di trasmissione

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$M = \frac{2r}{z} \quad \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$$

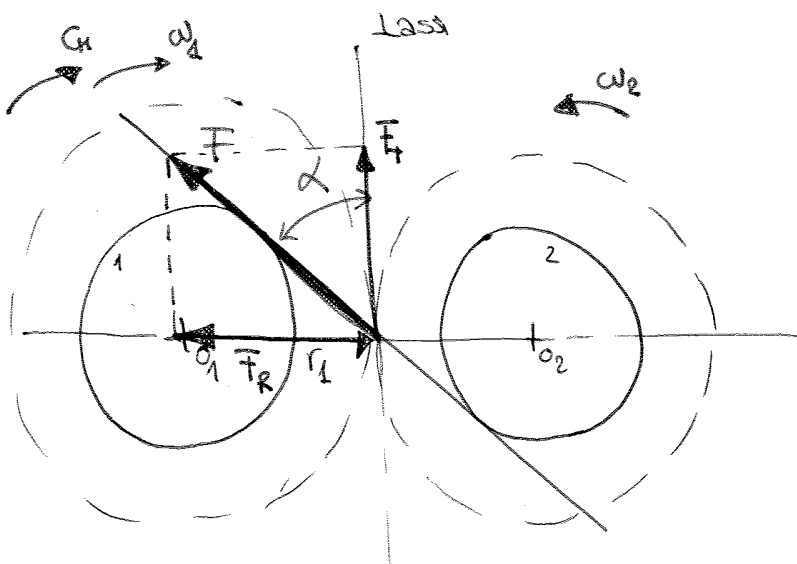
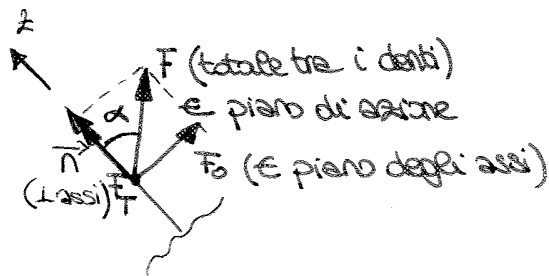
Forze scambiate tra le ruote

Forze sul
piano



$$C_M = F_T r_1$$

(In direzione le forze sulle ruote 2)
Loro si scambiano



$$F_T = F \cos \alpha = \frac{C_M}{r_1}$$

$$F_R = F \sin \alpha$$

$$F_A = F_0 \sin \delta_1 = F (\sin \alpha) (\sin \delta_1)$$

$$F_R = F_0 \cos \delta_1 = F (\sin \alpha) (\cos \delta_1)$$