NUMERO: 709

DATA: 07/10/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Beghini

MATERIA: Geometria
Prof. Massaza

ALGEBRA LINEARE

VETTORI DELLO SPAZIO EUCLIDEO APPLICATI IN UN PUNTO

VETTORE $\vec{v}$: segmento $\overline{OP}$ orientato da O verso P

Per spiegare direzione e verso di alcune grandezze, in particolare per velocità e forze.

Per descrivere un vettore devo usare:

1) **DIREZIONE** → retta su cui giace tra quelle uscenti da O
2) **VERSO** → sono due i versi possibili
3) **LUNGHEZZA o MODULO** rispetto ad un'unità d'misura scelta ↘ $|\vec{v}|$

i vettori sono in corrispondenza biunivoca con i punti dello spazio:

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA:

V = insieme di vettori
S = punti dello spazio

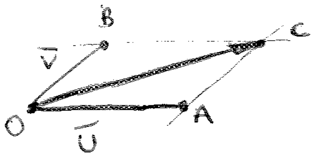
$\bar{v} = \overline{OP} \rightleftarrows P$

$\overline{OO}$ = VETTORE NULLO

né direzione, né verso, ma unico con modulo = 0

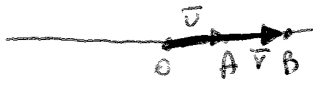
solo con vettore nullo tra i due insiemi la corrispondenza è biunivoca.

SOMMA DI VETTORI: REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

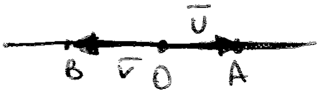


$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OA} \longrightarrow \overline{OC} = \bar{u} + \bar{v}$

- $0 + \bar{v} = \bar{v}$
-



$\bar{u} + \bar{v} =$
- direzione: comune ad $\bar{u}$ e $\bar{v}$
- verso: comune ad $\bar{u}$ e $\bar{v}$
- modulo: somma dei moduli



$\bar{u} + \bar{v}$
- direzione: comune
- verso: del vettore con modulo maggiore
- modulo: differenza dei moduli

se $|\bar{v}| = |\bar{u}|$ → risultato è vettore nullo
↓
vettori opposti

$\bar{u} + \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \bar{u}$ e $\bar{v}$ hanno stesso direzione, stesso modulo, verso opposto

$\bar{u} = -\bar{v}$

$V \times V \longrightarrow V$

$(\bar{u}, \bar{v}) \longrightarrow \bar{u} + \bar{v}$

PRODOTTO VETTORE PER NUMERO REALE

$V \times \mathbb{R} \longrightarrow V$

$(\underset{\text{vettore}}{\bar{v}}, \underset{\text{numero}}{a}) \quad a \cdot \vec{v}$

$a\vec{v}$ — direzione: del vettore

— verso: $a > 0$ verso di $\bar{v}$; $a < 0$ verso opposto $\bar{v}$

— modulo: $|a| \cdot |\bar{v}|$

$a \cdot \bar{v} = \bar{0} \iff (a = 0 \vee \bar{v} = \bar{0}) \longrightarrow$ vale REGOLA ANNULLAMENTO PRODOTTO

operazione esterna: cioè tra coppie disomogenee

1) $1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v}$

2) $(a \cdot b)\bar{v} = a(b \cdot \bar{v})$

3) $(a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b \cdot \bar{v}$

4) $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$

} esempi di proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto

SPAZIO VETTORIALE

Valgono proprietà dei gruppi commutativi + queste 4 proprietà: SPAZIO VETTORIALE

SPAZIO VETTORIALE su un campo K

CAMPO = insieme con 2 operazioni interne, + e •

$(K, +, \cdot)$

1) commutativo rispetto alla somma $(K, +)$

2) $(K^*, \cdot)$ gruppo commutativo

3) proprietà distributiva rispetto alla somma (solitamente $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

→ insieme con una operazione interna (+) ed una esterna (prodotto numero-vettore) che soddisfano le 8 proprietà scritte

esempi di spazi vettoriali

- $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, +, \cdot \ \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(af)(x) = \underbrace{f(x) \cdot a}_{\text{ordinata di } f \ \cdot \ \text{numero } \mathbb{R}}$ ⟶ già dimostrato che è gruppo commutativo

dimostrare che:

1) $1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \longrightarrow$ vero

2) $(a \cdot b) \cdot \bar{f} = a(b \cdot \bar{f})$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{[(a \cdot b)\bar{f}](x)}_{\boxed{(a \cdot b) f(x)}} = \underbrace{[a(b \cdot \bar{f})](x)}_{a[b(f)(x)]}$

$a[b(f)(x)] \to \boxed{a(b \cdot f(x))}$

=

perché essendo f(x) un numero

proprietà vale perché è una proprietà del'

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$

$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$

$r(a, b, c) = (ra, rb, rc)$

vale la stessa cosa detta per $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n), x_n \in \mathbb{R}\}$

$\bar{x} = (x_1, \ldots x_n)$ $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ r\bar{x} = (rx_1, \ldots rx_n) \end{array}\right\} \text{spazio vettoriale}$$

vale anche per $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, in generale per tutti i campi $\longrightarrow$ per $\mathbb{Z}$ non vale

$(a, b) + (c, d) \in \mathbb{R}^2$

$= (a+c, b+d)$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

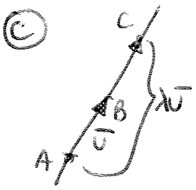
ⓐ $\bar{v} \quad \lambda = -1 \qquad \lambda\bar{v} =$ opposto $= -\bar{v}$

ⓑ $\bar{u} \quad \lambda = \frac{1}{\|\bar{u}\|} \qquad \lambda\bar{u}$?

NORMALIZZATO di $\bar{u}$

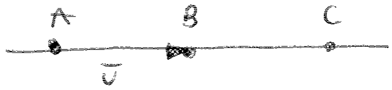
$\text{norm}(\bar{u}) = \text{vers}(\bar{u}) = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$

ⓒ



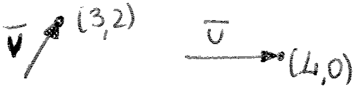
A, B, C allineati

vettore prodotto ha stesso punto di applicazione di A



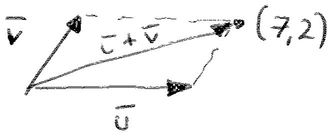
$\overrightarrow{AC} = \lambda\bar{u}$

ESERCIZIO

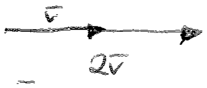


DISEGNARE

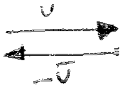
- $\bar{u} + \bar{v}$



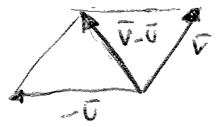
- $2\bar{v} = (6,4)$



- $-\bar{u} = (-4,0)$



- $\bar{v} - \bar{u}$



ESERCIZIO

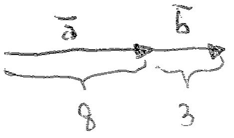
$\bar{a}, \bar{b} \in V$

$\|\bar{a}\| = 8 \quad \|\bar{b}\| = 3$

$\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}$

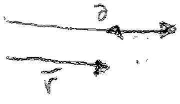
Trova massimo e minimo di $\|\bar{r}\|$

①



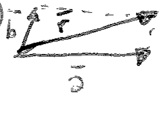
$\|\bar{r}\| = ⑪ \rightarrow$ MAX

②



$\|\bar{r}\| = ⑤ \rightarrow$ MIN

③



$\|\bar{a} + \bar{b}\| \leq \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\| = 11$

$\|\bar{a} + \bar{b}\| \geq \left| \|a - b\| \right|$

ESERCIZIO

$\bar{a} = 11\bar{i} - 7\bar{j} + 9\bar{k}$

$\bar{b} = 14\bar{i} + 5\bar{j} - \bar{k}$

$\bar{a}+\bar{b}$?

$\bar{a}-\bar{b}$?

$\|\bar{a}\|$?

$\|\bar{b}\|$?

$\|\bar{a}+\bar{b}\|$?

$\|\bar{a}-\bar{b}\|$?

$\bar{a}+\bar{b} = (11+14)\bar{i} + (7+5)j + (9-1)\bar{k} =$

$= 25\bar{i} - 2\bar{j} + 8\bar{k}$

$\bar{a}-\bar{b} = (11-14)\bar{i} + (-7-5)\bar{j} + (9+1)\bar{k} =$

$= -4\bar{i} - 12\bar{j} + 10\bar{k}$

$\|\bar{a}\| = \sqrt{11^2+(-7)^2+9^2} = \sqrt{121+49+81} = \sqrt{251} \simeq 15,8$

$\|\bar{b}\| = \sqrt{14^2+5^2+1} = \sqrt{196+25+1} = \sqrt{222} \simeq 14,9$

$\|\bar{a}+\bar{b}\| = \sqrt{25^2+(-2)^2+8^2} = \sqrt{625+4+64} = \sqrt{693} \simeq 26,32$

$\|\bar{a}-\bar{b}\| = \sqrt{4^2+(-12)^2+10^2} = \sqrt{14+144+100} = \sqrt{258} \simeq 16$

ESERCIZIO

Dato $\bar{v} = 3\bar{i} - \bar{j}$

Trovare vettore con stessa direzione e verso ma norma unitaria = $\text{norm}(\bar{v}) = \dfrac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$

$\|\bar{v}\| = \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$

$\text{norm}(\bar{v}) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}\bar{i} - \dfrac{1}{\sqrt{10}}\bar{j}$

ESERCIZIO

Per quali valori di α, β

$\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} = \bar{0}$

ⓐ $\bar{u} = (3,4)$

$\bar{v} = (2,1)$

e

ⓑ $\bar{u} = (3,4)$

$\bar{v} = (6,8)$

ⓐ $\alpha(3,4) + \beta(2,1) = (0,0)$

$(3\alpha, 4\alpha) + (2\beta, \beta) = (0,0)$

$(3\alpha+2\beta) + (4\alpha+\beta) = (0,0)$

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 0 \longrightarrow 3\alpha - 8\alpha = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad -5\alpha = 0 \qquad \rightarrow \alpha = \\ 4\alpha + \beta = 0 \longrightarrow \beta = -4\alpha \longrightarrow \beta = 0 \end{cases}$$

ⓑ $\alpha(3,4) + \beta(6,8) = (0,0)$

$(3\alpha, 4\alpha) + (6\beta, 8\beta) = (0,0)$

$(3\alpha+6\beta) + (4\alpha+8\beta) = (0,0)$

$$\begin{cases} 3\alpha + 6\beta = 0 \\ 4\alpha + 8\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{8\beta}{4} = -2\beta \\ -6\beta + 6\beta = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ vale per $\alpha = -2\beta$ quindi ho ∞ coppie d' α e β per cui

$\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} = \bar{0}$

$\downarrow$

in questa soluzione è compreso anche quello $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, la differenza è che nel

DIMOSTRAZIONE UNICITÀ VETTORE NULLO

$\exists \bar{0} \mid \bar{0} + \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v}$

Siano $\bar{0}$ e $\bar{0}'$ due vettori nulli e dimostriamo che $\bar{0} = \bar{0}'$

$\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}'$

↑ elemento neutro

$\bar{0}' + \bar{0} = \bar{0}$

↑ elemento neutro

dato che risultato di una operazione, se esiste, deve essere unico, allora $\bar{0} = \bar{0}'$

DIMOSTRAZIONE UNICITÀ OPPOSTO

$\forall \bar{v}, \exists (-\bar{v}) \mid \bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

Siano $\bar{v}'$ e $\bar{v}''$ 2 opposti di $\bar{v}$, dimostriamo che $\bar{v}' = \bar{v}''$

$\bar{v}' + \bar{v} + \bar{v}'' = \underbrace{(\bar{v}' + \bar{v})}_{\bar{0}} + \bar{v}'' = \bar{v}''$

$= \bar{v}' + \underbrace{(\bar{v} + \bar{v}'')}_{0} = \bar{v}'$

risultato deve essere unico, quindi per elemento neutro e PROPRIETÀ ASSOCIATIVA, $\bar{v}' = \bar{v}''$

DIMOSTRAZIONE $0 \cdot \bar{v} = 0$

$0 \cdot \bar{v} \overset{?}{=} \bar{0}$

$(0 + a)\bar{v} = \boxed{a\bar{v}} \longrightarrow =$

$= 0 \cdot \bar{v} + a \cdot \bar{v} = \boxed{a \cdot \bar{v}}$

$0 \cdot \bar{v} + a \cdot \bar{v} = a\bar{v}$

$(0 \cdot \bar{v} + a \cdot \bar{v}) - a\bar{v} = \cancel{a\bar{v}} - \cancel{a\bar{v}}$

$0 \cdot \bar{v} + \cancel{a\bar{v}} - \cancel{a\bar{v}} = 0$

$\boxed{0 \cdot \bar{v} = 0}$

Quindi se ho una somma di vettori: $\bar{v} + \cancel{\bar{w}} = \bar{u} + \cancel{\bar{w}}$

cioè posso cancellare $\bar{w}$

$(\bar{v} + \bar{w}) + (-\bar{w}) = (\bar{u} + \bar{w}) + (-\bar{w})$

$\bar{v} + \cancel{\bar{w}} - \cancel{\bar{w}} = \bar{u} + \cancel{\bar{w}} - \cancel{\bar{w}}$

$\bar{v} = \bar{u}$

$a \cdot \bar{0} = \vec{0}$

$a \cdot (\bar{0} + \bar{v}) = a\bar{v}$

$= a \cdot \bar{0} + a\bar{v} = a\bar{v}$

$a\bar{0} + a\bar{v} = a\bar{v}$

$a\bar{0} + \cancel{a\bar{v}} - \cancel{a\bar{v}} - \cancel{a\bar{v}} - \cancel{a\bar{v}} \longrightarrow \boxed{a\bar{0} = 0}$

La cosa da controllare è che tali operazioni ristrette rimangano comunque operazioni, infatti le proprietà per un piano valgono; ma per l'unione insiemistica di due rette non valgono.

CRITERIO PER I SOTTOSPAZI

$S \subseteq V$ è un sottospazio di V se e solo se valgono queste condizioni:

1) $\bar{s_1}, \bar{s_2} \in S \Rightarrow \bar{s_1} + \bar{s_2} \in S$ cioè l'addizione ristretta ad S deve rimanere un'operazione, cioè $\bar{s_1} + \bar{s_2}$ deve appartenere all'insieme S

2) $a \in \mathbb{K}, \bar{s} \in S \Rightarrow a\bar{s} \in S$ → comprende anche l'opposto dato che $-\bar{v}$ può essere considerato come $a = -1$ $(-1)\bar{v}$

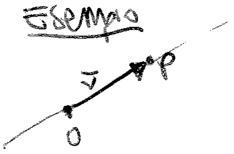
3) $\bar{0} \in S$ → si ricava dalla seconda perché posso dimostrare che un vettore qualsiasi moltiplicato per zero è pari a zero. Però rimane il problema che dovrei specificare se lo spazio vettoriale è vuoto

Il vettore nullo da solo è uno spazio vettoriale: $\{\bar{0}\}$ è il più piccolo di tutti ma c'è sempre.

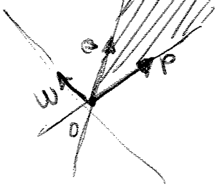
I sottospazi sono:

SOTTOSPAZIO NULLO → punto di applicazione
RETTE PER IL PUNTO
PIANO PER IL PUNTO

Esempio



devo trovare il più piccolo sottospazio nel quale è contenuto il vettore $\bar{P}$
Il sottospazio deve essere almeno una retta per permettere moltiplicazione



se consideriamo anche il vettore Q devo considerare tutta la retta OQ e se voglio comprendere anche le somme tra i due vettori devo considerare tutto il piano

se considero un vettore fuori dal piano → ottengo lo SPAZIO

Quindi tutti i sottospazi sono:

- $\{0\}$
- retta
- piano
- spazio

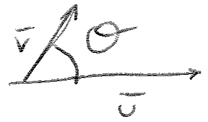
ESERCITAZIONE 2

PRODOTTO SCALARE E ANGOLO TRA 2 VETTORI

$\bar{u}, \bar{v} \in V \longrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} \in K$

a) Se almeno uno dei due vettori $\bar{u}, \bar{v}$ è nullo: $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

b) $\bar{u}, \bar{v} \neq 0 \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cos \widehat{\bar{u}\bar{v}}$



$0 \leq \theta \leq \pi$

$\bar{u} \parallel \bar{v} \Rightarrow \theta = 0, \pi$

- $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \bar{u} \perp \bar{v}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ

- $\bar{u} \cdot \bar{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\bar{u} \cdot \bar{v} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

modulo di $\bar{u}$ e $\bar{v}$ non influenzano segno perchè sono sempre positivi

- $\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\|\|\bar{v}\| \Leftrightarrow \theta = 0$
- $\bar{u} \cdot \bar{v} = -\|\bar{u}\|\|\bar{v}\| \Leftrightarrow \theta = \pi$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

Somma dei prodotti delle componenti omonime.

$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$

$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$\bar{u} = \bar{v}$

$$\bar{u}\bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{u} = \|\bar{u}\|^2 \longrightarrow \bar{u} \cdot \bar{u} = \|\bar{u}\| \, \|\bar{u}\| \cos \underbrace{\widehat{\bar{u}\bar{u}}}_{0} = \|\bar{u}\|^2$$

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = u_x \cdot u_x + u_y u_y + u_z u_z = \|\bar{u}\|^2$$

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cos \widehat{\bar{u}\bar{v}}$$

$$\cos \widehat{\bar{u}\bar{v}} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|}$$

però $\bar{x}$ deve essere un VERSORE, cioè $\|\bar{x}\| = 1$

$$1 = \bar{x} \cdot \bar{x} = 9z^2 + z^2 + z^2 = 11z^2$$

$$z^2 = \frac{1}{11} \longrightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{11}} \longrightarrow \text{i versori sono 2:}$$

- $z = +\frac{1}{\sqrt{11}} \rightarrow \bar{x} = \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, +\frac{1}{\sqrt{11}}, +\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$
- $z = -\frac{1}{\sqrt{11}} \longrightarrow \bar{x} = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$

ESERCIZIO

Supponiamo dati $\bar{u}, \bar{v} \in V \mid \|\bar{u}\| = 3 \quad \|\bar{v}\| = 1 \quad \hat{\bar{u}\bar{v}} = \frac{\pi}{4}$

Quanto vale $\bar{u} \cdot \bar{v}$?

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos \hat{\bar{u}\bar{v}} = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ESERCIZIO

$\bar{a}(1,0,0)$

$\bar{b}(3,0,2)$

$$\cos \hat{\bar{a}\bar{b}} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 3$$

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\|\bar{b}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

ESERCIZIO

K?

$\bar{v} = (1,3,7,-1)$ è $\perp$ $\bar{w}(3,5,1,K)$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 3 + 15 + 7 - K = 0$$

$$0 = 25 - K$$

$$K = 25$$

ESERCIZI PROPOSTI

① $\bar{v_1} = (-3,5,1)$ quanti sono $\perp$ a 2 a 2?

$\bar{v_2} = (1,0,-2)$

$\bar{v_3} = (7,1,1)$

$\bar{v_4} = (-2,3,0)$

$\bar{v_5} = (-1,1,1)$

$\bar{v_6} = (1,-3,2)$

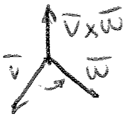
PRODOTTO VETTORIALE (o esterno)

è un' operazione interna

$\bar{v},\bar{w} \neq 0 \quad \bar{v} \nparallel \bar{w}$

$\bar{v}\wedge\bar{w} = \bar{v}\times\bar{w}$ è un vettore |

- modulo : $\|\bar{v}\|\,\|\bar{w}\| . \sin \widehat{\bar{v}\bar{w}}$
- direzione : ⊥ piano
- verso. regola della mano dx



$\bar{v} \parallel \bar{w}$ e uno nullo ➡ $\bar{v}\times\bar{w} = \bar{0}$

① $\bar{v},\bar{w} \neq 0 \quad \bar{v}\times\bar{w} = \bar{0} \iff \bar{w} \parallel \bar{v}$ CONDIZIONE DI PARALLELISMO

② $\bar{v}\times\bar{w} = -\bar{w}\times\bar{v}$

PRODOTTO VETTORIALE È ANTICOMMUTATIVO, perché cambia il verso del prodotto cambiando l'ordine dei vettori

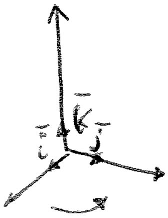
③ $\bar{v},\bar{w} \in V,\ a \in \mathbb{R}$

$(a\bar{v})\times\bar{w} = a(\bar{v}\times\bar{w}) = \bar{v}\times(a\bar{w})$

④ $\bar{v}\times(\bar{w}+\bar{z}) = \bar{v}\times\bar{w} + \bar{v}\times\bar{z}$

$(\bar{w}+\bar{z})\times\bar{v} = \bar{w}\times\bar{v} + \bar{z}\times\bar{v}$

⑤ NON È ASSOCIATIVO.



$\bar{i}\times(\underbrace{\bar{i}\times\bar{j}}_{\bar{k}}) = \bar{i}\times\bar{k} = \boxed{-\bar{j}}$

$(\bar{i}\times\bar{i})\times\bar{j} = \bar{0}\times\bar{j} = \boxed{\bar{0}}$

≠ → prodotto vettoriale NON associativo

⑥ $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w} = (\bar{u}\cdot\bar{v})\bar{w} - (\bar{v}\cdot\bar{w}).\bar{u}$

COMPONENTI

$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$\bar{w} = (w_x, w_y, w_z)$

$$\bar{v}\times\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\bar{i}\begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{pmatrix} - \bar{j}\begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO

$\bar{u}=(2,1,-1)$ Trovare $\bar{x}$ | $\bar{u}\times\bar{x}+(\bar{v}\cdot\bar{x})\bar{w}=\bar{w}$

$\bar{v}=(1,-1,2)$

$\bar{w}=(1,-2,1)$ $\bar{x}=(x,y,z)$

$$\bar{u}\times\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & -1\\ x & y & z\end{pmatrix}=\bar{i}(z+y)-\bar{j}(2z+x)+\bar{k}(2y-x)$$

$$=(z+y,\ -2z-x,\ 2y-x)$$

$$\bar{v}\cdot\bar{x}=(1,-1,2)\cdot(x,y,z)=(\cancel{x},-y,2z)$$

$$(\bar{v}\cdot\bar{x})\bar{w}=(x,-y,2z)(1,-2,1)=(x,2y,2z)$$

$$\bar{u}\times\bar{x}+(\bar{v}\cdot\bar{x})\bar{w}=(z+y+x,\ -2z-x+2y,\ 2y-x+2z)$$

$$\begin{cases}z+y+x=1\\ -2z-x+2y=-2\\ 2y-x+2z=1\end{cases}$$

$x=1-y-z$

$-2z-1+y+z+2y=-2$

$-z+3y=-1$

$z=3y+1$

$2y-1+y+z+2(3y+1)=1$

$2y\cancel{-1}+y+3y\cancel{+1}+6y+2=1$

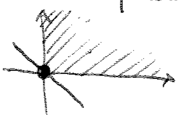
$12y=-1$

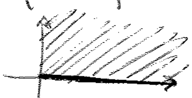
$$\begin{cases}y=-\frac{1}{12}\\ z=-\frac{3}{12}+1=\frac{-3+12}{12}=\frac{\cancel{9}3}{\cancel{12}4}=\frac{3}{4}\\ x=1+\frac{1}{12}-\frac{3}{4}=\frac{12+1-9}{12}=\frac{\cancel{4}1}{\cancel{12}3}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

INTERSEZIONE

↳ tra due rette passanti per l'origine: origine, che è un punto = sottospazio

↳ tra 1 retta e un piano passanti per origine:
- origine
- retta passante per O } sottospazi





↳ due piani passanti per origine: retta = sottospazio

⇓

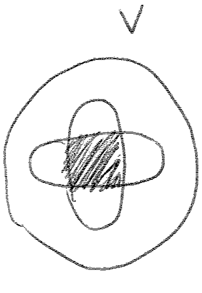
① $\bar{0} \in S_1 \cap S_2$ → perchè sia in S_1 che in S_2 c'è vettore nullo in quanto sottospazi.

② $\bar{u} \in S_1 \cap S_2$?
$\bar{v} \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in S_1 \cap S_2$

$\bar{u} \in S_1$, $\bar{u} \in S_2$
$\bar{v} \in S_1$, $\bar{v} \in S_2$ $\Rightarrow$ $\bar{u}+\bar{v} \in S_1$, $\bar{u}+\bar{v} \in S_2$

somma vale in S_1 (e S_2) perchè vale come operazione (in quanto S_1 e S_2 sottospazi) e inoltre perchè $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono contenuti in S_1 (e S_2)

③ $k \in \mathbb{K}$, $\bar{u} \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow k\bar{u} \in S_1 \cap S_2$



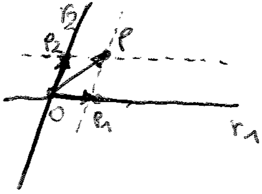
$S_1 \cap S_2$ = sottospazio

- $\bar{u} \in S_1$ e, in quanto sottospazio, allora anche $k\bar{u}$ con $k \in \mathbb{K}$ $\in S_1$
- $\bar{u} \in S_2$, anche $k\bar{u} \in S_2$
- quindi $k\bar{u} \in S_1 \cap S_2$

UNIONE

↳ di sottospazi in generale non dà sottospazi
↓
es. unione di due punti = 2 punti → non sottospazio
- o ∞ punti
- o 1 punto (vett. nul

Esempio



$OP = OP_1 + OP_2$

I due vettori individuano OP in modo unico.

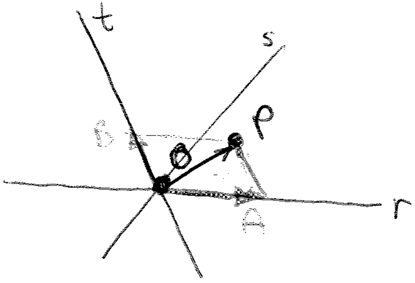
$V = r_1 + r_2 \rightarrow$ cioè tutti i vettori del PIANO si possono decomporre in modo unico

cioè

$OP \longleftrightarrow (OP_1, OP_2)$ corrispondenza biunivoca

Sapti definizione

cioè posso descrivere l'intero piano solo come somma tra 2 rette



$V = r + s + t$

la stessa cosa detta per il piano vale anche per lo spazio.

Basta decomporre OP su tre rette invece che su 2.

$OP = \overline{OB} + \overline{OA} + \overline{O}$

Tuttavia ci sono ∞ modi per indicare con 3 coordinate un vettore nello spazio.

MANCA UNICITÀ nello SPAZIO

$V = r_1 \oplus r_2 \rightarrow$ il cerchietto indica che l'operazione è DIRETTA, cioè UNICITÀ di SCRITTURA.

$W = S_1 \oplus S_2$ è una somma diretta quando ogni elemento $w \in W$ si può scrivere: $\overline{w} = \overline{s}_1 + \overline{s}_2$, $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$ IN MODO UNICO

$\overline{w} \longleftrightarrow (\overline{s}_1, \overline{s}_2)$ corrispondenza biunivoca

$(s_1 + s_2) + s_3 = s_1 + (s_2 + s_3)$

$s_1 \oplus s_2 \oplus s_3$ significa che $\forall\ \overline{w} \in W$, $\overset{\text{esistono e sono unici}}{\boxed{\exists!}}\ \overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3$ per cui risulta $\overline{w} = \overline{s}_1 + \overline{s}_2 + \overline{s}_3$

$\overline{w} \rightarrow (\overline{s}_1, \overline{s}_2, s_3)$

$S_1 \oplus S_2 \iff S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$

cioè se l'intersezione è l'insieme più piccolo possibile, cioè l'insieme nullo, allora la somma è diretta.

Questo vale però solo nel caso della SOMMA DI ② ELEMENTI

(l'elemento minore di S_1 è $\bar{0}$
l'elemento minore di S_2 è $\bar{0}$)

Perché somma sia diretta:

$W = S_1 \oplus S_2$ = deve essere scritta in modo unico:

$$w = \underset{\underset{\in S_1}{\downarrow}}{\bar{s}_1} + \underset{\underset{\in S_2}{\downarrow}}{\bar{s}_2}$$

S_1 e S_2, in quanto sottospazi, contengono il vettore nullo.

Quindi l'intersezione minima tra S_1 e S_2 è $\{\bar{0}\}$.

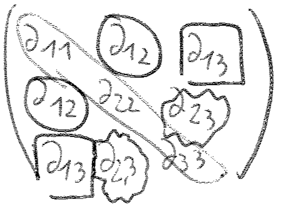
Questo vale solo se somma diretta in quanto solo in quel caso W è formato da un elemento di un sottospazio e uno di un altro necessariamente

MATRICI SIMMETRICHE

$A_{n,n}$ → simmetrica rispetto diagonale principale

$A_{3,3} =$

Matrice simmetrica



$a_{ij} = a_{ji}$
simmetrica rispetto diagonale principale

S = insieme delle matrici simmetriche → sottospazio

MATRICI ANTISIMMETRICHE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1,3} \\ -a_{12} & 0 & a_{2,3} \\ -a_{1,3} & -a_{2,3} & 0 \end{pmatrix}$$

diagonale principale = a zero perché devono essere opposte a se stesse.

$a_{ij} = -a_{ji}$ A = sottospazio $S \oplus A = \mathbb{R}^{(n,n)}$

PRODOTTO DI MATRICI

$$A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{\underset{\text{righe A}}{n},\underset{\text{colonne B}}{p}}$$

n colonne 1 = n righe 2

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \end{pmatrix}$$

$$B_{3,2} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{12} \\ b_{2,1} & b_{22} \\ b_{3,1} & b_{32} \end{pmatrix} \cdot \longrightarrow C_{2,2} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

regola: prodotto rigaA · colonnaB

$$c_{1,1} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{2,1} + a_{13} \cdot b_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{1,i} \cdot b_{i,1}$$

$$c_{1,2} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = \sum_{i=1}^{3} a_{1,i} \cdot b_{i,2}$$

$$c_{2,1} = a_{2,1} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{2,i} \cdot b_{i,1}$$

$$c_{2,2} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = \sum_{i=1}^{3} a_{2,i} \cdot b_{i,2}$$

$$C_{h,k} = \sum_{i=1}^{3} a_{h,i} \cdot b_{i,k}$$

$h=1,2$
$k=1,2$

ESERCITAZIONE 3

PRODOTTO MISTO

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \longrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} \in \mathbb{K}$

prodotto scalare

prodotto vettoriale

$\Longmapsto \overset{2^a}{\bar{u} \cdot} \underbrace{(\overset{1^a}{\bar{v} \times \bar{w}})}_{\bar{z} \in V}$ = operazione esterna, cioè restituisce un numero

$\bar{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$

$\bar{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

$\bar{w} = w_x \hat{i} + w_y \hat{j} + w_z \hat{k}$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \boxed{u_x \begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{pmatrix} + u_z \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} - u_y \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \hat{i} \begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{pmatrix} - \hat{j} \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix} + \hat{k} \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix}$$

componenti di $\bar{v} \times \bar{w}$

$$\left(\begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & v_z \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} \right)$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (u_x, u_y, u_z) \cdot \left(\begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & v_z \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} \right)$$

$$= \boxed{u_x \begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & v_z \end{pmatrix} - u_y \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix} + u_z \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix}}$$

$$= u_x (v_y w_z - v_z w_y) - u_y (v_x w_z - v_z w_x) + u_z (v_x w_y - v_y w_z)$$

PROPRIETÀ

① Scambiamo tra loro 2 vettori, il prodotto misto cambia segno

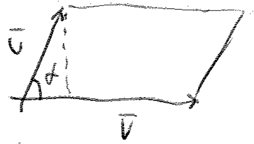
$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{w}) = - \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$

② $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ complanari solo se $\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = 0$

APPLICAZIONI GEOMETRICHE

$\bar{u}, \bar{v} \in V$

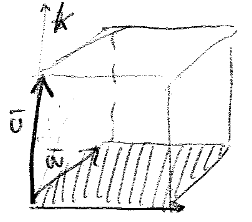
① $\| \bar{u} \times \bar{v} \|$ = area parallelogramma di lati $\bar{u}, \bar{v}$ → PARALLELISMO



$$\| \bar{u} \times \bar{v} \| = \| \bar{u} \| \underbrace{\| \bar{v} \|}_{\text{base}} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \underbrace{\| \bar{v} \|}_{\text{base}} \underbrace{\| \bar{u} \| \operatorname{sen} \alpha}_{h}$$

② $| \bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} |$ = volume parallelepipedo

↳ COMPLANARITÀ



$\bar{v} \times \bar{w}$ = area di base

$\| \bar{u} \| \cdot \cos \alpha$ = altezza

α = angolo tra $\bar{u}$ e

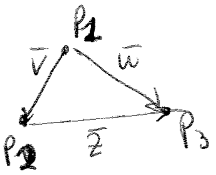
② Mostrare che $\forall K \in \mathbb{R}$ i tre punti

$P_1 = (K, 1-K, \sqrt{2})$

$P_2 = (2, K, -2K)$

$P_3 (3K-1, -1, \sqrt{2}$

sono i vertici di un triangolo rettangolo.



Dimostra che per ogni K, almeno un angolo è rettangolo

$\bar{v} = P_2 - P_1 = (2-K, 2K-1, -2K-\sqrt{2})$

$\bar{w} = P_3 - P_1 = (2K-1, K-2, 0)$

$\bar{z} = P_3 - P_2 = (3K-3, -1-K, \sqrt{2}+2K)$

Se trovo due vettori sempre ⊥ allora è rettangolo

$\bar{v} \cdot \bar{w} = (2-K) \cdot (2K-1) + (2K-1) \cdot (K-2) = (2K-1)(\cancel{2}-\cancel{K}+\cancel{K}-\cancel{2}) = 0$

quindi $\bar{v}$ è sempre ⊥ $\bar{w}$.

③ Siano a, b, c i vertici di un triangolo equilatero di area unitaria

a) $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$ → falsa, perché tra $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ dovrebbe esserci un angolo di 90°

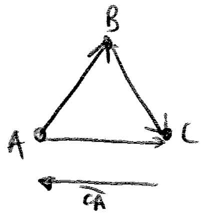
b) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{CA}$ → $\overline{AB} + \overline{BC} = -\overline{CA} = \overline{AC}$ falsa

c) $\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{CA}$ → falsa perché prodotto scalare non dà vettore complanare al piano individuato da $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ ma ⊥ ad esso.

~~d)~~ $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$

↳ vera, poiché $\overline{AB} + \overline{BC} = -\overline{CA}$,

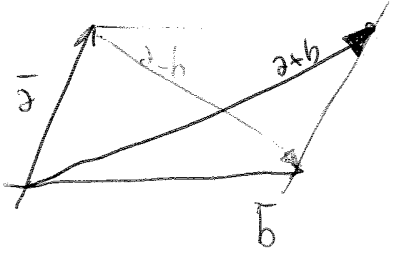
$$\underbrace{\overline{AB} + \overline{BC}}_{-\cancel{\overline{CA}}} + \cancel{\overline{CA}} = 0$$



④ $\bar{a}, \bar{b} \in V$ $\bar{a} \neq \bar{b}$

$\|\bar{a}\| = \|\bar{b}\|$ stessa lunghezza

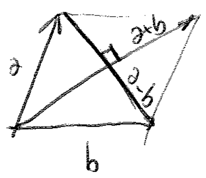
$\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{a}+\bar{b}$? Quando $\|\bar{a}+\bar{b}\| = \|\bar{a}-\bar{b}\|$



$\|\bar{a}\| = \|\bar{b}\| \Rightarrow$ il parallelogramma è un rombo

↓

quindi le diagonali sono ⊥



⑦ Calcola l'area del parallelogramma

$\bar{v}(1,1,0)$ $\qquad \|\bar{v} \times \bar{w}\|$

$\bar{w}(2,0,1)$

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$$

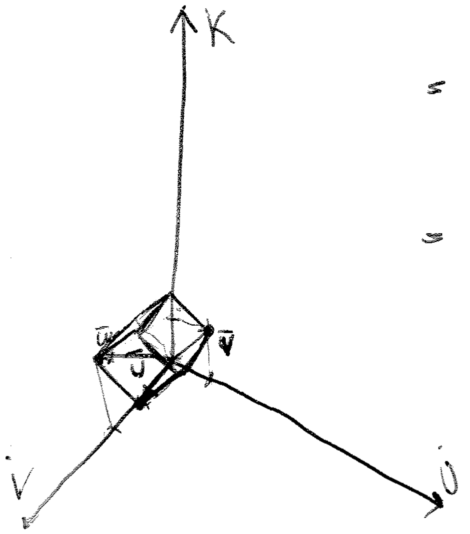
$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

⑧ Calcolare il volume del tetraedro di spigoli

$\bar{u}(100)$

$\bar{v}(011)$

$\bar{w}(201)$



$$|\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w}| =$$

$$= u_x \begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{pmatrix} + v_z \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} - u_y \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

⑨ $\bar{v}$ // a 2 a 2

$\bar{v}_1(1\ 2\ 3)$

$\bar{v}_2(0\ 0\ 1)$

$\bar{v}_3(7\ 14\ 21)$

$\bar{v}_4(1/2\ \ 1\ \ 3/2)$

$\bar{v}_5(0\ 1\ 0)$

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\bar{i} - \bar{j}$$

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix} = \bar{0} \longrightarrow \text{paralleli} \quad \bar{v}_1 = t\,\bar{v}_3 \quad \text{proporzionali}$$

$$t = \frac{\|\bar{v}_1\|}{\|\bar{v}_3\|} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3 \cdot 343}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{343}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{343}}$$

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \bar{i}(3-3) - \bar{j}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) + \bar{k}(1-1) = \bar{0}$$

$$t = \frac{\|\bar{v}_1\|}{\|\bar{v}_4\|} = \frac{\cancel{\sqrt{15}}}{\frac{\cancel{\sqrt{15}}}{2}} = 2$$

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_5 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3\bar{i} + \bar{k}$$

$$\bar{v}_2 \times \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix} = -14\bar{i} + 7\bar{j}$$

$$\bar{v}_2 \times \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} = -\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}$$

$$\bar{v}_2 \times \bar{v}_5 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{i}$$

$$\bar{v}_3 \times \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 7 & 14 & 21 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \bar{i}(21-21) - \bar{j}\left(\frac{21}{2} - \frac{21}{2}\right) + \bar{k}\,(7-7) = \bar{0}$$

$$t = \frac{\|\bar{v}_3\|}{\|\bar{v}_4\|} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{343}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{343} \cdot 4}{\cancel{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{343}}{\sqrt{5}}$$

$$\bar{v}_4 \times \bar{v}_5 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{k}$$

La colonna K-esima di C si ottiene facendo la combinazione lineare delle colonne di A, usando come coefficienti gli elementi della colonna K-esima di B

MATRICI QUADRATE

$K^{n,n}$

$A_{n,n} \cdot B_{n,n} = C_{n,n}$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} \boxed{1\;1} \\ \boxed{0\;1} \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix}$$

① prodotto non commutativo

② vale proprietà associativa $(AB)C = A(BC)$

③ Esiste un elemento neutro (sia a sinistra che a destra)

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}} = \underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \end{pmatrix}}$$

$$A \cdot I = \underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}} \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}} = \underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \end{pmatrix}}$$

④ inverso = moltiplicato per matrice da identità.

Fissata A, esistono delle matrici X e Y per cui risulti

$AX = I$?
$YA = I$

Cioè c'è un unico inverso valido sia a sinistra che a destra?

$AX = I$ è una normale equazione nella quale gli elementi sono tutte matrici

Si scoprono delle condizioni tali per cui se esiste l'inverso sinistro, allora esiste anche quello destro.
Inoltre una volta verificata l'esistenza di entrambi, questi coincidono

Perciò supponiamo che X e Y esistano e dimostriamo che coincidono.

$$YAX = \underbrace{(YA)}_{I}X = IX = X \searrow$$
$$=$$
$$= Y(AX) = YI = Y \nearrow$$

ALGEBRA DELLE MATRICI → valgono tutte le proprietà elencate
(cioè tutte tranne proprietà commutativa del prodotto e l'inverso)

MATRICI RETTANGOLARI

$\mathbb{K}^{2,3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$\exists$ una matrice $X \mid AX = A \quad \forall A \in \mathbb{K}^{2,3}$?

- DX $A_{2,3} \cdot \underset{\downarrow}{X_{3,3}} = A_{2,3}$

l'incognita se esiste, deve essere una
MATRICE QUADRATA

$A_{m,n} \cdot X_{n,n} = A_{m,n}$

Proviamo a prendere $X = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

quindi una matrice inversa c'è ed è uguale alla matrice identica con numero opportuno di righe e colonne

- SX $Y_{2,2} A_{2,3} = A_{2,3}$ $\quad Y_{2,2} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⟶ vale anche a sinistra

$Y_{m,m} \cdot A_{m,n} = A_{m,n}$

Le ~~due~~ identità valgono anche se sono tra loro ≠

Esiste X,Y per cui vale

$A_{2,3} \, X_{3,2} = I_{2,2}$

$A_{m,n} \cdot X_{\underset{\uparrow}{n},\underset{\uparrow}{m}} = I_{m,m}$?

n righe per fare prodotto
per essere identica deve essere quadrata

SE MATRICE RETTANGOLARE:
se c'è matrice inversa a destra, sicuramente a sinistra non c'è.

$Y_{3,2} \cdot A_{2,3} = I_{3,3}$?

$Y_{n,m} \, A_{m,n} = I_{n,n}$?

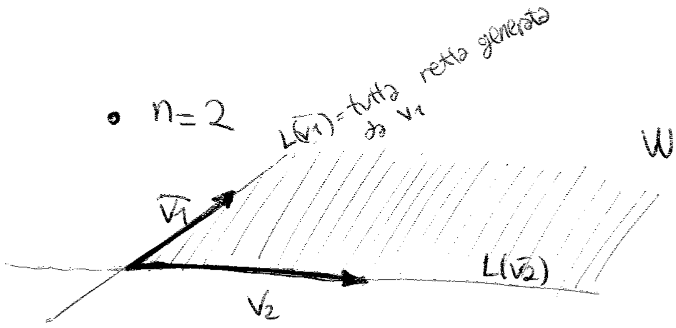
Tra le due domande è più semplice rispondere alla prima (incognita a DX), perché la seconda (incognita a SX) è riconducibile alla prima tramite la matrice trasposta.

W generato da $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$
$\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$ generatori di W

$$W = L(\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n) = \{ a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \ldots + a_n\bar{v}_n \}$$
con $a_n \in \mathbb{K}$

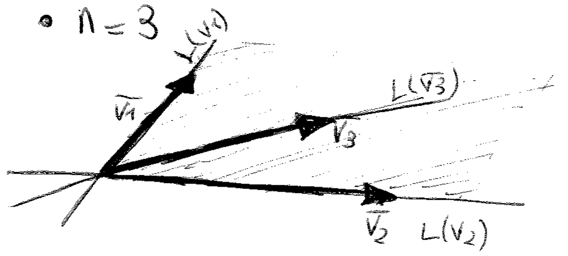
$L(\bar{v}_1) + L(\bar{v}_2) + \ldots + L(\bar{v}_n)$ → somma dei sottospazi = somma delle rette che i vettori generano

- $n = 2$



$W = L(\bar{v}_1) \oplus L(\bar{v}_2)$
↓
Somma diretta perché ogni vettore si decompone in modo unico nel piano

- $n = 3$



$W = L(\bar{v}_1) + L(\bar{v}_2) + (L\bar{v}_2)$
non somma diretta

con v_1, v_2, v_3 complanari

Il sistema a tre vettori è riconducibile a quello tra due vettori, così ottengo W generato da somma diretta.

Def. Diciamo che i vettori $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI quando succede questo:

caratterizza proprio i vettori indipendenti

$$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \ldots + a_n\bar{v}_n = \bar{0} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

$\cancel{\Leftarrow}$ → dice solo che se i coefficienti sono $=0$, la combinazione lineare $=0$, ma non caratterizza nessuna proprietà.

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE (MATRICIALE)

$A = (a_{ij}) \in M_{m,\textcircled{n}}(K)$

$B = (b_{eh}) \in M_{\textcircled{n},p}(K)$

$AB = C = (c_{ij}) \in M_{mp}(K)$

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$$

ESERCIZIO

$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = C_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ non si può fare perché $(3,\underbrace{\textcircled{3})\ (\textcircled{2}}_{\neq},3)$ → prodotto <u>non</u> commutativo

ESERCIZIO

Moltiplicare $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_{3,3} \, B_{3,3} = C_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

→ né commutativo, né anticommutativo (cambio segno)

PROPRIETÀ

$(AB)C = A(BC)$

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$a \in K \quad a(AB) = (aA)B = A(aB)$

${}^t(AB) = {}^t(B) \cdot {}^t(A)$ → inverto l'ordine tra A e B

$A_{2,3} = {}^t(A)_{3,2} \qquad A \in M_{m,n}(K) \qquad {}^tA \in M_{n,\textcircled{m}}(K)$

$B \in M_{n,p}(K) \qquad {}^tB \in M_{\textcircled{p},n}(K)$

ZERODIVISORI

A è zerodivisore se $\exists\, B \neq 0 \mid A \cdot B = 0$

$A \neq 0$ è zerodivisore PROPRIO (=non banale)

($A = 0$ è zerodivisore BANALE)

ESERCIZIO

$A \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A,B sono divisori propri.

NILPOTENTI

A è nilpotente se $\exists\, n \in \mathbb{N} \mid A^n = 0$

(matrice nulla = nilpotente BANALE)

$A \neq 0$ è nilpotente PROPRIO

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

OSSERVAZIONE

$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$2,\cancel{3} \qquad \cancel{3},2$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{1 \; 0 \; 1} \\ 0 \; 0 \; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 =$ prodotto scalare (righe · colonne)

OSSERVAZIONE

$A \in M_{2,3}(K) \qquad C = AB \in M_{22}(K)$

$B \in M_{3,2}(K)$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-2y & y\\ -2t & t\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}-2y-4t & y+2t\\ -4y-8t & 2y+4t\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases}-2y-4t=0\\ y+2t=0\\ -4y-8t=0\\ 2y+4t=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=-2t\\ 4t-\cancel{4t}=0\\ y=\frac{\pm 8t}{-4}=-2t\\ \cancel{-4t}\ \cancel{+4t}=0\end{cases}$$

$X\begin{pmatrix}4t & -2t\\ -2t & t\end{pmatrix}$ $t\in\mathbb{R}$ ⇒ vale sia per $XA=0$ che per $AX=0$

<u>ESERCIZIO</u>

$\underset{1,3}{A} = (1\ 2\ 3)$ $\underset{3,1}{B} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Quale è corretta?

a) $BA = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ V

b) $AB = (0)$ F

c) $BA = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$ F

d) $AB = (1\ 0\ 3)$ F

$$A_{1,\cancel{3}}\ B_{\cancel{3},1} = C_{1,1}$$

$$B_{3,\cancel{1}}\cdot A_{\cancel{1},3} = C_{3,3}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$AB = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (4)$$

② calcolare

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot {}^t\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&6&9\\7&14&21\end{pmatrix}$$

③ Determinare senza calcoli

$$\underset{\substack{\downarrow\\ a}}{\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}}{}_{3,2}\ \underset{\substack{\downarrow\\ {}^tY}}{\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}}{}_{2,2} = \underset{\substack{\downarrow\\ {}^tI}}{\begin{pmatrix}3&7\\6&14\\9&21\end{pmatrix}}{}_{3,2}$$

$$Y\cdot A = I \text{ —— } {}^t(Y\cdot A) = {}^t(I)$$

$${}^tA\cdot{}^tY = {}^tI$$

$$a \to {}^ta = A \to {}^tA = {}^t({}^ta) = a$$

$$\text{con}\quad \underbrace{Y = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\quad A = \overset{(a)}{{}^t\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}} = \overset{\uparrow}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}\quad I = \begin{pmatrix}3&6&9\\7&14&21\end{pmatrix}}$$

$$Y\cdot A = I$$

$${}^tA\cdot{}^tY = {}^tI$$

$$a\cdot{}^tY = \boxed{{}^tI} \longrightarrow \begin{pmatrix}3&7\\6&14\\9&21\end{pmatrix}$$

cioè ho ottenuto la combinazione lineare che genera vettore nullo con almeno un coefficiente non nullo di valore -1.
(indipendentemente dai valori di $b_1, b_2 \dots b_n$)

① $0\overline{v_2} + \dots + 0\overline{v_n} + 1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$

i coefficienti sono $(0 \dots 0, 1) \rightarrow$ ottengo vettore nullo con 1 coeff. $\neq 0$.

$b_1\overline{v_1} + b_2\overline{v_2} + \dots + b_n\overline{v_n} \rightarrow$ nessuno è esprimibile come combinazione lineare degli altri.
Cioè se tolgo un fattore nel caso della costruzione del piano, posso generare solo una retta e non il piano.

Dimostrazione RIVEDERE!
Ipotesi: valgono 1 e 2
tesi: vale implicazione $\circledast$

cioè è vero che vale che una certa combinazione lineare $= \overline{0}$ se $a_1, a_2 \dots a_n = 0$

$$a_1\overline{v_1} + a_2\overline{v_2} + \dots + a_{n-1}\overline{v_{n-1}} + a_n\overline{v_n} = \overline{0}$$

dimostrare prima che $a_n = 0$ e poi con lo stesso sistema anche gli altri.

Faccio una dimostrazione per assurdo:
suppongo $a_n \neq 0$ e mostro che la condizione 2 è falsa
Dire che elemento in un campo non è nullo = ammetto inverso.

$$a_n\overline{v_n} = -(a_1\overline{v_1} + \dots + a_{n-1} \cdot \overline{v_{n-1}})$$

$$\overline{v_n} = a_n^{-1}(-a_1\overline{v_1} + \dots + a_{n-1} \cdot \overline{v_{n-1}}) =$$

$$= \underline{-(a_n^{-1} \cdot a_1)}\overline{v_1} + \dots - \underline{(a_n^{-1} \cdot a_{n-1})}\overline{v_{n-1}}$$

$\overline{v_n}$ combinazione lineare di altri vettori, quindi deve essere $a_n = 0$

Quindi: $a_1\overline{v_1} + \dots + a_{n-1} \cdot \overline{v_{n-1}} + \cancel{a_n v_n} = \overline{0}$
Si procede così fino ad $a_2 = 0 \rightarrow a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_2 = 0$.
Perciò arrivo ad ottenere:
$a_1 \cdot \overline{v_1} = \overline{0}$
Per la legge di annullamento del prodotto e per l'ipotesi ① $(\overline{v_1} \neq 0)$ allora necessariamente se $\overline{v_1} \neq 0$, deve essere $a_1 = 0$ perché il prodotto sia nullo.

Cioè i vettori sono INDIPENDENTI.

USO DELLA BASE B PER IDENTIFICARE V con $\mathbb{K}^n$

$(V,+,\cdot) \longleftrightarrow (\mathbb{K}^n,+,\cdot)$

$\bar{v} = x_1\bar{b_1} + v_2\bar{b_2} + \ldots + v_n\bar{b_n}$ determinate in modo unico

quindi $\bar{v}$:

$\bar{v} \rightarrow (x_1, \ldots x_n)$ in quanto essendo insieme libero ha UNICA IMMAGINE

componenti di $\bar{v}$ rispetto alla base B

è una FUNZIONE:

SURIETTIVA: l'immagine riempie tutto $\mathbb{K}^n$

INIETTIVA: sì perchè corrispondenza è biunivoca

V $\qquad$ $\mathbb{K}^n$

$\bar{v} = x_1\bar{b_1} + \ldots + x_n\bar{b_n} \longleftrightarrow (x_1, \ldots x_n)$

$\bar{u} = y_1\bar{b_1} + \ldots + y_n\bar{b_n} \longleftrightarrow (y_1, \ldots y_n)$

$\bar{v}+\bar{u} = (x_1+y_1)\bar{b_1} + \ldots + (x_n+y_n)\bar{b_n} \longleftrightarrow (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$

posso eseguire indifferentemente somma a dx e fare l'immagine o eseguire la somma a sx e fare l'immagine.

Lo stesso vale per il prodotto:

$a \in \mathbb{K}$ $\quad a\cdot\bar{v} = a(x_1\bar{b_1} + \ldots + x_n\bar{b_n} = (ax_1)\bar{b_1} + \ldots + (ax_n)\bar{b_n}$

$a\,\bar{v} \longleftrightarrow (ax_1, \ldots ax_n)$

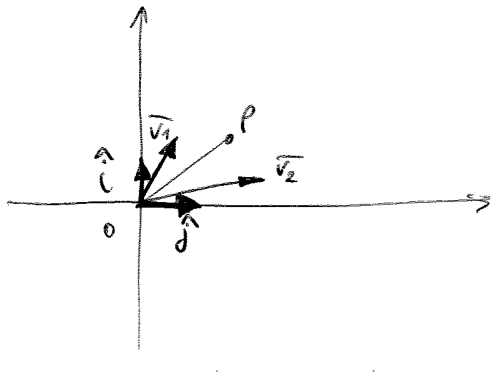
ISOMORFISMO $\longrightarrow$ cioè ha questo comportamento sia per la somma che per il prodotto:

$a\bar{v} \longleftrightarrow (ax_1, \ldots, ax_n)$

$\bar{v}+\bar{u} \longleftrightarrow (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$

proprietà che studiamo si CONSERVANO PER ISOMORFISMO cioè si studiano nello spazio che fa più comodo e poi valgono per tutti gli spazi isomorfi

Esempio



$OP = x\hat{i} + y\hat{j} \longleftrightarrow (x,y) \longrightarrow$ BASE: $(\hat{i},\hat{j})$

$OP = OA_1 + OA_2 = v\bar{b_1} + v\bar{b_2} \longrightarrow$ BASE $(\bar{v_1},\bar{v_2})$

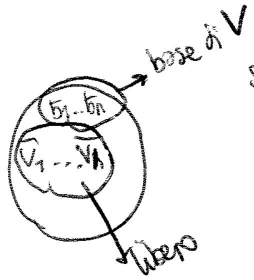
$OP \longleftrightarrow (v,v)$

il problema è vedere come ... passare dalla Base canonica ad altre basi.

Se vettore è nullo, e il sistema libero non contiene il vettore nullo si dice che la BASE è un insieme noto.

quindi eliminando $\bar{v}_3$ ho ottenuto una base!

- $\bar{V}$



Si riesce a completare l'insieme ad una base in questo modo:

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_h, \bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ → sistema di generatori

METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI per trovare da quel sistema di generatori una base:

$\bar{v}_1$ sicuro $\neq 0$
$\bar{v}_2$ sicuro non multiplo di $\bar{v}_1$
$\bar{v}_3 .. \bar{v}_h$ sicuro non combinazione lineare dei precedenti

} perchè $\bar{v}_1 ... \bar{v}_h$ è sistema libero

poi da $\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ controllo man mano tutti i valori togliendo quelli che non servono e ottenendo infine una base.
E' utile avere in questi casi un sistema libero in $\bar{V}$.

- $\mathbb{R}$ → spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$

Quando lo penso a sx → elementi: numeri
Quando lo penso a dx → elementi: vettori

Devo trovare sistema di generatori più piccolo possibile:
più piccolo è vettore → retta → solo prodotto
altrimenti prendo 2 vettori → somma, prodotto
non prendo $\bar{0}$ perchè genera solo sè stesso.
Prendo
$r \neq 0$, che genera tutti ar, $a \in \mathbb{R}$ cioè è la retta generata dal vettore r
Per vedere se ho riempito tutto l'insieme $\mathbb{R}$ prendo
y = qualsiasi numero $\in \mathbb{R}$.
$\exists\ a \mid$ risulti $y = ar$? moltiplico per r^{-1}
$a = y \cdot r^{-1}$ → ho generato tutto r con un solo numero;
la base è composta da r.
Un qualunque numero reale non nullo è una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}$
Il numero 1 è la base canonica per i reali

Se invece di $\mathbb{R}$ avessi considerato i complessi:

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ campo
$\bar{v} = a + bi$ vettori ↑ numeri ↑

$z = a + ib \neq 0$
Riempio tutto $\mathbb{C}$? Sì se posso scriverlo come un multiplo di $z = a \cdot \bar{v}$ $a = z \cdot \bar{v}^{-1}$
cioè se $\exists$ inverso (inverso proprietà anche di $\mathbb{C}$, perchè altrimenti non sarebbe un campo)

TEOREMA DELLA DIMENSIONE o TEOREMA FONDAMENTALE DELLA BASE

Sia V uno spazio finitamente generato. Tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi.

Def: **DIMENSIONE di V** = numero di elementi di una sua qualunque base

cioè contando n° elementi di una base ottengo dimensioni

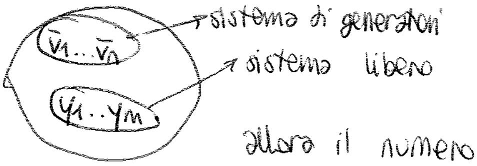
$\mathbb{R} \rightarrow$ dimensione 1

$\mathbb{R}^2 \rightarrow$ dimensione 2 (→ vettore ha 2 coordinate)

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$ dimensione 3 (→ vettore ha 3 coordinate)

$\mathbb{R}^n \rightarrow$ dimensione n

Lemma Sia $\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n$ un sistema di generatori di V



allora il numero di elementi generatori n è sempre $\geq m$, numero di elementi del sistema libero.

Corollario Due basi di V hanno lo stesso numero di elementi

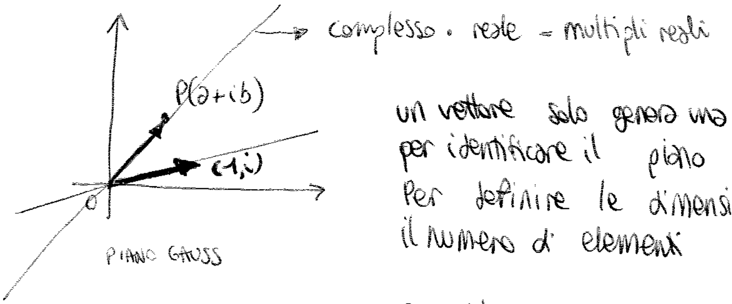
$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n) \longrightarrow$ sistema di generatori

$B' = (b_1' \dots b_h') \longrightarrow$ libero $\qquad \boxed{h \leq n}$

Noto il lemma $(h \leq n)$ è facile dimostrare il corollario

Esempio

- $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$

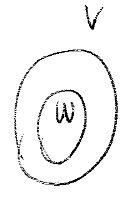


un vettore solo genera una retta (multipli reali)
per identificare il piano occorrono 2 vettori.
Per definire le dimensioni devo trovare una base e guardare il numero di elementi

$$\underset{\uparrow}{a} + \underset{\uparrow}{ib}$$

$$(1, i)$$

$$a(1) + b(i) = a + ib$$

- 

dimensione V=n

dimensione di W?

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim W \leq \dim V \\ \dim W = \dim V \underset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow} V = W \end{array}}$$

se riusciamo a calcolare dim W e dim V e queste sono = posso dire che i due sottospazi coincidono

(se dim W grossa, spazio V + grosso)

ESERCITAZIONE 5

SPAZI VETTORIALI

K campo $(+, \cdot)$

$+$
- commutativa
- associativa
- elemento neutro
- opposto

$\cdot$
- associativo
- commutativo
- distributivo rispetto alla somma
- elemento neutro
- inverso $\forall x \in \mathbb{K}^*$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ⟿ es. $\mathbb{Z}$ in base alle proprietà definite sopra non può far parte del campo $\mathbb{K}$

Spazio vettoriale

$V(+, \cdot)$

$\bar{u} + \bar{v}$
$\downarrow$
- associativo
- commutativo
- elemento neutro
- opposto

$\lambda \bar{v}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$
$\bar{u}, \bar{v} \in V$
$\downarrow$
- $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$
- $1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$
- $(a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$
- $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$

1) $\emptyset$ insieme vuoto non è uno spazio vettoriale, perché deve esserci almeno vettore nullo.

2) $\{\bar{0}\} = V$ singleton o singoletto $\quad \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
$A\bar{0} = \bar{0}$

Esercizio

$K \in \mathbb{R}$
$V \in \mathbb{R}$
operazioni

$x \oplus y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \qquad \forall\, x, y \in V$

$\lambda \odot y = \sqrt[3]{\lambda}\, y \qquad \forall\, \lambda \in K$

È uno spazio vettoriale? ⟶ devo verificare le 8 proprietà + chiusura operazioni

① **chiusura**

$\forall x, y \in V$

$x \oplus y \in V$? Sì perché $+, \sqrt[3]{\ }$ sono chiuse rispetto $\mathbb{R}$ (la $\sqrt[2]{\ }$ non sarebbe stato chiuso su $\mathbb{R}$)

$\forall \lambda \in K$

$\lambda \odot y \in V$? Anche prodotto è chiuso su $\mathbb{R}$

② $\forall x, y, z \in V$ **associativa**

$$(x \oplus y) \oplus z = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right) \oplus z = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + (y^3 + z^3)} \leq \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3}\right)^3} = \underset{\text{associativa}}{x \oplus (y \oplus z)}$$

se non è spazio vettoriale basta solo un controesempio

Esercizio RICUARDA

- $V=\mathbb{R}$

$K=\mathbb{R}$

$x \oplus y = \sqrt[5]{x^5+y^5} \qquad \forall x,y \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \odot x = \lambda x$

$(\lambda+\mu)\odot x \qquad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

$\parallel$

$(\lambda \odot x)\oplus(\mu \odot x) =$

$= \lambda x \oplus \mu x =$

$= \underbrace{\sqrt[5]{(x^5+y^5)}}\,x$

no

$\sqrt[5]{1+1} = \sqrt[5]{2} \neq 2$

- $K=\mathbb{R}$

$V=\mathbb{R}^2$

V è spazio vettoriale su K?

$\boxed{\text{Dipende}}$ da quali operazioni definisco su V

SOTTOSPAZI

K, V

$W \subseteq V$ sottospazio di V se è spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V

① **chiusura**

$\forall \bar{x},\bar{y} \in W = \bar{x}+\bar{y} \in W$

$\forall \lambda \in K, \forall x \in W \Rightarrow \lambda\bar{x} \in W$

② $\forall \lambda,\mu \in K, \ \forall \bar{x},\bar{y} \in W \Rightarrow \lambda\bar{x}+\mu\bar{y} \in W$

$\overset{i}{\bar{x}}+\overset{j}{\bar{y}} \in W \quad \exists$ ~~$\bar{y}+\bar{y}$~~

Esercizio

Sia dato $\mathbb{R}^3$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale (rispetto alle operazioni naturali)

Quali sono sottospazi?

a) $V_1=\{0,0,0\}$

b) $V_2=\{(x,y,z) \mid x-2y+z=1\}$

c) $V_3 \ \{(x,y,z) \mid x+y-3z=0, \ 2(x+y)=0\}$

$\boxed{b}$ $\bar{V} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in V_4$ $\lambda = 6 \in \mathbb{K}$

$6v = (3,3,3) \notin V_4$ non è chiuso per il prodotto per scalari perché è ristretto ad un certo intervallo di $\mathbb{R}$

$$H = \left\{ (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{K}^2 \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1,n} x_n = 0 \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{m,n} x_n = 0 \end{cases} \right\}$$

$(x_1 \dots x_n) + (y_1 \dots y_n)$

$\lambda(x_1 \dots x_n)$

$\downarrow$

c'è sempre una soluzione almeno

$\{\bar{0}\} = 0$

$\downarrow$

non è possibile che $H = \emptyset$

lineari omogenee → sì

lineari non omogenee → no → $a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \dots + a_n\bar{x}_n = f(x) \neq 0$

quindi $\{\bar{0}\}$ non sarebbe soluzione

OPERAZIONI CON I SOTTOSPAZI

W spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$U, V \in W$ sottospazio

① $U \cap V = \{x \in W \mid x \in U \wedge x \in V\}$ è sottospazio

$\cap W_j$ $j \in J$

② $U + V = \{\bar{u} + \bar{v} \mid \bar{u} \in U, \bar{v} \in V\}$

③ $U \oplus V$ sono sottospazi

$U \cap V = \emptyset$

$\cancel{U \oplus V}$ in generale non è un sottospazio

Esercizio

$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}$

$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$W_2 = \{(x_1, x_2\ x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}$

$W_1 \cap W_2$? $W_1 \cup W_2$?

① Proviamo con $V_{pari} = V_e$

$V_e \neq \emptyset$ $\quad 0 \in V_e$

$\forall f, g \in V_e \, , \; \forall a, c \in \mathbb{R}$

$(af + cg)(-x) = (af)(-x) + (cg)(-x) = a f(-x) + c g(-x) = a f(x) + c g(x) =$

$= (af + ag)(x)$

Quindi addizione e moltiplicazione sono interne al sotto spazio.

lo stesso per $V_{dispari} = V_o$

② $(V_e + V_o \in V$ provo $V \subseteq V_e + V_o)$

$\forall f \in V$

Definisco

- $f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \in V_e$

$f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \in V_o$

$f_e \in V_e$

$f_e(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = f_e(x)$

- $f_o \in V_o$

$f_o(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -f_o(x)$

$f_e + f_o(x)$

$\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$

③ $V_e \cap V_o = \emptyset$

$f \in V_e \cap V_o$

$f \in V_e \Rightarrow f(x) = f(-x)$ perché $V_e = \{f \in V \mid f(-x) = f(x)\}$

$f \in V_o \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ perché $V_o = \{f \in V \mid f(-x) = -f(x)\}$

$f(x) = -f(x)$

$\boxed{f(x) = 0} \Rightarrow$ funzione nulla

$W = L(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$

$L(\underbrace{a\bar{v}_1}_{w_1'}, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n) \quad a \neq 0$

se ho $W = L(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ $\quad \bar{u}_i \in W \Longrightarrow T \subseteq W$

$T = L(\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n)$ $\quad \underbrace{\bar{v}_i \in T}_{\text{se vero, allora } T \text{ e } W \text{ coincidono}} \Longrightarrow W \subseteq T$

Cioè si verifica che tutti elementi di un sistema stiano nell'altro spazio

RIGUARDA

$T \subseteq W$ ovvio ($\rightarrow$ perché $T = L(\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n)$ e $\bar{u}_i \in W \Longrightarrow T \subseteq W$)

$T \supseteq W ? \Longleftrightarrow \bar{v}_i \in T ?$

$\bar{v}_1{}' = a\bar{v}_1 \quad a \neq 0$ non posso far sparire vettore ($\cdot a = 0$) ma posso allungarlo o accorciarlo (a)

$\bar{v}_1 = a^{-1} \bar{v}_1{}' \longrightarrow \bar{v}_1 \in T$

$T = L(\underbrace{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}_{\bar{v}_1{}'}, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$

$T \overset{?}{=} W$

$T \subseteq W$ ovvero $W \subseteq T \rightarrow \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_1{}' \longrightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1{}'$ sto nello spazio vettoriale

$L(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 \; \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n)$

$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3 + \dots + a_3\bar{v}_u$ posso sostituire i primo vettore con una combinazione lineare, con coefficiente NON NULLO, di lui con gli altri vettori.

$\boxed{a_1 \neq 0}$

$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$

$\bar{v}_1 = (1, 1, -1, 2)$

$\bar{v}_2 = (0, 1, 5, 7)$

$\bar{v}_3 = (1, 0, -6, -5)$

$L(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ voglio fabbricarmi una base in quello spazio

RIGUARDA

Associo i vettori ad una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Costruzione di una matrice con righe linearmente indipendenti:

$$A_{4,5} = \begin{pmatrix} x & 3 & x & x & x \\ x & 0 & x & x & -7 \\ x & 0 & 5/2 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix}$$

TEOREMA RIGUARDA!

Sia A una qualunque matrice. Lo spazio generato dai suoi vettori riga ha la stessa dimensione dello spazio generato dai suoi vettori colonna. Questa dimensione si chiama RANGO DELLA MATRICE

$$\boxed{\begin{matrix}\dim R \leq \dim C \\ \dim C \leq \dim R\end{matrix}} = \boxed{\dim R = \dim C}$$

facile da dimostrare, basta invertire C e R nella dimostrazione

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_{\dots} \\ R_n \end{array}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = A$$

$$\dim L(R_1 \dots R_n) \overset{= r}{\leq} \mathbb{K}^n$$

$$\dim L(C_1 \dots C_n) \leq \mathbb{K}^n$$

Base dello spazio delle righe

$\overline{V_1} = (c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,n})$

$\overline{V_2} = (c_{2,1}, c_{2,2}, \dots, c_{2,n})$

$\overline{V_r} = (c_{r,1}, c_{r,2}, \dots, c_{r,n})$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & & \dots \\ c_{r,1} & \dots & c_{r,n} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{opportune combinazioni lineari}]{\text{da } C \text{ con}} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}$$

① Crea matrici

$$\underset{P}{\begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,r} \\ p_{2,1} & \dots & p_{2,r} \\ & \dots & \\ p_{m,1} & \dots & p_{m,r} \end{pmatrix}} \cdot \underset{C}{\begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \dots & c_{2,n} \\ & \dots & \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}} \xrightarrow{\cancel{A}} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = A$$

R1 si ottiene da combinazione lineare di $p_{1,1} \dots p_{1,r}$ e $c_{1,1} \dots c_{1,n}$

$$\boxed{A = P \cdot C}$$

fino ad adesso utilizzo solo il fatto che $\overline{V_1}, \overline{V_2} \dots \overline{V_n}$ sono un sistema di generatori

② Trasponi matrici

$${}^tA = {}^tC \cdot {}^tP$$

ogni $\overbrace{\text{riga di } {}^tA}^{= \text{colonna di } A}$ è combinazione lineare delle $\overbrace{\text{righe di } {}^tP}^{= \text{colonne di } P}$ usando come coefficienti i valori di ${}^tC$.

Le colonne di P sono sistema di generatori dello spazio delle colonne di A.

Le colonne di P sono r = dim R (spazio delle righe)

dim C (spazio delle colonne) ≤ R

COMBINAZIONI LINEARI, GENERATORI, BASE, DIMENSIONE

V, K

$\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n \in V$

$\bar{x} \in V$ è combinazione lineare di $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ se $\exists\ a_1 \dots a_m \in K \mid$
$\bar{X} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_m\bar{v}_n$

$L(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) \rightarrow$ insieme di tutte le combinazioni lineari

$W \subseteq V$ sottospazio

$\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ generatori se $W = L(\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$ cioè W è sottospazio se è uguale allo spazio creato dai generatori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$.

In questo caso W è FINITAMENTE GENERATO, cioè generato da un numero finito di vett

LINEARE DIPENDENZA e INDIPENDENZA

V, K

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V$

Linearmente indipendenti se $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_m\bar{v}_m = \bar{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

Linearmente dipendenti se non sono linearmente indipendenti, cioè se la combinazione lineare è pari al vettore nullo senza che $a_1 = a_2 = a_3 \dots = a_n =$

BASE e DIMENSIONE

V spazio vettoriale | $B = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m) \subseteq V$ finito e ordinato.

B è una Base se:

① B è un insieme di generatori

② B è libero ($= \bar{v}_1, \dots \bar{v}_n$ linearmente indipendenti)

$\dim V = m$

ESERCIZIO

$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 - x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$ eq. lineare omogenea

Trovare insieme di generatori

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ 2x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow (2x_3, -x_3, x_3)$$

Il generico vettore $\bar{w} \in W$

$\bar{w} = (2t, -t, t)\quad t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow t(2, -1, 1)$

cioè tutti i vettori sono multipli di $(2, -1, 1)$

cioè tutti i vettori sono combinazioni lineari di $(-2, -1, 1)$

$W = L(-2, -1, 1)$

cioè W è spazio generato da $(-2, 1, 1)$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=\mu \\ \alpha+3\beta=3\mu \\ \beta=\lambda+2\mu \\ 2\alpha=4\lambda+2\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=\lambda+2\mu \\ \alpha=2\lambda+\mu \\ 2\lambda+\cancel{\mu}+2\lambda+4\mu=\cancel{\mu} \\ 2\lambda+\mu+3\lambda+6\mu=3\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=\lambda+2\mu \\ \alpha=2\lambda+\mu \\ 4\lambda=-4\mu \\ 5\lambda=-4\mu \end{cases}$$

perché l'intersezion sia nullo, λ e μ devono essere nulli

Dimensione: 0 per l'intersezione ~~che~~ è nullo, 2 per V, W perché sono di 2 vettori.

intersezione nulla = unica condizione per rendere vere eq. del sistema. infatti la condizione $4\lambda=-4\mu$ o $5\lambda=-4$ implica che λ e μ assumano l'unico valore per cui un numero positivo possa essere uguale a uno negativo cioè $\mu=\lambda=0$!

⑤ $w=(0,1,1,4)$ e rifare esercizio precedente.

$W((0,1,1,4),(1,3,2,2))$

$V((1,1,0,2),(2,3,1,0))$

Trova base e dimensioni $V \cap W$

- V è base?

$\alpha(1,1,0,2)+\beta(2,3,1,0)=(0,0,0,0)$

$(\alpha,\alpha,0,2\alpha)+(2\beta,3\beta,\beta,0)=(0,0,0,0)$

$(\alpha+2\beta,\alpha+3\beta,\beta,2\alpha)=(0,0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ \alpha+3\beta=0 \\ \beta=0 \\ 2\alpha=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=0 \\ \alpha+2\beta=0 \checkmark \\ \alpha+3\beta=0 \checkmark \end{cases}$$

V è una base

- W è base?

$\lambda(0,1,1,4)+\mu(1,3,2,2)=(0,0,0,0)$

$(0,\lambda,\lambda,4\lambda)+(\mu,3\mu,2\mu,2\mu)=(0,0,0,0)$

$$\begin{cases} \mu=0 \\ \lambda+3\mu=0 \\ \lambda+2\mu=0 \\ 4\lambda+2\mu=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu=0 \\ \lambda=0 \\ \lambda+2\mu=0 \checkmark \\ 2\lambda+\mu=0 \checkmark \end{cases}$$

$\forall \bar{v} \in V: \bar{v}=(\alpha+2\beta, \alpha+3\beta, \beta, 2\alpha)$

$\forall \bar{w} \in W: \bar{w}=(\mu, \lambda+3\mu, \lambda+2\mu, 4\lambda+2\mu)$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=\mu \\ \alpha+3\beta=\lambda+3\mu \\ \beta=\lambda+2\mu \\ 2\alpha=4\lambda+2\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=\lambda+2\mu \\ \alpha=2\lambda+\mu \\ 2\lambda+\cancel{\mu}+2\lambda+4\mu=\cancel{\mu} \\ 2\lambda+\mu+3\lambda+6\mu=\lambda+3\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta=\lambda+2\mu \\ \alpha=2\lambda+\mu \\ -4\mu=-4\lambda \\ -4\lambda=-4\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu=\lambda \\ \beta=3\lambda \\ \alpha=3\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu=\lambda \\ \alpha=\beta=3\lambda=3\mu \end{cases}$$

$V \cap W \Rightarrow$ esistono ∞ coeff. α, β e μ, λ | $V \cap W$ = combinazione lineare, cioè che rendono vere le condizioni del sistem

quindi $V \cap W = \underbrace{t(x_1, x_2, x_3, x_4)} + \underbrace{s(x_1', x_2', x_3', x_4')}$

dimensione = 2

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

A, B invertibili

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \underset{A'}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & \boxed{0} & 1 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

trovare con quale prodotto posso ottenere questa stessa matrice A'

A' già ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & +1 \end{pmatrix}_{3,3} \cdot A_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A'_{3,4}$$

LEMMA DI STEINTIZ

Sia dim V = n, allora ogni insieme libero di V non può avere più di n elementi

Abbiamo una base di n elementi, considero l'insieme libero $\bar{y}_1, \dots \bar{y}_n \in V$

$m \leq n$?

$\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$ sono delle ennuple $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= a_{1,1}\bar{b}_1 + \dots + a_n\bar{b}_n \\ y_n &= a_{m,1}\bar{b}_1 + \dots + a_{m,n}\bar{b}_n \end{aligned} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Se ho un insieme libero e applico operazioni elementari come somma di righe o prodotto di righe allora l'insieme rimane libero quindi devo ridurre la matrice per righe.
La matrice ridotta <u>NON</u> ha righe nulle.
Allora il numero delle righe NON può SUPERARE il numero delle colonne, perciò $m \leq n$.

- se $(a_1,a_2)=(0,0)$

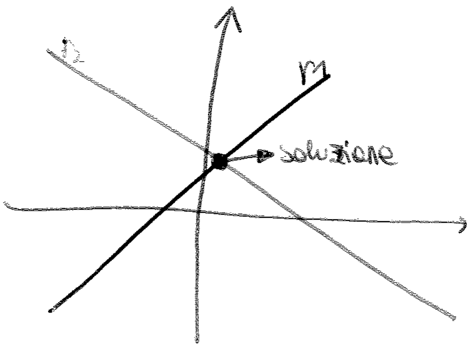
$$\begin{tikzcd} & 0x_1+0x_2=b \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ b\neq0 & & b=0 \end{tikzcd}$$

NON RISOLVIBILE

tutte le COPPIE sono SOLUZIONI
Dato che le soluzioni dipendono da 2 parametri, ci saranno ∞^2 soluzioni.

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2=b_1 \to R_1 \\ c_1x_1+c_2x_2=b_2 \to R_2 \end{cases}$$

le soluzioni sono sempre elementi di $\mathbb{R}^2$



- Le due rette possono anche essere coincidenti, in quel caso la seconda equazione del sistema è inutile → ∞^1 SOLUZIONI
- le due rette possono essere $\parallel$, quindi non avere punti in comune → NON RISOLVIBILE
- le due rette si intersecano in 1 punto solo → 1 SOLUZIONE

le soluzioni sono quindi o 1 o ∞ o nessuna!

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\dots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\dots+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \dots \\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+\dots+a_{m,n}x_n=b_m \end{cases}$$

trovare le soluzioni del sistema vuol dire trovare ennuple di numeri

↓

Una soluzione del sistema è n-upla $\bar{s}=(s_1,s_2\dots s_n)$ | se sostituisco con s_i le eguaglianze vengano verificate.

$$(A,B)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{A} & B \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_n \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases} \Longrightarrow (A,B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_m = B$

TEOREMA ROUCHÉ-CAPELLI

① Il sistema $AX = B$ è risolvibile se e solo se RANGO A = RANGO (A,B)

$\rho(A) \leq \rho(A,B)$

Il sistema sopra indicato è risolvibile se e solo se B si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $A_1 \dots A_n$.

Cioè se e solo se $B = L(A_1 \dots A_n)$. Questo equivale a dire che $L(A_1 \dots A_n) = L(A_1, \dots A_n, B)$. Questo avviene se e solo se i due spazi hanno la stessa dimensione, cioè $\underbrace{\text{colonne A}}_{\rho(A)}$ e $\underbrace{\text{colonne B}}_{\rho(A,B)}$

$\rho(A) = \rho(A,B)$

I due spazi hanno la stessa dimensione perché sono già uno dentro l'altro $\rho(A) \leq \rho(A,B)$.

② Sia $\rho(A) = \rho(A,B) = \rho$

Da quanti parametri dipende la soluzione generale?

Non conta numero delle equazioni del sistema, ma n° di equazioni che non sono conseguenza delle altre.

Il numero di parametri è n(= numero incognite) $- \underbrace{\rho(\text{rango})}$.

↓

rango = n° eq. che servono realmente.

Esercizio

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{Ⓐ}$ $\underbrace{}_{B}$

↓

rango di A = 2 ⟶ rango (A,B) ≥ A → = 2

↓

dimensione spazio Righe = dimensione spazio colonne

↓

ho 2 righe → non nulle
non multiple

↓

rango 2

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 - 2x_2 \\ \boxed{x_1} = 2x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 1 - 2x_2 \boxed{-x_1} = 1 - \cancel{2x_2} + \cancel{2x_2} + 1 = 2$$

sostituisco

Però x_3 è fisso e $=2$, perciò non posso prendere x_3 come parametro.
$(2x_2+1 \ , x_2 , 2)$

Se non mi piace x_2 come parametro, basta prendere come colonne indipendenti la 2ª e la 3ª e usare x_1 come parametro.

SISTEMA CON MATRICE RIDOTTA PER RIGHE = SISTEMA RIDOTTO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ x & \boxed{1} & x & x & x \\ x & \boxed{0} & x & 2 & x \\ x & \boxed{0} & -1 & 0 & x \end{array}\right)$$

$x_4 = 0$ → posso ricavare ~~x_3~~ in funzione di x_1

x_3 = compare con coefficiente non nullo.

l'incognita x_2 compare solo nella prima equazione

Ad ogni equazione compare un'incognita che non avevo sotto, questa incognita viene ricavata in funzione delle precedenti.

$0x_1 + 0x_2 ... + 0x_n = b$ < $b = 0$ sempre vero ; $b \neq 0$ non risolubile } posso supporre sistemi senza RIGHE NULLE

↳ rango matrice coefficienti ≠ rango matrice termini noti

in base a teorema Rouché-Capelli

Esercizio

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{-1} & 2 & 3 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$$

*no righe nulle
*nella 2ª riga compare x_1 che sotto non c'è
1ª riga compare x_2 che sotto non c'è

$$\begin{cases} x_1 - \boxed{x_2} + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2\boxed{x_1} + x_3 = 0 \\ -x_3 \quad x_4 = 1 \end{cases}$$

→ non c'è nelle righe sotto (ho sotto tutti zeri)

→ non c'è nella riga sotto

$x_4 = 1 + x_3$

$x_1 = \frac{1}{2} x_3$

$x_2 = x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 1$
$= \frac{1}{2}x_3 - 2x_3 - 3 - 3x_3 + 1$
$= \frac{11}{2} x_3 + 2$

SOLUZIONE: $\left(\frac{1}{2}x_3, \frac{11}{2}x_3 + 2, x_3, 1 + x_3\right)$

↓
verifica sostituendo valori nelle equazioni devo ottenere per ogni equazione il termine noto.

$R_n[t] = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] \,/\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{grado}}}{\partial} p(t) \leq n \}$

$R_2[t]$ grado ≤ 2

$\boxed{a+bt+ct^2} \longrightarrow$ forma di tutti i polinomi in $R_2[t]$

a, b, c sono combinazioni lineai di $\{1, t, t^2\}$,

e $\{1, t, t^2\}$ è BASE CANONICA di questo spazio, che ha dimensione 3.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] = 3 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} R_n[t] = n+1$

Esercizio

Consideriamo $\mathbb{R}_2[t]$

Quali dei seguenti sono lineamente indipendenti, generatori o basi dello spazio?

1) $A = \{1+t, 2t+t^2, 1+3t+t^2\}$

2) $B = \{1+2t, 3+t^2, 1+t+t^2\}$

3) $C = \{3+2t-t^2, 2-t+t^2\}$

4) $D = \{3-2t+t^2, 5+t, 2+3t-t^2, 2+4t^2\}$

1) Vediamo se è L.I

$a(1+t) + b(2t+t^2) + c(1+3t+t^2) = 0$

$a + at + 2bt + bt^2 + c + 3ct + ct^2 = 0$

$(a+c) + (a+2b+3c)t + (b+c)t^2 = 0$

$$\begin{cases} a+c=0 \longrightarrow a=-c \\ a+2b+3c=0 \xrightarrow{\qquad\qquad} -\cancel{c} - \cancel{2c} + \cancel{3c} = 0 \\ b+c=0 \longrightarrow b=-c \end{cases}$$

Infinite soluzioni $(-c, -c, c)$

AD ESEMPIO $c=1$

$-(1+t) - (2t+t^2) + (1+3t+t^2) = 0$

- Sono Lineamente dipendenti perchè $a,b,c \neq 0$.
- non sono generatori perchè per renderli una base dovrei toglierne almeno cho per renderli L.I, ma a quel punto la dimensione sarebbe insufficiente a generare lo spazio

2) $a(1+2t) + b(3+t^2) + c(1+t+t^2) = 0$

$a + 2at + 3b + bt^2 + c + ct + ct^2 = 0$

$(a+3b+c) + (2a+c)t + (b+c)t^2 = 0$

se fosse:

$$(a\,a\,0\,0)+(b\,0\,b\,0)+(0\,c\,0\,c)+(0\,0\,d\,d)=(0\,0\,0\,0)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ b+d=0 \\ d+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-b \\ c=b \\ d=-b \\ 0=0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow b=-1$

sono dipendenti

in **ALTERNATIVA**:

$\bar{v}_1+\bar{v}_4=(1111)$

$\bar{v}_2+\bar{v}_3=(1111)$

$\bar{v}_1+\bar{v}_4-\bar{v}_2-\bar{v}_3=0$

Risultato dimostra che vettori sono uguali al vettore nullo anche se coefficienti $\neq 0$.

Esercizio

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo

$\bar{u}(110)$

$\bar{v}(011)$

ⓐ $\bar{u}+\bar{v},\bar{u}-\bar{v}$ L.I

ⓑ $\bar{u},\bar{u}+\bar{v},\bar{u}-\bar{v}$ generano $\mathbb{R}^3$

ⓒ $\bar{u},\bar{v},\bar{w}=(1,2,1)$ L.I

ⓓ $\bar{u},\bar{v},\bar{w}'=(132)$ generano $\mathbb{R}^3$

ⓐ $\bar{u}+\bar{v}=(121)$

$\bar{u}-\bar{v}=(1,0,-1)$

non sono multipli quindi sono L.I

con 2 vettori a confronto basta guardare se sono multipli non serve vedere se sono fatti da somme differenze

ⓑ $\underset{V_1}{L(\bar{u},\bar{u}+\bar{v},\bar{u}-\bar{v})}=\underset{V_2}{L(\bar{u},\bar{v})}$

$V_1\subseteq V_2$

per dimostrarlo prendo $w_1\in V_1 \Longrightarrow w_1\in V_2$

$\bar{w}_1=a\bar{u}+b(\bar{u}+\bar{v})+c(\bar{u}-\bar{v})=$

$=a\bar{u}+b\bar{u}+b\bar{v}+c\bar{u}-c\bar{v}=$

$=(a+b+c)\bar{u}+(b-c)\bar{v}\in V_2$

$\bar{w}_2\in V_2\Longrightarrow V_2\in V_1$

$\bar{w}_2=a\bar{u}+b\bar{v}$

$(a+b-2)\bar{u}+(b+1)(\bar{u}+\bar{v})+(\bar{u}-\bar{v})=$ → metto coefficienti in $\bar{w}_2$ in modo di dimostrare che $\bar{w}_2$ che $\in V_2$ $\in$ anche a V_1

$=a\bar{u}+b\bar{u}\cancel{-2\bar{u}}+b\bar{u}+b\bar{v}\cancel{+\bar{u}}\cancel{+\bar{v}}\cancel{+\bar{u}}\cancel{-\bar{v}}=$

$=a\bar{u}+b\bar{u}=\bar{w}_2$

$$\begin{pmatrix} 2x+2y & 3x+y \\ 0 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{7}{4} \end{cases}$$

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA RIDOTTO

- non devono esserci righe nulle
- dall'ultima equazione ricavo un'incognita in funzione delle altre che compaiono
- Nella penultima compare <u>almeno</u> una nuova incognita non presente nell'equazione sottostante, che ricavo in funzione delle altre sostituendo i valori già trovati prima.
- continuo così fino alla prima equazione.

Da ogni equazione ricavo una variabile → variabili non ricavate = n_{TOT} variabili − $n_{equazioni}$

ogni variabile costituisce un vincolo (= nuova incognita) → ognuna è indipendente dalle altre, quindi sono tutte essenziali, nessuno è trascurabile.

SISTEMI EQUIVALENTI

Due sistemi sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.
(Riflessiva, simmetrica, transitiva) ?

Ogni soluzione del primo è soluzione del secondo

$\underset{(m,n)}{A} X = B \qquad P_{mm}$

$P(AX) = PB$

$(PA)X = PB$

- Sia S una soluzione del 1° sistema, cioè una n-pla per cui vale l'eguaglianza $AS=B$
- $P(AS) = PB$

  $(PA)S = PB$ cioè ogni soluzione del 1° sistema è anche soluzione del secondo

Ogni soluzione del secondo NON è soluzione del primo

?
P=matrice nulla

$(0A)x = 0B$

$0\textcircled{X} = 0$

↳ sono ∞ le soluzioni al secondo sistema → non è detto che tutte le ∞ soluzioni del secondo siano anche soluzioni del 1°

Aggiungiamo come ipotesi P INVERTIBILE

Questo mi permette di passare dal secondo sistema al primo moltiplicando per P^{-1}

$(PA)X = PB$

Le equazioni essenziali sono 2, quindi rango è 2.
Perciò bisogna sempre controllare il rango di quella ridotta e non di quella di partenza
infatti rango = n° tot. incognite − n° tot equazioni fondamentali = 4 − 2 = 2

Al contrario nella matrice fondamentale il risultato sarebbe stato errato in quanto n° tot. equazioni fondamentali = 3 non 2.

Esercizio

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2+h & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6+h^2 & 9+6h & 3-h \end{array}\right)$$

devo farli venire 0

E' risolubile il sistema al variare di h?

Come primo elemento non nullo prendo un numero, perchè il valore 2+h è elemento nullo per h = −2!
Se dovessi scegliere 2+h dovrei studiare i vari casi.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+h & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6+h^2 & 9+6h & 3-h \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2+h & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{-2h} & 0 & 0 \\ 0 & h^2-3h & 6h & -h \end{array}\right)$$

deve essere ≠ 0!
devo distinguere i vari casi

- $h = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$
un'unica equazione con tre incognite
$x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 1$
SOLUZIONE $(-2x_2 - 3x_3 + 1, x_2, x_3)$
2 parametri ⟶ ∞^2 soluzioni

- $h \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2+h & 3 & 1 \\ 0 & h^2-3h & \textcircled{6h} & -h \\ 0 & -2h & 0 & \boxed{0} \end{array}\right)$$

⟶ 2 elementi essenziali ottenuti invertendo ultime 2 righe

ottengo $\boxed{\text{unica soluzione!}}$

questo zero permette di trovare x_2 = numero e non in funzione di h ⊛

$$\begin{cases} x_1 + (2+h)x_2 + 3x_3 = 1 \\ (h^2-3h)x_2 + (6h)x_3 = -h \\ (-2h)x_2 = 0 \end{cases}$$

⊛ se ci fosse stato h al posto di zero avrei avuto ∞^1 soluzioni con h = parametro unico

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \\ (6h)x_3 = -h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -3x_3 + 1 \\ x_3 = -\frac{\cancel{h}}{} = -\frac{1}{} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -1/6 \\ x_1 = \frac{\cancel{3}1}{\cancel{6}2} + 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vogliamo quindi completare l'insieme [illegible] [illegible] a base in [illegible]

$$\underbrace{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_4}}_{\text{sono già L.I}}, \overset{}{\underset{(1000)}{\overline{e_1}}}, \underset{(0100)}{\overline{e_2}}, \underset{(0010)}{\overline{e_3}}, \overline{e_4} \to (0,0,0,1)$$

$\overline{e_1} = \alpha\overline{v_1} + \beta\overline{v_2} + \gamma\overline{v_4}$

$(1000) = \alpha(12{-}11) + \beta(2110) + \gamma(1100)$

$(1000) = (\alpha\ 2\alpha\ {-\alpha}\ \alpha) + (2\beta\ \beta\ \beta\ 0) + (\gamma\ \gamma\ 0\ 0)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 1 \ \times \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\gamma = \beta = \alpha$ → $\overline{e_1}$ non è linearmente dipendente da $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_4}$

$\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_4}, \overline{e_1}\}$ → mi fermo perché ho 4 vettori linearmente indipendenti → BASE

Esercizio

Rifai esercizio con: $\{\overline{v_2}, \overline{v_5}, \overline{v_1}, \overline{v_4}, \overline{v_3}\}$

L.I

- $\overline{v_2}$ si tiene
- $\overline{v_5}$ si tiene → non multiplo di $\overline{v_2}$
- $\overline{v_1}$ → $\alpha\overline{v_2} + \beta\overline{v_5} = v_1$

  $\alpha(2110) + \beta(4401) = (12{-}11)$

  $(2\alpha\ \alpha\ \alpha\ 0) + (4\beta\ 4\beta\ 0\ \beta) = (1\ 2\ {-1}\ 1)$

  $$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 1 \ \times \\ 4\beta + \alpha = 2 \ \times \\ \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

  $\overline{v_1}$ linearmente indipendente da $\overline{v_2}$ e $\overline{v_5}$ → lo tengo
- $\overline{v_4}$ → $\alpha\overline{v_2} + \beta\overline{v_5} + \gamma\overline{v_1} = \overline{v_4}$

  $(2\alpha\ \alpha\ \alpha\ 0) + (4\beta\ 4\beta\ 0\ \beta) + (\gamma\ 2\gamma\ {-\gamma}\ \gamma) = (11\ 00)$

  $$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\gamma \\ 2\gamma - 4\gamma + \gamma = 1 \ \times \end{cases}$$

  $\overline{v_4}$ linearmente indipendente → lo tengo
- $\overline{v_3} = \overline{0}$ → scarto.

$\{\overline{v_2}, \overline{v_5}, \overline{v_1}, \overline{v_4}\}$ → è una base perché i vettori essendo 4, generano tutto lo spazio $\mathbb{R}_4$

$V = L(\overline{v_1}, \overline{v_2}) \to$ Base perchè $\overline{v_1}$ non è proporzionale a v_2

Per farla diventare base di $\mathbb{R}^4$ abbiamo estenderla:

$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}$

- $\overline{e_1} = x\overline{v_1} + y\overline{v_2}$

$(1000) = x(0,1,-1,0) + y(2,0,-2,1)$

$(1000) = (0\ x\ -x\ 0) + (2y\ 0\ -2y\ y)$

$$\begin{cases} 2y = 1 \\ x = 0 \\ -2y - x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni $\to$ $\overline{e_1}$ non si scarta perchè non è combinazione lineare di $\overline{v_1}, \overline{v_2}$; quindi è L.I

- $\overline{e_2} = x\overline{v_1} + y\overline{v_2} + z\,\overline{e_1}$

$(0,1,0,0) = (0\ x\ -x\ 0) + (2y\ 0\ -2y\ y) + (z\ 0\ 0\ 0)$

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x = 1 \\ -x - 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

no soluzioni $\to$ $\overline{e_1}$ si tiene perchè L.I

$V = L(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{e_1}, \overline{e_2}) \to$ BASE

② W vettore generico

$$\begin{cases} x + ky + kt = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = -ky - kt \\ z = x \end{cases}$$

$\overline{w}$ generico di $W = (-ky - kt, y, -kt\ -kt, t)$

$\overline{w} = (-ky, y, -ky, 0) + (-kt, 0, -kt, t) = y(-k, \underset{\overline{w_1}}{\underset{\Downarrow}{\enclose{circle}{1}}}, -k, \boxed{0}) + t(-k, \underset{\overline{w_2}}{\underset{\Downarrow}{\enclose{circle}{0}}}, -k, \boxed{1})$

$W = L(\overline{w_1}, \overline{w_2}) \longrightarrow$ BASE $\forall k \in \mathbb{R}$ (perchè 0,1 non potranno mai essere proporzionali

$V + W = L(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{w_1}, w_2)$ $\to \overline{v_1} = (0,1,-1,0)$ $\to \overline{v_2} = (2,0,-2,1)$

$\overline{w_1} = \lambda(\overline{v_1}) + \mu(\overline{v_2})$

$(-k, 1, -k, 0) = \lambda(0,1,-1,0) + \mu(2,0,-2,1)$

$(-k\ 1\ -k\ 0) = (0\ \lambda\ -\lambda\ 0) + (2\mu\ 0\ -2\mu\ \mu)$

RANGO E RIDUZIONE DI MATRICI

$K \qquad K^{m,n} \ni A$

$R_1, \dots, R_m$ righe A → spazio delle righe è $L(R_1, \dots, R_m)$, cioè combinazione lineare delle righe $\leq K^n$

$C_1, \dots, C_n$ colonne A → spazio delle colonne è $L(C_1, \dots, C_n)$ sottospazio di K^m (cioè $\leq K^m$)

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{ sottospazio } \mathbb{R}^3$$

$$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$$

sottospazio $\mathbb{R}^4$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{spazio} \\ \text{righe A}}}{\mathrm{Dim}\, R_A} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{spazio} \\ \text{colonne A}}}{\dim C_A} = \underset{\text{rank A}}{\textcircled{p}}$$

$A \in K^{m,n}$ è RIDOTTA per righe se ∀ riga di A non nulla ha un elemento $\neq 0$ sotto il quale ci sono solo zeri. Questo elemento è detto SPECIALE

Esempio

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1 \quad 2} \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{4} \end{pmatrix} \rightarrow \text{sono gli unici elementi } \neq 0 \text{ ma non sono speciali}$$

RIDOTTA — NON RIDOTTA

$$\boxed{R_i \to R_i + aR_j}$$

$a \in K$ → per passare da una matrice A ad una matrice ridotta A'

① Scegliamo un elemento $\neq 0$ nella prima riga NON NULLA di A

② Annullare tramite $R_i \to R_i + aR_j$ gli elementi sottostanti

③ Ripeto sulle altre righe non nulle.